

Stefan problems in an incompressible viscous fluid flow

(非圧縮性粘性流体に対する Stefan 問題)

日 下 芳 朗

論 文 の 内 容 の 要 旨

固/液相転移現象を熱伝導の観点から定式化して得られる自由境界問題は、数理解析学の分野では Stefan問題と呼ばれている。液相の流れを考慮しない場合、この問題は熱方程式に対する自由境界問題となり、Stefanの先駆的研究(1889)以来、数理解析の対象として研究が続いている。一方、液相の流れを考慮した問題に対しては、1980年以降、主に弱解の枠組みの中で議論されてきたが、古典解に対しては、Bazaliĭと Degtyarev によって1相問題に対する解が時間局所的に存在すること(1987)のみが知られている。しかしながら、彼らの定式化には、

1. 粘性散逸の影響、
2. 相が変化する際の密度の変化、

が考慮されていない。そこで我々は、上記の影響を考慮に入れた次の問題を提起した。即ち、液相の状態は、Navier-Stokes方程式、散逸項及び輸送項を伴う熱方程式によって記述され、固相は、熱方程式によって記述されているとし、固液境界上では、界面をはさんだ領域での質量、運動量、およびエネルギー保存則から得られる条件を用いる。但しここでは、運動量保存則の法線成分の代わりに、界面において温度は融点であるという条件、或いは、過冷却状態を考慮したGibbs-Thompsonの条件を用いる。

特に、界面において密度が不連続に変化するという仮定のもとで定式化された問題に対しては、現在まで数学的議論がなされておらず、新しい問題である。本論文では、この問題に対する古典解の存在と一意性を証明する。

第1章では、上記の問題の定式化と、必要な関数空間を導入する。

第2章では、液相のみを対象にした1相問題に対する古典解の時間局所存在を示す。証明のプロセスを、線形化問題の可解性と、それに基づく非線形問題の可解性に分ける。先ず一般領域の線形化問題の解を、線形化初期値問題の解と、半空間における初期値-境界値問題の解の貼り合わせにより求める。半空間における初期値-境界値問題の解は、時間に関するLaplace変換と接ベクトルに関するFourier変換を施して得られる法線ベクトル方向の常微分方程式系の解の逆Fourier-Laplace変換によって求まる。又、初期値問題の解は、全空間における基本解によって表現される。結局、一般領域の線形化問題の解は、Green関数を用いて表現され、その表現を基にして解の評価を求める。次に、この評価に基づき、Schauderの不動点定理を用いて、非線形問題に対する解の存在を証明する。

第3章では、固相を含めた2相問題((P) と表記する)に対する古典解の時間局所存在と一意性を示す。1相問題の場合と同様に、線形化問題をFourier-Laplace変換して得られた問題の解の表現を先ず求める。しかし2相問題に対しては、合成積の分数冪のノルムによる評価に関するGolovkinとSolonnikovによる結果を用いて、Fourier-Laplace変換形のままでHölder評価を求める。これら線形化問題に対する評価を用いて、非線形問題の可解性を論じるのであるが、先ず、非線形項を精密に評価することによって非線形項がcontractiveとなる十分条件を求める。更にこの条件のもとで縮小写像の定理を用いて、解の一意存在を証明する。このようにして、解は、データと同じHölder指数を持つHölder空間で構成される。これは、我々の問題に対してだけでなく、熱方程式のみから成る多次元Stefan問題に対しても、新しい結果である。

第4章では、Gibbs-Thompsonの条件を伴う固相を含めた2相問題((P_σ) と表記する)に対する古典解の時間局所存在と一意性を示す。この問題に対しても、第3章と同様の技巧を用いて線形化問題の解の評価を求めるのであるが、Gibbs-Thompsonの条件を用いると、平均曲率の効果によって自由境界の滑らかさが、より高いオーダーで求まる。そのため非線形項のcontractivenessは第3章で得られた条件よりも弱い条件のもとで成り立つ。この条件のもとで縮小写像の定理を用いて非線形問題の一意可解性を示す。

第5章では、第3章、第4章の問題の関連性を調べる。即ち、問題(P_σ)の解は、表面張力係数 σ を0に近づけたとき、問題(P)の解に収束することを示す。証明は、次の手順で行われる。先ず、第4章で用いられた関数空間よりも広い適当な関数空間において問題(P_σ)の解の σ に関する一様評価を求める。その評価を基にして、解の存在時間が σ に依らず取れることを示す。次に、問題(P_σ)の解の列が、 $\sigma \rightarrow 0$ としたとき、Cauchy列をなすことを示す。

以上