Algorithmic Methods for Three-Dimensional Topology

(三次元トポロジーにおける構成的手法)

堤　幸博

論文の内容の要旨

結び目とは、3次元多様体Mに埋め込まれた単純閉曲線Kを意味する。結び目の外部$E(K)=M-\mathrm{int}N(K)$とソリッドトーラス$D^2\times S^1$をそれらの境界上の同相写像$f:\partial(D^2\times S^1)\to\partial N(K)$で同一視することにより新たな3次元多様体$\chi(M;K)$が得られるが、この操作をデーン手術という。また、結び目Kのザイフェルト膜とは、M内に埋め込まれたコンパクトで向き付け可能かつ連結な2次元多様体Sで、$S\cap K=\partial S=K$を満たすものをいう。

全ての閉3次元多様体は、3次元球面S^3にデーン手術を有限回施すことにより得られることは良く知られている。主論文の主な目的は、S^3内の結び目からデーン手術一回で得られる3次元多様体の特殊性およびS^3内の結び目と一般の3次元多様体内の結び目の性質の違いを調べることである。以下、概要を幾何的な立場と代数的な立場から述べる。

幾何的な3次元多様体の考察として本質的部分多様体を用いる。3次元多様体に適切に埋め込まれた部分多様体が本質的とは、包含写像が誘導する基本群の順同型が単射であることをいう。3次元多様体Mのハーケン数とは、M内に埋め込まれる互いに交わらない非平行な本質的曲面の枚数の上限であり、コンパクトな3次元多様体に関してはハーケンの有限性定理として有限であることが知られている。従って、結び目の互いに交わらない非平行な非可縮ザイフェルト膜の枚数には上限がある。このハーケン数に関して、S^3内の双曲的結び目が張る互いに交わらない種数1のザイフェルト膜は、平行を除いて高々7枚であるという結果が得られた。現在のそのようなザイフェルト膜を4枚張る双曲的結び目が知られているが、この普遍的な上限の存在は、デーン手術により双曲的結び目から多くの本質的トーラスを持つ多様体を得る障害の一つ考えられる。また、この結果は一般の3次元多様体M内の双曲的結び目に関してMのハーケン数を用いて記述することが可能であるが、S^3内の結び目の特殊性を現している結果である。

結び目Kの代数的不変量の代表例としてコンウェイ多項式$\nabla_K(z)$が良く知られているが、それは結び目のザイフェルト膜を用いて解釈される。また、ホモロジー球面H_1からホモロジー球面H_2を得る2つの結び目$K_1, K_2\subset H_1$に関し、キャッソンの公式としてH_2とH_1のキャッソン不変量の差に関するK_1とK_2のコンウェイ多項式間の制限が知られている。主論文において、異なるコンウェイ多項式を持つ結び目から同じ多様体を得るデーン手術の構成的な考察を行い、いくつかの問題提起を行った。

以上