Spectral Theory and Prime Geodesic Theorm of Hyperbolic Spaces

(双曲空間のスペクトル理論と素測地線定理)

中 筋 麻 貴

論 文 の 内 容 の 要 旨

素数の分布は、数字において古くからの問題である。Riemann多様体上の素測地線は素数の類似と考えられているため、素測地線の分布は、素数の分布についての検討の可能性を含んでいる。一般に素測地線の分布定理は「素測地線定理」と呼ばれ、以下のように記述される。

定理.　基本群を Γ とするRiemann多様体上の素な閉測地線 P に対し、その長さを $l(P)$ とおき、$e^{l(P)} \leq \chi$ を満たす P の個数を $\pi_\Gamma(\chi)$ とおく。多様体が曲率－1の定曲率、体積有限、次元が $(d+1)$ の時、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi_\Gamma(x)}{\mathrm{li}(x^d)}=1$$

が成立する。ここで $\mathrm{li}(x):=\int_2^x\frac{dt}{\log t}$ とする。

関数 $\pi_\Gamma(\chi)$ の精密な評価式を得る事が本研究の目的であり、素測地線定理の剰余項 $\pi_\Gamma(\chi)-\mathrm{li}(\chi^d)$ の評価が問題となる。この剰余項に関し、これまでに知られていたほとんどの評価は上からのものであった。下からの評価は、Hejhalによる $PSL(2,\mathrm{R})$ のある種の離散部分群 Γ に対する結果が唯一のものであった。Hejhalの結果はRiemann多様体として2次元双曲多様体を扱ったものであり、Γ のセルバーグゼータ関数の零点に関する数論的な条件を仮定していた。

本論文では、一般の双曲多様体における下からの評価を考察した。まず、 Hejhalが用いた数論的な仮定に対し、双曲多様体上のLaplace-Beltrami作用素のスペクトルの寄与という観点から問題をとらえなおし、Hejhalの結果を以下の2通りの場合に拡張した。

(1)スペクトルに関する一切の条件を付けない場合

(2)スペクトルに関する条件(ただし、Hejhalの仮定より緩い)を付ける場合

さらに、これらの結果を、(1)においては、3次元($d=2$)の場合、(2)においては、一般の($d+1$)次元の場合に拡張した。

以下に本論文の主定理を述べる。

定理1.[Theorem 1.4.1, Theorem1.4.3](2次元素測地線定理、3次元素測地線定理)
$d=1$ に対し、$\Gamma\subset PSL(2,\mathrm{R})$ を商体積有限の離散部分群とする。この時、

$$\pi_\Gamma(x) = \mathrm{li}\,x^d + \Omega(x^{\frac{d}{2}-\varepsilon}), \qquad (x \to \infty)$$

が成立する。ここで ε は任意の正数とする。また、$d=2$の時、$\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{C})$を商体積有限の離散部分群とすると、同様の結果が成立する。

定理 2.[Theorem 1.4.5]($(d+1)$次元素測地線定理)

一般の正の整数dに対し、$\Gamma \subset \mathrm{SO}_e(d+1, 1)$を商体積有限の離散部分群とする。$\Gamma$に関するワイルの法則において、離散スペクトルの寄与が連続スペクトルの寄与より大きい時、

$$\pi_\Gamma(x) = \mathrm{li}(x^d) + \Omega_\pm\left(\frac{x^{\frac{d}{2}}(\log\log x)^{\frac{1}{d+1}}}{\log x}\right) \qquad (x \to \infty)$$

が成立する。

剰余項のχの冪は$d/2$になると予想されており、この意味において定理1、2は最良の結果と思われる。

本論文は次のように構成する：第1章において、素測地線定理、スペクトル理論を説明し、主定理を述べる。2次元の素測地線定理の結果を第2章で述べる。3次元素測地線定理について、第3章で定理1の場合、第4章で定理2の場合を考察する。第5章で高次元の場合の定理を証明する。

以上