The metrical theory of non-archimedean diophantine approximations
(非アルキメデス的ディオファンタス近似の測度論的研究)

井　上　賀　絵

論　文　の　内　容　の　要　旨

本論文では古典的には実数体上で研究されているディオファンタス近似問題を、非アルキメデス数体上で取り扱っている。特に形式的ベキ級数の作る体に対して、測度論の観点から研究する。全体は5章からなる。第2、3章ではディオファンタス不等式の解の個数に関する議論を行い、第4、5章では同次近似を与える多次元連分数展開の収束の速さについて議論している。

第1章では、その背景となる実数体上におけるKinchine、Daffine-Schaeffer達による結果を紹介している。また、形式的ベキ級数に関する必要な定義を与え第2章以下の主要な結果を概説している。

第2章では、形式的ローランベキ級数fに対して$|f-\frac{P}{Q}|<\frac{\psi(Q)}{|Q|}$が無限個の解$\frac{P}{Q}$を持つか否かという問題に焦点を当て、$\psi$が多項式$Q$の次数のみに依存する場合とそうでない一般的な場合それぞれに関して議論している。次数のみに依存する場合には、ほとんどすべてのfに対して解が無限個存在するための必要十分条件を、ψの和の収束性に関する条件で与えている。一方、一般的な場合には、まず次の結果を得ている。

Gallagher型定理　任意のψに対して、

$$|f-\frac{P}{Q}|<\frac{\psi(Q)}{|Q|}$$

はa.e.fに対して無限個の解$\frac{P}{Q}$を持つか、a.e.fに対して高々有限個の解しか持たないかのどちらかである。

さらにこれを用いて、a.e.fに対して無限個の解を持つ為の次の十分条件を得ている。

Duffin-Schaeffer型条件　ψは$\{q^{-n}:n\geq 0\}\cup\{0\}$－値関数で$\Sigma_{n=1}^{\infty}\Sigma_{\substack{\deg Q=n\\ Q:\text{ monic}}}\psi(Q)=\infty$を満たすとする。このとき、ある定数$C$に対して$\Sigma_{\deg Q\leq n}\psi(Q)<C\Sigma_{\substack{\deg Q\leq n\\ Q:\text{ monic}}}\psi(Q)\frac{\Phi(Q)}{|Q|}$を満たす無限個の正整数$n$が存在する。

第3章ではこの問題を多次元の同次近似問題にまで拡張するが、ここでもやはり解が無限個存在するためのDuffin-Schaeffer型の十分条件を得ている。

第4章では、多次元連分数展開の一つであるヤコビ・ペロン法を用いて近似分数を求める。その展開係数を導く写像がエルゴード的である事を用いて、この近似分数列の収束の速さについて次の定理を得ている。

定理　任意の$\nu\geq 1$に対して、

$$|A_0^{(\nu)}|\left|f_i - \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}\right| \ll \frac{1}{|A_0^{(\nu)}|^{\frac{1}{r}\left(\frac{\gamma}{p}-\varepsilon\right)}} \qquad \forall\varepsilon > 0$$

がm^r-a.e. $(f_1, \ldots f_r)$に対して成立する。ただし、$\gamma = \frac{q^{r2}}{q^{r2}-1}$、$p = \frac{q}{q-1}$ である。

第5章では、ヤコビ・ペロン法を修正した展開法につい議論をする。実際、その展開係数を導く写像がエルゴード的である事が示し、さらにその収束の速さに関して同様な定理を得ている。

以上