

Coriolis 力と電磁力が作用する熱流体の 有限要素法解析

2003 年度

鄭 忠孝

目次

第1章	序論	1
1.1	有限要素法	1
1.2	熱対流	2
1.3	電磁流体力学の応用	3
1.4	本論文の目的および構成	4
	1章の参考文献	6
第2章	電磁熱流体力学の基礎方程式の離散化	8
2.1	2章の緒言	8
2.2	基礎方程式	10
2.2.1	運動の方程式	11
2.2.2	エネルギーの方程式	11
2.2.3	マクスウェルの方程式	11
2.2.4	構成方程式	12
2.2.5	誘導方程式	12
2.3	GSMAC 有限要素法のアルゴリズム	13
2.3.1	NS 方程式の表示方法	14
2.3.2	1次精度時間進行法(準陽解法)	15
2.3.3	ポアソン方程式の解法	18
2.4	係数行列の解析的表示	23
2.4.1	要素平均と節点平均	23
2.4.2	離散化ナブラ演算子	24
2.4.3	係数行列の解析的表示	25
2.5	有限要素法による定式化	26
2.5.1	運動方程式の安定化法	27
2.5.2	エネルギー方程式の安定化法	27
2.5.3	誘導方程式の安定化法	28
2.6	その他の問題	29
2.6.1	Ohmの法則と誘導電流	29

2.6.2	Maxwell の方程式の Helmholtz 分解	31
2.6.3	高 Rayleigh 数の自然対流	31
2.6.4	表面張力と熱放射	32
2.7	2 章の結言	33
	2 章の参考文献	34
	2 章の表および図	35
第3章	同心二重球における自然対流の数値解析	53
3.1	3 章の緒言	53
3.2	基礎方程式	54
3.3	Boussinesq 近似	55
3.4	無次元化	56
3.5	基礎方程式の離散化	57
3.6	数値解析モデル	59
3.7	計算結果および検討	60
3.7.1	$Ra=7.1 \times 10^5$, $Ra=7.1 \times 10^6$ の流れについて	60
3.7.2	半径比 0.86, $Ra=7.1 \times 10^6$ の流れについて	61
3.7.3	半径比 3, $Ra=7.1 \times 10^6$ の流れについて	63
3.7.4	半径比 18, $Ra=7.1 \times 10^6$ の流れについて	65
3.8	3 章の結言	66
	3 章の参考文献	68
	3 章の表および図	69
第4章	Coriolis 力と Lorentz 力が作用する熱流体の解析	99
4.1	4 章の緒言	99
4.2	基礎方程式	100
4.3	離散化	102
4.4	解析モデル	102
4.5	解析結果と検討	103
4.5.1	磁場下における水銀の自然対流	103
4.5.2	Coriolis 力場における水銀の対流	105
4.5.3	Coriolis 力と Lorentz 力が作用する水銀対流	106
4.6	4 章の結言	107
	4 章の参考文献	109
	4 章の表および図	110

第5章 Lorentz力の応用	124
5.1 5章の緒言	124
5.2 基礎方程式	125
5.3 数値解析手法	127
5.4 Cusp磁場による解析	128
5.4.1 数値解析モデル	128
5.4.2 計算結果および検討	129
5.5 A-法による解析	130
5.5.1 数値解析モデル	130
5.5.2 計算結果および検討	131
5.6 5章の結言	132
5章の参考文献	133
5章の表および図	135
第6章 総括	144
謝辞	146
公刊論文目録および口頭発表目録	147

第1章 序論

1.1 有限要素法

近年，電子計算機の発達，特に大型のスーパーコンピュータから超並列計算機，ワークステーションやパソコンまで，その処理能力の増大と性能の向上は目覚ましい。これにより流れの数値シミュレーションもより身近なものになりつつある。現在，この分野の数値解析の手法として，差分法(FDM)，有限要素法(FEM)，有限体積法(FVM)，そして境界要素法(BEM)が知られている。差分法はシミュレーション技術として最も確立された手法であるが，汎用性が乏しく複雑な形状の実用的な計算にはケース・バイ・ケースで考えなければならない。一方，有限要素法は多くの実際的な問題に適用できる汎用性をもっている。しかし，要素数の増大とともに記憶容量と計算時間を多く必要とし，一般的には経済的な計算手法とはいえない。有限体積法は差分法の長所と有限要素法の汎用性をもつ手法で現在多くの試みがなされつつある。境界要素法はポテンシャル問題に適しているものの，高レイノルズ数の粘性流れの解析には精度的に満足できるものではない。しかし，うず法はこの問題に適していると言える。したがって，現在，汎用的(Universal)・高精度(Accurate)・経済的(Economy)な高速計算技術の確立が望まれている。これらの3つの条件をある程度満足している数値解析手法がGSMAC有限要素法である。GSMAC有限要素法^(1.1)は差分法分野で開発されたMAC法^(1.2)，SMAC法^(1.3)，そしてHSMAC法^(1.4)の技術を有限要素法へ応用したもので，Generalized SMAC法の省略形である。

有限要素法は，連続な量(速度，温度，電流密度)を，要素と呼ばれる有限個の領域で定義された部分的に連続な関数群が作る離散化モデルとして近似する，という考え方に基礎を置いている^(1.5)。それには，一般的に多項式の要素関数が用いられており，多項式の次数は要素節点における連続量の数に依存する。GSMAC有限要素法などの一般的な流体解析手法には，2次元では要素節点数が4点である四角形要素，3次元では要素節点数が8点である六面体要素が用いられており，これはいずれも双1次要素である。

1.2 熱対流

二枚の平行平板間に閉じ込めた流体を下面で加熱し上面で冷却すると、その温度差がある臨界値を超えると、対流が発生する。この対流は Rayleigh-Benard 対流^(1.6)と呼ばれている。この対流の特徴として、レイリー数の増加に伴い対流が発達し、複雑な三次元構造を示すことが挙げられる。溶鉱炉内にも Rayleigh-Benard 対流が見られるが、特に溶鉄のような低 Prandtl 数流体^(1.7)は時間依存性のある流れになる。この流れが圧力場、温度場に乱れを生じさせ、良質な結晶を有する金属生成の妨げとなっている。この流れの制御方法として、直流磁場を印加し Lorentz 力により対流を制御する方法がある。この方法により、時間依存性のある流れは層流になる。また、三次元構造が二次元ロール構造^(1.8, 1.9)に変化するため、安定な流れを得ることができる。

一般に自然対流の数値解析モデルとして研究が行われているのは、立方体 Cavity・同心二重円管・同心二重球などが挙げられ、同時に実験による研究結果も報告されている^(1.10)。このうち同心二重球内の自然対流解析は、実験においてはほとんどが Rayleigh 数が 10^6 までの流れを対象とし、また数値解析においては、 $Ra=10^5$ 以下の場合における差分法による解析結果が報告されている。それらの解析結果は、いずれも実験結果とよく一致しており、 $Ra=10^5$ 以下の流れについては速度場および温度場の様子がほぼ明らかにされている^(1.11)。しかしながら、それ以上の Ra 数における数値解析例は少ない^(1.12)。これは $Ra=10^6$ 以上の二重球内自然対流解析において、対流項の非線形性により数値的な発散や振動が生じ解析をしばしば困難にするためである。また、このような高 Ra 数の流れにおける精度のよい実験も非常に困難を極め、したがってより一層多用な数値解析による、高 Ra 数における二重球内の自然対流解析が必要不可欠となる。

二重球内の球殻間で Coriolis 力および熱的不安定より生じる対流を回転球殻対流^(1.13)という。この対流は、太陽および惑星大気、地球上の大気や外核内の流体運動といった天文学あるいは地球物理学的な応用として古くから研究されてきている。この問題を数理的に定式化するには、ブシネスク近似や非弾性近似といった近似を用いる方程式系、内部熱源分布や温度分布などの基本場、あるいは境界条件などを考察する系の選択余地がいくつかある。しかしながら実際には、数学的な取り扱いが比較的簡単な一様熱源により駆動されるブシネスク対流^(1.14)を漸近的に取り扱う以外は主に数値解析に頼るしかなく、最近になってようやく広いパラメータ範囲にわたる対流の大域的

な振る舞いが調べられるようになってきた。

1.3 電磁流体力学の応用

電気伝導性のある流体が磁場の中で運動すると、流体の中に電位差が発生して電流が流れる。一方、流体中を流れる電流によって新しく磁場が作られる。また、その電磁場によって運動状態に変化を生じるといような流体の運動と電磁場との相互作用を研究する学問が電磁流体力学(magnetohydrodynamics, MHD)である。

MHDの応用の一つがシリコン(Si)の単結晶の生成である。半導体素子の原料であるシリコン(Si)の単結晶の生成には一般にCZ(Czochralski)法が用いられており、近年に生成されたシリコンの単結晶の実に9割以上にCZ法が用いられている^(1.15)。ところが、単結晶の大口径化にともない、対流が回転軸近傍で乱れやすくなり、また温度の非定常的な変動および非軸対称な分布による結晶縞などが形成されてしまう^(1.16, 1.17)。これらは、単結晶の品質を著しく低下させるため、CZ法において重大な欠点となっている。そこで、シリコン融液が導電性を示すことに着目し、CZ法に磁場を印加することによりシリコン融液を直接制御する磁場印加CZ法(Magnetic-field-applied CZ法, MCZ法)が登場した^(1.18, 1.19)。その一種類であるCusp磁場^(1.20, 1.21, 1.22)は、二つの向かい合う円形コイルに、お互いに逆方向の電流を流したときにできる磁場配位のことである。これを用いて従来のように実験計測に頼る手法では、磁場印加CZ法の場合、高温かつ磁場下での操作となるため実験は非常に困難であるといえる^(1.23)。一方、数値解析は条件を変えるたびに装置を変更するということがなく、設計や製造過程の改良などにおいてコスト面や時間面で経済的であり、この問題を解決する一つ的手段として、また最適な磁場を決定する上で有効と考えられる^(1.24)。現在に至るまでCZ法に関する論文は数多くあるが、その多くは結晶の生成法に関する実験の論文であり、数値解析を扱ったものは数少ない。その中でDepretら^(1.25)は、擬似定常の軸対称モデルでの解析を行っている。国内では、大島ら^(1.26)が磁場を印加した3次元モデルに一点求積法(係数行列を積分する際にGaussの1点積分を行う方法)を用いて解析している。また、渡辺ら^(1.21)により、Cusp磁場下のMCZ法におけるシリコン融液の実験計測が行われている。

また、MHDは電磁流体の攪拌(M-EMS)に応用されている。その応用の基本設計概念は、電流による誘導加熱により金属を熱損失を低く抑えつつ溶解さ

せること、および電磁力によって溶融金属など電磁流体の流動を制御することである。従来は、攪拌棒に拠っていた作業を電磁力に置き換えることにより、攪拌棒の耐熱強度を考慮せず、また一様一定の攪拌力を提供できる。誘導加熱による金属の溶融問題は「るつぼ」を直接加熱する必要がないことから、一般にコールド・クルーシブル^(1.27, 1.28)と呼ばれている。コールド・クルーシブルでは炉体の不純物の混入を防ぎ高純度金属を得るために溶湯を浮遊させたまま溶解させる。「るつぼ」内で金属を浮揚・溶解させる電磁浮揚装置は実験室レベルでは開発されている。しかし、膨大な開発コストや導入後のシステムの維持に対する懸念から実用化されていないのが現状である。現在、数値シミュレーションは、製品開発のコスト削減および実験では困難な諸現象の解明に期待され工学的に重要になってきている。なかでも、溶融金属への応用が期待を集めている。印加磁場下の電磁流体を解析することは近年では特にアルミニウムの電磁鑄造(EMC)、コールド・クルーシブル問題、復層鑄造などに応用され、この種の研究はますます発展してゆくと思われる。電磁流体に電磁力を作用させると非接触で流動の制御ができ、金属材料の鑄造過程にこの効果を利用して鑄片の形状を制御することは品質および生産性の面で重要である^(1.29)。非接触溶融金属は自由表面を有し、自由表面と電磁流体の特性を同時に考慮する必要がある。GarnierとMoreau^(1.30)は交流磁場印加によって生じる電磁圧をもちいて表面波動を制御できることを理論的に示した。また、谷口ら^(1.31)およびMeyerら^(1.32)は誘導炉内の液体金属の流れを差分法により解析し、Kawaseら^(1.33)は有限要素法で液体金属の表面形状を決定している。

1.4 本論文の目的および構成

第1章は序論であり、本研究を行う背景および数値解析の応用を論じる。

第2章では、非圧縮粘性流体の広範囲の問題をGSMAC有限要素法の観点から取り扱っている。すなわち、流体と熱の相互作用および流体と電磁場の相互作用や非ニュートン流体の流動もその解析目標としている。つぎに、GSMAC有限要素法で用いられている基礎方程式^(1.34)を示す。GAMAC有限要素法のアルゴリズム^(1.35)基礎はSMAC法やHSMAC法の中にある。しかし、その概念はかなり拡張されている。この節では、まず熱効果や電磁効果がない場合の非圧縮ナビエ - ストークス(NS)方程式の解法についてのみ触れる。非定常非圧縮NS方程式を解くとき、その要点はつぎの3点

(i) NS 方程式の表示方法

(ii) 時間進行のアルゴリズム

(iii) 圧力に関するポアソン方程式の解法

にまとめられる。これらについて論じる。

次に、離散化ナブラ演算子を用いた係数行列の解析的表示を示す。移流拡散方程式に現れる係数行列には質量行列，移流行列，拡散行列，そして BTD 行列がある。これらの係数行列の解析的表示を順次求める。そして，有限要素法によるスキームの安定化手法を論じる。

最後に，電磁熱流体の解析において，解決しなければならない問題点を指摘する。

第3章では，二重球内自然対流の高 Ra 数の場合に対応するためNS方程式とエネルギー方程式にBTD(Balancing Tensor Diffusivity)^(1.36)を用い，GSMAC有限要素法^(1.37)により数値解析し，流れ場および温度場の発達過程を明らかにする。

第4章では，誘導磁場を考慮(磁気レイノルズ数 $Rem \ll 1$)し，速度場・電磁場・温度場の相互関係を考察する。特に，誘導磁場が印加磁場を強める作用をダイナモ作用という。このダイナモ作用では強い電流が流れるためジュール熱は発熱の熱輸送に寄与する。このような誘導磁場の働きを考察するため，電磁場解析にB法を導入する。また，速度場にCoriolis力^(1.38)を作用し，流れ場と電磁場の相互関係を考察する。

第5章では，Cusp 磁場を用いて単結晶の生成の解析を行なう。その際，Cusp 磁場が溶液の流動および温度分布に与える影響を考察し，単結晶を作る最適な磁場を決定する。

そして，低周波交流(60Hz)をコイルに流した，るつぼ型装置内の熔融金属に対して数値解析を行なう。その際に，流れ場にはALE法^(1.39)，そして電磁場にはA-法^(1.40)を用いる。解析によって自由表面形状および内部流動の予測を行なう。

第6章は総括であり，本論文で得られた知見を述べる。

1章の参考文献

- (1.1) 棚橋・斎藤, 京都大学数理解析研究所講究録 548, 大型の線形計算に関するアルゴリズムの研究, (1985), 122.
- (1.2) Harlow, F.H. and Welch, J.E., Phys. of Fluids, 8-12, (1965), 2182.
- (1.3) Amsden, A.A. and Harlow, F.H., J. Comp. Phys., 6, (1970), 322.
- (1.4) Hirt, C.W., et al., Los Alamos Scientific Lab. Rep. LA-5852, (1975).
- (1.5) 川井, 応用有限要素法解析, 第3章, (1978), 丸善, 20.
- (1.6) Velarde, M.G., et al, Reviews of Modern Physics, 49-3, (1997), 581.
- (1.7) Krishnamurti, R., J. Fluid Mech., 42-2, (1970), 309.
- (1.8) Busse, F.H., J. Mathematics Phys., 46, (1967), 140.
- (1.9) Clever, R.M. and Busse, F.H., J. Fluid Mech., 65-4, (1974), 625.
- (1.10) Yin, S.H., et al, Int. J. Heat Mass Transfer, 16, (1973), 1785.
- (1.11) Garg, V.K., Int. J. Heat Mass Transfer, 35-8, (1992), 935.
- (1.12) Qin-Yin Fan, 第7回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1993), 435.
- (1.13) 北内・本田, 第8回計算流体シンポジウム講演論文集, E222, (1997), 375.
- (1.14) 竹広・林, 『地球流体力学』第26回流体力学講演会特別企画報告, 302.
- (1.15) 竹腰, 半導体シリコンビジネスのすべて, 第1章, (1994), 工業調査会, 11.
- (1.16) 志村, 半導体シリコン結晶工学, 第2章, (1993), 54, 丸善.
- (1.17) 伊藤・犬塚, 結晶成長, 第5章, (1976), 165, コロナ社.
- (1.18) Mihelcic, L., et al, Forschungszentrum Jülich, 2, (1992), 106.
- (1.19) 干川・平田, 日本結晶学会誌, 27-3, (1985), 177.
- (1.20) 高須・他3名, 応用物理, 59-8, (1990), 1044.
- (1.21) Watanabe, M., et al, Proc. 8th International Symposium on Silicon Materials Science and Technology, (1998).

- (1.22) Lee , Y.-S. , et al , J. Crystal Growth , 180 , (1997) , 477.
- (1.23) 阿部 , シリコン , 第3章 , (1994) , 56 , 培風館.
- (1.24) Kakimoto , K. , et al , Int. J. Heat and Mass Transfer , 35-10 , (1992) , 2551.
- (1.25) Dupret , F. , et al , Int. J. Heat and Mass Transfer , 33-9 , (1990) , 1849.
- (1.26) 大島・他2名 , 機論 , 59-562 , B(1993) , 1848.
- (1.27) Makino , H. , et al , ISIJ Inter. , 36-4 , (1996) , 380.
- (1.28) 武達男 , 電学論 D , 118-4 , (1998) , 431.
- (1.29) 大島・他5名 , 第8回電磁力関連のダイナミックスシンポジウム講演論文集 , (1996) , 215.
- (1.30) Garnier , M. and Moreau , R. , J. Fluid Mech. , 127 , (1983) , 365.
- (1.31) 谷口・菊池 , 鉄と鋼 , 70-8 , (1984) , 846.
- (1.32) Meyer , J.L. , et al , Metal. Trans. B , 18B , (1987) , 529.
- (1.33) Kawase , Y. and Yamaguchi , T. , IEEE Trans. on Magnetics , 29-2 , (1993) , 1554.
- (1.34) 棚橋 , 電磁熱流体の数値解析—基礎と応用— , (1995-9) , 森北出版.
- (1.35) 棚橋 , 流れの有限要素解析 と , (1997-9) , 朝倉書店.
- (1.36) Dukowicz , J.K. and Ramshaw , J.D. , J. Comp. Physics , 32 , (1979) , 71.
- (1.37) 棚橋 , 流れの有限要素法解析 I , (1997) , 朝倉書店.
- (1.38) 正中 , 日本機械学会第72期通常総会講演会講演論文集() , (1995) , 9.
- (1.39) 箕輪・棚橋 , 日本機械学会第75期通常総会講演会講演論文集(I) , (1998) , 295.
- (1.40) 坪井始・内藤督 , 実践数値電磁界解析法 , (1995) , 養賢堂.

第2章 電磁熱流体力学の基礎方程式の離散化

2.1 2章の緒言

有限体積法の分野で開発されたSIMPLE法^(2.1), SIMPLER法, そしてSIMPLEC法はハイブリッド上流化法を用いた陰解法で安定性に優れている。これを有限要素法に応用したものがハイブリッドGSMAC法^(2.2)である。その歴史的発展を表2.1と図2.1に示す。

すなわち, ハイブリッドGSMAC法はMAC法とSIMPLE法の長所を取り入れた有限要素法である。そして, これから述べる(ハイブリッド)GSMAC有限要素法は行列計算がないため, その計算スピードは高速な差分法に近いことがわかる。次に, GSMAC法のスキームについて調べることにする。そのスキームの目標は汎用性のある有限要素法で差分法にまさる低容量化と高速化を実現することにある。

主な記号

A : 磁気ベクトル・ポテンシャル

A^e : 余因子ベクトル

A_{ab} : 移流行列

A : 面積

B : 磁束密度

B_{ab} : BTD行列

B_0 : 印加磁場

B' : 誘導磁場

b : 外力

c : Courant 数

D : 変形速度テンソル

D_{ab} : 拡散行列

D_e : 電束密度

d : 放射率

E : 電界

F_{em} : 電磁力
 G : 対称テンソル
 H : 磁界
 H : ベルヌーイ関数
 J : Jacobian
 j : 電流密度
 K : 数値拡散係数
 K : 要素の重心
 k : Stefan - Boltzmann定数
 L : 隣接要素の重心
 l_a : 定基底ベクトル
 M : 対称テンソル
 M_{ab} : 質量行列
 N_a, N_b : 形状関数
 n : 単位法線ベクトル
 p : 圧力
 Q_{em} : ジュール発熱
 q : 熱流速ベクトル
 q : 放射熱量
 R : スカラ関数
 r : 熱源の強さ
 s : 表面張力
 T : 応力テンソル
 T : 絶対温度
 t : 時間
 u : 内部エネルギー
 V : 電位
 v : 流速
 \tilde{v} : 速度の予測子
 $[\]$: Jump量
 Γ : 要素境界領域
 Θ : 重力ポテンシャル
 ΔS : 面の微小面積
 Δt : 時間の刻み幅
 Φ : 散逸エネルギー
 Ω : 要素内領域

- α : 熱拡散率
 β : 体膨張率
 γ : 曲面の曲率
 ε : 誘電率
 η : 等温圧縮率
 θ : 流速の発散
 κ : 温度伝導率
 λ : 第2粘性係数
 μ_1 : せん断粘性係数
 μ_2 : 透磁率
 ν : 動粘性係数
 ν_m : 磁気粘性係数
 ρ : 密度
 ρ_e : 電荷密度
 σ : 電気伝導度
 ϕ : 修正速度ポテンシャル
 ψ : 修正磁場ポテンシャル
 χ : 修正電位ポテンシャル
 ω : うず度
 ∇ : ナブラ演算子
 ∇_a : 離散化ナブラ演算子
 添子
 $()_e$: 要素内一定
 $()^n$: 時間ステップ
 $()^{(k)}$: 同時緩和ステップ

2.2 基礎方程式

現在、GSMAC有限要素法では非圧縮粘性流体の広範囲の問題を取り扱っている。すなわち、流体と熱の相互作用および流体と電磁場の相互作用や非ニュートン流体の流動もその解析目標としている。つぎにGSMAC有限要素法で用いられている基礎方程式^(2.3)を示す。

2.2.1 運動の方程式

質量保存則を表す非圧縮流体の連続の方程式と電磁力が作用している場合のコーシー(Cauchy)の運動方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} + \mathbf{F}_{em} \quad (2.2)$$

と記述できる。式(2.1)と式(2.2)はそれぞれ連続の方程式と運動の方程式を示す。ここで、 \mathbf{v} は流速、 ρ は流体の密度、 \mathbf{T} は応力テンソル、 \mathbf{b} は外力、 \mathbf{F}_{em} は流体に作用する電磁力を示す。

2.2.2 エネルギーの方程式

熱や電磁場が相互作用しない場合、基本的には式(2.1)と式(2.2)の方程式を圧力 p と速度 \mathbf{v} を未知変数として解けばよい。しかし、自然対流などで熱の相互作用がある場合には、密度が温度と圧力の関数となり、浮力が発生する。この場合、エネルギーの方程式

$$\rho \frac{du}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + \Phi + Q_{em} \quad (2.3)$$

が必要となる。ここで u は内部エネルギー、 \mathbf{q} は熱流束ベクトル、 r は単位質量あたりの熱源の強さ、 Φ は流体の粘性に基づく散逸エネルギー、 Q_{em} はジュール(Joule)発熱である。

2.2.3 マクスウェルの方程式

MHDのように流体に電磁場が作用する場合は運動の方程式に電磁力 \mathbf{F}_{em} が、エネルギーの方程式にジュール熱 Q_{em} が付加される。このように、流体に電磁場が相互作用する場合には、さらにつぎのマクスウェル(Maxwell)の方程式が必

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_e = \rho_e \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}_e}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.7)$$

要である。式(2.4)から(2.7)はそれぞれ，ガウス(Gauss)の法則，ファラデー(Faraday)の電磁誘導の法則，修正アンペール(Ampere)の法則，そして磁荷不在の法則として知られている。ここで ρ_e は電荷密度， \mathbf{D}_e は電束密度， \mathbf{B} は磁束密度， \mathbf{E} は電界， \mathbf{H} は磁界である。

2.2.4 構成方程式

さらに構成方程式として

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu_1\mathbf{D} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{q} = -\kappa\nabla T \quad (2.9)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{B} = \mu_2\mathbf{H} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad (2.12)$$

が必要である。式(2.8)から(2.10)はそれぞれ，ナビエ - ポアソンの法則，フーリエ(Fourier)の熱伝導の法則，そしてオーム(Ohm)の法則を示す。ここで \mathbf{I} は恒等テンソル， \mathbf{D} は変形速度テンソル， T は絶対温度， \mathbf{j} は電流密度である。 λ ， μ_1 ， μ_2 ， κ ， σ は物質定数で，それぞれ，第2粘性係数，せん断粘性係数，透磁率，温度伝導率，電気伝導度，誘電率である。

2.2.5 誘導方程式

オームの法則とマクスウェルの方程式を用いて，磁場の誘導方程式と電位

のポアソン方程式が導かれる。

(1) 磁場の誘導方程式

交流磁場の場合，誘起磁場を決定する方程式が必要になる。普通のMHDの方程式では変位電流が無視された準静的理論が用いられる。よって，修正アンペールの法則はアンペールの法則となる。オームの法則の回転をとりアンペールの法則とファラデーの電磁誘導の法則を用いて，電流と電場を消去すると磁場に関する誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.13)$$

が導かれる。ここで $\nu_m = 1/(\sigma\mu_2)$ は磁気粘性係数である。この誘導方程式が $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の条件で解かれる。

(2) 電位のポアソン方程式

直流電流の場合，誘起磁場は存在しないから電場の回転は 0 となる。よって電場は電位の勾配として $\mathbf{E} = -\nabla V$ と表せる。このとき，オームの法則の発散をとると電位に関するポアソン方程式

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.14)$$

が解かれる。この方程式は $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ の条件で解かれる。以上をまとめると運動方程式は $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ，磁場の誘導方程式は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，電位のポアソン方程式は $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ のもとでそれぞれ解かれる。すなわち， \mathbf{v} ， \mathbf{B} ， \mathbf{j} はすべてソレノイダル場のベクトルである。GSMAC有限要素法はこれらの基礎方程式によって支配される自然現象を解析対象としている(図2.2 参照)。そして，これらの基礎方程式はつぎに述べる手順で解かれる。

2.3 GSMAC有限要素法のアルゴリズム

GSMAC有限要素法のアルゴリズム^(2.4)の基礎はSMAC法やHSMAC法の中にある。しかし，その概念はかなり拡張されている。この節では，まず熱効果や電磁効果がない場合の非圧縮NS方程式の解法についてのみ触れる。

2.3.1 NS方程式の表示方法

コーシーの運動方程式に構成方程式としてNSの法則を代入すると、非圧縮流体に対して

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{b} \quad (2.15)$$

となるNSの方程式が導かれる。ただし、ここでは電磁力 F_{em} を無視している。そして $\nu = \mu_1 / \rho$ は動粘性係数である。この表示を対流形(Convective Form)という。高次精度の風上差分法においてはよく用いられる表示である。連続の方程式 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ を用いると粘性項の対流項はいろいろな形で表示される。それらの特徴を以下に述べる。

(1) 粘性項の表示

応力発散形は変形速度テンソルの発散を意味し、粘性項の最も基本的な表示方法である。物理的な意味も深くFEMにおいてよく用いられている。ラプラシアン(Laplacian)形は計算が最も単純であり一番よく利用されている。発散・回転形を用いると境界条件が複雑となる。うず度形は完全に圧縮性が除外されている。しかし、うず度の境界条件が必要となる(表2.2 参照)。

(2) 対流項の表示

保存形の離散化は運動量が保存される。有限体積法や有限要素法によく用いられる。移流形は運動量も運動エネルギーも保存しないが上流化しやすく差分法においてよく用いられている。回転形では運動エネルギーが保存し、 $(1/2)v^2$ はベルヌーイ関数の中に組み込まれる。非対称形は保存形と移流形の平均で差分法で離散化したとき運動エネルギーが保存される(表2.3 参照)。

現在、GSMAC有限要素法では粘性項に応力発散形を変形した発散回転形

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nu \nabla) = 2\nabla \theta - \nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.16)$$

を採用している。ここで $\theta = \nabla \cdot \mathbf{v}$ は発散、 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ はうず度である。この形式は拡散行列の計算を必要とせず、低容量化と高速化ができる。そして発散を0とせず数値残差として残しておくことは、サイクル誤差自己調整法と速度振動の制御の立場から重要である。また、対流項には回転形を用いている。なぜならば、ヘルムホルツ(Helmholtz)の定理によると流れ場は、発散0の場と回

転 0 の場の重ね合せとして表すことができるからである。Chorin(1969)により提案された手法は、このヘルムホルツの直交分解の概念を数値的に取り込んだ手法である。この概念を導入するとNSの方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla H - \nu \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + 2\nu \nabla \theta \quad (2.17)$$

と書ける。ここで $H = (1/2)\mathbf{v}^2 + p/\rho + \theta$ はベルヌーイ関数で運動エネルギーと静圧エネルギーと位置エネルギーの和である。また $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ はうず度である。この表示は回転形(Rotational Form)とよばれる。この表示は、運動方程式の対流項が運動エネルギー項とうず度輸送項に分解され、その一部の運動エネルギーが H の中に包含されている。このため、高レイノルズ数の流れに対して安定で、すぐれた表示ができる。この結果、従来では原始変数として圧力と速度、すなわち (p, \mathbf{v}) が用いられていたが、GSMAC有限要素法においては全エネルギーと速度、すなわち (H, \mathbf{v}) を変数としている。全エネルギーを変数として採用することにより、高レイノルズ数に対して安定な数値解析が得られる。

2.3.2 1 次精度時間進行法(準陽解法)

NS方程式の表示方法が決まると、つぎは時間と空間の離散化である。空間の離散化には有限要素法を用いることとして、ここでは時間の離散化と時間進行法について考える。

一般に、非圧縮NS方程式は楕円性が強いから、速度を陽的に圧力を陰的に取り扱う必要がある。GSMAC法では直交分解した回転形表示を用いているから、速度を陽的に全エネルギーを陰的に定式化する必要がある。その結果、

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = -\nabla[(1-h)H^n + hH^{n+1}] + \mathbf{f}^n + \text{BTD}^n \quad (2.18)$$

となる。ここで $\mathbf{f}^n = \mathbf{f}(\mathbf{v}^n)$ で

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \nu \nabla \times \boldsymbol{\omega} + 2\nu \nabla \theta \quad (2.19)$$

である。また h は混合パラメーターである。全エネルギー項は $h=0$ で完全陽解法、 $h=0.5$ でクランク - ニコルソン法、 $h=1$ で完全陰解法となる。一般に、 h

は安定領域($0.5 < h < 1$)の範囲で適用される。この半離散化式にGSMAC法のアルゴリズムを適用する。

(1) BTD項

時間項 \mathbf{v}^{n+1} をテイラー展開すると

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)^n \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}\right)^n \Delta t^2 + \dots \quad (2.20)$$

となる。よって2次以上のオーダーを無視すると

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)^n = \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}\right)^n \quad (2.21)$$

となる。ここで時間の2階微分項を移流項で評価する。このような評価は移流項の支配的流れに対して十分よい近似である。その結果、時間の2階微分項は空間微分項で表示でき

$$\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}\right) = \nabla \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \mathbf{v} = \text{BTD} \quad (2.22)$$

となる。これをBTD(Balancing Tensor Diffusivity)項とよぶ。ここで $\mathbf{K} = (\Delta t/2)\nu\nu$ はテンソル粘性で流れの方向だけに寄与する数値拡散係数である。BTD項の付加は時間精度の向上のみならず安定性にも寄与する。

(2) 予測値

速度の予測子は前進オイラー(Euler)法で求める。すなわち

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = -\nabla H^n + \mathbf{f}^n + \text{BTD}^n \quad (2.23)$$

となる。ここで、 $\tilde{\mathbf{v}}$ は速度の予測子を示す。この速度の予測子は発散 $\neq 0$ の場を満足しないから全エネルギーを修正しながら速度の発散が $\neq 0$ となるように速度を修正する必要がある。

(3) 修正子

元の離散化から前進オイラー法の式を差し引くと，差式として

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}}{\Delta t} = -h\nabla(H^{n+1} - H^n) \quad (2.24)$$

なる式が導かれる。ここでスカラー関数 φ を

$$H^{n+1} = H^n + \frac{\varphi}{h\Delta t} \quad (2.25)$$

と定義する。その結果，時刻 $(n+1)/\Delta t$ の速度は

$$\mathbf{v}^{n+1} = \tilde{\mathbf{v}} - \nabla\varphi \quad (2.26)$$

と書ける。この2つの式はスカラー関数 φ が求まれば時刻 $(n+1)/\Delta t$ の H と \mathbf{v} が求まることを意味している。ここで時刻 $(n+1)/\Delta t$ の速度場が発散 0 ($\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0$) であることを要求する。これは各時間ステップごとに質量が保存されていることを表している。その結果

$$\nabla^2\varphi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.27)$$

なる φ に関するポアソン方程式が導かれる。このポアソン方程式は全エネルギーと速度の同時緩和法で解かれる。以上をまとめると，表2.4のGSMAC法の基本アルゴリズムが生まれる。

すなわち，「NS方程式を前進オイラー法で離散化し速度の予測子 $\tilde{\mathbf{v}}$ を求める。つぎに速度と全エネルギーの同時緩和法で速度の修正子 \mathbf{v}^{n+1} と全エネルギー H^{n+1} を求める」。 $\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0$ の条件よりポアソン方程式 $\nabla^2\varphi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}$ が生ずる。このときポアソン方程式を解くことよりも $\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1}$ を満足する速度場を求めることの方が重要である。そして同時緩和法の原理はこの物理的根拠に基づいている。この解法は予測子を求める段階が前進オイラー法であるので一見スキームが不安定のように見えるが，全エネルギーが陰的に取り扱われていることと， $\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0$ を満足するように予測子が反復法で修正されるので，高レイノルズ数の流れに対してもきわめて安定である。さらに実際の計算に際し

て、速度の予測子を求める段階でアワーグラス(Hourglass)モードの制御項が、速度の修正子を求める段階で全エネルギーの補正項に不安定モードの制御項がそれぞれ付加される。

2.3.3 ポアソン方程式の解法

(1) ニュートン - ラフソン法

MAC法では $\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0$ の条件より圧力 p に関するポアソン方程式が導かれる。SMAC法では同じ条件より修正速度ポテンシャル ϕ に関するポアソン方程式が導かれる。そしてHSMAC法ではこのポアソン方程式が速度と圧力の同時緩和法で解かれる。GSMAC有限要素法では修正速度ポテンシャル ϕ に関するポアソン方程式が

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.28)$$

と導かれる。そしてこのポアソン方程式が速度と圧力の同時緩和法で解かれる。ここではその具体的な解法を示す。ポアソン方程式を要素内で積分する。重み関数を1とした非構造格子の有限体積法を適用する。ガウスの定理を適用するとポアソン方程式は

$$\iint_{S_e} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \iint_{S_e} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.29)$$

となる。ここで、上式の右辺に着目して

$$\varepsilon = \iint_{S_e} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.30)$$

を定義する。 ε は要素内から流出する流量である。そして ϕ は H の関数である。 H を修正した結果、速度場がソレノイダル場になれば、 $\varepsilon(H + \delta H) = 0$ を満足する。テイラー展開して修正量 δH を求めると

$$\delta H = - \frac{\varepsilon}{\frac{\partial \varepsilon}{\partial H}} \quad (2.31)$$

となる。問題は微係数 $\partial\varepsilon/\partial H$ の求め方にある。それには力積の関係式

$$\frac{\delta v}{\Delta t} = -\Delta\delta H \tag{2.32}$$

を用いる。その結果

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varepsilon}{\partial H} &= \frac{\delta}{\delta H} \left(\iint_{S_e} v \cdot n dS \right) = \frac{1}{\delta H} \iint_{S_e} \delta v \cdot n dS = \frac{\Delta t}{\delta H} \iint \frac{\delta H}{\Delta n} dS \\ &\quad \left(\frac{\delta v_n}{\Delta t} = -\frac{\partial\delta H}{\partial n} = -\frac{0 - \delta H}{\Delta n} \right) \\ &= \Delta t \iint_{S_e} \frac{1}{\Delta n} dS \end{aligned} \tag{2.33}$$

を得る。よって微係数は

$$a = \frac{1}{V_e} \iint_{S_e} \frac{1}{\Delta n} dS \tag{2.34}$$

と置けば、 $\partial\varepsilon/\partial H = aV_e\Delta t$ となる。残された問題は a の計算方法である。つぎにそれを示す。図2.3で K を対象要素の重心、 L を隣接要素の重心、 n を面の外向き単位法線ベクトルとすれば法線方向の増分は

$$\Delta n = \overrightarrow{KL} \cdot \mathbf{n} \tag{2.35}$$

と評価できる。ここで $dS = \Delta S$ は面の微小面積である。よって

$$\iint \frac{dS}{\Delta n} = \sum \frac{\Delta S}{\Delta n} = \sum \frac{\Delta S}{\overrightarrow{KL} \cdot \mathbf{n}} \tag{2.36}$$

となる。はそれぞれの面について総和をとるものとする。面の単位法線ベクトルは要素の種類に応じて表2.5のようになる。これらの結果は $\nabla^2\phi$ の優対角近似に一致する。

(2) 優対角近似

GSMAC有限要素法はHSMAC法の有限要素法への拡張である。したがって要素の形状に依存しない形で優対角近似をすることが必要である。

a. ラプラシアン

ラプラシアン(Laplacian)は任意の体積要素 V に対して

$$\nabla^2 \varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (2.37)$$

で定義される。これを要素 V_e に適用し、ポテンシャルが 0 から φ に増加した場合を考えると $\partial \varphi / \partial n = (0 - \varphi) / \Delta n$ であるから、各要素に対して

$$-\nabla^2 \varphi = \frac{1}{V_e} \iint_{S_e} \frac{1}{\Delta n} dS \varphi = \lambda \varphi \quad (2.38)$$

となる。ここで φ は要素内で一定である。

b. 積分公式

図2.4の6面体要素 K に対して表2.6の積分公式が成立する。この公式を用いて点SOR法でポアソン方程式を解くこともできるが、ここでは優対角近似法を用いる。直交座標においては優対角近似法と点SOR法が一致することが証明できる。

c. 優対角近似

右辺の面積分を実行すると

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \sum_{i=1}^6 \{A_1^i (\varphi_L^i - \varphi_K^i) + A_2^i (\varphi_a^i - \varphi_c^i) + A_3^i (\varphi_b^i - \varphi_d^i)\} \quad (2.39)$$

の形となる。ここで $i=1 \sim 6$ は6面体の番号を表している。よってラプラス演算子の優対角近似は

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{V_e} \left(\sum_{i=1}^6 A_1^i \right) \varphi \quad (2.40)$$

と書ける(図2.4 参照)。これよりラプラス演算子の優対角近似は体積要素に対して

$$-\nabla^2 = \frac{1}{V_e} \iint_{S_e} \frac{1}{\Delta n} dS = \frac{1}{V_e} \left(\sum_{i=1}^6 A_i^i \right) = a \quad (2.41)$$

となる。特に2次元の直交要素に対して

$$a = 2 \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \quad (2.42)$$

となる。これはSOLA法に一致する。

d. 修正量

$\Delta t \delta H = \varphi$ であるから，修正量 φ は

$$\varphi = -a^{-1} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.43)$$

と求める。すなわち， $-a^{-1}$ はラプラシアン¹の逆演算子を意味している。ところが，

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{V_e} \iint \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.44)$$

である。

(3) 同時緩和法

同時緩和法は， $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ を満足するソレノイダル場から導かれるポアソン方程式の解法に対して有効である。そして速度場からは修正速度ポテンシャル，磁場からは修正磁場ポテンシャル，電流場からは電位ポテンシャルに関するポアソン方程式がそれぞれ導かれる。

a. 修正速度ポテンシャルに関するポアソン方程式

まず速度の予測値 $\tilde{\mathbf{v}}$ を求める。つぎに修正速度ポテンシャル φ を導入して，速度とベルヌーイ関数を同時緩和法で $\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0$ を満足させながら解く。すなわち，反復子 $k=0$ に対して， $\mathbf{v}^0 = \tilde{\mathbf{v}}, H^0 = H^n$ として，つぎの反復子

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^k - \nabla \varphi^k \quad (2.45)$$

$$H^{k+1} = H^k + \phi^k / \Delta t \quad (2.46)$$

$$\nabla^2 \phi^k = \nabla \cdot \mathbf{v}^k \quad (\nabla \cdot \mathbf{v}^{k+1} = 0) \quad (2.47)$$

を繰り返す。反復の結果，すべての要素で $|\nabla \cdot \mathbf{v}^{k+1}| \leq \varepsilon_v$ (例えば $\varepsilon_v = 0.001$) を満足したとき， $\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^{k+1}$ ， $H^{n+1} = H^{k+1}$ としてつぎの時間ステップに進む。この同時反復手順を図2.5と表2.7に示しておく。

b. 修正磁場ポテンシャルに関するポアソン方程式

まず磁場の予測値 $\tilde{\mathbf{B}}$ を求める。つぎに修正磁場ポテンシャル ψ を導入して，磁場とスカラー関数 R を同時緩和法で $\nabla \cdot \mathbf{B}^{n+1} = 0$ を満足させながら解く。すなわち，反復子 $k=0$ に対して， $\mathbf{B}^0 = \tilde{\mathbf{B}}$ ， $R^0 = R^n$ として，つぎの反復子

$$\mathbf{B}^{k+1} = \mathbf{B}^k - \nabla \psi^k \quad (2.48)$$

$$R^{k+1} = R^k + \psi^k / \Delta t \quad (2.49)$$

$$\nabla^2 \psi^k = \nabla \cdot \mathbf{B}^k \quad (\nabla \cdot \mathbf{B}^{k+1} = 0) \quad (2.50)$$

を繰り返す。反復の結果，すべての要素で $|\nabla \cdot \mathbf{B}^{k+1}| \leq \varepsilon_B$ (例えば $\varepsilon_B = 0.001$) を満足したとき， $\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^{k+1}$ ， $R^{n+1} = R^{k+1}$ としてつぎの時間ステップに進む。すなわち，この解法により従来困難とされていた磁場のソレノイダル性が保証される。この場合，記号の対応表(表2.8)を用いて速度場と同じSUBROUTINEが使用できる。

c. 電位に関するポアソン方程式

電磁場が定常と見なされる場合は，電位に関するポアソン方程式が解かれる。この場合もポアソン方程式を解くことを目的とせず，物理的に重要な発散が0となるソレノイダル性を満足する電流場を求めることに重点を置く。その結果ポアソン方程式を解くためのCPUタイムが大幅に節約される。それには，まず最初に電位に関するポアソン方程式を近似的に解いて電位の予測値 V を求める。つぎにオームの法則

$$\tilde{\mathbf{j}} = -\nabla \tilde{V} + \mathbf{v}^n \times \mathbf{B}^n \quad (2.51)$$

により電流の予測値を求める。この予測値は当然 $\nabla \cdot j = 0$ を満足しない。そこで、修正電位ポテンシャル χ を導入して、修正子を次の反復法により求める。すなわち、反復子 $k=0$ に対して $j^0 = \tilde{j}$, $V^0 = \tilde{V}$ として、反復

$$j^{k+1} = j^k - \nabla \chi^k \quad (2.52)$$

$$V^{k+1} = V^k + \chi^k \quad (2.53)$$

$$\nabla^2 \chi^k = \nabla \cdot j^k \quad (\nabla \cdot j^{k+1} = 0) \quad (2.54)$$

を繰り返す。反復の結果、すべての要素で $|\nabla \cdot j^{k+1}| \leq \varepsilon_j$ (例えば $\varepsilon_j = 0.001$) を満足したとき、 $j^n = j^{k+1}$, $V^n = V^{k+1}$ として反復を終了する。この結果、ソレノイダル性を満足する電流場が求められる。解法のアルゴリズムは速度場と同じである(表2.8 参照)。

2.4 係数行列の解析的表示

2.4.1 要素平均と節点平均

(1) 要素平均

2つの平均値を定義する。それは要素平均と節点平均である。要素平均は重み関数が1の平均値で、

$$f_e \equiv \langle f \rangle_e \equiv \frac{\int_{\Omega_e} f d\Omega}{\int_{\Omega_e} d\Omega} = \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} f d\Omega \quad (2.55)$$

と定義される。ここで、積分領域は要素内 Ω_e に限られる。要素平均は連続の方程式および構成方程式の離散化に用いられる。

(2) 節点平均

一方、節点平均はつぎのように定義される。

$$f_e \equiv \langle f \rangle_i \equiv \frac{\int_{\Omega_i} N_i f d\Omega}{\int_{\Omega_i} N_i d\Omega} \quad (2.56)$$

すなわち，節点平均値とは重み関数として形状関数 N_i を選んだ平均値でその積分領域は形状関数 N_i の定義領域 Ω_i である。ここで i は全体節点番号である。節点平均は運動の方程式やエネルギー方程式の支配方程式の離散化に用いられる(図2.6および表2.9)。

(3) 積の要素平均

2つのなめらかな関数 f と g を考える。このとき積の要素平均，

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} fg d\Omega \approx \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \langle f \rangle_e g d\Omega = \langle f \rangle_e \langle g \rangle_e \quad (2.57)$$

と近似できる。すなわち要素が十分に小さければ，関数の積の要素平均はそれぞれの関数の要素平均の積で近似できる。この性質を後に用いる。

2.4.2 離散化ナブラ演算子

空間微分のナブラ演算子 ∇ を離散化したものが離散化ナブラ演算子 ∇_a である。離散化ナブラ演算子は形状関数の勾配の要素平均として，

$$\nabla_a \equiv \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \nabla N_a d\Omega \quad (2.58)$$

で定義される。勾配定理を用いるとこの要素積分は要素の境界積分に変換され，

$$\nabla_a \equiv \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Gamma_e} N_a n d\Gamma \quad (2.59)$$

と書くこともできる。ここで Γ_e は要素 Ω_e の境界であり， n は外向き単位法線ベクトルである。よって離散化ナブラ演算子を具体的に計算する方法として領域積分法(体積分法)と境界積分法(面積分法)がある。積分結果は表2.10に示されている。特に直交要素の場合は表2.11のように単純化される。また離散化ナブラ演算子は表2.12に示されたベクトルの性質をもつが，演算の順序には関

係しない。ただし，添子 a については和の規約に従うものとする。

2.4.3 係数行列の解析的表示

移流拡散方程式に現れる係数行列には質量行列，移流行列，拡散行列，BTD行列がある(表2.13 参照)。これらの係数行列の解析的表示を順次求める。

計算に際して，要素平均値 $v_e, J_e, g_e^i = \langle g^i \rangle_e$ を用いる。計算は3次元の6面体要素について示す。2次元およびその他の要素についても同様に計算できる。まず，係数行列を要素平均値を用いて表示すると表2.14のように求まる。この表示を具体化していく。それには表2.14の積分を実行する必要がある。形状関数

$$N_a = \frac{1}{8}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta)(1 + \zeta_a \zeta) \quad (2.60)$$

に対して積分を実行すると積分公式が求まる^(2.5)。これらの積分公式を利用して係数行列は

$$M'_{ab} = \int_{\Omega_e} N_a N_b d\Omega(\xi) \quad (2.61)$$

$$(A'_{ab})_i = \int_{\Omega_e} N_a \frac{\partial N_b}{\partial \xi^i} d\Omega(\xi) \quad (2.62)$$

$$(D'_{ab})_{ij} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_a}{\partial \xi^i} \frac{\partial N_b}{\partial \xi^j} d\Omega(\xi) \quad (2.63)$$

$$(B'_{ab})_{ij} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_a}{\partial \xi^i} \frac{\partial N_b}{\partial \xi^j} d\Omega(\xi) = (D'_{ab})_{ij} \quad (2.64)$$

と置けば，

$$M_{ab} = J_e M'_{ab} \quad (2.65)$$

$$A_{ab} = v_e \cdot A^{\xi^i} (A'_{ab})_i \quad (2.66)$$

$$D_{ab} = \frac{1}{J_e} A^{\xi^i} \cdot A^{\xi^j} (D'_{ab})_{ij} \quad (2.67)$$

$$B_{ab} = \frac{1}{J_e} (\mathbf{v}_e \cdot A^{\xi^i}) (\mathbf{v}_e \cdot A^{\xi^j}) (B'_{ab})_{ij} \quad (2.68)$$

と求まる。ここで,

$$A^{\xi^i} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^j} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^k} \right\rangle_e \quad (2.69)$$

である。ただし $i, j, k=1,2,3$ でCyclicである。係数行列の表示方法には 2 種類の方法がある(表2.15 参照)。第1の方法は係数行列を要素に依存する部分と要素に依存しない部分に分けて表す方法である。例えば, 移流行列の場合

$$A_{ab} = \mathbf{v}_e \cdot A^{\xi^i} (A'_{ab})_i \quad (2.70)$$

である。第2の方法は離散化ナブラ演算子とアワーグラス行列で表す方法である。例えば, 同じ移流行列に対して

$$A_{ab} = \mathbf{v}_e \cdot (J_e l_a \nabla_{b+} \Gamma_{ab}^A) \quad (2.71)$$

となる。計算結果は両者ともに等しいが, マトリックス全体を計算するには第1の方法が計算スピードも速く容量的にも少容量ですむ。第2の方法はアワーグラス行列を無視すると 1 点積分法に一致し, 係数行列を記憶することなく, 超高速計算が可能である。この場合, メッシュを十分に細かくする必要がある。ここでは第1の方法について係数行列を求めておく^(2.7)。

2.5 有限要素法による定式化

有限要素法によるスキームの安定化手法^(2.5, 2.6, 2.7)としてよく用いられるものは

- * BTD(Balancing Tensor Diffusivity)
- * SUPG(Streamline-Upwind / Petrov-Galerkin)
- * GLS(Galerkin / Least-Square)
- * AGLS(Adjoint Galerkin / Least-Square)

である(表2.16)。他方，方程式の定式化による上流化法には

- * 双対空間法(Dual Space Method)
- * 準Lagrange法(Semi-Lagrangian Method)
- * 多重スケール法(Multiscale Method)

がある。これらの手法についての相互関係の詳細は参考文献^(2,8)にゆずる。

2.5.1 運動方程式の安定化法

NS方程式の回転形表示は運動エネルギーが圧力項の中に加えられるから安定化に大きく寄与する。よって安定化の第1案は回転形表示の NS方程式を上流化することである。しかし，Coriolis 力に対応する $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ 項は上流化されていないから，不安定化に寄与する。回転運動に対する上流化法はいまだ未解決である。よって $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ 項に双2次要素法を適用して高精度化を計る必要がある。第2案としては BTD 項の付加である。回転形表示に BTD 項を付加することは一見矛盾に思われるかも知れない。しかし，これはつぎのように考えればよい。対流項表示の方程式で BTD 項を付加してから，その後対流項を回転形表示したと考えればよい。現在ではこの第2案を用いている。

2.5.2 エネルギー方程式の安定化法

エネルギー方程式はスカラーの移流拡散方程式である。よって BTD 項の付加により上流化できる。このとき BTD の固有時間パラメーター τ_B の選択にはいろいろ考えられる(表2.17 参照)。固有時間を $\tau_B = \tau/2$ に選ぶと，時空間 2 次精度の Lax-Wendroff 法となる。このスキームは関数が滑らかな場合，大変良いスキームとなる。しかし，関数が急激に変化する場所では，空間精度1次の一次風上法の τ_{opt} または TVD 条件を満足する $\tau_{opt} = L(d)$ を用いる必要がある。すなわち，制限関数 $\Psi(d, c)$ を用いてつぎの様に適切にスイッチングする必要がある。

$$\tau = \tau_B + (\tau_{opt} - \tau_B) \Psi(d, c) \quad (2.72)$$

$$\Psi(d, c) = \max\{0, \min(1, f(d, c))\} \quad (2.73)$$

しかし, 現在まだ Courant数 c とセルPeclet数 d の関数となる最適な制限関数 $f(d, c)$ は未知である。

2.5.3 誘導方程式の安定化法

誘導方程式には NS方程式に対応する圧力項が含まれない。かつ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の条件を満足させながら誘導方程式を時間進行することは大変困難な課題である。それを緩和する方法として数値残差ポテンシャル $R = \nu_m \nabla \cdot \mathbf{B}$ を導入する。その結果, 誘導方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} = -\nabla R + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nu_m \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.74)$$

と変形できる^(2.3)。数値計算上誤差がなければ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ であるから, $R=0$ となり, ∇R 項は消滅する。しかし, 一般には残差発生のため $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は満足されない。この残差を残すことによって GSMAC法が適用でき収束を加速することができる。

つぎに磁気拡散項を無視する場合の誘導方程式の上流化を考える。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2.75)$$

は磁束密度 \mathbf{B} の面を通過する流速が保存されることを意味している。すなわち右辺の $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v}$ が重要な意味を持つ。この項を考慮してBTD法に従って上流化すると, つぎの式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{G} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2.76)$$

が導かれる。ここで,

$$M = \frac{\Delta t}{2} v_e v_e, \quad G = \frac{\Delta t}{t} (B_e v_e + v_e B_e) \quad (2.77)$$

である。 M と G は共に対称テンソルであり、 M は $B \cdot \nabla v$ が零の場合の移流に従う BTD 項である。一方、 G は $B \cdot \nabla v$ の存在によって発生する新しい BTD 項である。すなわち流束保存に対する輸送方程式の場合にはこのように新しい上流化項が付加される。

誘導方程式の別解法を示しておく。 $\nabla \cdot B = 0$ のとき誘導方程式は

$$\frac{\partial B}{\partial t} + v \cdot \nabla B = v_m \nabla^2 B + m \quad (2.78)$$

と変形することができる。ここで $m = \nabla \cdot (Bv) = B \cdot \nabla v$ である。すなわち誘導方程式は m をソース項とした移流拡散方程式と見なすことができる。よって BTD 項を付加することにより、移流拡散方程式の標準解法が適用できる。この場合、各時間ステップに対して $\nabla \cdot B = 0$ の条件を確認する必要がある。

2.6 その他の問題

電磁熱流体の解析において、解決しなければならない問題点をここで指摘しておく。

2.6.1 Ohm の法則と誘導電流

流体と電磁場の連成において、特に液体金属の磁場中での運動に伴って起電力が発生する。静止導体に対する Ohm の法則は電流 j が電界の強さ E に比例し

$$j = \sigma E \quad (2.79)$$

と記述できる。ここで、 σ は電気伝導度である。一方速度 v で運動する導体に対する Ohm の法則は

$$j' = \sigma E' \quad (2.80)$$

と記述できる。ただし、 j' と E' は運動座標系での電流と電界であるから、変換式

$$j' = j - \rho_e v, \quad E' = E + v \times B \quad (2.81)$$

が成立する。ここで、MHD流体が中性であると仮定すると $\rho_e = 0$ となる。よって、MHD流体に対する Ohmの法則は静止系の物理量を用いて

$$j = \sigma(E + v \times B) \quad (2.82)$$

と表せる。問題点はこの式の磁束密度は誘導磁場を含み

$$B = B_0 + B' \quad (2.83)$$

と書けることである。ここで、 B_0 は印加磁場、 B' は誘導磁場である。一方、 E は磁気ベクトル・ポテンシャル A と電気スカラー・ポテンシャル ϕ を用いて

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (2.84)$$

と書ける。ここで、 $E_T = -\partial A / \partial t$ 、 $E_L = -\nabla\phi$ と置くと $\nabla \cdot E_T = 0$ 、 $\nabla \times E_L = 0$ を満足するから、これは電界 E のHelmholtz分解 $E = E_T + E_L$ を意味する。ここで T は横(Transverse)成分、 L は縦(Longitudinal)成分で電流も同様にHelmholtz分解すると $j = j_T + j_L$ となる。このとき、Ohmの法則は

$$j_T + j_L = \sigma[E_T + E_L + v \times (B_0 + B')] \quad (2.85)$$

と書けるから、これを2つに分解して

$$j_T = \sigma \left(-\frac{\partial A}{\partial t} + v \times B' \right) \quad (2.86)$$

$$j_L = \sigma(-\nabla\phi + v \times B_0) \quad (2.87)$$

と書ける。式(2.86)と式(2.87)はそれぞれ交流磁場と直流磁場における電流を示す。すなわち、交流磁場の問題では誘導磁場 $-\partial A/\partial t$ が重要となる。特に周波数が高い場合は $v \times B'$ 項も無視することができる。一方、直流磁場の問題では、誘導磁場成分は無視でき電荷による電界 $-\nabla\phi$ が重要となる(表2.18 参照)。

2.6.2 Maxwellの方程式のHelmholtz分解

Maxwellの方程式も同様にHelmholtz分解できる。その結果を表2.19に示しておく。ここで重要なことは電荷の移動によらない電流 j_T があり、 $\nabla \cdot j_T = 0$ を満足することである。

2.6.3 高Rayleigh数の自然対流

流体の密度は一般に温度と圧力の関数である。すなわち、密度の状態方程式は

$$\rho = \rho_0(1 + \eta\Delta p - \beta\Delta T) \quad (2.88)$$

で与えられる。ここで、

$$\eta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad (2.89)$$

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (2.90)$$

である。ここで、 η と β は等温圧縮率と体膨張率を示す。自然対流の場合、一般に圧力による密度変化は無視され、温度の変化のみ考慮される。よって、状態方程式は

$$\rho = \rho_0(1 - \beta\Delta T) \quad (2.91)$$

となる。温度差の小さい低Rayleigh数の問題では質量保存則に対して、 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ のBoussinesq近似が成立する。しかし、温度差の大きい場合、Boussinesq近似は成立せず質量保存則は、エネルギー方程式を用いて

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \alpha \beta \nabla^2 T \quad (2.92)$$

と変形できる。ここで

$$\alpha = \frac{\eta}{\rho C_p} \quad (2.93)$$

である。ここで、 η は熱拡散率を示す。すなわち、高Rayleigh数の場合、流体の体膨張率も考慮して解く必要がある。さらに温度差が大きい気体の場合は $\eta \Delta p$ も考慮する必要がある。この場合低Mach数近似を用いる必要がある。この議論はここでは省略する。

2.6.4 表面張力と熱放射

自由界面のある問題ではマランゴニ対流が発生する。このとき、表面張力にもとづく自由界面の応力のJump条件は

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}] = \mathbf{t}_\sigma, \quad \mathbf{t}_\sigma = \nabla s - \gamma \mathbf{n} \quad (2.94)$$

で与えられる。ここで $[\]$ はJump量、 \mathbf{T} はCauchyの応力テンソル、 s は表面張力、 ∇ は曲面の曲率、 \mathbf{n} は面の単位法線ベクトルである。また、高温の問題では熱放射を無視することができない。熱放射に関しては Stefan-Boltzmann の法

$$q = dkAT^4 \quad (2.95)$$

が成立する。ここで、 q 、 d 、 k 、 A 、 T はそれぞれ放射熱量、放射率、Stefan-Boltzmann定数、面積、絶対温度である。

2.7 2章の結言

本章では、電磁熱流体の解析に必要な事項を中心に議論した。プロセス・シミュレーションにおいては流体と熱と電磁場が連成することが多い。流れ場と温度場と電磁場は互い相互作用し、時間発展してゆく。この場合、流体系と熱系と電磁系の現象に対する固有時間の違いは、複雑連成系の問題解決を困難にしている。ここではこの種の問題が GSMAC有限要素でどのように解決できるかの糸口を与えておいた。

2章の参考文献

- (2.1) Patanker , S.V. , Numerical Heat Transfer and Fluid Flow , (1980) , Hemisphere.
- (2.2) 棚橋・沖 , 機論 , 59-568 , B(1993-12) , 3823.
- (2.3) 棚橋 , 電磁熱流体の数値解析－基礎と応用－ , (1995-9) , 森北出版.
- (2.4) 棚橋 , 流れの有限要素解析 と , (1997-9) , 朝倉書店.
- (2.5) Franka , L.P. , et al , Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. , 95 , (1992) , 253.
- (2.6) Hughes , T.J.R. , Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. , 127 , (1995) , 387.
- (2.7) Brezzi , F. , et al. , Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. , 145 , (1997) , 329.
- (2.8) 棚橋 , 動燃・核燃料開発事業団 , 公開資料 PNC-PJ1636 98-001 , (1998-3).

2章の表および図

表 2.1 非圧縮流体の解法の発展

表 2.2 粘性項の表示法 ($\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$)

表 2.3 対流項の表示法 ($\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$)

表 2.4 GSMAC 法の基本アルゴリズム

表 2.5 積分 $\iint \frac{1}{\Delta n} dS = \Sigma \frac{\Delta S}{\Delta n}$ の評価

表 2.6 積分公式

表 2.7 同時緩和法の計算手順

表 2.8 同時緩和法における記号の対応関係

表 2.9 要素平均と節点平均

表 2.10 離散化ナブラ演算子のベクトル表示

表 2.11 離散化ナブラ演算子のベクトル表示(直交要素)

表 2.12 こう配・発散・回転

表 2.13 係数行列の定義式

表 2.14 係数行列の近似式

表 2.15 係数行列の表示式

表 2.16 安定化有限要素法

表 2.17 改良 BTD 法

表 2.18 Ohm の法則の分解

表 2.19 Maxwell の方程式の Helmholtz 分解

図 2.1 ハイブリッド上流化

図 2.2 流れ場・温度場・電磁場の相互作用

図 2.3 $\iint \frac{1}{\Delta n} dS$ の評価, $\Delta n = \overline{KL} \cdot \mathbf{n}$

図 2.4 要素 K と要素 L の境界面 $abcd$ 上で $\quad / \quad n$ の計算

図 2.5 全エネルギー H と速度 \mathbf{v} の同時緩和法

図 2.6 質量の要素平均と運動量の節点平均

Table 2.1 Development of elucidation of the incompressible fluids

MAC Method		
1965	MAC Method	Harlow-Welch
1970	SMAC Method	Amsden-Harlow
1975	HSMAC Method	Hirt-Nichols-Romero
1985	GSMAC Method	Tanahashi-Saito
SIMPLE Method		
1972	SIMPLE Method	Patanker-Spalding
1979	SIMPLER Method	Patanker
1984	SIMPLEC Method	Van Doormaal
1995	Hybrid GSMAC Method	Tanahashi-Oki

Table 2.2 Indication method of viscosity term ($\nabla \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$)

$\nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \nabla)$	Stress-Divergence Form
$\nabla^2 \boldsymbol{\nu}$	Laplacian Form
$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\nu}) - \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\nu}$	Div-Curl Form
$-\nabla \times \boldsymbol{\omega}$	Vorticity Form

Table 2.3 Indication method of convection term ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$)

$\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v})$	Conservative Form
$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$	Advective Form
$\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$	Rotational Form
$\frac{1}{2} \{ \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \}$	Skew-Symmetric Form

Table 2.4 Basic algorithm of the GSMAC method

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = -\nabla H^n + f^n + \text{BTD}^n \Rightarrow \text{BTD} = \nabla \cdot \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \\
 \tilde{\mathbf{v}} \langle \text{The predictor of velocity} \rangle \Rightarrow f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \nu \nabla \times \boldsymbol{\omega} + 2\nu \nabla \theta \\
 \mathbf{v}^{n+1} = \tilde{\mathbf{v}} - \nabla \varphi \\
 H^{n+1} = H^n + \varphi / (h\Delta t) \Rightarrow 0.5 \leq h \leq 1 \\
 \nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}
 \end{array} \right.$$

Table 2.5 Evaluation of the integral calculus $\iint \frac{1}{\Delta n} dS = \Sigma \frac{\Delta S}{\Delta n}$

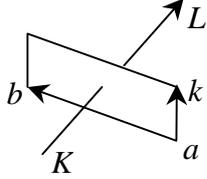
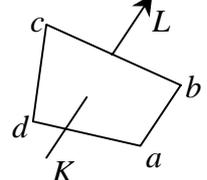
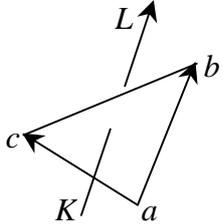
	$\mathbf{n} = \frac{\vec{ab} \times \mathbf{k}}{ \vec{ab} \times \mathbf{k} }$	$\Delta S = \vec{ab} \times \mathbf{k} $	$\frac{dS}{\Delta n} = \frac{(\vec{ab})^2}{2S}$ $2S = \vec{KL} \times \vec{ab} \cdot \mathbf{k}$
	$\mathbf{n} = \frac{\vec{ac} \times \vec{bd}}{ \vec{ac} \times \vec{bd} }$	$\Delta S = \frac{1}{2} \vec{ac} \times \vec{bd} $	$\frac{dS}{\Delta n} = \frac{(\vec{ac} \times \vec{bd})^2}{12V}$ $6V = \vec{KL} \cdot \vec{ac} \times \vec{bd}$
	$\mathbf{n} = \frac{\vec{ab} \times \vec{ac}}{ \vec{ab} \times \vec{ac} }$	$\Delta S = \frac{1}{2} \vec{ab} \times \vec{ac} $	$\frac{dS}{\Delta n} = \frac{(\vec{ab} \times \vec{ac})^2}{12V}$ $6V = \vec{KL} \cdot \vec{ab} \times \vec{ac}$

Table 2.6 Integral formulae

$$\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = A_1(\varphi_L - \varphi_K) + A_2(\varphi_a - \varphi_c) + A_3(\varphi_b - \varphi_d)$$

Here

$$A_1 = \frac{1}{12V} (\vec{ac} \times \vec{bd}) \cdot (\vec{ac} \times \vec{bd})$$

$$A_2 = \frac{1}{12V} (\vec{ac} \times \vec{bd}) \cdot (\vec{bd} \times \vec{LK})$$

$$A_3 = \frac{1}{12V} (\vec{ac} \times \vec{bd}) \cdot (\vec{LK} \times \vec{ac})$$

V is the volume of an octahedron

$$V = \frac{1}{6} (\vec{ac} \times \vec{bd}) \cdot \vec{KL}$$

Table 2.7 Calculation process of simultaneous relaxation method

$\mathbf{v}^{n+1} = \tilde{\mathbf{v}} - \nabla \varphi, \nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad (\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0)$ $H^{n+1} = H^n + \frac{\varphi}{\Delta t}$	
Step 1	for $k = 0$ $\mathbf{v}^{(0)} = \tilde{\mathbf{v}}, H^{(0)} = H^n$
Step 2	for $k = k$ $D^k = \frac{1}{V_e} \oint \mathbf{v}^k \cdot \mathbf{n} dS$ $a = \frac{1}{V_e} \oint \frac{1}{\Delta n} dS$ $\varphi^k = -\frac{D^k}{a}$ $\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^k - \nabla \varphi^k$ $H^{k+1} = H^k + \frac{\varphi^k}{\Delta t}$
Step 3	if $(\nabla \cdot \mathbf{v}^{k+1} = 0)$: go to Step 4 else: go to Step 2
Step 4	$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^{k+1}, H^{n+1} = H^{k+1}$

Table 2.8 Complying with of the signs in simultaneous relaxation method

Velocity Field	Magnetic Field	Current Field
\mathbf{v}	\mathbf{B}	\mathbf{j}
H	R	V
φ	ψ	χ

Table 2.9 Element average and node average

Element Average	Node Average
$f_e = \langle f \rangle_e = \frac{\int_{\Omega_e} f d\Omega}{\int_{\Omega_e} d\Omega}$	$f_i = \langle f \rangle_i = \frac{\int_{\Omega_i} N_i f d\Omega}{\int_{\Omega_i} N_i d\Omega}$
Constitution Equation	Governing Equation

Table 2.10 The vector indication of discrete del operator

3D	$\nabla_a = \frac{1}{4V_e} \left\{ (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\eta \times (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\zeta \xi_a + (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\zeta \times (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\xi \eta_a + (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\xi \times (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\eta \zeta_a \right\}$ $V_e = (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\xi \times (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\eta \cdot (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\zeta$
2D	$\nabla_a = \frac{1}{2S_e} \left\{ (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\eta \xi_a - (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\xi \eta_a \right\} \times \mathbf{k}$ $S_e = (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\xi \times (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\eta \cdot \mathbf{k}$
1D	$\nabla_a = \frac{\xi_a}{L_e} \mathbf{i}$ $L_e = \Delta x$

Table 2.11 The vector indication of discrete del operator(in rectangular element)

3D	$\nabla_a = \frac{1}{4} \left(\frac{\xi_a}{\Delta x} \mathbf{i} + \frac{\eta_a}{\Delta y} \mathbf{j} + \frac{\zeta_a}{\Delta z} \mathbf{k} \right)$
2D	$\nabla_a = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_a}{\Delta x} \mathbf{i} + \frac{\zeta_a}{\Delta y} \mathbf{j} \right)$
1D	$\nabla_a = \frac{\xi_a}{\Delta x} \mathbf{i}$

Table 2.12 Gradient, divergence and rotation

Gradient	∇f	$\nabla_a f_a = f_a \nabla_a$
Divergence	$\nabla \cdot \mathbf{v}$	$\nabla_a \cdot \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_a \cdot \nabla_a$
Rotation	$\nabla \times \mathbf{v}$	$\nabla_a \times \mathbf{v}_a = -\mathbf{v}_a \times \nabla_a$

Table 2.13 The element coefficient matrices

Mass Matrix	$M_{ab} = \int_{\Omega_e} N_a N_b d\Omega$
Convective Matrix	$A_{ab} = \int_{\Omega_e} N_a \mathbf{v} \cdot \nabla N_b d\Omega$
Laplacian Matrix	$D_{ab} = \int_{\Omega_e} \nabla N_a \cdot \nabla N_b d\Omega$
BTD Matrix	$B_{ab} = \int_{\Omega_e} (\mathbf{v} \cdot \nabla N_a)(\mathbf{v} \cdot \nabla N_b) d\Omega$

Table 2.14 The element coefficient matrices(approximate type)

$$M_{ab} = J_e \int_{\Omega_e} N_a N_b d\Omega(\xi)$$

$$A_{ab} = J_e \mathbf{v}_e \cdot \langle \mathbf{g}^i \rangle_e \int_{\Omega_e} N_a \frac{\partial N_b}{\partial \xi^i} d\Omega(\xi)$$

$$D_{ab} = J_e \langle \mathbf{g}^i \rangle_e \cdot \langle \mathbf{g}^i \rangle_e \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_a}{\partial \xi^i} \frac{\partial N_b}{\partial \xi^i} d\Omega(\xi)$$

$$B_{ab} = J_e (\mathbf{v}_e \cdot \langle \mathbf{g}^i \rangle_e) (\mathbf{v}_e \cdot \langle \mathbf{g}^j \rangle_e) \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_a}{\partial \xi^i} \frac{\partial N_b}{\partial \xi^j} d\Omega(\xi)$$

Table 2.15 The element coefficient matrices

Mass Matrix(symmetric)	
$M_{ab} \equiv \int_{\Omega_e} N_a N_b d\Omega$ $= J_e M'_{ab} = J_e M_\xi \otimes M_\eta \otimes M_\zeta$	
Convective Matrix(non-symmetric)	
$A_{ab} \equiv \int_{\Omega_e} N_a \mathbf{v} \cdot \nabla N_b d\Omega$ $= \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{A}^{\tilde{\zeta}} (A'_{ab})_i$ $= \mathbf{v}_e \cdot (J_e l_a \nabla_b + \Gamma_{ab}^A)$	$i, j, k = 1, 2, 3: \text{Cyclic}$ $M_{\xi^i} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \xi_a^i \xi_b^i \right)$
Laplacian Matrix(symmetric)	
$D_{ab} \equiv \int_{\Omega_e} \nabla N_a \cdot \nabla N_b d\Omega$ $= \frac{1}{J_e} \mathbf{A}^{\tilde{\zeta}} \mathbf{A}^{\tilde{\zeta}} (D'_{ab})_{ij}$ $= \Omega_e \nabla_a \cdot \nabla_b + \Gamma_{ab}^D$	$(D'_{ab})_{ij} = (B'_{ab})_{ij}$ $\mathbf{A}^{\tilde{\zeta}} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^j} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^k} \right\rangle_e$
BTD Matrix(symmetric)	
$B_{ab} \equiv \int (\mathbf{v} \cdot \nabla N_a) (\mathbf{v} \cdot \nabla N_b) d\Omega$ $= \frac{1}{J_e} (\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{A}^{\tilde{\zeta}}) (\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{A}^{\tilde{\zeta}}) (B'_{ab})_{ij}$ $= \Omega_e (\mathbf{v}_e \cdot \nabla_a) (\mathbf{v}_e \cdot \nabla_b) + \Gamma_{ab}^B$	$\nabla_a = \frac{1}{\Omega_e} (A^\xi \xi_a + A^\eta \eta_a + A^\zeta \zeta_a)$

Table 2.16 Stabilization of FEM

$$b(u, \bar{w}) + \sum_e (\tau_e (L\bar{u} - f), L\bar{w})_e = (f, \bar{w})$$

here

$L = L_{adv}$ SUPG : Streamline - Upwind / Petrov - Galerkin
 $L = L$ GLS : Galerkin / Least - Square
 $L = -L^*$ AGLS : Adjoint Galerkin / Least - Square or Bubbles

Table 2.17 Improvement BTD method

$$\tau_\infty = \frac{h}{2q} \dots 1st \text{ - Order Upwind, SUPG Method}$$

$$\tau_B = \frac{\Delta t}{2} \dots \text{BTD Method, Lax - Wendroff Method}$$

$$\tau_{opt} = \tau_\infty L(a) = \frac{h}{2q} L(a) = \frac{v}{q^2} a L(a)$$

$$L(a) = \coth(a) - \frac{1}{a}, \quad a = \frac{qh}{2v}$$

$$\tau_{imp} = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2q}{h} \right)^2 + 9 \left(\frac{4v}{h^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \dots \text{Shakib - Hughes(1991)}$$

$$\tau_{imp} = \frac{\Delta t}{2} \left[1 + c^2 + (6z)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

here

$$c = \frac{q\Delta t}{h} \quad \text{Courant Number}$$

$$z = \frac{v\Delta t}{h^2} \quad \text{Diffusion Number}$$

Table 2.18 Resolution of Ohm's law

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \sigma \left(-\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} - \nabla \varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \\
 \mathbf{j}_T + \mathbf{j}_L &= \sigma \{ \mathbf{E}_T + \mathbf{E}_L + \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}') \} \\
 \mathbf{j}_T &= \sigma \left(-\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \right) \\
 \mathbf{j}_L &= \sigma (-\nabla \varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)
 \end{aligned}$$

Table 2.19 Helmholtz resolution of Maxwell's equation

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j} &= \mathbf{j}_T + \mathbf{j}_L \quad \nabla \cdot \mathbf{j}_T = 0 \quad \nabla \times \mathbf{j}_L = 0 \\
 \mathbf{E} &= \mathbf{E}_T + \mathbf{E}_L \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_T = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E}_L = 0 \\
 &\left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{j}_T &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{j}_L + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right. \\
 &\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}_L &= \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E}_T &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{j}_T + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial t} \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}_T &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_L &= 0 \\ \mathbf{j}_L + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{j}_L + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

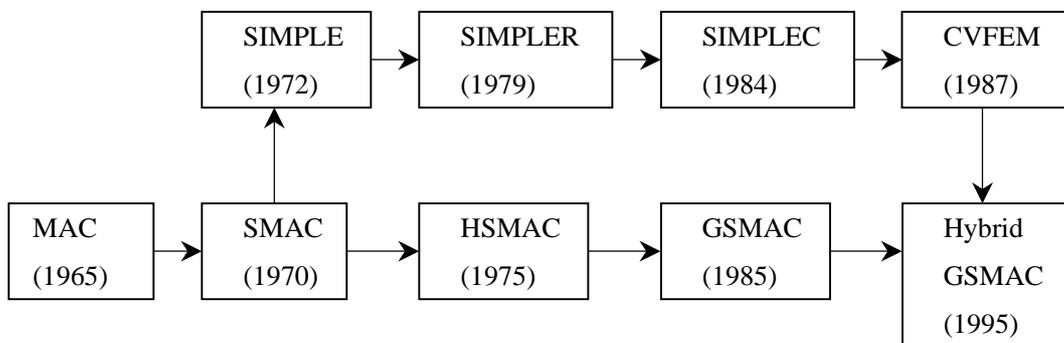


Fig. 2.1 Elucidation of incompressible fluid and the development

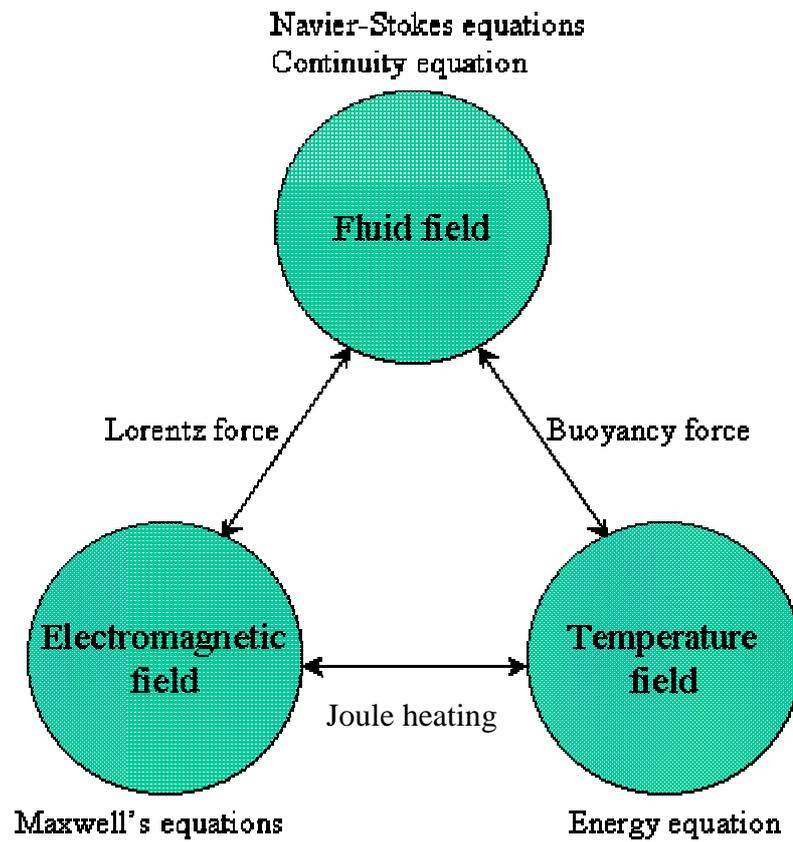


Fig. 2.2 Interaction with flow field, temperature field and electromagnetic field

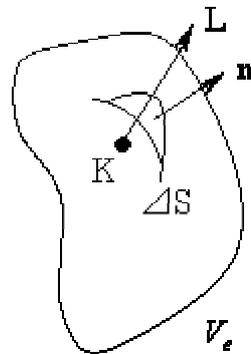


Fig. 2.3 Evaluation of a $\iint \frac{1}{\Delta n} dS$, $\Delta n = \overrightarrow{KL} \cdot \mathbf{n}$

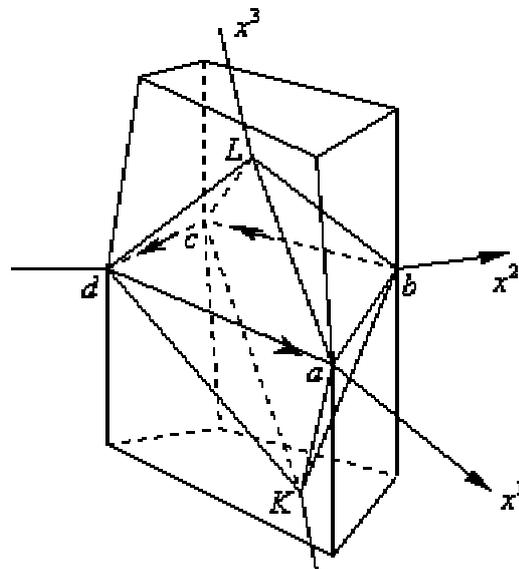


Fig. 2.4 Calculation of \mathbf{n} on $abcd$

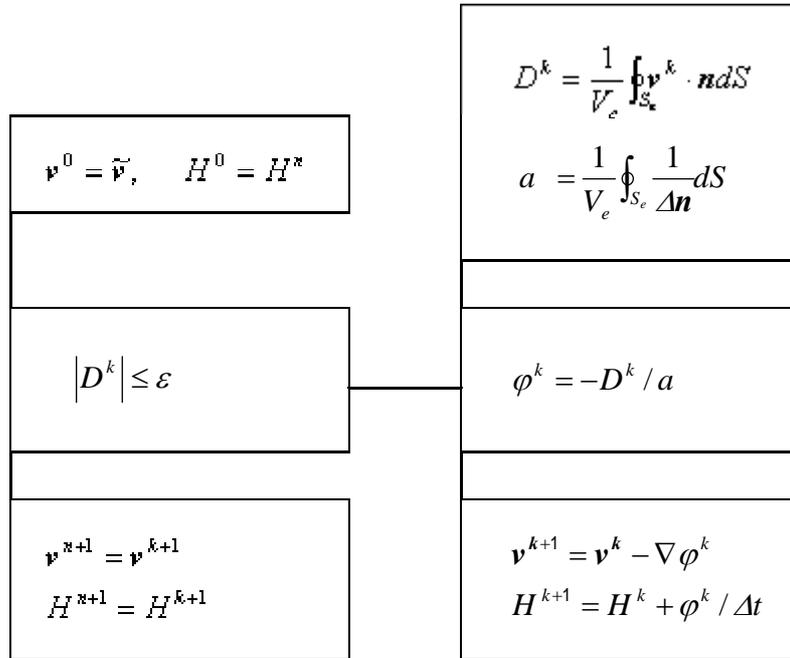
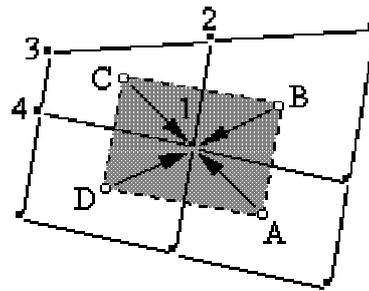
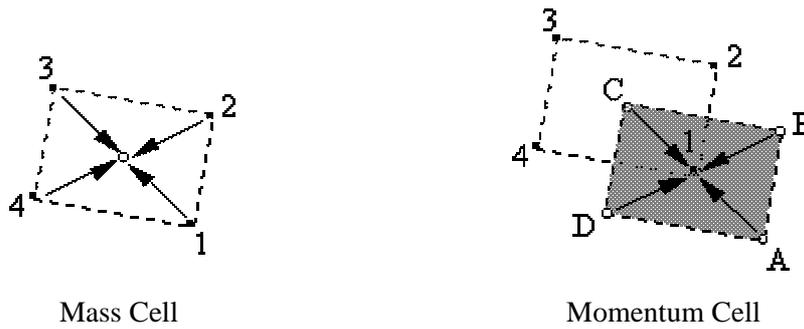


Fig. 2.5 Simultaneous relaxation of total energy H and velocity \mathbf{v}



Basic Cell



Mass Cell

Momentum Cell

Fig. 2.6 Element average and node average of mass

第3章 同心二重球における自然対流の数値解析

3.1 3章の緒言

自然対流現象は地球上の大気の大気対流や海洋の大気対流、そして地球内部の外核の大気対流やマントル対流^(3.1)などに代表される大規模な自然現象から、原子力プラント^(3.2)装置の設計や飛行機の乗員室空調設計、電子装置冷却の設計や照明器具の設計等の工学的分野まで幅広く存在する。物体周囲の有限区間内の自然対流問題を解析することは重要であり、その自然対流問題の基本的な解析モデルとして、無限に広い2つの平行平板^(3.3)、同心二重円管^(3.4)あるいは同心二重球などが考えられる。

中心を共有する二重球内の球殻間に流体を閉じ込め、内球の表面より外球に向けて温度勾配を与えると対流が発生する。この現象は身近な自然現象として、また工業的な応用の自然対流問題として古くから研究が行われてきた。その一つの形状として、同心二重球内の自然対流問題に対する過去の実験では、球内の流れの様子、熱の移動、温度の分布などが詳細に調べた研究が報告^(3.5)されている。また、低 Ra 数 10^5 以下の場合には数値解析結果も報告^(3.6)されている。そして、その解析結果はいずれも実験結果と良好に一致しており、 Ra 数 10^5 以下の流れについては、速度場および温度場の様子がほぼ明らかにされている。しかし、それ以上の高 Ra 数の数値解析は少ない^(3.7)。そこで、高 Ra 数、低 Pr 数の流体は実験では困難であるため数値解析^(3.8)による解明が必要である。

同心二重球内の自然対流は1973年Yinらが実験的に作動流体を空気と水として、流れの様子を調べた実験研究報告^(3.5)があり、数値解析では1993年池田らにより Ra 数 10^7 以下の場合の流れの様子・温度分布・熱の輸送などを詳細に解析した結果が報告^(3.9)されている。

本章では、同心二重球内の自然対流の検証として、 Ra 数が高い場合の3次元解析を行い、球の内部の流れや温度分布を解明し、Yinら^(3.5)の実験結果との比較を行う。

主な記号

C_v : 定積比熱

C_α : 勾配ベクトル

- d : 変形速度テンソル
 d : 代表長さ
 e : 重力方向単位ベクトル
 Gr : Grashof数
 g : 重力加速度
 K : 全運動エネルギー $= \int_{\Omega} v^2 / 2 d\Omega$
 L_{α} : 境界積分項
 Nu : 壁面平均 Nusselt 数
 Pr : Prandtl 数
 Ra : Rayleigh数
 Re : Reynolds 数
 S_{α} : 境界積分項
 U : 代表速度
 ΔT : 代表温度差
 λ : 同時緩和パラメーター
 添字
 $()_{\alpha, \beta}$: 局所節点番号 $\alpha, \beta = 1 \sim 8$

ただし、上記以外の主な記号は第2章を参照されたい。

3.2 基礎方程式

熱対流を表す厳密方程式は連続の方程式、運動量の方程式、エネルギーの方程式、そして状態方程式より成り立つ。

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu_1 \mathbf{d}) + \rho \mathbf{g} \quad (3.2)$$

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \Phi_v + \rho r \quad (3.3)$$

$$p = p(\rho, T) \quad (3.4)$$

ここで、式(3.2)において流体の粘性係数が温度に依存しない場合、運動の方程

式は,

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu_1 \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (3.5)$$

となる。

3.3 Boussinesq 近似

密度は広義的に体積密度として使われている。このとき、密度は圧力と温度の関数として表示できる。

$$\rho = \rho(p, T) \quad (3.6)$$

この状態方程式を等温圧縮率(η)と体積膨張率(β)を用いて密度の状態方程式を表すと,

$$\rho = \rho_0 [1 + \eta \Delta p - \beta \Delta T] \quad (3.7)$$

となる。

そこで、前節の厳密方程式において、重力項以外の密度は一定($\rho = \rho_0$)という Boussinesq 近似を適用する。しかし、流体が圧縮性を持つ場合、そして流体に作用する温度が大きく変化する場合、この近似を適用すると精度が悪くなるため慎重な検討が必要となる。厳密方程式に対して Boussinesq 近似を適用すると以下の基礎方程式が導かれる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \beta(T - T_0) \mathbf{g} \quad (3.9)$$

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \nabla^2 T \quad (3.10)$$

式(3.9)は、運動量方程式の鉛直方向の成分以外は代表点の密度を持つ非圧縮性

流体に等しいことを意味する。ここで、式(3.9)の運動方程式を回転形で表示すると、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla H + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \nu \nabla \times \boldsymbol{\omega} - \beta \Delta T \mathbf{g} \quad (3.11)$$

となる。ここで H はベルヌーイ(Bernoulli)関数で、

$$H = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \Theta \quad (3.12)$$

である。ただし Θ は重力ポテンシャル、 $\nu = \mu_1 / \rho$ は動粘性係数である。

3.4 無次元化

つぎに、上記の基礎方程式(3.8)~(3.11)の物理変数に対してそれぞれの代表量を以下のように考える。

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{d}, \quad t = \frac{t^*}{d/U}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}^*}{U}, \quad p = \frac{P^*}{\rho^* U^2}, \\ T &= \frac{T^* - T_c}{T_h - T_c}, \quad \nabla = \frac{\nabla^*}{1/d} \end{aligned} \quad (3.13)$$

ただし、 d : 代表長さ、 U : 代表速度、 $\Delta T = (T_h - T_c)$: 代表温度差である。上記の代表量を用いて有次元の式(3.8)~(3.11)に対して無次元化を行うと以下のような支配方程式系が得られる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla H + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{Gr}{Re^2} \mathbf{e} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) T + \frac{1}{Pr Re} \nabla^2 T \quad (3.16)$$

ここで、無次元化の際に現れる無次元数は流れ場および温度場の特性を把握するために用いられる。無次元数はそれぞれ レイノルズ数： $Re = Ud/\nu$ ，グラスホフ数： $Gr = \beta \Delta T g d^3 / \nu^2$ ，プラントル数： $Pr = \nu / \alpha$ ，ヌッセルト数： $Nu = (h\Delta T) / (\kappa \Delta T / d)$ である。ここで、 $Ra = Gr \cdot Pr$ の関係が成立する。そして、式(3.15)において渦度ベクトルは $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ のように定義される。

3.5 基礎方程式の離散化

前節の支配方程式(3.14)～(3.16)に対して離散式および要素行列式^(3.10)を順次に導いていく。速度場の離散化はGSMAC法^(3.11, 3.12)を用いて行う。また、温度場には前進Euler法を用いる。離散化された式は速度場、温度場の順に計算を行う。

各場の時間進行において、速度場^(3.13)は、式(3.15)を圧力 p について陰的に、その他の変数については陽的に時間進行させる。そこで、速度と圧力は時間ステップ $(n+1)$ の非圧縮の条件(3.14)を満足するように修正する。温度場は、式(3.16)を温度 T について陽的に、速度ベクトル \mathbf{v} について陰的に時間進行させる。つぎに、要素行列式の導出にはGalerkin 法^(3.14)を用いる。使用される補間関数は、 \mathbf{v} および T については六面体双1次要素、その他の変数については要素内一定の補間をする。その際、重み関数は固定境界 Γ_1, Γ_5 において零となる関数 $\delta_{\mathbf{v}}, \delta_T$ を考える。

その結果、以下の要素行列方程式系を得る。

(速度場)

・予測子ステップ ($\mathbf{v}_{\beta}^n, p_e^n, T_{\beta}^n$: 既知)

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\alpha\beta} \frac{\tilde{\mathbf{v}}_{\beta} - \mathbf{v}_{\beta}^n}{\Delta t} = & -\frac{\Delta t}{2} B_{\alpha\beta} \mathbf{v}_{\beta}^n + C_{\alpha} H_e^n - \frac{1}{Re} D_{\alpha\beta} \mathbf{v}_{\beta}^n \\ & + M_{\alpha\beta} \left(\mathbf{v}_{\beta}^n \times \boldsymbol{\omega}_e^n + \frac{Gr}{Re^2} T_{\beta}^n \mathbf{e} \right) - S_{\alpha} \end{aligned} \quad (3.17)$$

・同時緩和^(3.12)反復ステップ ($\mathbf{v}_{\beta}^{(0)} = \mathbf{v}_{\beta}, p_e^{(0)} = p_e^n$: 初期値)

$$\phi_{p_e}^{(k)} = -\lambda C_{\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\alpha}^{(k)} \quad (3.18)$$

$$p_e^{(k+1)} = p_e^{(k)} + \frac{\phi_{p_e}^{(k)}}{\Delta t} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{v}}_{\beta}^{(k)} &= \bar{M}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{v}}_{\beta}^{(k)} + \mathbf{C}_{\alpha} \phi_{p_e}^{(k)} \\ (\mathbf{v}_{\beta}^{(n+1)} = \mathbf{v}_{\beta}^{(k+1)}, \quad p_e^{(n+1)} = p_e^{(k+1)} : \text{収束値}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

(温度場)

エネルギー方程式 ($\mathbf{v}_{\beta}^{(n+1)}$, T_{β}^n : 既知)

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\alpha\beta} \frac{T_{\beta}^{(n+1)} - T_{\beta}^n}{\Delta t} &= -\frac{\Delta t}{2} B_{\alpha\beta} T_{\beta}^n - \mathbf{v}_e^{(n+1)} \cdot \mathbf{A}_{\alpha\beta} T_{\beta}^n + \\ &\quad - \frac{1}{PrRe} D_{\alpha\beta} T_{\beta}^n + L_{\alpha} \end{aligned} \quad (3.21)$$

ただし、各変数の下添字 α , β は六面体双1次要素の要素内局所節点番号を示し、それぞれ1から8の値を取る。下添字 e は要素内一定を示し、上添字 n および (k) はそれぞれ時間ステップ数、同時緩和ステップ数を表す。そして、 λ は同時緩和パラメーターを示す。式中の各要素係数行列と境界積分項は、それぞれ以下のように計算される。

$$\mathbf{M}_{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega \quad (3.22)$$

$$\mathbf{C}_{\alpha} = \int_{\Omega^e} \nabla N_{\alpha} d\Omega = \Omega^e \nabla_{\alpha} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{A}_{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} N_{\alpha} (\nabla N_{\beta}) d\Omega \approx \frac{\Omega^e}{8} l_{\alpha} \nabla_{\beta} \quad (3.24)$$

$$D_{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} (\nabla N_{\alpha}) \cdot (\nabla N_{\beta}) d\Omega = \Omega^e \nabla_{\alpha} \cdot \nabla_{\beta} + D_{\alpha\beta}^{\Gamma} \quad (3.25)$$

$$B_{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{v}_e \cdot \nabla N_{\alpha}) (\mathbf{v}_e \cdot \nabla N_{\beta}) d\Omega \approx \Omega^e (\mathbf{v}_e \cdot \nabla_{\alpha}) (\mathbf{v}_e \cdot \nabla_{\beta}) \quad (3.26)$$

$$M_\alpha = \int_{\Omega^e} N_\alpha d\Omega \quad (3.27)$$

$$(3.28)$$

$$L_\alpha = \int_{\Gamma_\alpha^e} N_\alpha \frac{1}{PrRe} \frac{\partial T^n}{\partial n} d\Gamma^e \quad (3.29)$$

ここで、 $M_{\alpha\beta}$ は質量行列、 C_α は勾配ベクトル、 $A_{\alpha\beta}$ は移流行列、 $D_{\alpha\beta}$ は拡散行列、 $B_{\alpha\beta}$ はBTD行列^(3.15, 3.16)、 M_α は質量ベクトル、 S_α と L_α は境界積分項である。これらの定式化の際に C_α 、 $A_{\alpha\beta}$ 、 $D_{\alpha\beta}$ 、 $B_{\alpha\beta}$ には離散化ナブラ演算子^(3.17, 3.18, 3.19)が用いられている。ただし、拡散行列 $D_{\alpha\beta}$ のみアウーグラス行列 $D_{\alpha\beta}^\Gamma$ を付加して数値的不安定性を制御している。式中における N_α 、 \mathbf{n} はそれぞれ線形補間関数、単位法線ベクトルを表す。また、 Ω 、 Γ はそれぞれ要素内積分領域、境界積分領域を表す。そこで、 Ω^e は要素体積、定基底ベクトル $l_\alpha = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ である。

3.6 数値解析モデル

計算モデルとして同心二重球の間隙内の熱対流問題を考える。図 3.1 に計算モデルを示す。二重球の内外半径比(D_i/d)はそれぞれ 0.86, 3, 18 とし、その間の流体は空気とする。ここで、 D_i と d はそれぞれ内球の直径、 $r_o - r_i$ を示す。計算に用いた格子の作成は Fan ら^(3.7)の数値解析手法を参考に、不等分割を行っている。二重球の間隙における中心の格子幅は内側と外側の格子幅の 3 倍になるようにする。実際の計算には Case によって二つの格子を使用するが、それは 48,000 格子と 279,936 格子である。279,936 格子の作成は等分割にしている。表 3.1 に計算パラメータを示す。表 3.1 において、Case 2 の計算は 279,936 格子を使用して計算を行う。他の Case はすべて 48,000 格子を用いる。表 3.1 の計算パラメータにおいて、 Ra 数は半径比に対してそれぞれ、 $Ra=7.1 \times 10^5$ 、 $Ra=7.1 \times 10^6$ を用いる。そして計算時間の刻み幅は全 Case において $\Delta t=0.0002$ とする。また、ポアソン方程式が解かれる際に、すべての要素で収束条件が満足されるように ε (式(3.14)の離散式)は 0.001 とし、反復は 200 回まで行われる。

図 3.1 において、速度場の流速 \mathbf{v} と ベルヌーイ(Bernoulli)関数 H の初期条件は 0 とする。流速の境界条件は全壁面においてすべりなしとする。温度場の

温度 T の初期条件は、内球と外球の間の温度に対しては 0 とし、内球の外面と外球の内面の温度に対してはそれぞれ $1, 0$ とする。そして、熱の出入りは内球と外球の境界でないものとする。流体に外力として働く重力は $-z$ 方向に作用するものとする。

3.7 計算結果および検討

3.7.1 $Ra=7.1 \times 10^5$, $Ra=7.1 \times 10^6$ の流れについて

表 3.1 の Case 1 より Case 6 までのそれぞれの条件に対して解析を行い流れが十分発達した状態の解を得た。その結果のうち、速度場の結果を図 3.2～図 3.7 に示す。これらの結果は安定した流れを示している。この判断はハン^(3.7)の議論で確認される。ハンは二重同心球の場合、 Ra 数が 10^7 より大きければ、乱流として計算するのは合理的なことだと指摘している^(3.20)。そのとき、 Gr 数と Ra 数の関係は、 $Gr=(Ra \cdot r_i)/(Pr \cdot \Delta r)$ である。

次に、図 3.8 はRayleigh数に対する同心二重球殻内の対流パターンの分類を示す。図中において三角形の表示はBishopらの実験^(3.21)によるものである。そして、円形の表示はYinらの実験結果^(3.5)を表す。Yinらは対流パターンを三つに分類している。それは、腎臓形状渦(Kidney-Shaped Eddy Flow)、月形状の渦(Crescent Eddy Flow)、そして不安定流れ(Unsteady Flow)である。そこで、本解析の計算条件をこの分類に適用すると、Case 1 は腎臓形状渦に当たる。図 3.2 (a)の流れ場の断面図はこのことを裏づける。そして、Case 1 以外の全Caseは不安定流れに相当する。

しかし、本解析はこのような分類に従わないところがある。なぜならば、図 3.2 の速度ベクトルおよび図 3.5 の流線を参考すると半径比が 0.86 の場合、 $Ra=7.1 \times 10^6$ のときに腎臓形状渦が観察され、しかも安定流れを示しているからである。また、半径比が 3 の場合、 $Ra=7.1 \times 10^5$, $Ra=7.1 \times 10^6$ のときにはそれぞれ月形状の渦と腎臓形状渦を示した。そして、半径比が 18 の場合、 $Ra=7.1 \times 10^5$ において月形状の渦が観察された。このように図 3.8 のBishopおよびYinの結果を基に本解析結果の対流パターンを分類するには無理があるように思われる。ところが、 $Ra=10^7$ 以上は非定常流れであると判断しているハン^(3.7)の主張が正しいと思う。

図 3.9 に Yin らの可視化実験結果と数値解析結果を示す。Yin らはタバコの煙

(Tobacco Smoke)を用いて可視化し、その動きを写真で撮っている。このとき、流れが十分に発達する前に煙が拡散するため、写真は流れが未発達るとき撮られている。図 3.9(a)の左側の実験結果は球の上部で流れが第二次セルを形成し、全般的に月形状の渦を現している。これに対して、数値解析結果は良好に一致している。つぎに、図 3.9(b), (c)の実験結果は腎臓形状渦を現している。これらの共通点として渦の中心部における低速層のゆがみが挙げられる。これらのゆがみに対して数値解析は明確に捕らえていないことが分かる。同図(b)の場合、放射状の振動が中心部に現れ、渦の中心部より内球側の方へ運動エネルギーを効率的に移動させている。この振動の様子は数値解析では再現されていない。また、同図(c)の場合、渦の中心が崩れながら収縮運動を示す。その様子は数値解析でも現れている。この場合は、内外壁面近傍での流速は渦の影響を受けない特徴がある。このように腎臓形状渦を示す流れは複雑な運動を含んでいることがわかる。

3.7.2 半径比 0.86, $Ra=7.1 \times 10^6$ の流れについて

図 3.10～図 3.13 に半径比 0.86, $Ra=7.1 \times 10^6$ の場合、無次元時間 $t=4 \sim 40$ における速度場の様子を示す。これらの計算に用いた格子数は 279,936 である。これを用いた理由は、同じ計算条件下で 48,000 格子を使用して計算した場合、流れは定常に至らなかったためである。しかし、図 3.10 が示すように Case2 の計算は定常解を得たものの、無次元時刻 $t=4$ 近傍において解の不安定が見られる。それは図 3.14 が示すように運動エネルギーの変化に起因すると思われる。特に、この時間帯は対流が急に発達するため、安定した計算には十分な計算格子が必要とする。したがって、 $t=4$ 近傍の解の不安定は計算格子の粗さに起因するものと考えられる。このような問題点があるにも関わらず、Case2 は定常解を得ることができた。このことは図 3.15 のヌッセルト数の変化より確認される。

図 3.10(a)は $t=4$ における速度ベクトルの分布を示す。その大きさは最大流速を赤、最小流速を青として表示している。流体の流れは $t=4$ 近傍で最も発達することが確認された。そのため、この時刻の流れの様子がその後の流れに大きく影響する。この時刻における流れパターンは全般的に腎臓形状渦を示している。図 3.10(d)の流線は流れ形状の変化をよく表している。特に、渦の中心は球の上部で形成されている。この渦の形成には球間隙の距離が大きく関係してい

ると考えられる。その距離がほぼ最大になると、球の上部で渦は形成されず、熱は外球の内側の壁面に沿って流れていくと考えられる。流体に作用する浮力によって生じたこの渦は下部へ流れていく。 $t=4$ における速度場の発達過程はよく捕らえているが、二つの渦の周辺で流れの発散が生じている。この不安定は図 3.10(c)の等温線図よりも確認できる。それはその部分で計算格子の不足が原因と思われる。熱の移動と共に対流は進行し、図 3.11 の $t=8$ においては小さい渦が完全に本流から分離され下部の方へ移動していくことが分かる。ところが、球の中心部分における上向きの流れは $t=4$ のときに比べて細長くなっている。しかも、球の上部の流速はより速いことを示している。それは対流の初期移動と共に球の上部へ集中する内圧が分散されることに起因すると考えられる。その後、渦は消滅しながら(図 3.13 の $t=40$)流れ場は定常状態に至る。その様子を図 3.13 の(c), (d)が示している。

図 3.16 に球の円周方向の $\theta=0^\circ$, $\theta=90^\circ$, そして $\theta=180^\circ$ における流速の分布を示す。 $\theta=0^\circ$ における流れは、全ての速度ベクトルが上向きの方向を表している。そして、その大きさは球の上部で大きいことが分かる。ところが、 z 軸上の流速 v_z 成分は球の上部で最も発達していることが分かる。実際、 $r=0.81$ のとき、最大流速 $v_z=0.88$ を示している。その支点から流速は急に下がり、外球の上部では 0 に至る。その原因は外球が流体に与える内圧によるものと考えられる。それによって、球の上部に向かっていた流速は左右に流れていくことが可能になる。そして、 $\theta=90^\circ$ における速度ベクトルの大きさは全般的に弱いことが分かる。そして、その方向は大きく二つに分かれている。内球の表面($r=0.3$)から $r=0.37$ までの流れは上向きを示し、そこから $r=0.81$ までの流れはほぼ停止状態を示し、そこから $r=1$ までの流れは下向きに向かっている。 $\theta=90^\circ$ における最大流速 v_z は内球の近くで現れている。それは、 $r=0.32$ のとき、 $v_z=0.30$ である。他の支点における流速はそれより小さいことが分かる。そして、 $\theta=180^\circ$ においては、内球の表面($r=0.3$)から $r=0.68$ までの流れの方向は上向きを示し、その大きさは弱いことがわかる。そして、そこから $r=1$ まで、流速はほぼ零に近いことが分かる。

図 3.17 の温度分布より、高温の流体は球の上部に分布することが分かる。温度の移動は、 $\theta=0^\circ$ ではほぼ線形的に流れるが、 $\theta=90^\circ$ と $\theta=180^\circ$ 線上では非線形的に流れている。流れ場へ大きな影響力をもつ温度は z 軸上に分布している。そのため、 z 軸上の流れを主流とも言える。内球の高温は 8 割程度が z 軸上で外球の方へ伝わる。ところが、 $\theta=90^\circ$ と $\theta=180^\circ$ 線上では、内球の高温が外球に伝わるのはほぼ 0 に近い。 $\theta=90^\circ$ と $\theta=180^\circ$ 線上では、明らかに熱が伝わ

る領域は両方とも $r=0.3$ から $r=0.4$ までに過ぎない。この領域の以外では熱の移動は見当たらない。 $\theta=90^\circ$ と $\theta=180^\circ$ の円周方向において、両者の温度分布にはそれほどの差は見られない。したがって、熱の9割以上が二重球の上部に分布することが分かる。このため、流れの対流は図 3.13(b)の速度ベクトルが示すような様子で定常に至ることになる。これが半径比 0.86, $Ra=7.1 \times 10^6$ における大きな特徴である。

3.7.3 半径比 3, $Ra=7.1 \times 10^6$ の流れについて

図 3.18～図 3.21 に半径比 3, $Ra=7.1 \times 10^6$ の場合、無次元時間 $t=4 \sim 100$ における速度場の様子を示す。流れは $t=4$ において球の上部で急激に発達する過度変化を示している。そのとき渦は腎臓形状を示し、流速は外球近傍で最大値を描いている。一方、流れの全運動エネルギーは図 3.22 が示すように $t=4 \sim 10$ の間に最大値を示す。この間に渦の中心に蓄積されていた運動エネルギー^(3.22)は外球の表面に沿って球の下部へ広がる。その様子を図 3.19 の $t=8$ の速度場は見せている。また、この図は頂上部の中心において逆流の発生を示している。これは速度が遅い部分への高いエネルギーを持つ渦の拡大現象の影響によるものとみられる。その逆流の程度は中心渦の消滅と共に進行する。図 3.20 の $t=20$ の速度場はこのことをしめしながら、外球近傍の流れが球の下部へ長く発達していく様子も確認できる。また、このときの特徴として、内球表面から外球の上部へ発生していく速度の低下を挙げられる。そして、 $t=40$ においては内球中心に向けて高い速度ベクトルが観測されている。図 3.21 の $t=100$ の速度場の図では内球中心への逆流がみあたらない。これは流れ場の安定を意味する。安定化された流れ場の定常状態は図 3.23 の平均 Nusselt 数の時間変化より確認できる。また、定常状態における速度場および温度場は z 軸を中心に対称性を保っていることが確認できた。これらのことより、半径比 3, $Ra=7.1 \times 10^6$ の定常状態における流れのパターンは球の上部に渦の中心をもつ腎臓形状渦であることをいえる。

図 3.24 に球の円周方向の $\theta=0^\circ$, $\theta=90^\circ$, そして $\theta=180^\circ$ における流速の分布を示す。 $\theta=0^\circ$ における流れは、球の上部を除いて、全ての速度ベクトルが上向きの方角を示している。球の上部で逆流が発生しているが、それはその部分で流圧が小さいため起こる現象と見なせる。球の最上層部で流圧が小さいのは球の幾何学的な構造に依存すると思われる。 z 軸における最大流速は $r=0.76$ のとき、 $v_z=0.25$ として確認される。内球から外球へ発達する上昇流を考えると、流速 $v_z=0.25$ は大きな値ではない。定常状態にも関わらず、最大流速が $\theta=90^\circ$ 線上

で見られることは独特な現象とも言える。これは半径比 0.86 の場合と異なる現象である。半径比 0.86 のときには、上昇流が集中的に $+z$ 方向に発達していたが、半径比 3 の場合は、 $+z$ 方向の上昇流は $\theta=90^\circ$ 線上と $\theta=-270^\circ$ 線上に分散されていることが分かる。 $\theta=90^\circ$ における速度ベクトルの大きさは S 字型を示している。内球に近いところでは大きな上昇流を示し、外球に近いところでは下降流が見られる。このことは、流体の流れは $\theta=90^\circ$ 線上を中心に大きく発達していることを意味する。 $\theta=90^\circ$ 線上を中心に発達している流れは左右対称に近いことが分かる。そこで、球内部の最大流速の大きさは $r=0.62$ のとき、 $v_z=0.37$ として確認される。このため、球内部の大きな渦は $\theta=90^\circ$ 線上の最大流速を中心に形成されていることを図 3.21(b) の速度ベクトルから確認できる。また、このことは球の上部で流圧が小さくなる原因でもある。実際、球の上部の領域は z 軸を中心に発生した左右両側の大きな渦に挟まれている。 $\theta=180^\circ$ において、内球の表面 ($r=0.6$) から $r=0.8$ までの流れの方向は上向きを示し、その大きさは弱いことがわかる。そして、そこから $r=1$ まで、流速はほぼ零に近いことが分かる。

図 3.25 の温度の分布より、高温の流体は球の上部に分布することが分かる。また、 z 軸上ではほぼ線形的に流れる。そして、 $\theta=90^\circ$ 線上と $\theta=-270^\circ$ 線上では非線形的に流れている。 z 軸上の温度分布は内球から外球に向かって線形的に発達しているが、 $r=0.92$ のところで急な逆転を見せている。それは、流れの逆流の影響によるものと考えられる。ところが、半径比 0.86 のとき(図 3.17)と比べて、より多い量の熱が球の上部に止まっていることを想定することができる。これは、半径比 0.86 より半径比 3 の方が球の上部の体積は狭いことから、単位面積当たりに熱を吸収する量が多くなることを意味する。そのため、図 3.23 の Nu 数は半径比 0.86 の Nu 数(図 3.15)より大きい、それは単位面積当たりに移動する熱の量が多いことを示す。図 3.25 において、 $\theta=90^\circ$ 線上の温度分布は S 型を示している。内球から外球に向けて熱が移動する量は減少していくが、 $r=0.90$ のとき、温度の大きさは大きくなっている。 $\theta=180^\circ$ では、 r 線上の温度分布は滑らかな非線形性を示している。ところが、 $r=0.8$ において熱の移動はほぼ零に近くなる。また、流体の対流も起こらなくなる。

3.7.4 半径比 18, $Ra=7.1 \times 10^6$ の流れについて

図 3.26～図 3.29 に半径比 18, $Ra=7.1 \times 10^6$ の場合、無次元時間 $t=8 \sim 100$ における速度場および温度場の様子を示す。そして、各図に時間ごとの流線を示す。流れ場は流線の様子が示すように層流の領域で現れる月形状の渦の特徴を持つ

ている。この流れが可能になっているのは、熱の伝達よりは熱の伝導の方が支配的な流れであるからである。これらのことから、気体の流れは図 3.26(b)が表すように速度境界層の内側で行われていることがわかる。図 3.30 の平均Nusselt 数の時間変化より $t=8$ 近傍で対流が定常に至っているように思われるが、実際に対流は次の段階に入ることになる。図 3.27 は $t=20$ における等温線図の球上部では等温線が揺れている。これは球の上部に熱が移流して集まり、その領域の温度場が不安定状態であることを意味する。これを原因として、球の上部は新たに流れが生じ始める。 $t=40$ および $t=100$ の等温線図より球の上部で活発な温度の移流が確認される。その結果、新たな流れが形成されていることを図 3.28(c)の流線図から確認できる。この図において上部の円形の流線は対流が局部的に発生していることによるものと思われる。これは低温壁面に集まる高温気体により流れが新たに形成されることを意味する。円形の流線の色が異なるのは、それらの速度ベクトルが逆方向の向きを指すからである。小さな逆方向の対流は弱まっていくと同時に、外球の上部へ持続的に移流する熱の影響を受けることになる。その結果、二次流れの渦は球の下へ移動と共に、その中心は図 3.29(d)のように $\theta=40^\circ$ および $\theta=320^\circ$ の位置に移るようになる。このとき、流速は上乘すると予想される。図 3.30 の $t=100$ おいて全運動エネルギーが増えることはこのことに起因すると思われる。このように複雑な流れ場の特性を持っているにも関わらずCase 6 は速度場および温度場の対称性を十分満足していることが確認されている。

図 3.32 に球の円周方向の $\theta=0^\circ$, $\theta=90^\circ$, そして $\theta=180^\circ$ における流速の分布を示す。 $\theta=0^\circ$ における流速 v_z は非常に小さいことがわかる。その速度ベクトルの方向はすべてが $+z$ 方向に向かっている。 $\theta=0^\circ$ の領域は浮力の影響を受けるにも関わらず、熱対流が流れ込まないことは、半径比 18 の大きな特徴である。二重球の隙幅が狭いため、内球の高温は球の上部へ十分に移動することができず、低温の外球へ先に到達する。このため、熱の移動は複雑な現象をしめす。また、半径比 0.86 に比べたら、二重球の間隔の体積が小さいため、熱の移動は単純に浮力のみ大きく依存することはできなくなる。したがって、球の上部と左右側部で面白い現象が見られる。球の上部は相対的に内圧が小さいため、流動は不安定で変動しやすい状態を示す。その反面、球の両側面では浮力が大きく作用するため、流れは発達することができる。図 3.32 の $\theta=90^\circ$ 領域の速度ベクトルはこのことを示している。 $\theta=90^\circ$ 線上の流速は大きなS字型を描いている。そのS字型は座標 $r=0.95$ を中心に左右対称性を保っている。最大流速は $r=0.92$ と

$r=0.98$ のところで、大きさは $v_z=0.24$ を取っている。そして、速度ベクトルの向きは $r=0.92$ を前後に、上昇と下降を対称的に示している。 $\theta=180^\circ$ 領域では、内球の表面($r=0.9$)から外球の表面($r=1$)まで、流れの方向は上向きを示し、その大きさは弱いことがわかる。

図 3.33 の円周方向 $\theta=0^\circ$ において、熱は他の半径比に比べて、ゆっくり移動することが分かる。多量の熱が球の上部へ移流していくにも関わらず、流れの主流を形成することにはならない。これが、この Case 6 の大きな特徴である。ところが、 $\theta=90^\circ$ 領域では、熱はほぼ線形的に移動して行くことが分かる。そのため、 $\theta=90^\circ$ 線上を中心に大きな渦が発生されることが可能になる。この現象は他の半径比では見当たらないことである。このような温度の移動の線形性は流体の流れに大きく影響を及ぼす。従って、浮力支配的な流れの性質と伝導が優先する流れの特徴が複雑に関与している。図 3.33 の $\theta=180^\circ$ の領域では球の下部にも関わらず相当の熱が外球の方へ直接伝わっていることが分かる。激幅が狭いため、熱は伝達より伝導が支配的だと思われる。

3.8 3章の結言

本章では GSMAC 有限要素法により同心二重球内の自然対流の解析を行った。作動流体が空気の場合、以下の結言を得た。

- (1) 計算に用いたパラメーターは $Pr=0.71$ 、そして $Ra=7.1 \times 10^5$ 、 $Ra=7.1 \times 10^6$ であり、これらの計算では定常解を得ている。 $Ra=7.1 \times 10^5$ 、 $Ra=7.1 \times 10^6$ の計算結果は安定した流れを示している。
- (2) $Ra=7.1 \times 10^5$ において、半径比 3 と 18 の場合は月形状の渦を示した。半径比 0.86 に対して $Ra=7.1 \times 10^5$ と $Ra=7.1 \times 10^6$ 、そして半径比 3 に対して $Ra=7.1 \times 10^6$ の場合は腎臓形状渦を示した。その他の計算条件では不安定流れを示す。
- (3) $Ra=5,964$ 、 $Ra=229,330$ 、そして $Ra=749,760$ の計算結果は Yin らの可視化実験結果と比較し、良好な一致が確認されている。可視化実験結果と比較を行った $Ra=5,964$ の解析結果は月形状の渦を示した。そして、 $Ra=229,330$ および $Ra=749,760$ の解析結果は腎臓形状渦を示した。いずれの結果も可視化実験結果を反映している。

- (4) $Ra=7.1 \times 10^6$ に対して、内球の半径が小さくなるほど計算は困難であることが分かった。また、定常に至る時間も長くなることが分かった。しかも熱の9割以上が二重球の上部に分布することが確認された。また、内球の半径が大きくなる程、熱は伝達よりは伝導が支配的になる。そのため、球の上部での熱の動きは複雑になることが確認された。

3章の参考文献

- (3.1) 梅村，機論，57-543，(1991)，3859.
- (3.2) Ikeda，T.， et al， J. Nucl. Sci. Tech.， 25-8， (1988)， 615.
- (3.3) 井門・棚橋，機論，56-522，B(1990)，425.
- (3.4) 神山・他2名，機論，52-484，B(1986)，3947.
- (3.5) Yin，S. H.， et al， Int. J. Heat and Mass Trans.， 16-10， (1973)， 1785.
- (3.6) Chiu，C. P. and Chen，W. R.， Heat and Mass Trans.， 31， (1996)， 137.
- (3.7) Qin-Yin Fan，第7回数値流体力学シンポジウム講演論文集，(1993)，435.
- (3.8) Garg，V. K.， Int. J. Heat and Mass Trans.， 35-8， (1992)， 1935.
- (3.9) 池田ら，機論，59-563，B(1993)，2252.
- (3.10) 棚橋，はじめての CFD，(1996)，コロナ社.
- (3.11) 棚橋・斎藤，京都大学数理解析研究所講究録，548，(1985)，122.
- (3.12) 加藤・棚橋，機論，57-540，B(1991)，2640.
- (3.13) 棚橋，GSMAC-FEM，(1991)，アイピーシー.
- (3.14) 矢川，流れと熱伝導の有限要素法解析，(1983)，培風館.
- (3.15) Dukowicz，J. K. and Ramshaw，J. D.， J. Comp. Phys.， 32， (1979)， 71.
- (3.16) Gresho，P. M.， et al.， Int. J. Num. Meth. Fluids， 4， (1984)， 557.
- (3.17) 奥田・他2名，日本原子力学会誌，31，(1989)，588.
- (3.18) Wiener，R. S.， An Introduction to Oriented Programing ang C++，(1989)，Addison Wesley.
- (3.19) 大島・他2名，機論，59-562，B(1993)，1848.
- (3.20) Elder，J. W.， J. Fluid Mech.， 23， (1965)， 99.
- (3.21) Bishop，E.H.， Ph.D. Dissertation， Univerisity of Texas， Austin(1964) .
- (3.22) 棚橋，連続体の力学 (8)，(1992)，理工図書.

3章の表および図

表 3.1 計算条件

図 3.1 計算モデル

図 3.2 速度ベクトルの分布($D_i/d=0.86$)

図 3.3 速度ベクトルの分布($D_i/d=3$)

図 3.4 速度ベクトルの分布($D_i/d=18$)

図 3.5 流線($D_i/d=0.86$)

図 3.6 流線($D_i/d=3$)

図 3.7 流線($D_i/d=18$)

図 3.8 流れの形状による分類

図 3.9 速度場に対する実験と数値解析の比較($Pr=0.71$, $Ra=749,760$)

図 3.10 $t=4$ における速度場と温度場の分布($Ra=7.1 \times 10^6$, $D_i/d=0.86$)

図 3.11 $t=8$ における速度場と温度場の分布($Ra=7.1 \times 10^6$, $D_i/d=0.86$)

図 3.12 $t=20$ における速度場と温度場の分布($Ra=7.1 \times 10^6$, $D_i/d=0.86$)

図 3.13 $t=40$ における速度場と温度場の分布($Ra=7.1 \times 10^6$, $D_i/d=0.86$)

図 3.14 全運動エネルギーの時間変化($Ra=7.1 \times 10^6$, $D_i/d=0.86$)

図 3.15 壁面平均Nusselt数の時間変化($Ra=7.1 \times 10^6$, $D_i/d=0.86$)

図 3.16 中心軸上の速度分布($Ra=7.1 \times 10^6$, $D_i/d=0.86$)

図 3.17 中心軸上の温度分布($Ra=7.1 \times 10^6$, $D_i/d=0.86$)

図 3.18 $t=4$ における速度場と温度場の分布($Ra=7.1 \times 10^6$, $D_i/d=3$)

図 3.19 $t=8$ における速度場と温度場の分布($Ra=7.1 \times 10^6$, $D_i/d=3$)

図 3.20 $t=20$ における速度場と温度場の分布($Ra=7.1 \times 10^6$, $D_i/d=3$)

図 3.21 $t=100$ における速度場と温度場の分布($Ra=7.1 \times 10^6$, $D_i/d=3$)

図 3.22 全運動エネルギーの時間変化($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 3$)

図 3.23 壁面平均Nusselt数の時間変化($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 3$)

図 3.24 中心軸上の速度分布($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 3$)

図 3.25 中心軸上の温度分布($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 3$)

図 3.26 $t=4$ における速度場と温度場の分布($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 18$)

図 3.27 $t=20$ における速度場と温度場の分布($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 18$)

図 3.28 $t=40$ における速度場と温度場の分布($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 18$)

図 3.29 $t=100$ における速度場と温度場の分布($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 18$)

図 3.30 壁面平均Nusselt数の時間変化($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 18$)

図 3.31 全運動エネルギーの時間変化($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 18$)

図 3.32 中心軸上の速度分布($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 18$)

図 3.33 中心軸上の温度分布($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 18$)

Table 3.1 Calculation Parameters

Case	D_i/d	Pr	Ra	r_{min}	t		反復数
1	0.86	0.71	7.1×10^5	0.019	0.0002	0.001	200
2	0.86	0.71	7.1×10^6	0.010	0.0002	0.001	200
3	3	0.71	7.1×10^5	0.017	0.0002	0.001	200
4	3	0.71	7.1×10^6	0.017	0.0002	0.001	200
5	18	0.71	7.1×10^5	0.003	0.0002	0.001	200
6	18	0.71	7.1×10^6	0.003	0.0002	0.001	200

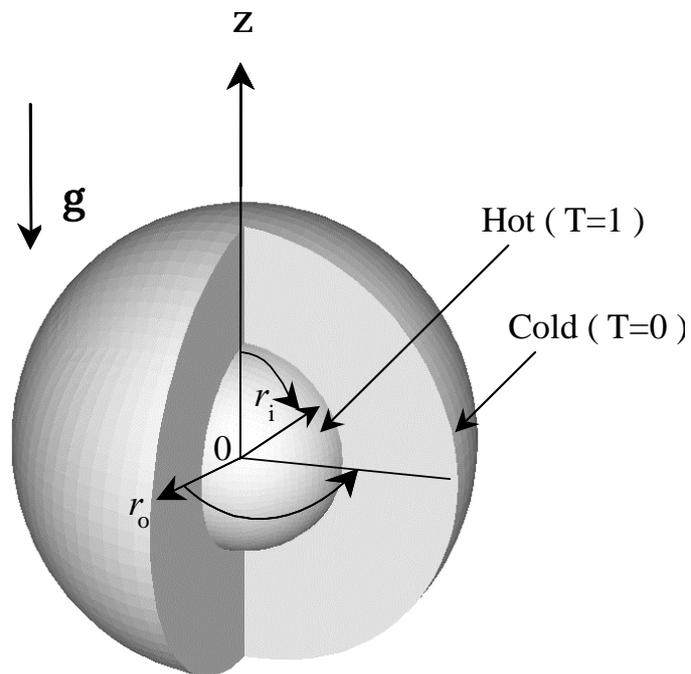
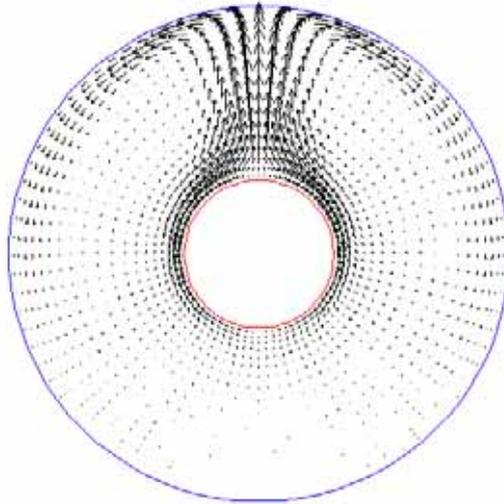
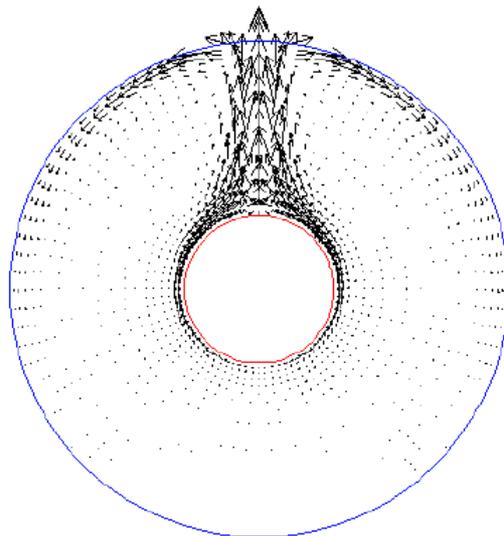


Fig. 3.1 Calculation model

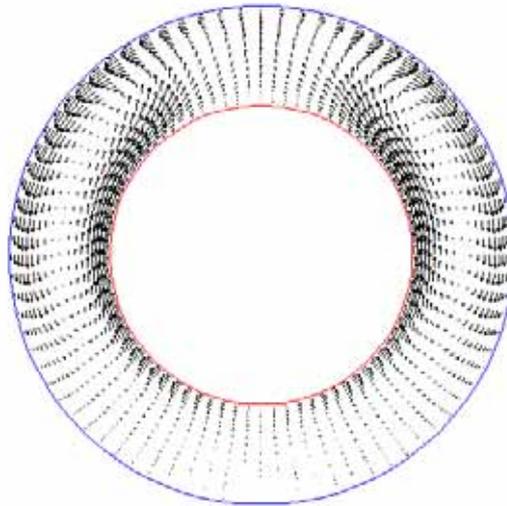


(a) $Ra=7.1 \times 10^5$ ($t=100$)

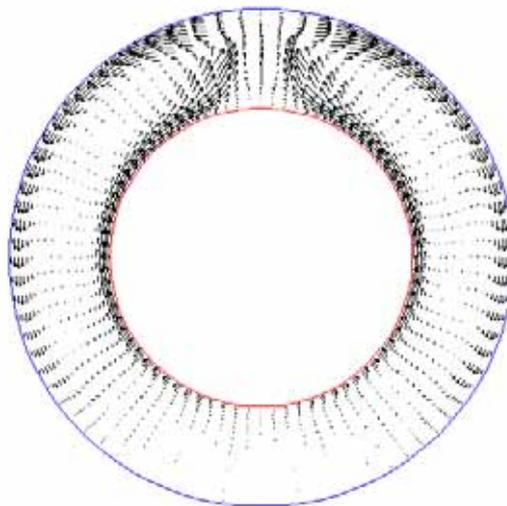


(b) $Ra=7.1 \times 10^6$ ($t=100$)

Fig. 3.2 Velocity vectors on $\theta=90^\circ$ ($D/d=0.86$)

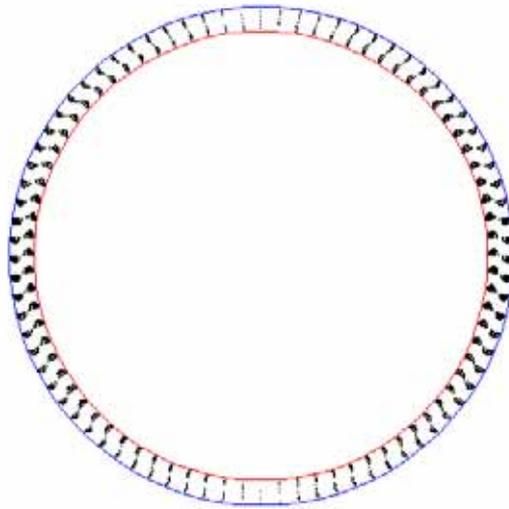


(a) $Ra=7.1 \times 10^5$ ($t=100$)

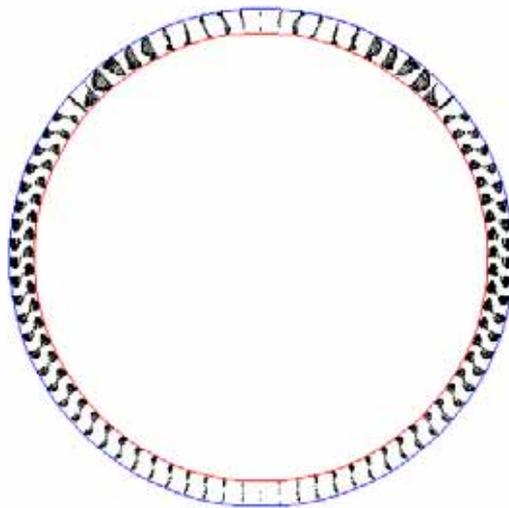


(b) $Ra=7.1 \times 10^6$ ($t=100$)

Fig. 3.3 Velocity vectors on $\theta=90^\circ$ ($D_i/d=3$)

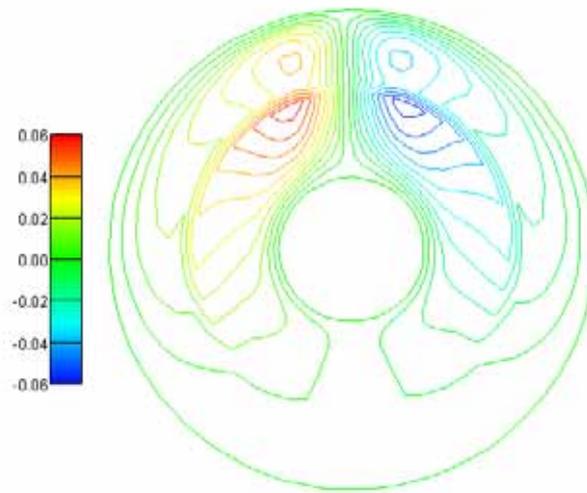


(a) $Ra=7.1 \times 10^5$ ($t=100$)

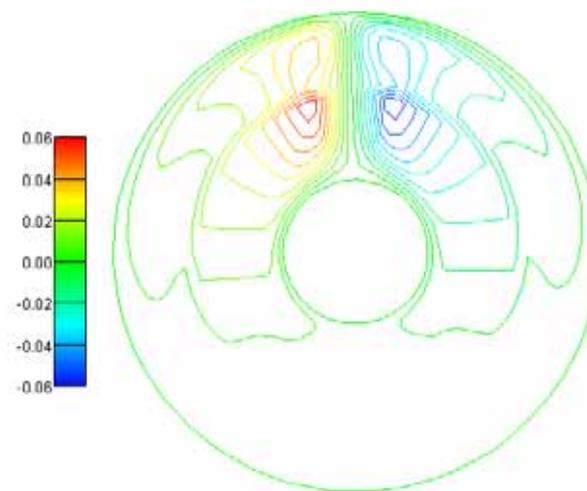


(b) $Ra = 7.1 \times 10^6$ ($t=100$)

Fig. 3.4 Velocity vectors on $\theta = 90^\circ$ ($D_i/d = 18$)

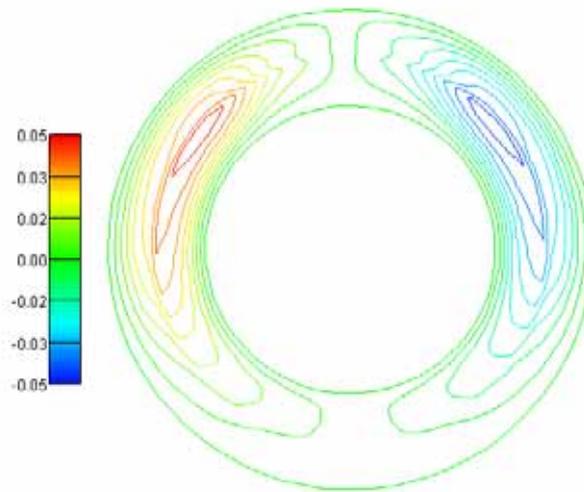


(a) $Ra=7.1 \times 10^5$ ($t=100$)

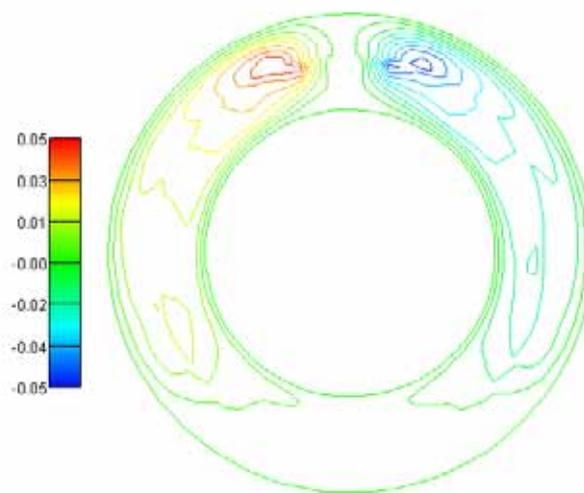


(b) $Ra = 7.1 \times 10^6$ ($t=100$)

Fig. 3.5 Streamlines on $\theta = 90^\circ$ ($D_i/d = 0.86$)

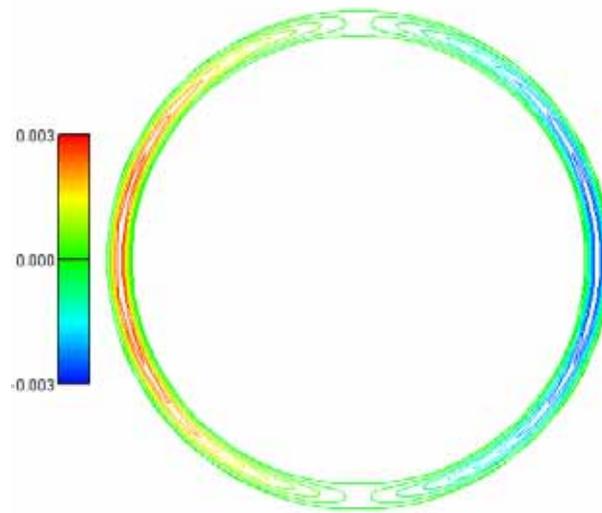


(a) $Ra = 7.1 \times 10^5$ ($t = 100$)

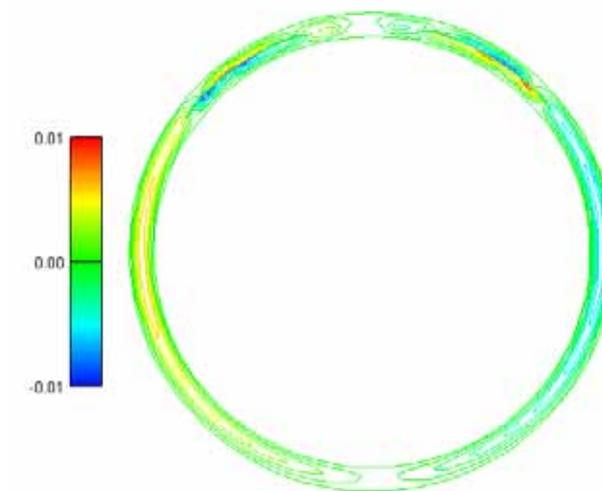


(b) $Ra = 7.1 \times 10^6$ ($t = 100$)

Fig. 3.6 Streamlines on $\theta = 90^\circ$ ($D_i/d = 3$)



(a) $Ra=7.1 \times 10^5$ ($t=100$)



(b) $Ra = 7.1 \times 10^6$ ($t=100$)

Fig. 3.7 Streamlines on $\theta = 90^\circ$ ($D_i/d = 18$)

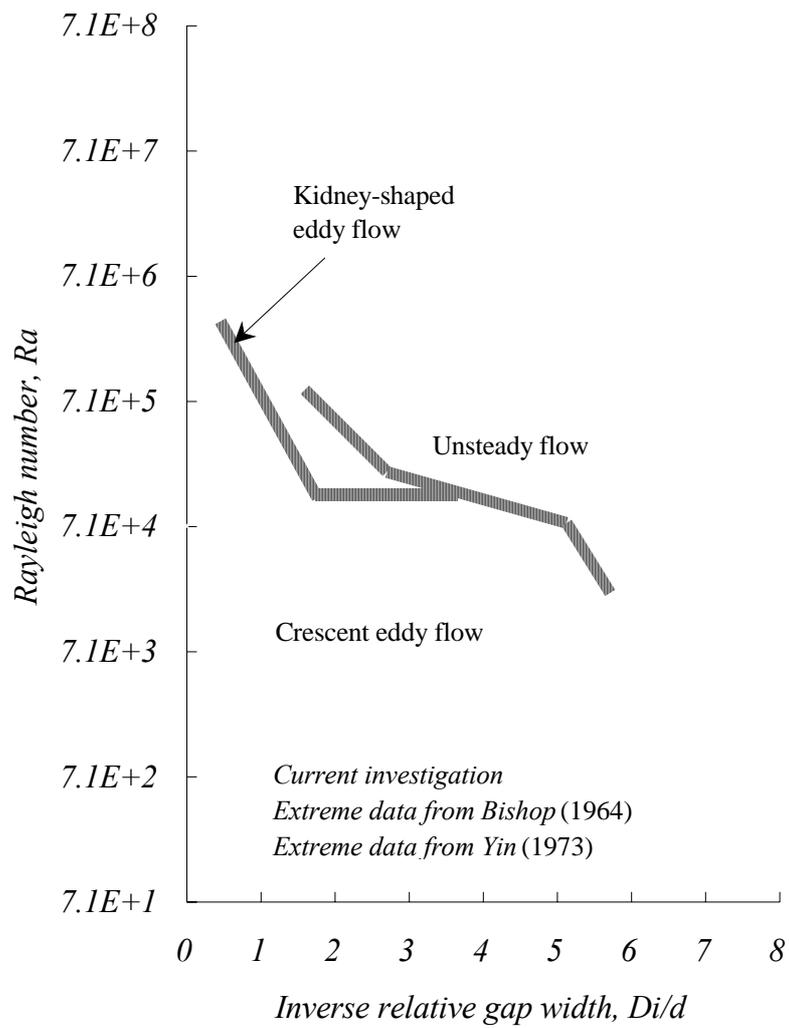


Fig. 3.8 Categorization of flow regimes for air



(a) Crescent eddy flow($Pr=0.71$, $Ra=5,964$, $D_i/d=8$)

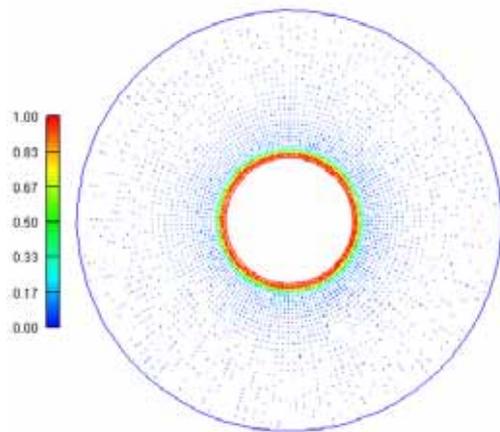


(b) Kidney-shaped eddy flow($Pr=0.71$, $Ra=229,330$, $D_i/d=3$)

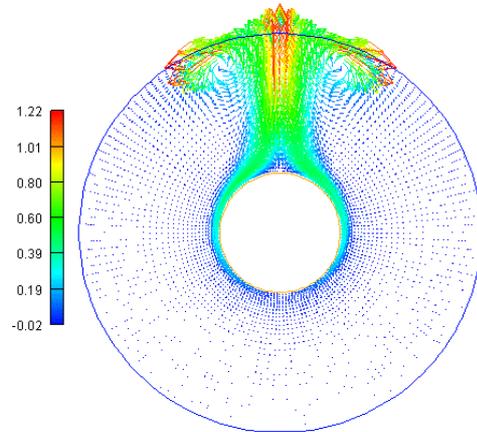


(c) Kidney-shaped eddy flow($Pr=0.71$, $Ra=749,760$, $D_i/d=1.3$)

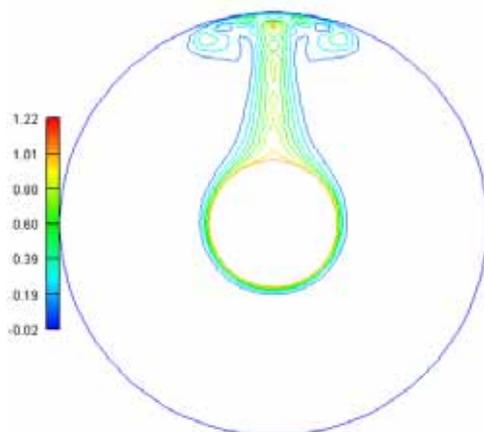
Fig. 3.9 Comparison with Yin's experiment and numerical streamlines



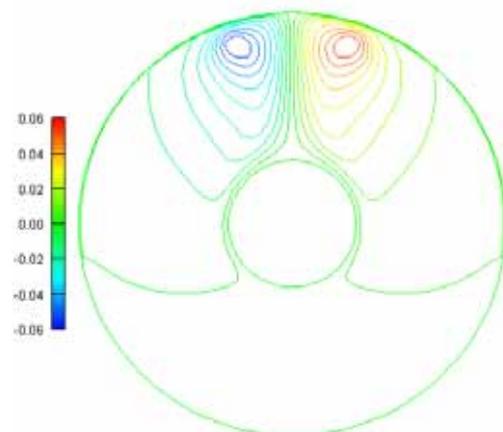
(a) Velocity vectors on $\theta=90^\circ$



(b) Velocity vectors on $\theta=90^\circ$

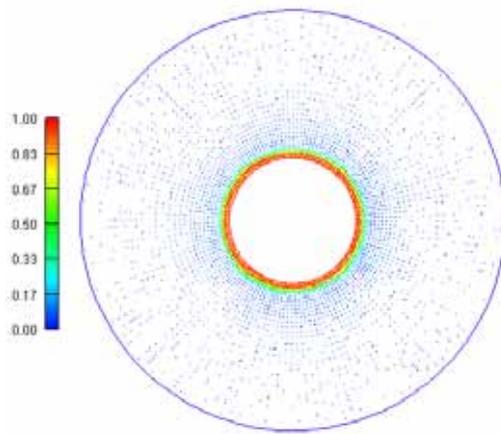


(c) Isotherms on $\theta=90^\circ$

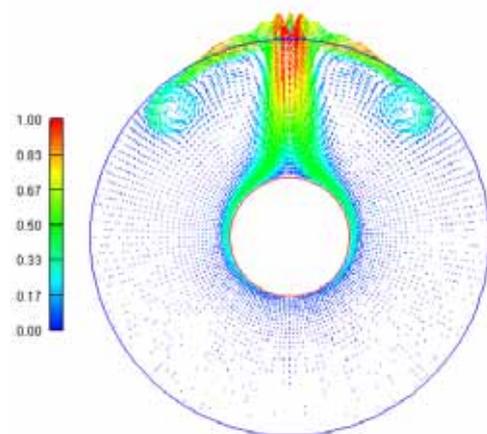


(d) Streamlines on $\theta=90^\circ$

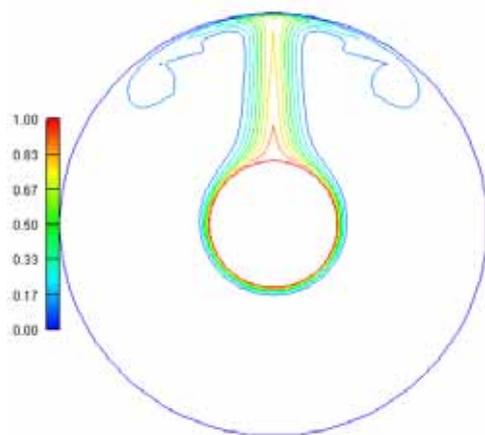
Fig. 3.10 Numerical results at $t=4(Ra = 7.1 \times 10^6, D_i/d = 0.86, 279,936\text{mesh})$



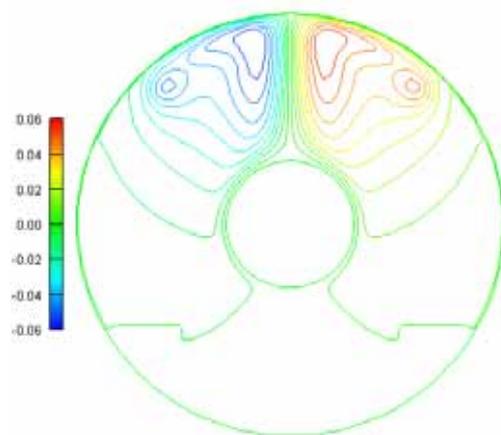
(a) Velocity vectors on $\theta=90^\circ$



(b) Velocity vectors on $\theta=90^\circ$

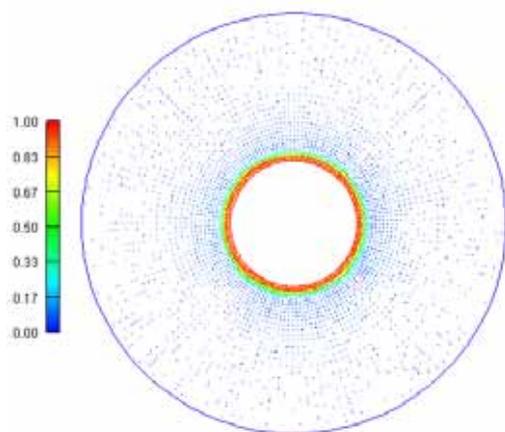


(c) Isotherms on $\theta=90^\circ$

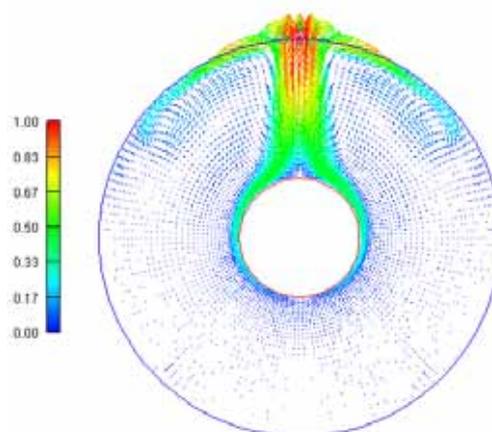


(d) Streamlines on $\theta=90^\circ$

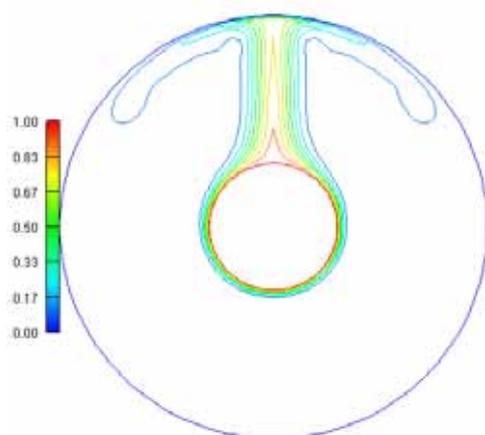
Fig. 3.11 Numerical results at $t=8(Ra = 7.1 \times 10^6, D_i/d=0.86, 279,936\text{mesh})$



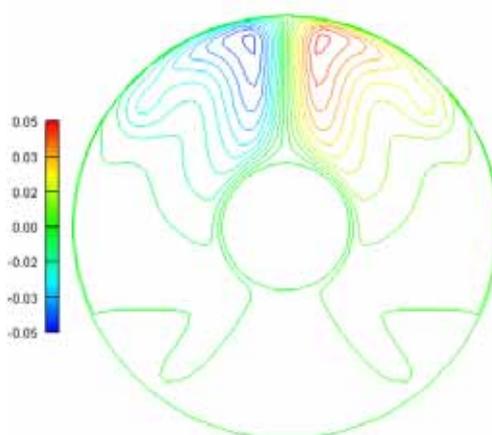
(a) Velocity vectors on $\theta=90^\circ$



(b) Velocity vectors on $\theta=90^\circ$



(c) Isotherms on $\theta=90^\circ$



(d) Streamlines on $\theta=90^\circ$

Fig. 3.12 Numerical results at $t=20(Ra = 7.1 \times 10^6, D_i/d = 0.86, 279,936\text{mesh})$

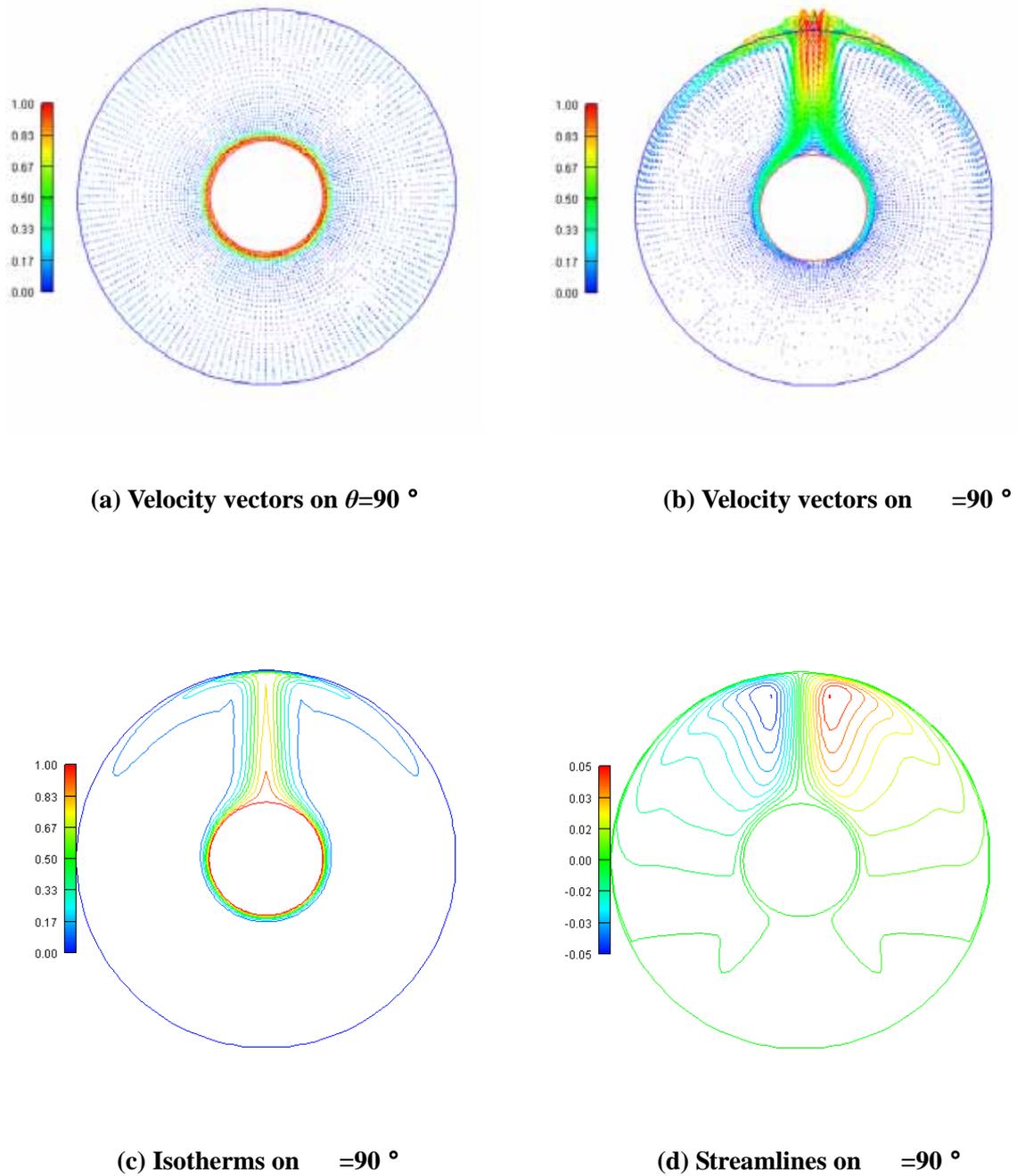


Fig. 3.13 Numerical results at $t=40(Ra = 7.1 \times 10^6, D_i/d = 0.86, 279,936\text{mesh})$

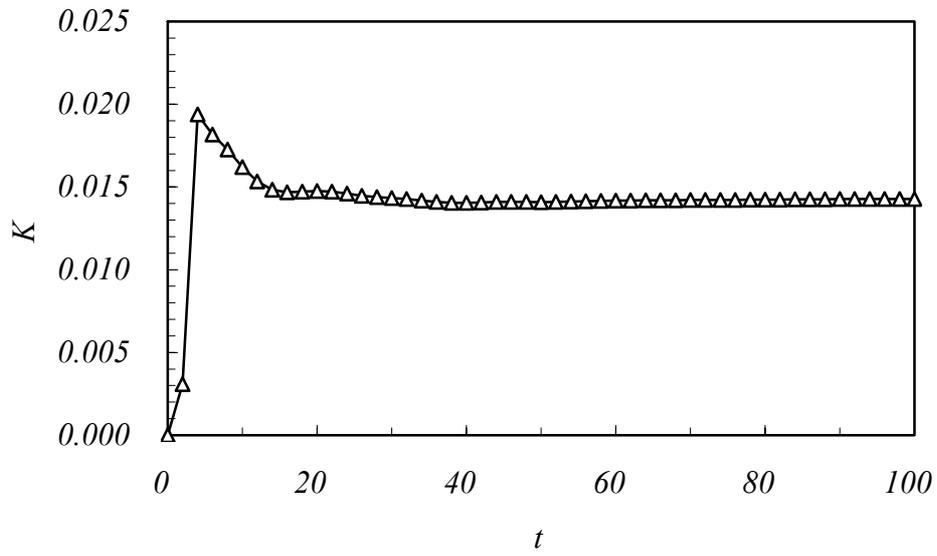


Fig. 3.14 Time history of total kinetic energy ($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 0.86$)

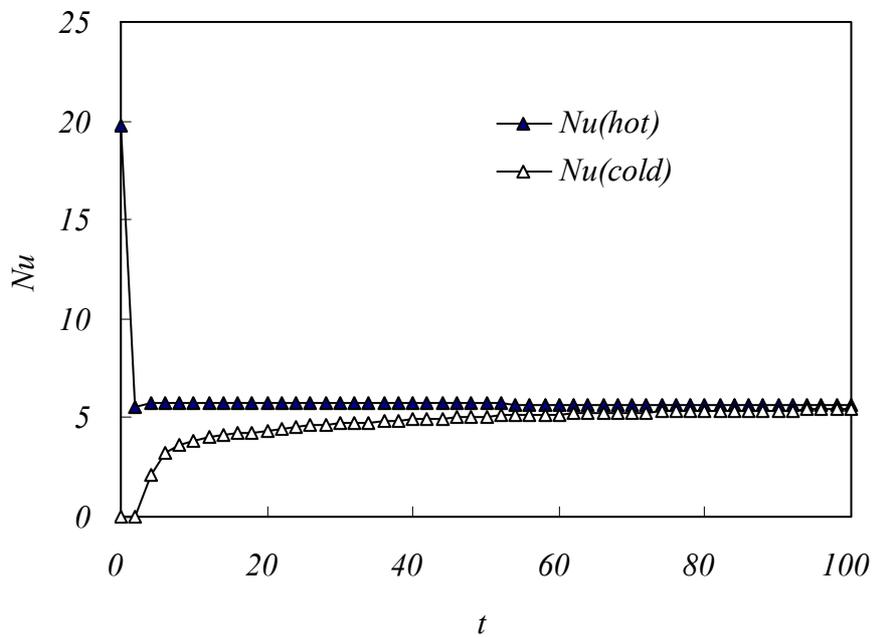


Fig. 3.15 Time history of mean Nusselt number ($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 0.86$)

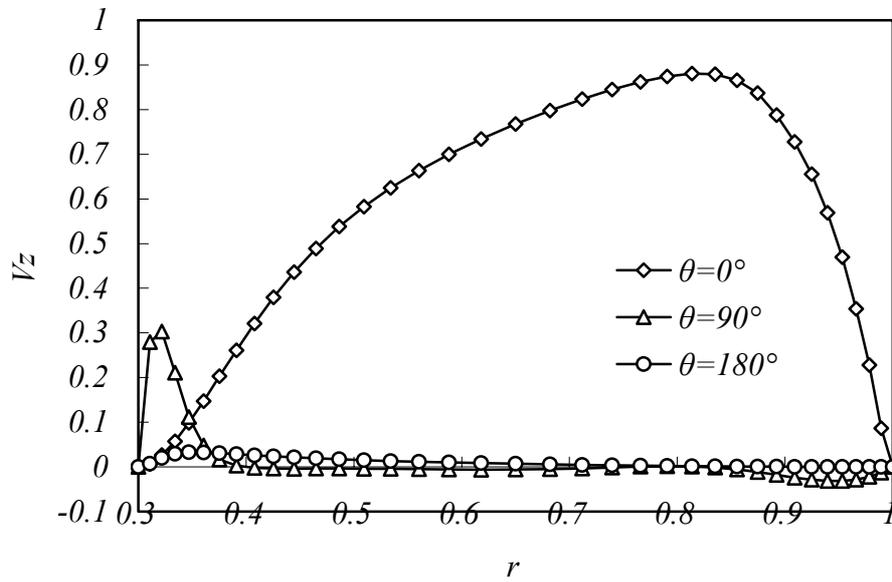


Fig. 3.16 Velocity profiles($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 0.86$)

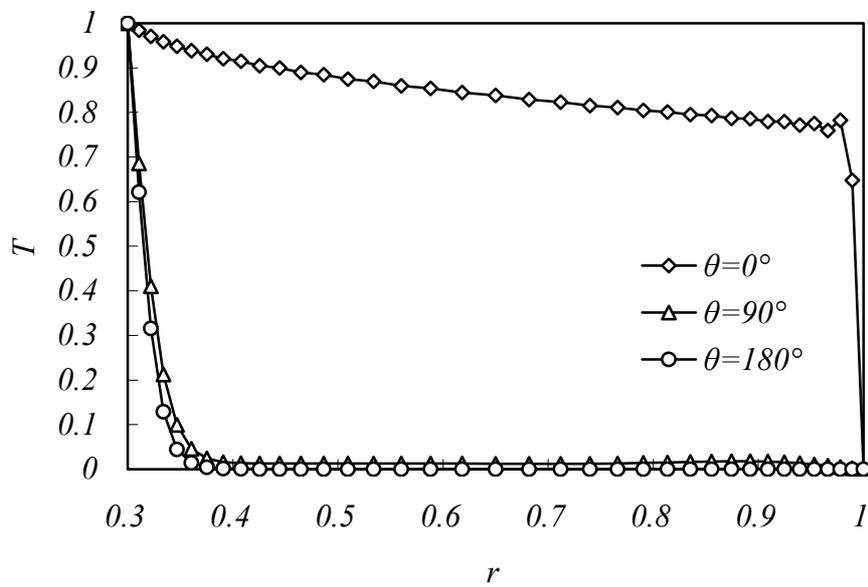


Fig. 3.17 Temperature profiles($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 0.86$)

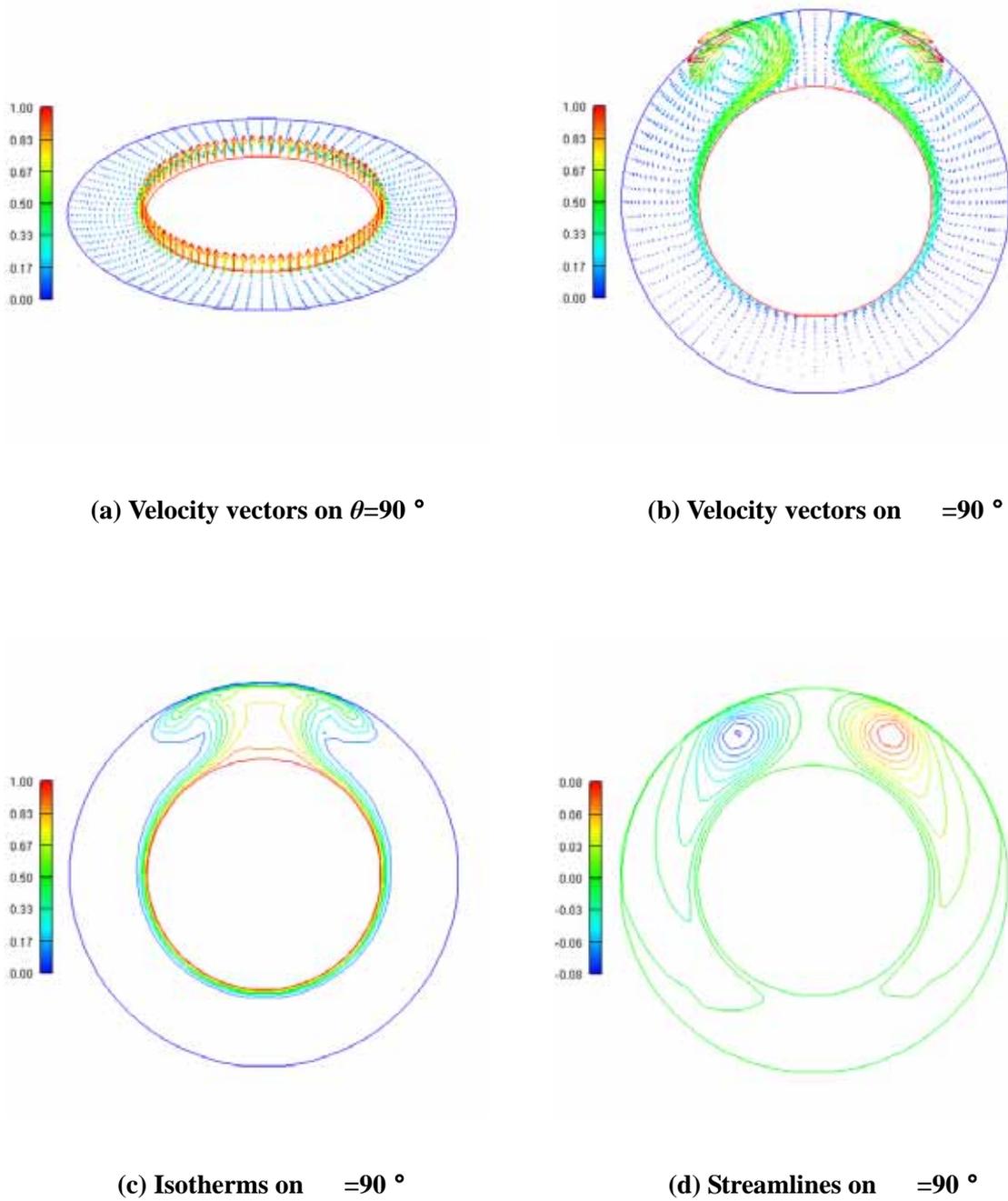


Fig. 3.18 Numerical results at $t=4(Ra = 7.1 \times 10^6, D_i/d = 3, 48,000\text{mesh})$

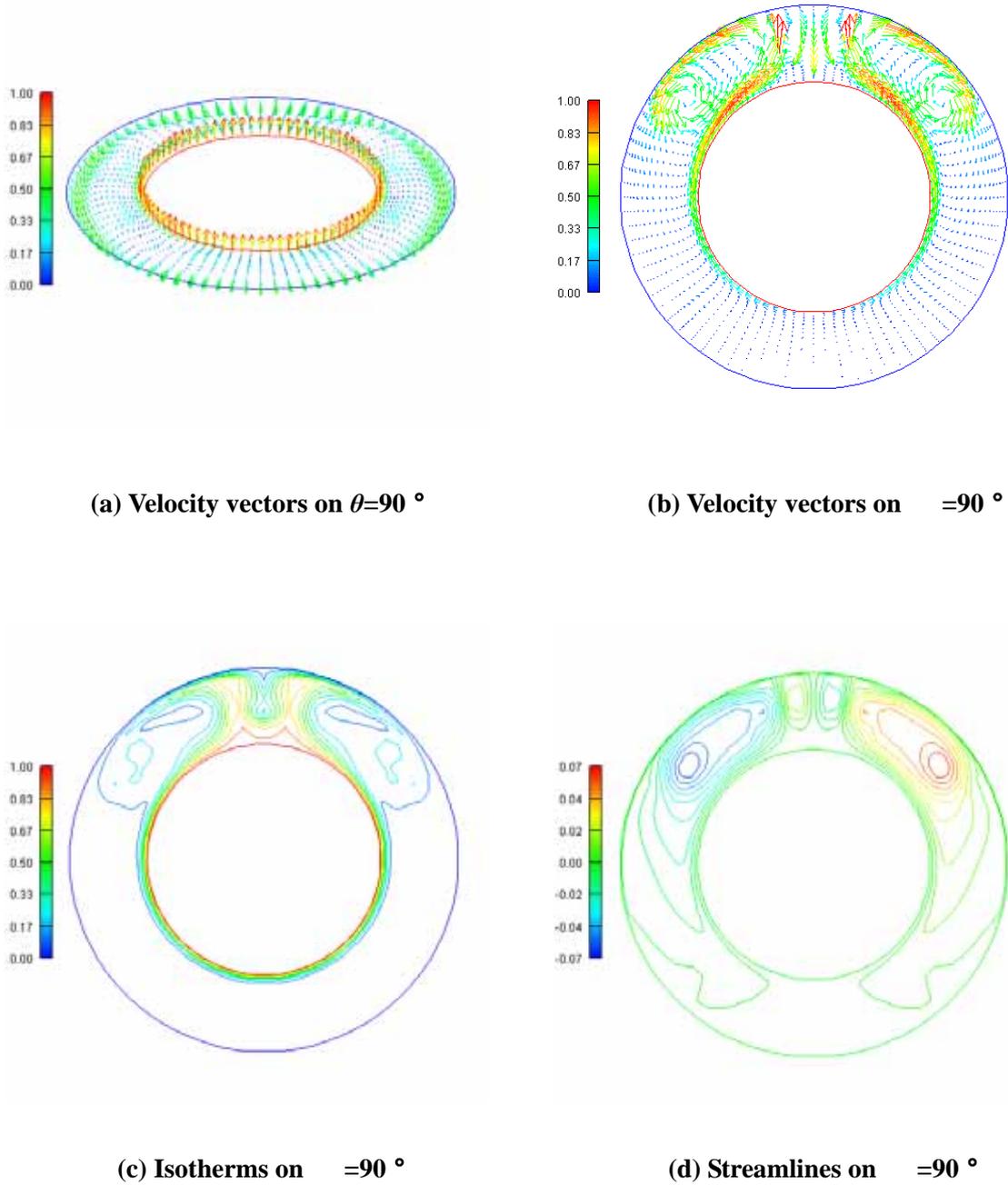


Fig. 3.19 Numerical results at $t=8(Ra = 7.1 \times 10^6, D_i/d = 3, 48,000\text{mesh})$

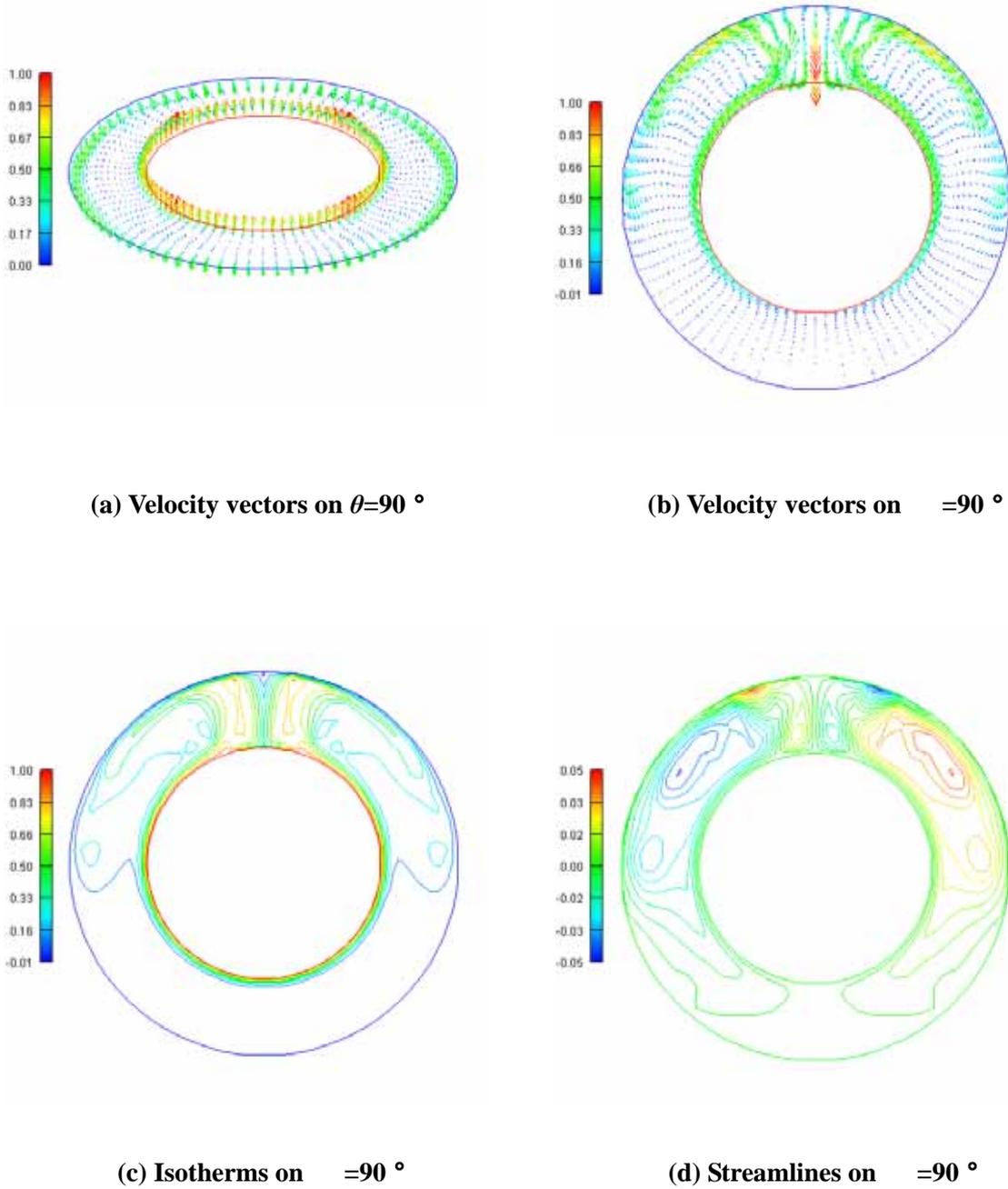


Fig. 3.20 Numerical results at $t=20(Ra = 7.1 \times 10^6, D_i/d = 3, 48,000\text{mesh})$

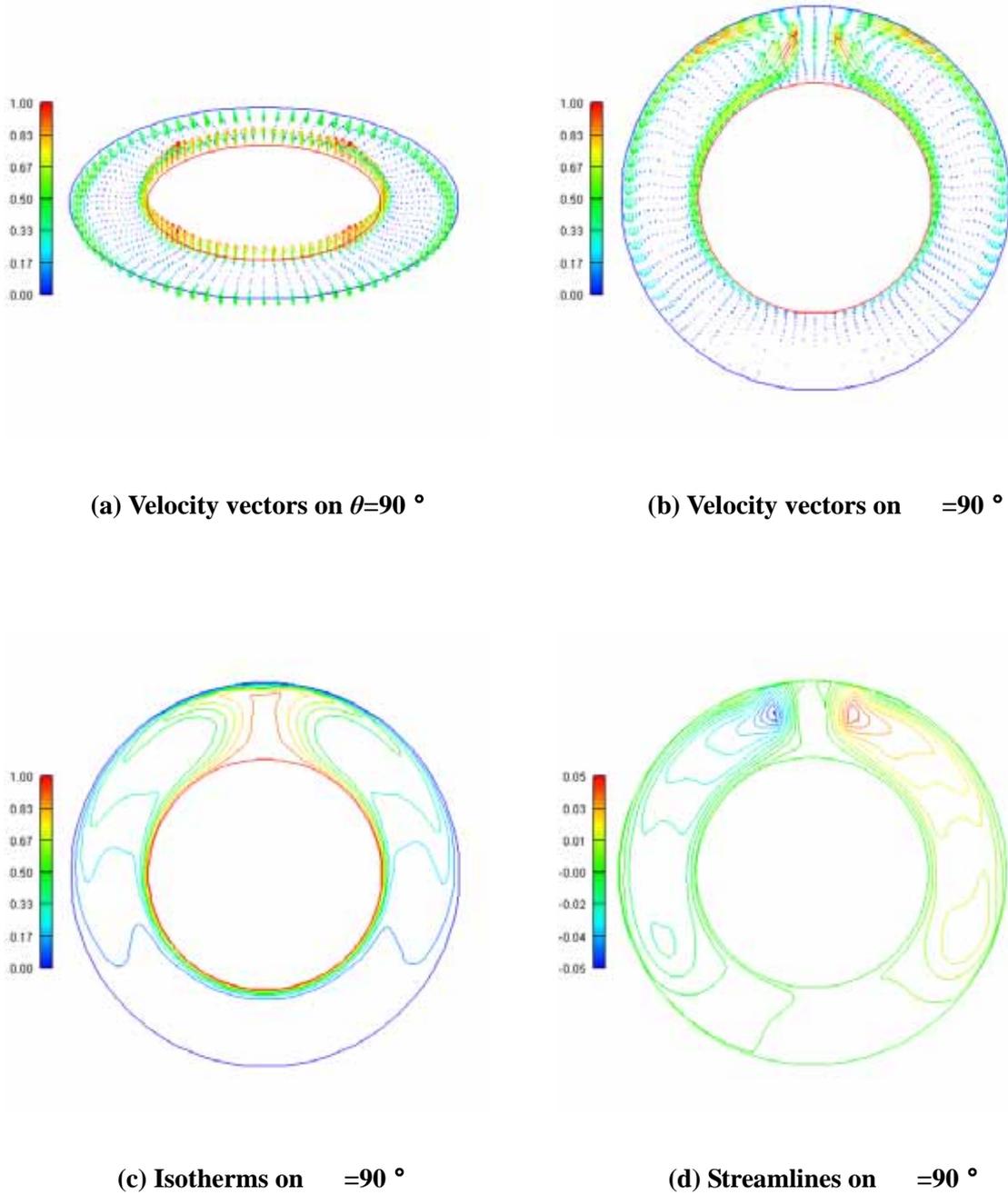


Fig. 3.21 Numerical results at $t=100(Ra = 7.1 \times 10^6, D_i/d = 3, 48,000\text{mesh})$

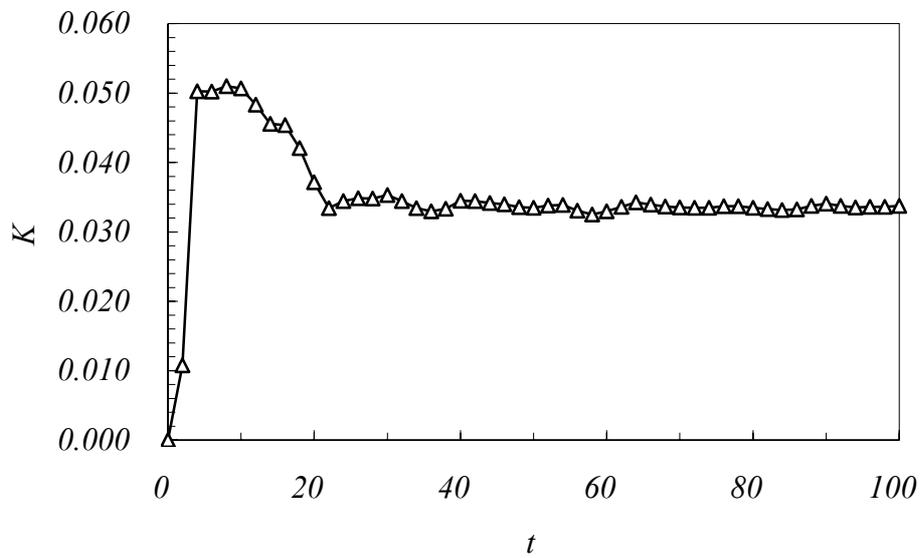


Fig. 3.22 Time history of total kinetic energy ($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 3$)

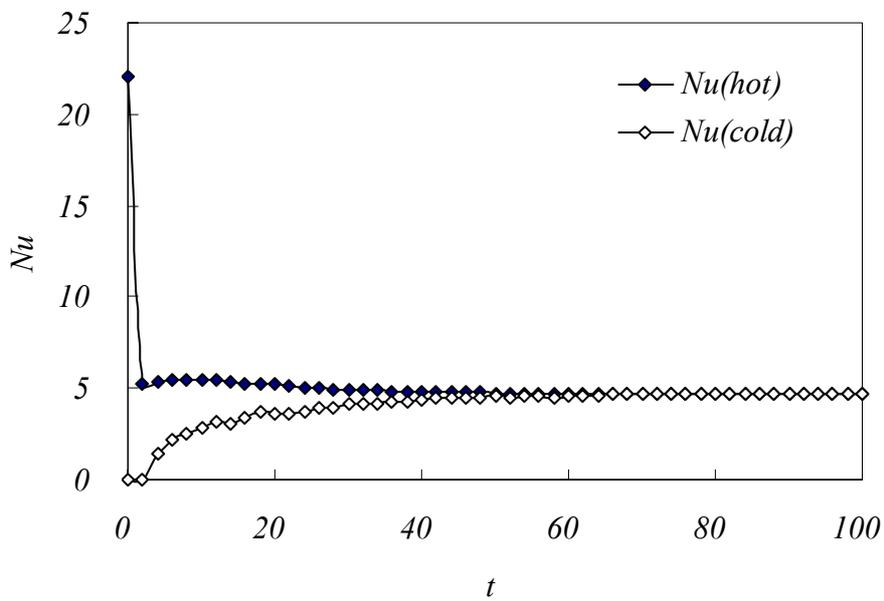


Fig. 3.23 Time history of mean Nusselt number ($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 3$)

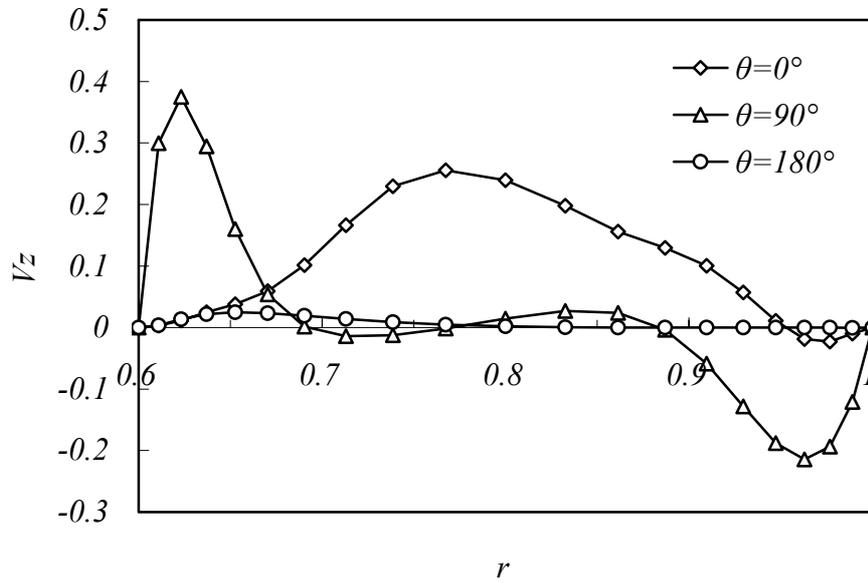


Fig. 3.24 Velocity profiles($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 3$)

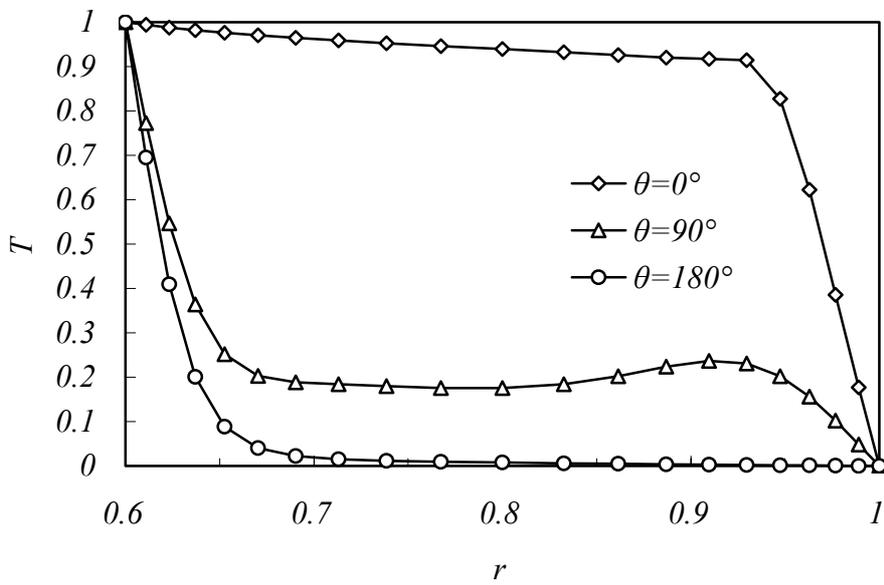
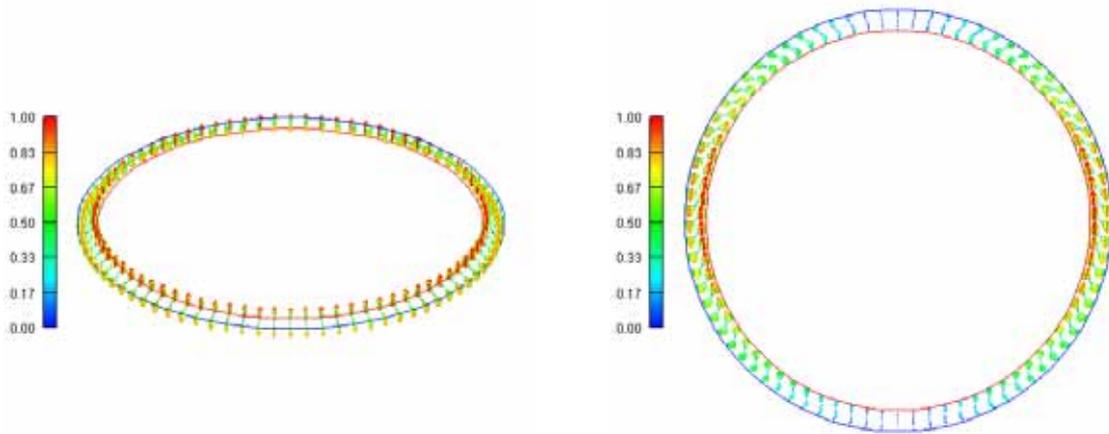
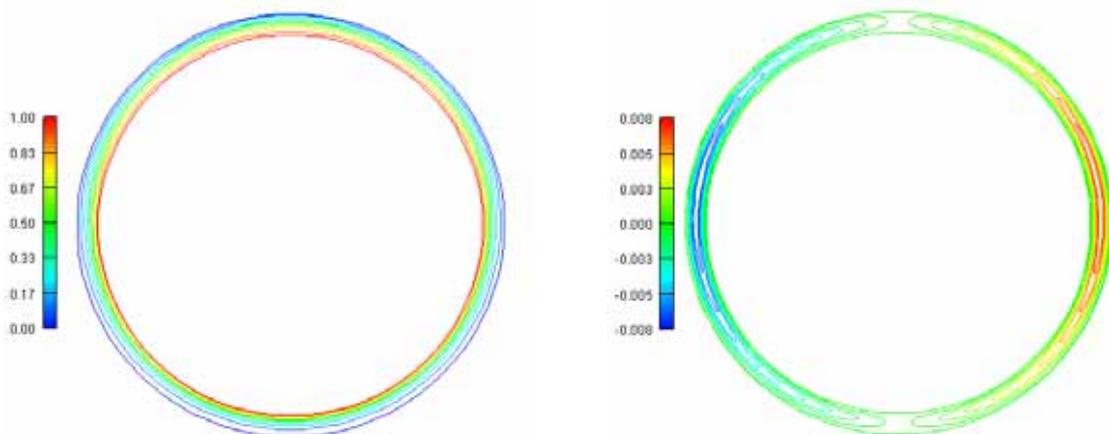


Fig. 3.25 Temperature profiles($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 3$)



(a) Velocity vectors on $\theta=90^\circ$

(b) Velocity vectors on $\theta=90^\circ$



(c) Isotherms on $\theta=90^\circ$

(d) Streamlines on $\theta=90^\circ$

Fig. 3.26 Numerical results at $t=4(Ra = 7.1 \times 10^6, D_i/d = 18, 48,000\text{mesh})$

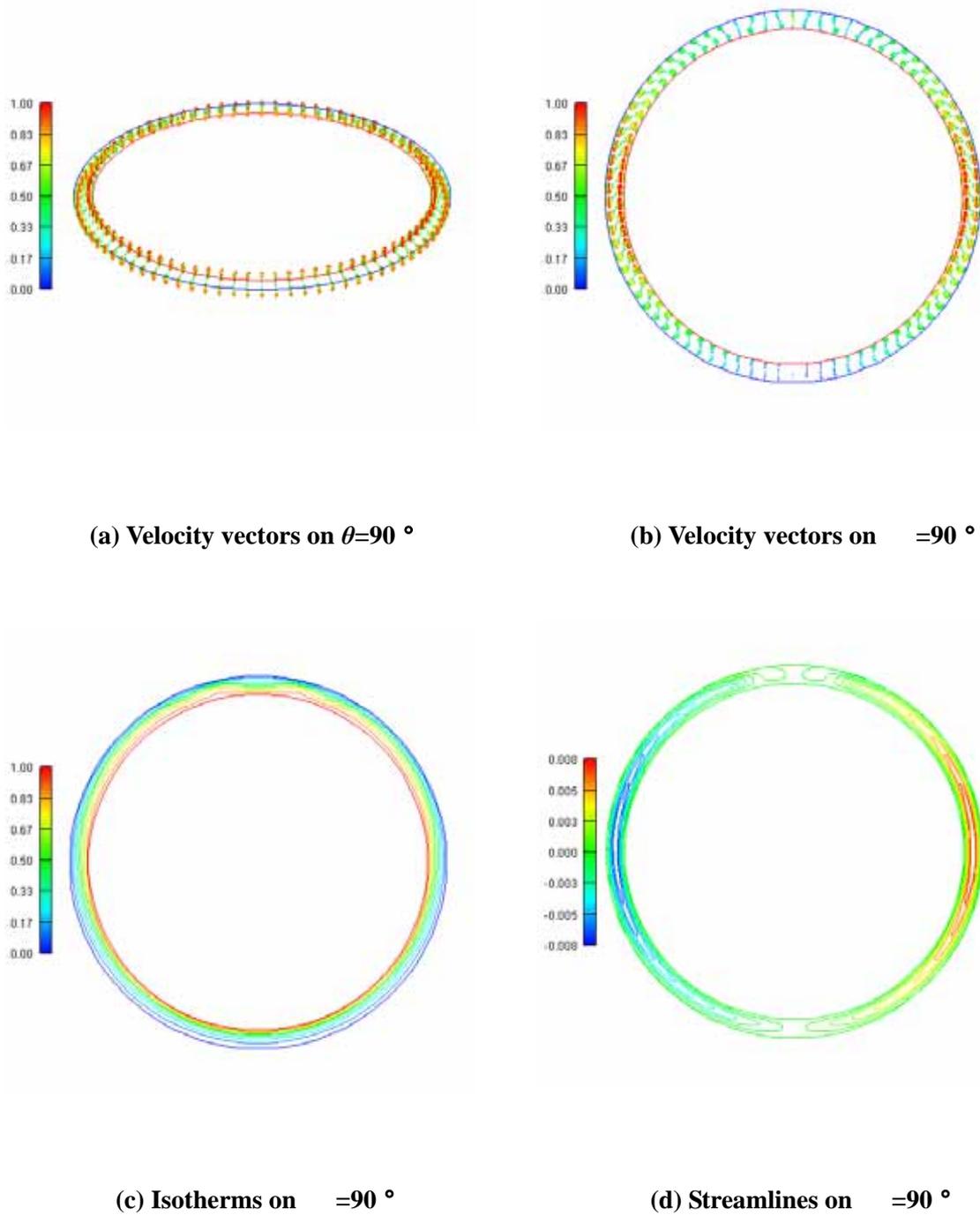


Fig. 3.27 Numerical results at $t=20(Ra = 7.1 \times 10^6, D/d = 18, 48,000\text{mesh})$

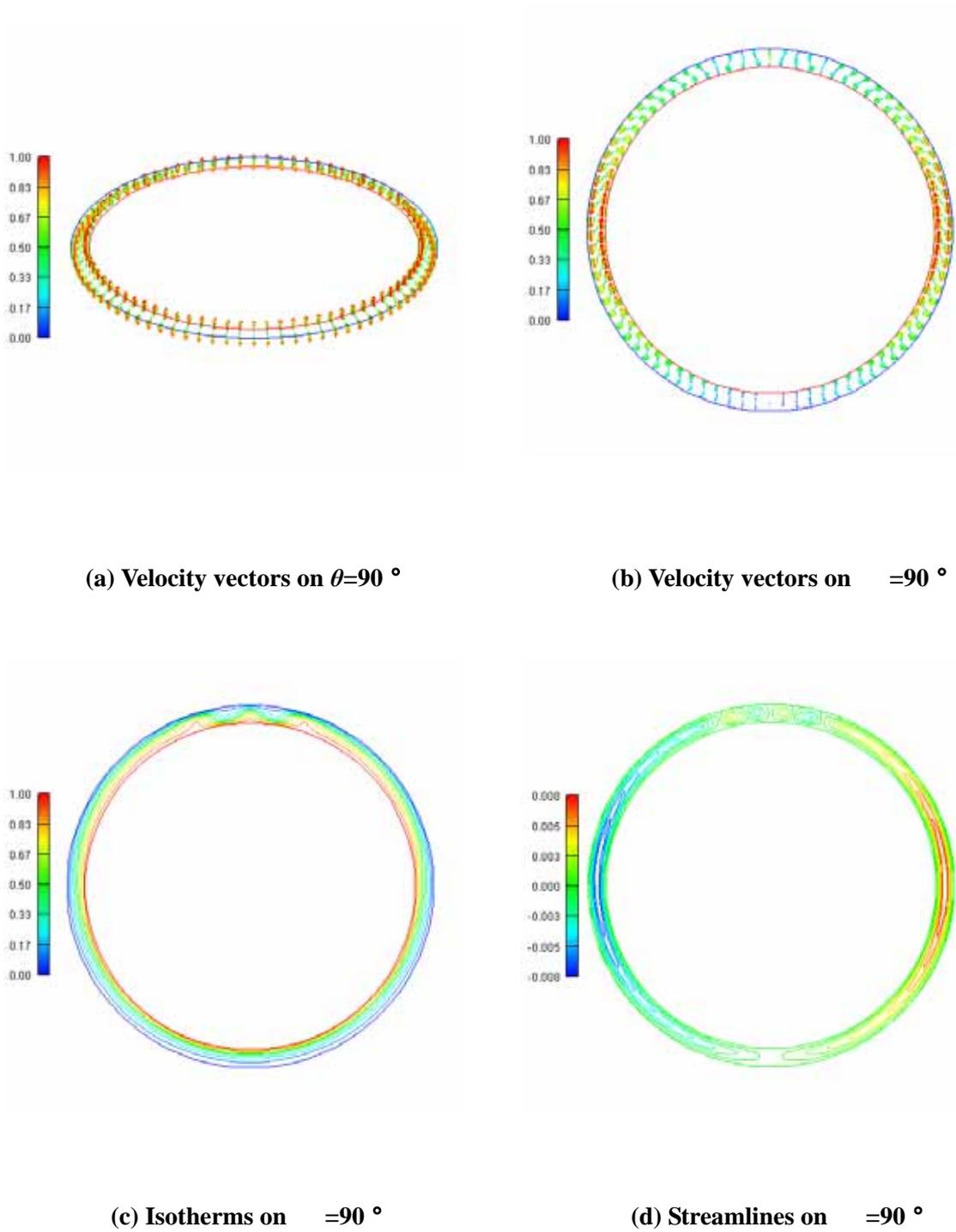


Fig. 3.28 Numerical results at $t=40(Ra = 7.1 \times 10^6, D_i/d = 18, 48,000\text{mesh})$

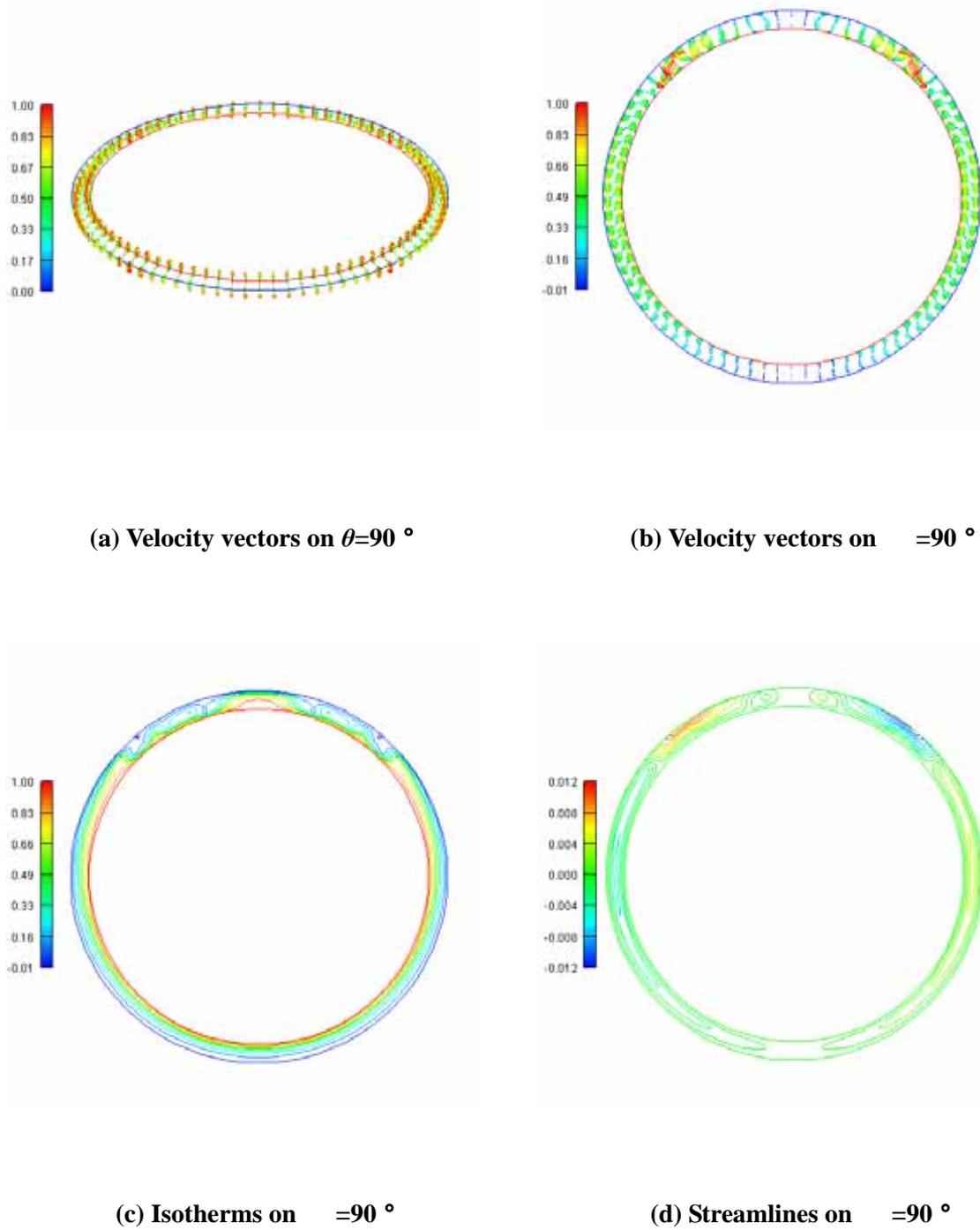


Fig. 3.29 Numerical results at $t=100(Ra = 7.1 \times 10^6, D_i/d = 18, 48,000\text{mesh})$

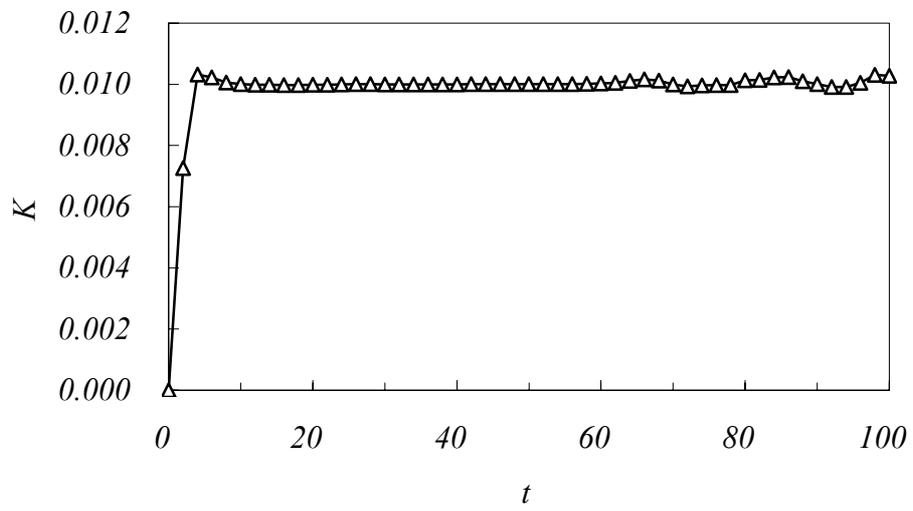


Fig. 3.30 Time history of total kinetic energy ($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 18$)

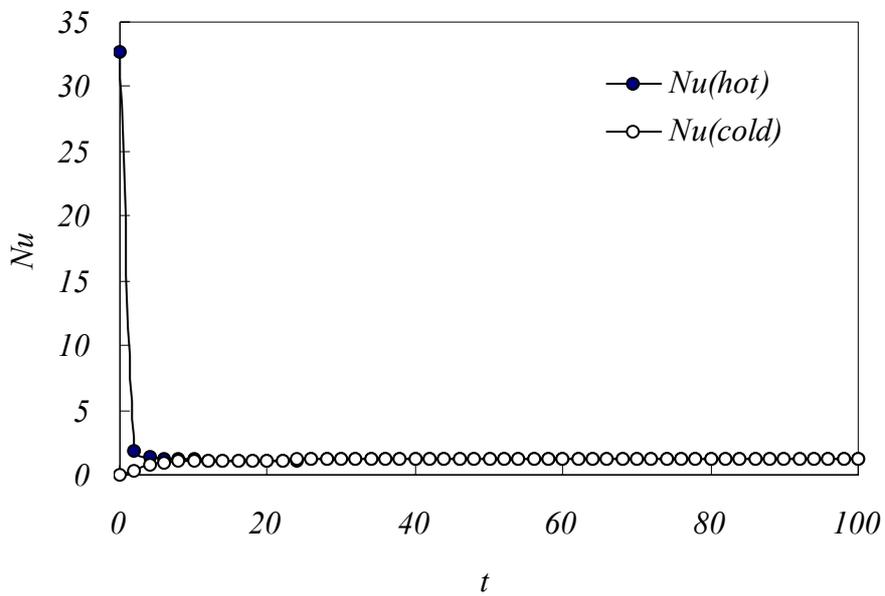


Fig. 3.31 Time history of mean Nusselt number ($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 18$)

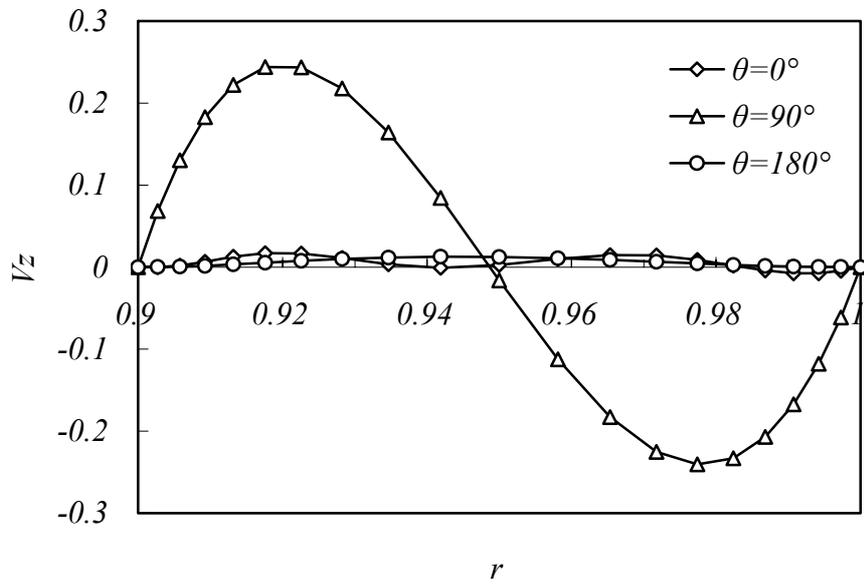


Fig. 3.32 Velocity profiles ($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 18$)

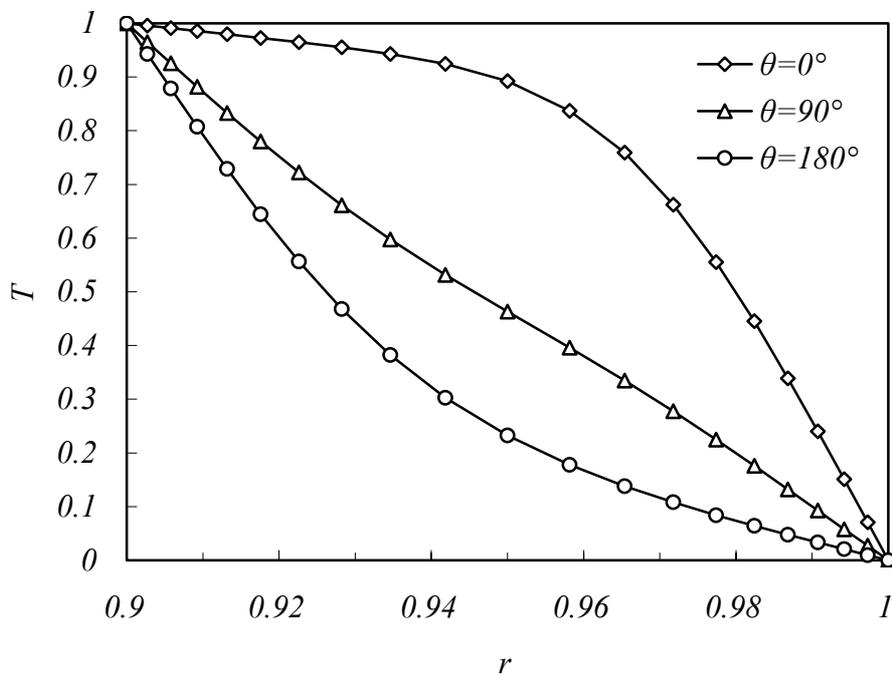


Fig. 3.33 Temperature profiles ($Ra = 7.1 \times 10^6$, $D_i/d = 18$)

第4章 Coriolis 力と Lorentz 力が作用する熱流体の解析

4.1 4章の緒言

中心を共有する二重球内の球殻間で Coriolis 力および熱的不安定より生じる対流を回転球殻対流^(4.1)という。この対流は、太陽および外惑星大気、地球上の大気や外核内の流体運動といった天文学あるいは地球物理学的な応用として古くから研究されてきている。

一方、作動流体が熔融金属の場合、対流は電磁気効果を表す。この効果の解法には 法がよく用いられてきた。著者らは過去に電磁場解法の一つである法を用いて磁場抑制効果を数値解析し、流れ場の抑制効果を示した^(4.2)。ところが、法は誘導磁場が印加磁場より非常に小さく無視できる場合に適用されるため、誘導磁場を無視している。この誘導磁場を考慮した解法がB法である。B法は磁気レイノルズ数 $Rem \ll 1$ に対して有効な手段になる。特に、誘導磁場が印加磁場を強める作用をダイナモ作用^(4.3)という。このダイナモ作用では強い電流が流れるためジュール熱は発熱の熱輸送に寄与する。このような誘導磁場の働きを考察するため、電磁場解析にB法を導入する。

そこで本章の目的は、二重球内の水銀の自然対流に Coriolis 力を作用して流れ場の動きを考察する。また、外部磁場を印加し Coriolis 力と Lorentz 力の相互関係を調べることにする。

主な記号

C_p : 定圧比熱

D_i : 内球の直径

d : 球殻の厚さ $= r_o - r_i$

Ec : Eckert 数

Ek : Ekman 数

\hat{g} : 重力方向の単位ベクトル

Ha : Hartmann 数

\hat{k} : 回転軸方向の単位ベクトル

Pe : Peclet 数

R : 磁気誤差

r_i : 内球の半径

r_o : 外球の半径

Rem : 磁気 Reynolds 数

Ta : Taylor 数

Ω : 球殻の角速度

ϕ : 電気スカラ・ポテンシャル

ただし, 上記以外の主な記号は第2, 3章を参照されたい。

4.2 基礎方程式

支配方程式系は, 速度場・電磁場・温度場を支配する方程式系からなる。速度場の方程式はNS方程式と質量保存の連続の式を用いて得られる。ここで, NS式は回転系表示を用いる。回転場の無次元化はEk数(粘性項/Coriolis項)を用いて行なっている^(4.4)。そして, 支配方程式系は以下の仮定を用いて簡単にしている。

- (a) 電磁流体は導電性ニュートン流体とする。
- (b) 流れは非圧縮・層流とする。
- (c) 式(4.2)において, 浮力項の密度は体積膨張率 と温度に依存する。
- (d) 電磁流体に作用する外力は浮力, Coriolis 力, そして Lorentz 力のみとする。
- (e) 変位電流を無視する。
- (f) 電磁流体は電氣的に中性・無極性とする。
- (g) 物性値の温度依存性を無視する。
- (h) 粘性散逸による発熱を無視する。
- (i) 印加磁場は一定直流磁場を用いる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla H + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + Pr [\nabla^2 \mathbf{v} + Ta \frac{1}{2} \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{k}} + Ha^2 \mathbf{j} \times \mathbf{B} + RaT \hat{\mathbf{g}}] \quad (4.2)$$

ここで, \mathbf{v} , H , $\boldsymbol{\omega}$, $\hat{\mathbf{k}}$, \mathbf{j} , \mathbf{B} , T , $\hat{\mathbf{g}}$ は速度ベクトル, ベルヌーイ(Bernoulli)関数, 渦度ベクトル, 回転軸方向の単位ベクトル, 電流密度ベクトル, 磁束密度ベクトル, 温度, 重力方向の単位ベクトルである。また, 用いる無次元数, Pr , Ta , Ek , Ha , Ra はプラントル数, テイラー数, エクマン数, ハルトマン数, レイリー数であり, 以下で与えられる。

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Ta = \left(\frac{2\Omega d^2}{\nu} \right)^2, \quad E_k = \frac{\nu}{2\Omega d^2},$$

$$Ha = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} Bd, \quad Ra = \frac{\beta g d^3 \Delta T}{\alpha\nu}$$
(4.3)

式(4.3)において, $Ra=Gr \cdot Pr$ の関係が成立する。ここで, Ω , d , ΔT は球殻の角速度, 球殻の厚さ, 球殻の上下の温度差である。また, ν , α , g , β , σ , ρ は流体の動粘性係数, 熱拡散率, 重力加速度, 体積膨脹率, 電気伝導度, 密度である。

電磁場の方程式は解法によって A 法と B 法に分かれる。A 法は電流の保存則とオームの式を用いて得られる。そして, B 法の方程式は磁場の保存則とマクスウェルの電磁方程式^(4.5, 4.6, 4.7)を用いて構成される。直流磁場のみを扱う A 法の方程式は以下のとおりである。

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$
(4.4)

$$\mathbf{j} = -\nabla \phi + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)$$
(4.5)

ここで, ϕ は電気スカラー・ポテンシャルである。そして, 印加磁場と誘導磁場を同時に扱う B 法の方程式^(4.8)は以下のように示される。

$$\nabla \cdot \mathbf{B}' = 0$$
(4.6)

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = -\nabla R + (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}' + \frac{1}{Rem} \nabla^2 \mathbf{B}'$$
(4.7)

$$\mathbf{j} = \frac{1}{Rem} \nabla \times \mathbf{B}'$$
(4.8)

ここで, R と Rem は磁気誤差 ($R = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) / Rem$), 磁気レイノルズ数 ($Rem = Ud / \nu_m$) を示す。NS 式において, 磁束密度ベクトル \mathbf{B} は印加磁場と誘導磁場を含み, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$ と表示される。

流れ場と電磁場につき, 温度場はエネルギー方程式から得られる。高 Ra 数の

流れには ペクレ(Peclet)数 $=Re \cdot Pr=1$ の関係を用いるとエネルギー方程式の数値解法が安定になる。式中のエッケルト(Eckert)数は $U^2/(C_p T)$ と定義される。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)T + \nabla^2 T + PrHa^2 Ecj^2 \quad (4.9)$$

4.3 離散化

速度場の離散化はGSMAC法^(4.9, 4.10)を用いて行う。B法の電磁場は同時緩和反復法を用いて離散化をする。また、温度場には前進オイラー法を用いる。各場の時間進行において、速度場^(4.11)は、式(4.2)をベルヌーイ関数 H について陰的に、その他の変数については陽的に時間進行させる。そこで、速度とベルヌーイ関数は時間ステップ $(n+1)$ の非圧縮の条件^(4.12)を満足するように修正する。B法の電磁場は、式(4.7)を速度ベクトル \mathbf{v} および誤差関数 R について陰的に、磁束密度ベクトル B について陽的に時間進行させる。そこで、磁束密度ベクトル B は時間ステップ $(n+1)$ の磁荷不在の条件(式(4.6))を満足するように修正する。温度場は、式(4.9)を速度ベクトル \mathbf{v} と電流密度ベクトル j について陰的に、温度 T について陽的に時間進行させる。そして、各場には解の安定性のためBTD項を使用している。

つぎに、要素行列式の導出にはGalerkin 法^(4.12)を用いる。使用される補間関数は \mathbf{v}, j, B そして T については六面体双1次要素、その他の変数については要素内一定の補間をする。その際、固定境界において0となる重み関数、 \mathbf{v}, j, B, T を用いる。

4.4 解析モデル

計算モデルとして同心二重球の間隙内の熱対流問題を考える。自然対流を引き起こすために、内球をHotとし、外球をColdと設定する。内球から外球の方へ伝導する熱によって発生する浮力は自然対流の原動力になる。図 4.1 に計算モデルを示す。流体に外力として働く重力は $-z$ 軸方向に作用するものとする。二重球の半径比は $D_i/d=0.86$ とする。ここで、 D_i と d はそれぞれ内球の直径、 $r_o - r_i$ を示す。

計算に用いる格子は六面体要素で全要素数 48,000, 全節点数 50,442 である。格子の最小格子幅は $0.019 r_0$ となる。また, 格子作成は Fanら^(4.13)の数値解析手法を参考に, 不等分割を行っている。二重球の内側と外側の格子幅は中心格子の $1/3$ 倍になるように格子作成を行なう。

図 4.1 において, 流速の境界条件は全壁面においてすべりなしとする。また, 法の場合, 電流の境界条件は絶縁条件とする。そして, B 法の場合, 磁束密度の境界条件は誘導磁場の法線成分が 0 になるようにする。温度の境界条件は, 内球の外表面と外球の内表面の温度に対してはそれぞれ 1, 0 とする。そして, 熱の出入りは内球と外球の境界でないものとする。

法とB法の計算に用いる Pr 数, Ra 数, そして Ha 数はそれぞれ, 0.025, 100, 100 である。そして, Coriolis力はB法を用いる場合に外力として作用させるが, それを表す無次元数である Ta 数は 0, 100, 1,000, 10,000 の 4 種類を使う。また, Ec 数, 計算の収束条件, そして計算の反復回数はそれぞれ, 3.88×10^{-7} , 0.001, 200 とする。B法における磁気レイノルズ数は 1.0 とする。計算時間の刻み幅は両手法と共に $t=0.00002$ とする。

熱対流が発生してから対流が十分に発達したときに磁場を印加する。外部磁場は $-z$ 軸方向に印加され, その大きさは 1 である。

B法の解法にあたり, 磁気レイノルズ数は大きな意味を持つ。実験室のスケールでは磁気レイノルズ数^(4.14)は 1 より小さい。実際, 常温における水銀の磁気レイノルズ数を計算してみると, $Rem = \mu Ud = 0.0001$ となる(ここで, 代表長さ $d=0.01m$, 体表流速 $U=0.01m/s$)。ところが, B法は $Rem = 1$ の際に有効な手法になる。ここでは, 法と比較するために磁気レイノルズ数を 1 にしている。

4.5 解析結果と検討

4.5.1 磁場下における水銀の自然対流

二重球の球間隔に溶融金属が充満していることを想定して, そのモデルに対して解析を行ない解が得られた。図 4.2 は磁場なしの速度場の結果を示す。解析条件は $Pr=0.025$, $Ra=100$, $Ta=0$, $Ha=0$ としている。図 4.2 は $\theta=90^\circ$ と $\theta=90^\circ$ における速度ベクトルの断面図である。無次元時刻 $t=100$ において熱対流は左右対称性を持って発達している。この対流は定常状態における様子であるため,

時間の経過と共に変動は確認されていない。高 Ra 数の水銀の対流は時間依存性があるため、時間の経過と共に周期的な振動を示すことが報告されている^(4.2)。その報告によると、時間依存性が現れる Ra 数は12,000以上である。このような知見から、低 Ra 数($Ra=100$)の計算では水銀対流の時間依存性はないことが確認された。

次は、図4.2の計算に直流磁場を印加することにする。磁場を印加する時刻は無次元時刻 $t=12$ とする。この時刻の流れは十分発達し、安定に至ったときである。電磁場の計算には誘導磁場の働きを考察するため、電磁場解析にB法を導入する。また、同様な計算条件の下で法を用いて計算する。これらに用いた計算条件は $Pr=0.025$, $Ra=100$, $Ta=0$, $Ha=100$ (法, B法), $Rem=1$ (B法)である。両手法を用いて計算を行なった結果、図4.3のような速度場の定常解を得た。図4.3は球座標系の $\theta=90^\circ$ と $\theta=90^\circ$ における速度ベクトルの断面図である。(a)と(b)の比較から法およびB法の結果は定性的に一致していることが分かる。無磁場下の場合には図4.2のように流速は内球の壁面近傍で発達して、流れは外球の上部へ移動して行く。この際に速度ベクトルは内球の側面で最も大きな値を示すことが特徴である。また、内球近傍で発達した流れは球の上部まで至らず、方向転換し球の下部へ移動して行く。そして、全体的な流れの様子は腎臓形状となる。これに磁場が加わると図4.3のように流れは抑制される。

その結果法とB法の結果は定性的に一致する。両手法の速度ベクトルは内球の側面近傍を除いてほぼ零となる。この原因は対流制御にLorentz力が働いた結果である。図4.4は $\theta=90^\circ$ と $\theta=90^\circ$ における z 方向の流速分布である。このデータからも、対流制御効果は確認される。磁場なしの流速の大きさに比べて、磁場を印加すると法およびB法共に、流れはよく抑制されている。ところが、温度場の場合、図4.5のように温度の変化は現れていない。その理由として計算に用いた Ha 数が小さいことを挙げられる。一般的に Ha 数が大きい場合、ジュール(Joule)発熱を無視することはできない。ここで、図4.6の磁束密度ベクトルの大きさを見ると法とB法に差があることが分かる。法は一定の印加磁場(0,0,-1)で流れ場に働くが、B法の場合は局部によって異なる値を示している。図4.6において、B法による磁場の大きさを見ると、内球($r=0.3$)から外球($r=1$)に掛けてその大きさは印加磁場の大きさである1を中心に変動している。特に、印加磁場の向きと流れの向きが逆方向の場所では誘導磁場は1より大きな値を、そして同じ方向の場所では1より小さな値を示している。ここで、1より大きな誘導磁場の量は、誘導電流が周辺に新たな磁場^(4.15)を作り出した結果である。

この作用は誘導磁場がもとの磁場を強めるため、ダイナモ作用^(4.7)という。しかし、その大きさは流れ場へ影響力を持つには小さすぎる。そのため、法とB法による速度と温度の結果は一致することになる。しかし、計算に用いる Ra 数および Rem 数をもっと高くすると状況は変わると思う。今後、これらに対する検討が望まれる。

4.5.2 Coriolis 力場における水銀の対流

次に、Coriolis力場における熔融金属の対流を考察する。Coriolis力は回転座標系上で相対運動を行なうときに発生する。その際、Coriolis力は相対運動の方向と回転軸の方向へ直角に作用する。このため、回転軸方向のベクトル成分はCoriolis力から垂直に影響を受ける。その結果、Coriolis力は流れの安定性を持つことになる。また、回転軸に直角方向のベクトル成分には、流れに直角な面内の二次流れを引き起こすことが知られている^(4.16)。

本解析では、同心二重球のモデルを用いて数値計算を行ない収束解が得られた。計算に用いた無次元数は $Ra=100$ に対して $Ta=100$ 、 $Ta=1,000$ 、 $Ta=10,000$ の三つの計算条件である。図4.7に $Ta=10,000$ の速度ベクトルおよび流線の計算結果を示す。 $Ta=10,000$ の計算ではCoriolis力の効果が明確に確認できる(図4.8、図4.9参照)。また、Coriolis力は計算時刻 $t=0$ より考慮しているため、 $t=40$ に至ると熱対流の発達と共にその影響力は十分に現れていることが確認される。図4.7(a)は $\theta=90^\circ$ における水平面の速度ベクトル図を示す。内球の表面には境界層が発達する。そして、強い上昇流が発生している。この上昇流は外球の表面近くでは降下流となって流れている。図4.7(a)の速度ベクトルはCoriolis力が作用しない図4.2(a)と比較して、特に上昇流の向きに大きな差が生じている。回転軸方向の速度ベクトルはCoriolis力との相互作用により西向きの方に斜めに向いている。そのベクトルの大きさおよび向きはCoriolis力の程度によると考えられる。図4.7(b)の速度ベクトルは図4.2(b)の速度ベクトルと比べて、流速の大きさには大きな差が見られるが、流速の向きには変化は見られない。また、内球の左右に形成されている腎臓形状渦のパターンにも変化はない。 $Ta=0$ と $Ta=10,000$ において、流線の形状には変化は見られない。

図4.8に $\theta=90^\circ$ と $\theta=90^\circ$ における水平線上の流速 $-v$ の分布を示す。 r 方向には $r=0.30$ から $r=1$ までの節点上の値を取っている。また、図4.8、図4.9に載せている結果は流れが十分発達している時刻 $t=40$ におけるものである。図にお

いて、 $Ta=0$ の場合は Coriolis力が作用していないため、流速 v は r 方向に対して零に近い。ところが、 $Ta=100$ になると速度分布に大きな違いが見られる。まず、 $r=0.30$ から $r=0.76$ まで流速 v は増加する。他の領域では大きな変化は示していない。 $Ta=100$ では流れの変化は内球回りで起きていることが分かる。ここで、Coriolis力を最大に受ける位置は $r=0.50$ である。 r 方向に直交する流速 v は流速 v_z に比べてその大きさは $1/10$ であるため、主流へ大きな影響は及んでいない。しかし、Coriolis力を受ける程度は大きい。この効果は流体の混合を必要とする分野へ応用が期待できる。つぎに、 $Ta=1,000$ 、 $Ta=10,000$ の流速は $Ta=100$ と同じ様子をみせている。しかし、 $Ta=1,000$ に比較して $Ta=10,000$ の場合、最大流速 v の増加率は減少することが分かる。また、 $r=0.88$ においては流速の減少率は下がる。このような流れ場の変化は内球の大きさにも依存することが知られている^(4.17)。図 4.9 に $\theta=90^\circ$ と $\theta=90^\circ$ における水平線上の流速 v_z の分布を示す。流速 v_z の分布は図 4.7 (b)の上昇流と降下流を表している。 $r=0.30$ から $r=0.65$ までは上昇流、そして $r=0.65$ から $r=1$ までは降下流をそれぞれ示す。図 4.9 は上昇流と降下流が Coriolis力の影響を受けていることを示している。 $Ta=100$ 、 $Ta=1,000$ の場合、流速は大きな変化を示していない。しかし、 $Ta=10,000$ は流速 v_z へ大きな影響を及ぼしている。図 4.9 において $Ta=10,000$ が示す線を見ると流速の大きさは減速している。これは $\theta=90^\circ$ の平面に作用する Coriolis力が球の軸方向の線分を引き伸ばすからである。そのため、図 4.7 (a)における内球近傍の速度ベクトルは回転軸と反対方向へ向いている。これが Coriolis力の影響である。特に、 $Ta=10,000$ において、 z 軸方向の対流成分が抑制されることが特徴である。

4.5.3 Coriolis力と Lorentz力が作用する水銀対流

ここでは、熔融金属の自然対流に磁場と Coriolis力を同時に考慮して計算を行った。それらの結果より磁場と Coriolis力は熔融金属の熱対流に影響力を持つことが分かった。図 4.10 に速度場の結果を示す。図 4.10 (a)は磁場が印加されている図 4.3 (c)に Coriolis力を考慮した場合の結果である。前者は後者に比べて内球近傍の流速ベクトルの変化が目立つ。これは内球周辺において、軸方向の速度ベクトルが強い Coriolis力を受けて、斜め方向に向くようになり、それに磁場が作用したためである。また、図 4.10 (a)から断面上の速度ベクトルは全般的に流速が図 4.3 (c)に比べて抑制されていることが分かる。つぎに、図 4.10 (b)の断面から速度ベクトルは磁場のみを印加した場合の図 4.3 (b)と比較して差は見ら

れない。このことより，溶融金属の熱対流は外部磁場に加え，Coriolis力を考慮すると流れ場の抑制効果がさらに上がることが分かる。このことは，図 4.11~図 4.13 の流速の分布を用いて説明できる。図 4.12 の $\theta = 90^\circ$ と $\theta = 90^\circ$ における水平線上の流速 v_r の分布を見ると， $r=0.30$ より $r=0.65$ の間の流速は抑制されていることが分かる。特に，磁場下における $Ta=10,000$ の結果は抑制効果が目立つ。しかし，図 4.11 の流速 v_r には Ta 数によって目立つ差は見られない。また，図 4.13 において流速 v_z は Ta 数によって変化しない。これが Lorentz力および Coriolis力が作用する流れ場の大きな特徴と言える。

4.6 4章の結言

本章では回転球殻内の作動流体が溶融金属の場合，誘導磁場を考慮し，GSMAC 有限要素法により速度場・電磁場・温度場の相互作用を考察した。その際に，Coriolis力が流れ場に及ぼす影響を検討した。その結果，以下のような結言を得た。

- (1) 誘導磁場の働きを考察するため，電磁場解析に B 法を導入し，解析を行ない，法の結果と比較した。同じ計算条件 ($Pr=0.025$, $Ra=100$, $Ta=0$, $Ha=100$ (法, B 法) , $Rem=1$ (B 法)) 下で電磁場は法と異なる結果を示した。
- (2) B 法を用いて誘導磁場がもとの磁場を強めるダイナモ作用が考察できた。
法は一定の印加磁場 $(0,0,-1)$ を持って流れ場に働くが，B 法の場合は局部によって異なる計算結果を示している。特に， $\theta = 90^\circ$ と $\theta = 90^\circ$ において，印加磁場の向きと流れの向きが逆方向の場所では誘導磁場は 1 より大きな値を，そして同じ方向の場所では 1 より小さな値を示した。
- (3) 無磁場下において Coriolis 力は流れ場に二つの影響を及ぼすことが分かった。まず，回転軸方向の速度ベクトルは Coriolis 力との相互作用により $\theta = 90^\circ$ において西向きに斜めに向いている。そして，回転軸に垂直な方向の速度成分は $\theta = 90^\circ$ において局所的に流速が加速する。

- (4) 磁場とCoriolis力を同時に考慮する場合,対流抑制効果の向上が確認された。磁場のみを印加する場合, $\theta = 90^\circ$ における流速 v_z は 1/10 に抑制される。また,両者を考慮する場合,流速 v は 7/10 に抑制されることが確認できた。
- (5) B法を用いて計算した結果,印加磁場の大きさ -1 に対して誘導磁場の最大大きさは-1.000056であった。

4章の参考文献

- (4.1) 北内・本田, 第8回計算流体シンポジウム講演論文集, E222, (1997), 375.
- (4.2) 鄭・他2名, 機論, 66-648, B(2000), 1959.
- (4.3) 行武, ながれ, 15, (1996), 493.
- (4.4) 松島・本蔵, シミュレーション, 14-4, (1995), 271.
- (4.5) 坪井, 日本 AEM 学会誌, 2-3, (1994), 1.
- (4.6) 坪井・内藤, 電磁力応用シリーズ 1・2・3, 養賢堂, (1994).
- (4.7) 日本 AEM 学会, 実践数値電磁界解析, (1994).
- (4.8) 河野, 科学, 66-11, (1996).
- (4.9) 棚橋・斎藤, 京都大学数理解析研究所講究録, 548, (1985), 122.
- (4.10) 加藤・棚橋, 機論, 57-540, B(1991), 2640.
- (4.11) 棚橋, GSMAC-FEM, (1991), アイピーシー.
- (4.12) 矢川, 流れと熱伝導の有限要素法解析, (1983), 培風館.
- (4.13) Qin-Yin Fan, 第7回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1993), 435.
- (4.14) 棚橋, 電磁熱流体の数値解析, (1995), 森北出版, 195.
- (4.15) 吉澤, 生産研究, 46-2, 47.
- (4.16) 兎山・他4名, 機論, 43-374, (1977), 3797.
- (4.17) 竹広・森, 「地球流体力学」第26回流体力学講演会特別企画報告, 302.

4章の表および図

図 4.1 計算モデル

図 4.2 $\theta=90^\circ$ と $\phi=90^\circ$ における速度ベクトルの分布($Pr=0.025$, $Ra=100$, $t=100$)

図 4.3 $\theta=90^\circ$ と $\phi=90^\circ$ における A 法と B 法の速度ベクトルの分布($Ta=0$, $Ha=100$, $Rem=1$, $t=22$)

図 4.4 $\theta=90^\circ$ と $\phi=90^\circ$ における速度分布(磁場なし, A 法, B 法)

図 4.5 $\theta=90^\circ$ と $\phi=90^\circ$ における温度分布(磁場なし, A 法, B 法)

図 4.6 $\theta=90^\circ$ と $\phi=90^\circ$ における磁束密度分布(A 法, B 法)

図 4.7 $\theta=90^\circ$ と $\phi=90^\circ$ における速度ベクトルと流線の分布($Ta=10000$, $Ha=0$, $Rem=0$)

図 4.8 $\theta=90^\circ$ と $\phi=90^\circ$ における流速 $-v_x$ の分布($Ha=0$, $Rem=0$, $t=40$)

図 4.9 $\theta=90^\circ$ と $\phi=90^\circ$ における流速 v_z の分布($Ha=0$, $Rem=0$, $t=40$)

図 4.10 $\theta=90^\circ$ と $\phi=90^\circ$ における速度分布($Ta=10000$, $Ha=100$, $Rem=1$, $t=40$)

図 4.11 $\theta=90^\circ$ と $\phi=90^\circ$ における流速 v_r の分布($Ha=100$, $Rem=1$, $t=40$)

図 4.12 $\theta=90^\circ$ と $\phi=90^\circ$ における流速 $-v_x$ の分布($Ha=100$, $Rem=1$, $t=40$)

図 4.13 $\theta=90^\circ$ と $\phi=90^\circ$ における流速 v_z の分布($Ha=100$, $Rem=1$, $t=40$)

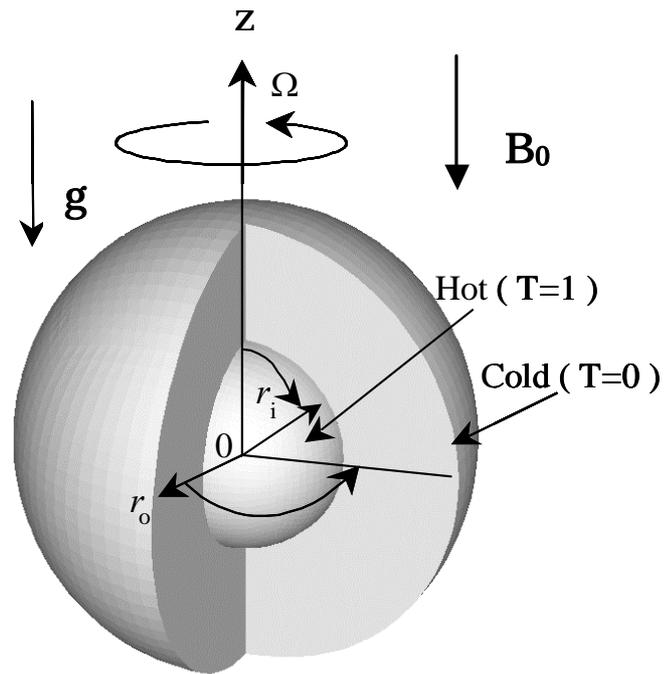
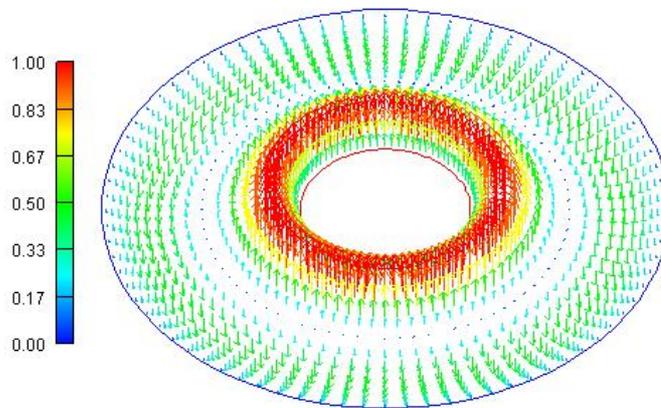
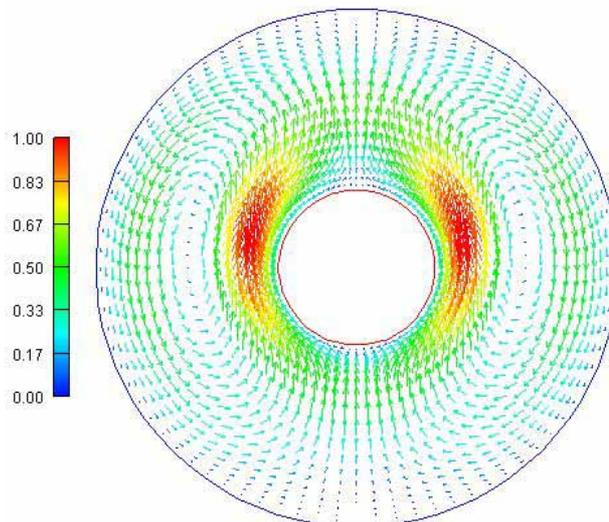


Fig. 4.1 Calculation model

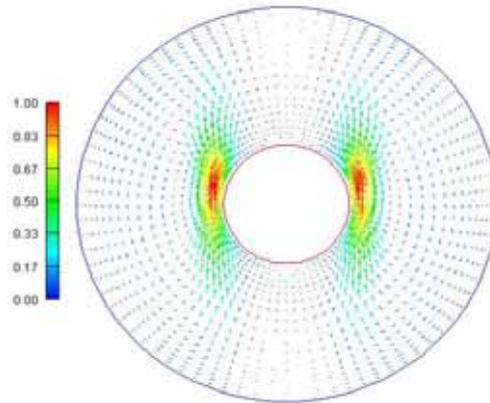


(a) Velocity vectors on $\theta=90^\circ$

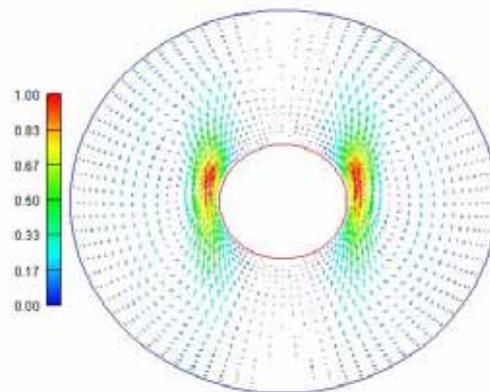


(b) Velocity vectors on $\theta=90^\circ$

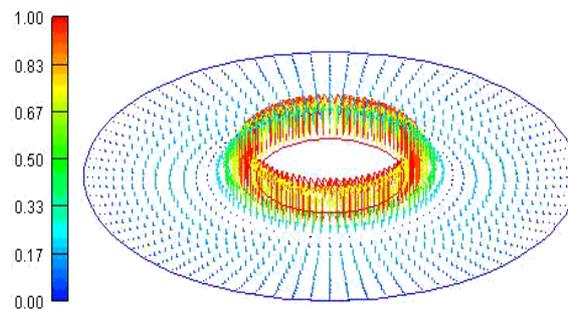
Fig. 4.2 Velocity vector ($Pr=0.025, Ra=100, t=100$)



(a) Velocity vectors on $\theta=90^\circ$ (method)



(b) Velocity vectors on $\theta=90^\circ$ (B method)



(c) Velocity vectors on $\theta=90^\circ$ (B method)

Fig. 4.3 Velocity vector ($Ta=0, Ha=100, Rem=1, t=22$)

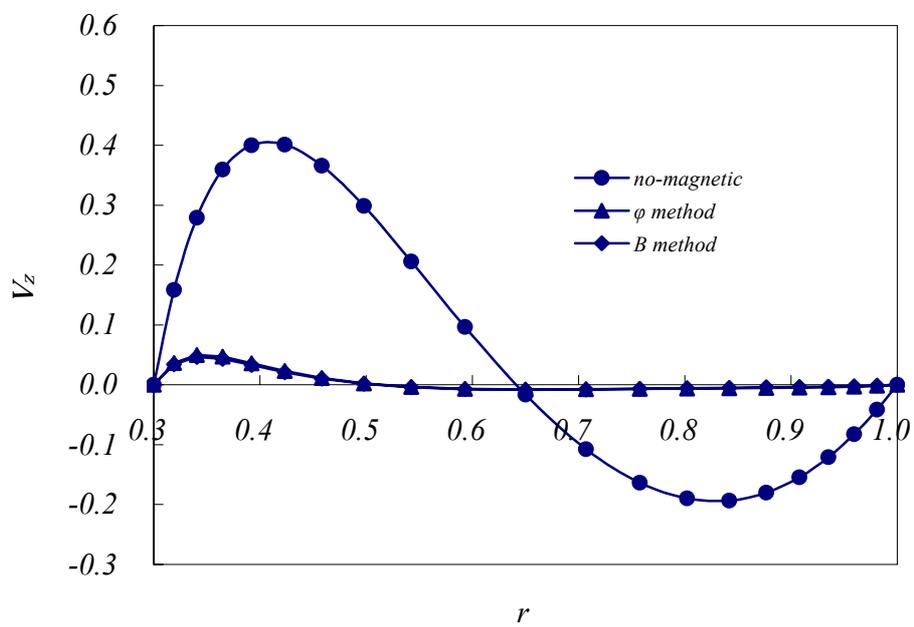


Fig. 4.4 Velocity profiles on $\theta=90^\circ$, $\theta=90^\circ$

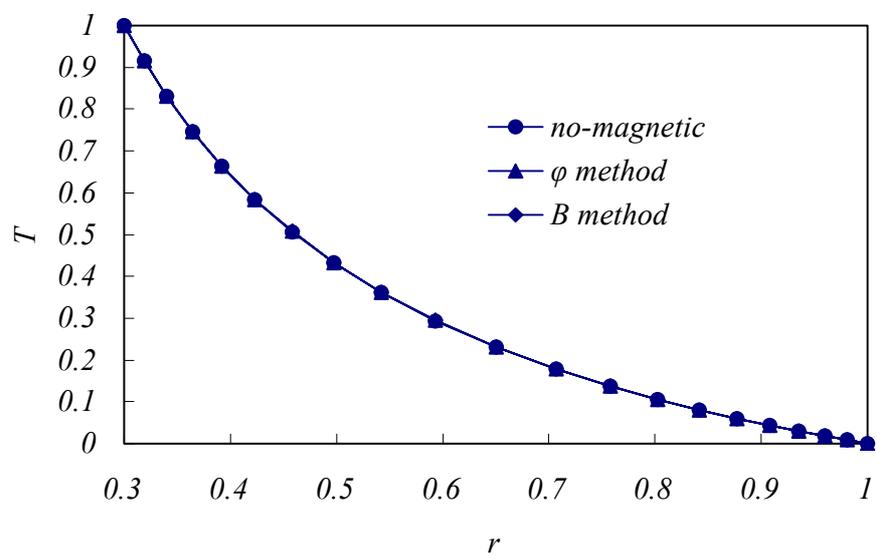


Fig. 4.5 Temperature profiles on $\theta=90^\circ$, $\omega=90^\circ$

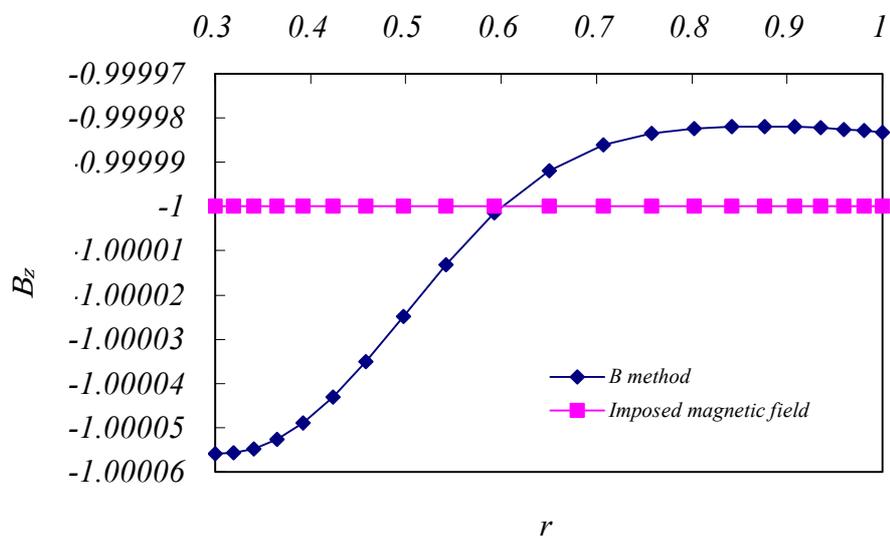
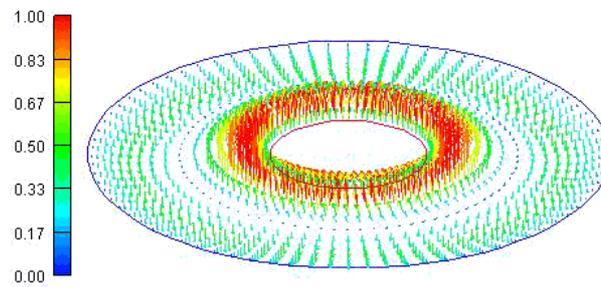
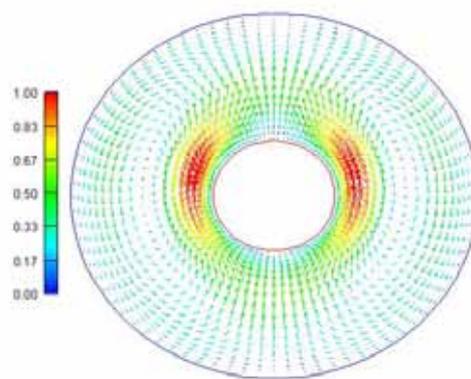


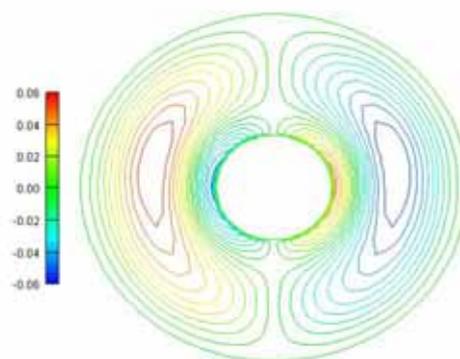
Fig. 4.6 Magnetic flux density profiles on $\theta=90^\circ$, $\phi=90^\circ$



(a) Velocity vectors on $\theta=90^\circ$



(b) Velocity vectors on $\phi=90^\circ$



(c) Streamlines on $\phi=90^\circ$

Fig. 4.7 Results at $t=40$ ($Ta=10000$, $Ha=0$, $Rem=0$)

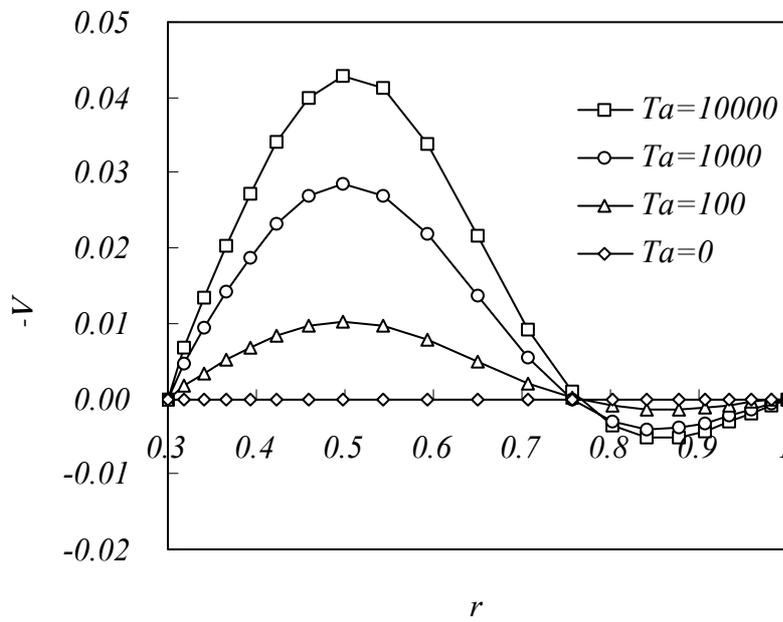


Fig. 4.8 Velocity component $-v$ on $\theta=90^\circ$, $\phi=90^\circ$ ($Ha=0$, $Rem=0$, $t=40$)

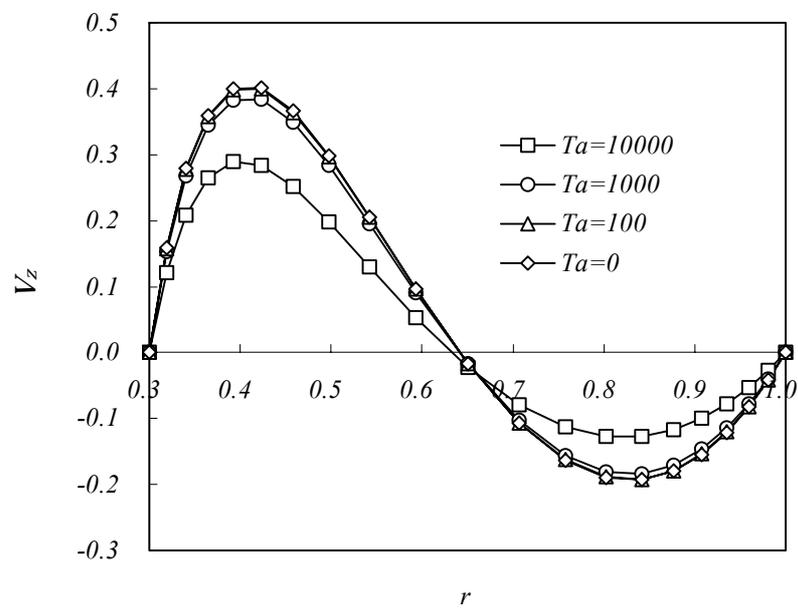
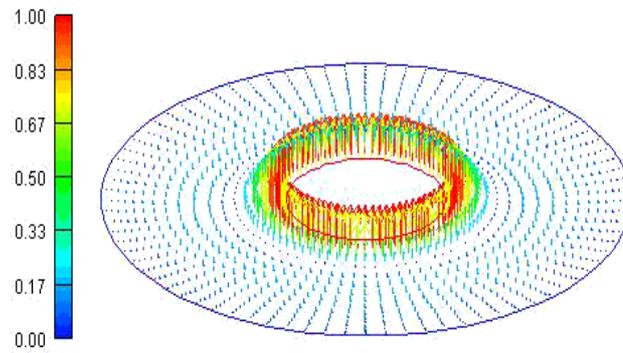
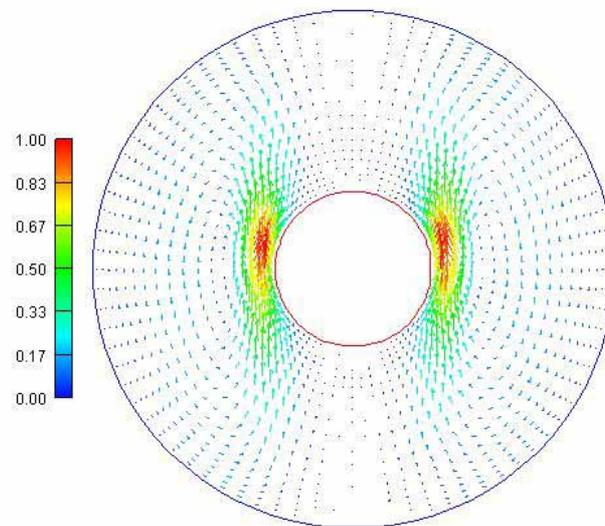


Fig. 4.9 Velocity component v_z on $\theta=90^\circ$, $\phi=90^\circ$ ($Ha=0$, $Rem=0$, $t=40$)



(a) Velocity vectors on $\theta=90^\circ$



(b) Velocity vectors on $\theta=90^\circ$

Fig. 4.10 Results at $t=40$ ($Ta=10000$, $Ha=100$, $Rem=1$)

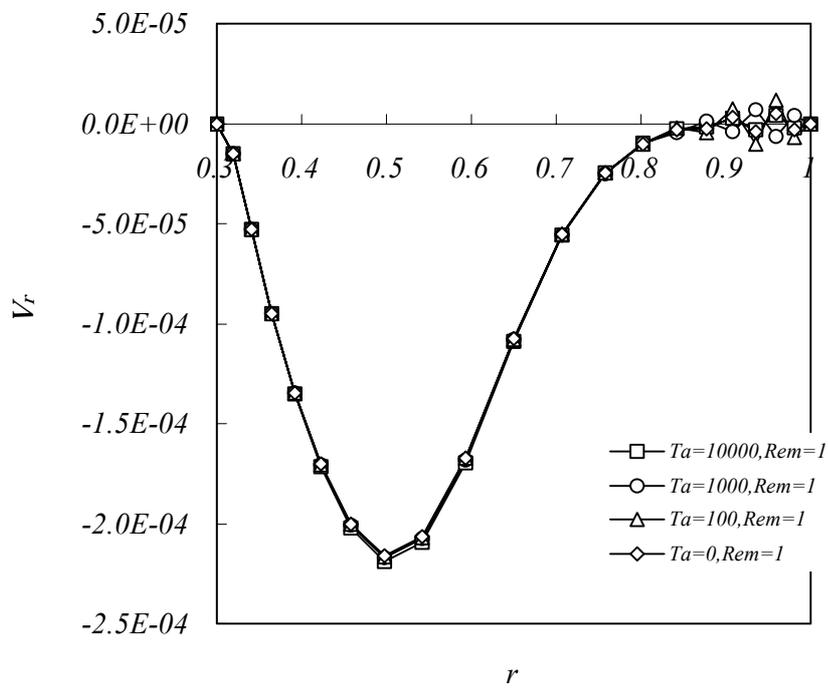


Fig. 4.11 Velocity component v_r on $\theta=90^\circ$, $\phi=90^\circ$ ($Ha=100, Rem=1, t=40$)

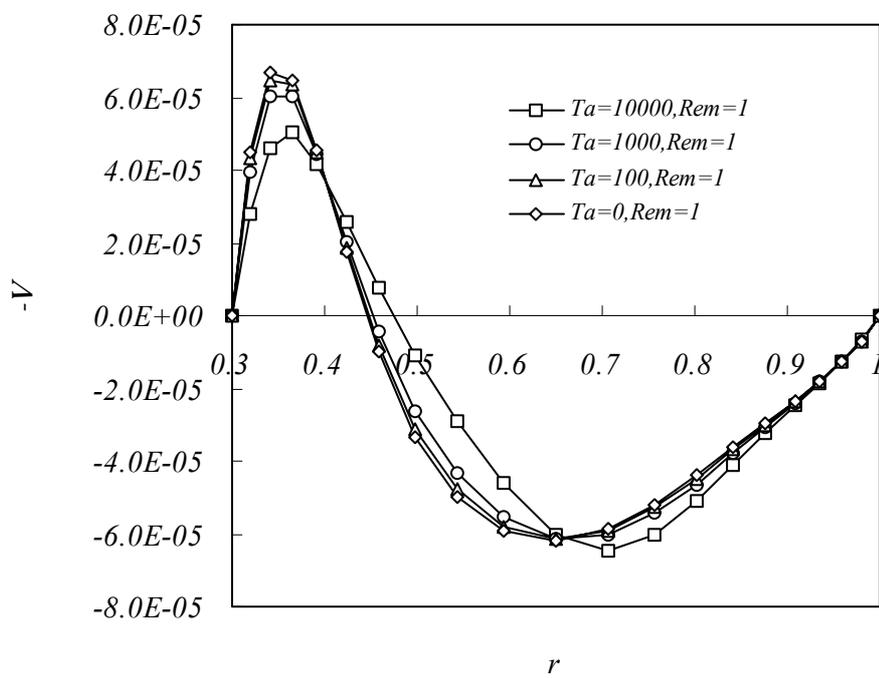


Fig. 4.12 Velocity component $-v$ on $\theta=90^\circ$, $\phi=90^\circ$ ($Ha=100$, $Rem=1$, $t=40$)

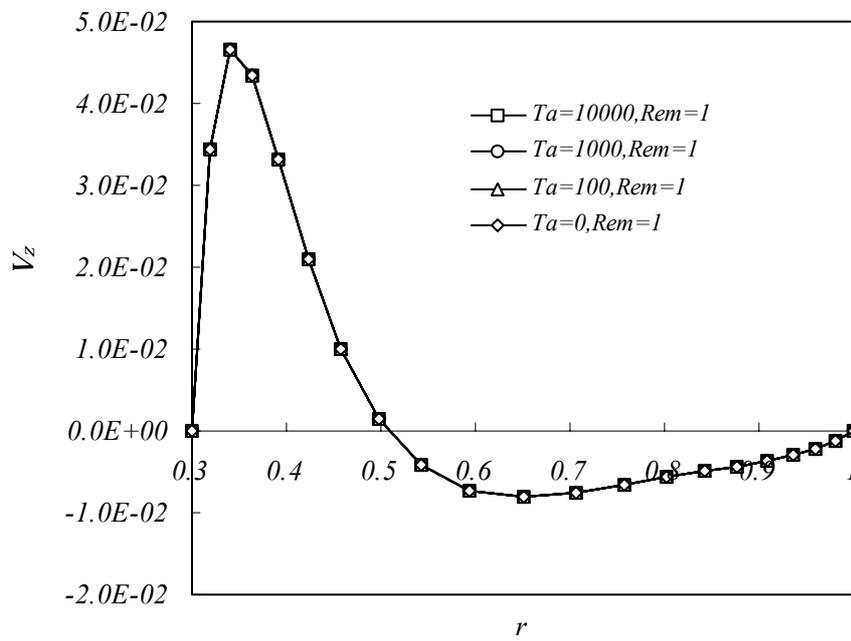


Fig. 4.13 Velocity component v_z on $\theta=90^\circ$, $\phi=90^\circ$ ($Ha=100, Rem=1, t=40$)

第 5 章 Lorentz 力の応用

5.1 5 章の緒言

電磁熱流体は電磁熱流体力学に統一される基本物理法則^(5.1, 5.2)は全部で9個である。すなわち、質量・運動量・角運動量・エネルギー(Energie)の4つの物理量に対する保存法則(つり合い方程式)と熱力学の第2法則および電磁場を支配する4つの法則、すなわちガウス(Gauss)の法則・磁荷不在の法則・ファラデー(Faraday)の法則・アンペア(Ampere)の法則から構成されている。

MHD^(5.3)は非圧縮の導電性のある電磁流体力学^(5.4, 5.5)である。水銀・ナトリウム(Sodium, Na)・熔融金属の流れが、電磁場によってどのように制御できるかを研究する学問である。電磁熱流体の基礎は電磁気学と熱力学と流体力学の3分野が融合した学問である。そして流体と熱、流体と電磁気、熱と電磁気が相互作用^(5.6)する学問分野であると同時にエネルギー科学の核となっている。その相互関係は、流体は熱の作用により浮力を、電磁場の作用によりローレンツ(Lorentz)力^(5.7)を受ける。温度場には、電磁場の作用によりジュール(Joule)発熱、流れ場の作用により摩擦発熱がそれぞれ寄与する。その影響から、強磁場下では、磁場抑制効果が現れ、弱磁場では磁場促進効果が現れる。このように電磁流体は、磁場により影響を大きく受け特異な挙動を示す興味深い対象として、多くの研究者によって研究^(5.8, 5.9, 5.10)されている。

シリコン融液が導電性を示すことに着目し、シリコン融液を直接制御することに磁場印加CZ法(Magnetic-field-applied CZ法, MCZ法)が用いられている^(5.11, 5.12)。しかしながら、印加磁場により流動がどのように変化するかということは十分に把握できておらず、単結晶を作る最適な磁場を未だ決定できない状態にある。その一種類であるCusp磁場^(5.13, 5.14, 5.15)は、二つの向かい合う円形コイルに、お互いに逆方向の電流を流したときにできる磁場配位のことである。この磁場配位は、中央部で磁場強度が零であり、外に向かうにしたがって磁場強度が強くなっていくという特徴を持つことから、作用する流体に対して安定な磁場配位であると言える。とは言え、印加磁場により流動がどのように変化するかということは十分に把握できておらず、単結晶を作る最適な磁場を未だ決定できない状態にある。そこで、磁場無しモデルや垂直磁場印加モデルを用いて

解析を行い、どのような印加磁場が良質な結晶を作る上で最適かを考察する。解法に用いる法は、誘導磁場が印加磁場より非常に小さく無視できる場合に適用される。自然対流問題では、流速はそれほど大きくないため、誘導磁場は非常に小さく無視できる。法を用いた立方体Cavity内の3次元電磁熱流体の解析においては、中井ら^(5.16)が法を適用したGSMAC有限要素法を用い、Ozoeらの数値解析結果、尾添の実験結果と有効に一致し、法の有効性が示されている。

電磁気力による溶融金属のプロセッシングは交流磁場によるものが主であり、加熱・攪拌・浮揚などの諸現象が冶金プロセスの中で広く利用させているため、交流磁場下における電磁流体の流動を解析することは近年ますます重要になってきている。交流磁場中の被加熱物に誘起される誘導電流の分布は、表面層において最大で、内に行くにしたがって小さくなる。これを表皮効果というが、この表皮効果により生じる誘導電流はコイル電流と反対方向に流れて、互いに反発力が働く。これを電磁力^(5.17)といい、溶湯の場合には中心方向に圧縮される力を受けて、自動的に攪拌し、この攪拌力で溶湯は盛り上がる。そこで、交流磁場下における溶融金属の問題に対して、電磁場解析にA-法により定式化された三次元の境界要素・有限要素併用法を、速度場の解析に自由表面を考慮した三次元ALE有限要素法を用いて、交流が流れる二重円筒形コイル内に置かれた円筒容器の電磁場および流動解析^(5.18)を行う。その際、自由表面はALE法^(5.19, 5.20)を用いる。

主な記号

J_f : 強制電流密度ベクトル

j : -1 の平方根

ω : 交流電源角周波数

ただし、上記以外の主な記号は第2, 3, 4章を参照されたい。

5.2 基礎方程式

電磁熱流体は電離気体を取り扱う圧縮性のあるプラズマと非圧縮電磁流体に大きく分けられる。また、非圧縮電磁流体は導電性のMHDと非導電性のFHD, EHDに分類される。ここでは、MHDの基礎方程式を導くことにする。非圧縮電磁流体の支配方程式系は、速度場・電磁場・温度場を支配する方程式系からなる。速度場の方程式はNS方程式と質量保存の連続の式を用いて得られる。

以下に、無次元化された式を示す。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{Ha^2}{Re} \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 + \frac{Gr}{Re^2} T \mathbf{e}_z \quad (5.2)$$

自由表面を持つ流体の場合、速度場は ALE 法を用いて解く。ALE 法は計算格子を流れと独立に移動させることができるため、自由表面が大変形する問題に適している。自由表面において格子の位置変化は次式で近似される。

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n+1}) \quad (5.3)$$

ここで n は計算ステップを表す。計算格子の移動に伴い、旧格子から新格子へ物理量を移す必要がある。その際に、相対速度を求めて運動量の式および連続の式が満たされるように流速を補間する。

電磁場の解法には解析モデルによって 法と A- 法を用いる。法と A- 法の方程式は Ohm の式と電流の保存則、そして磁気ベクトル・ポテンシャル A を用いて得られる。直流磁場のみを扱う 法の方程式は以下のとおりである。

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (5.4)$$

$$\mathbf{j} = -\nabla \phi + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \quad (5.5)$$

そして、外部電流を用いて流体を制御する A- 法は計算空間によって方程式が異なる。計算空間が空気領域と溶液領域を含む場合、それぞれの解法には有限要素法と境界要素法を用いる。溶液領域の電磁場は電流の保存則とつぎに示す Ohm の式を用いる。

$$\mathbf{j} = -\sigma(j\omega A + \nabla \phi) \quad (5.6)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mu\sigma(j\omega\mathbf{A} + \nabla \quad) \quad (5.7)$$

ここで j と ω はそれぞれ-1の平方根と交流電源角周波数[rad/s]を示す。そして、空気領域には以下の式を用いる。

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_2 \mathbf{J}_f \quad (5.8)$$

ここで、 \mathbf{J}_f は強制電流密度ベクトル[A/m²]である。

流れ場と電磁場に続き、温度場はエネルギー方程式から得られる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)T + \frac{1}{PrRe} \nabla^2 T + \frac{Ha^2 Ec}{Re} \mathbf{j}^2 \quad (5.9)$$

式(5.1)より式(5.9)は、以下の仮定を設け方程式系を簡単にしている。

- (a) 電磁流体は導電性ニュートン流体とする。
- (b) 流れは非圧縮・層流とする。
- (c) 式(5.2)において、浮力項の密度は体膨張率 β と温度に依存する。

$$\rho = \rho_0 \{1 - \beta(T - T_0)\} \quad (5.10)$$

- (d) 電磁流体に作用する外力は浮力および Lorentz 力のみとする。
- (e) 変位電流を無視する。
- (f) 電磁流体は電氣的に中性・無極性とする。
- (g) 物性値の温度依存性を無視する。
- (h) 粘性散逸による発熱を無視する。
- (i) 印加磁場は交流磁場と一定直流磁場を用いる。

5.3 数値解析手法

前節の支配方程式(5.1)～(5.10)に対して離散式および要素行列式を順次に導いていく。速度場および温度場の離散化は 2.3 節と同様の方法で行う。また、

電磁場は同時緩和反復法を用いて離散化をする。離散化された各場の式は速度場，電磁場および温度場の順に計算を行う。

各場の時間進行において，速度場および温度場は 2.3 節に示した同様な時間進行法によって時間進行させる。電磁場のほうは，式(5.5)を電位ポテンシャルについて陰的に，その他の変数について陽的に疑似進行させ，時間ステップ $(n+1)$ の電流の保存則(5.4)を満足するように電流密度と電位ポテンシャルを修正する。

つぎに，要素行列式の導出には Galerkin 法を用いる。使用される補間関数は， v, j および T については六面体双 1 次要素，その他の変数については要素内一定の補間をする。その際，重み関数は固定境界 $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_5$ において零となる関数 $\delta v, \delta j, \delta T$ を考える。その結果，要素行列方程式系が得られる。

5.4 Cusp 磁場による解析

5.4.1 数値解析モデル

図 5.1 に解析で用いる CZ モデルを示す。このモデルは渡辺らの実験モデル^(5.21) をベースにしてある。一般に酸化物を CZ 法で結晶にする場合には，種結晶を引き上げ軸を中心として回転させるが，本解析ではるつぼも引き上げ軸を中心として種結晶と逆方向に回転させる^(5.22)。回転を加える主な理由は二つあり，その一つは添加物の均一化であり，他方は不安定な自然対流を抑制することである。

計算に用いる解析格子の断面図を図 5.2 に示す。格子の全要素数と全節点数はそれぞれ 36,192, 38,259 である。るつぼは，角速度 $1rpm$ で回転している。るつぼ底辺部の温度は，底辺中心部(無次元温度 $T=1/3$)から下部壁(無次元温度 $T=1$)まで半径 r 方向に線形に変化し，壁面温度は無次元温度 $T=1$ の一定温度とする。自由表面の形状は平坦である。速度は，Slip 条件とし，自由表面を通しての熱の収支はないものとする。結晶・融液界面は回転しておらず，結晶・融液界面の形状は定常で平坦とする。温度に関しては，無次元温度 $T=0$ の一定温度とする。るつぼ，結晶・融液界面，自由表面は，絶縁壁とする。

Cusp 磁場は軸対称でありながら多方向の成分を持つことから，融液の対流および温度分布が軸対称になることに影響を与えられる。また，その分布には中央部で零から外側に向かって強くなる特徴があり，作用する流体に対し

て安定な磁場配位であると言える。

解析に用いるシリコンは 1,687K におけるシリコンである。計算は磁場なしと印加磁場に対して行なう。磁場なしの初期条件は速度，温度，そして電流密度を零として設定し，流れが十分発達したと思われる時刻($t=120[s]$)まで計算を行なう。そして，その時刻から Cusp 磁場を印加し，計算を行なう。

時間刻み幅は $\Delta t=5.0 \times 10^{-3}$ であり，無次元時刻 $t=220$ (有次元で約 200[s])まで計算を行う。計算パラメータは $Re=4.21 \times 10^3$ ， $Pr=1.64 \times 10^{-2}$ を用いる。また，グラスホブ数は磁場なしと印加磁場に対して，それぞれ $Gr=1.16 \times 10^7$ ， $Gr=1.74 \times 10^7$ を用いる。印加磁場下におけるハルトマン数およびエッケルト数はそれぞれ $Ha=1.41 \times 10^3$ ， $Ec=7.71 \times 10^{-8}$ である。

5.4.2 計算結果および検討

図 5.3 に磁場なしの速度場および温度場の結果を示す。それらの結果は左右非対称であり，流れが十分に発達した状態にもかかわらず回転軸近傍で流れの乱れが顕著である。これはるつぼの回転が熱対流を不安定にさせるためである。ところが，速度場は融液全体がよく攪拌されている様子が分かり，また，渦の様子もよく取られている。このとき，温度場は速度場を反映している様子が分かる。また，るつぼ側壁面から熱い融液が中央部に巻き込んでいることを示している。温度場における温度幅は無次元温度 $\Delta T=0.05$ である。

印加磁場の場合における速度場および温度場の結果を図 5.4 に示す。溶液に印加される Cusp 磁場はその中心面が融液表面から 20mm 下(Inside)にくるように配置したモデルである。図 5.4 の $x-z$ 断面における速度ベクトル図を見ると，流れは磁場なし(図 5.3)に比べて整流されていることがわかる。また，速度場および温度場は安定していて軸対称ながら，融液全体が良く攪拌されている。このような結果は Cusp 磁場の配置によるものと考えられる。

図 5.5 の $x-z$ 断面における電流密度の大きさの分布図を見ると，融液界面近傍，るつぼ側壁面近傍，るつぼ底面部近傍の要所に大きな電流密度が存在していて，それらに対流を効率よく抑制していると思われる。この電流分布を受ける流れ場の特徴的な点として，対流による主渦の中心位置はかなり下に落ち込んでいる(図 5.4)。主渦の中心位置が下に落ち込んでいる理由として，印加磁場配位が融液中央部で磁場強度が零あるいはごく弱い強度になるためだと考えられる。このように融液中央部の磁場強度が弱いことにより，融液界面近傍での流れを安定させながら中心部の流れを比較的に大きくさせることによつてるつぼ側壁

面から熱い融液が中央部に向かって流れ込むことが可能になる。このことによって融液中央部の流れを安定にし、融液を攪拌することになる。

図 5.6 は流跡線図である。図 5.6(a)は(磁場無し), 図 5.6(c)は印加磁場下における結果である。これらの図において, (a)と(c)の図は本スキームで解析した数値解析結果を x 方向から見たものであり, (b)と(d)の図は, 渡辺ら^(5.21)による実験結果を x 方向から見たものである。解析結果は渡辺らの実験結果とほぼ定性的に一致していると言える。

図 5.7 は, 印加磁場下における粒子速度の経時変化を渡辺らの結果(図 5.8)と比較して示したものである。解析における粒子の速度は初期位置である座標 $(x,y,z)=(-0.33,-0.33,-0.80)$ から要素平均されて行く。両者の比較では速度の変動率に差が見られる。

5.5 A- 法による解析

5.5.1 数値解析モデル

図 5.9 に解析モデルの正面図を示す。このモデルは金子らの実験モデル^(5.23)をベースにしてある。電磁力の影響による表面形状変化を確認するため, 金子らの行った実験との比較を行う。容器には半径 65mm の円筒形を用い, 誘導コイルは外半径 123mm , 内径 85mm の冷水ソレノイドである。

解析に用いた容器内のメッシュ数は 2,304 である。誘導コイルの上段と水銀の液面高さは一致している。解析における境界は, 自由表面境界と固定壁面境界の二種類からなる。

$$\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{v}} \quad (\text{固定壁面上}) \quad (5.11)$$

$$p_1 = p_2 + 2\mu_1 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{n} \quad (\text{自由表面上}) \quad (5.12)$$

ここで, 添え字 1, 2 はそれぞれ流体と外部気体を表し, μ_1 はせん断粘性係数 $[\text{Pa} \cdot \text{s}]$, \boldsymbol{n} は要素境界の外向き単位法線ベクトル, そして, \boldsymbol{D} は変形速度テンソル $[\text{m/s}]$ を表す。本解析では速度場に固定壁面上で二種類の境界条件を与えることにする。円筒容器の側壁面で鉛直方向のみSlipとし, 底面でNo-Slip条件とする。電磁場の境界条件は境界要素法により決まる。容器と外部気体の間の境界条件は

絶縁条件とする。直流重畳磁場は $-z$ 方向より $B_0=0.5T$ あるいは $B_0=1.0T$ が印加される。

計算は磁場なしと印加磁場に対して行なう。計算は容器へ交流磁場のみを印加する場合と、それに加えて直流磁場を重畳印加する場合について行なう。直流磁場を印加することによって融液の流れを抑制して溶湯の形状を安定にすることが可能になる。室温における水銀の物性値は相対導磁率が 1.0，導電率が $1.04 \times 10^6 S/m$ ，動粘性係数が $1.10 \times 10^{-7} m^2/s$ ，そして密度が $13,534 kg/m^3$ になる。そして，水銀に対する計算条件は交流電源周波数を $60Hz$ ，入力電流を $22,000A$ にする。

5.5.2 計算結果および検討

図 5.10 は水銀の容器内の流動を可視化したものである。可視化の結果より，Lorentz力が最大となる水平面を境として，二つのループ流れが上下に形成されていることが分かる。時刻 $t=0.4sec$ において，表面付近の流速が大きくなっている。ここで，代表長さを半径 $0.065m$ ，代表速度を最大流速 $0.09m/sec$ として乱流現象の指標となるレイノルズ数を見積もると $Re=5.3 \times 10^4$ となる。この領域は明らかに乱流域であるから厳密な比較のためには乱流モデルをいれるなど乱流対策を講じなければならない。

図 5.11 はメニスカス形状を示している。 $t=0.15sec$ における自由表面のメニスカス形状は，流れが完全に定常になっているとは言えず最終形状まで計算できていないが，金子らの測定値と良好な一致を示している。表面張力は

$$\sigma_T \kappa = \sigma_T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (5.13)$$

で表され，曲率半径を大きくする方向に働くため，特に容器壁面付近でみられる変曲する不安定部分では曲がりを補正する方向に力が働き，金子らの実験結果により近い形状になるものと考えられる。

図 5.12 は交流・直流重畳印加時の内部速度を表している。直流磁場は鉛直上向き^(5.24)に $B_0=1.0T$ が印加されている。図 5.10(b)に比べ最大内部流速が $1/3$ 程度に抑えられている。特に表面付近での速度が抑えられている。これは図 5.10(b)で顕著であった磁場印加方向を横断する流れが特に抑制されているからである。

流速は抑えられているが磁場なしの場合と同様に乱流域 ($Re=3.5\times 10^4$)であることに変わりはない。巨視的な流れも磁場印加前と比べてやや変化している。特に円筒中心部で下から上への流れが顕著になっている。

図 5.13 は交流・直流重畳印加による溶湯盛り上がり高さを示している。溶湯形状は直流磁場を印加する前に比べて印加状態では安定に保たれていることがわかる。直流印加磁場 $B_0=0.5T$ では表面の振動が大きくなっているが、流れが次第に安定化されている。さらに直流印加磁場 $B_0=1.0T$ では最終形状が時刻 $0.2sec$ でほぼ決定され、その形状が保たれている。一般に、直流磁場の場合流体に働く Lorentz 力は印加磁場の 2 乗に比例することが分かっているので、この場合の抑止力もその法則に従っているものと考えられる。ここで、直流印加磁場 $B_0=0.5T$ のとき、振幅が大きくなっているが、それは融液の固有振動数により近くなったからだと思われる。溶湯の振動を抑え、形状を保つことは最終的に金属を浮遊させ非接触溶解を実現させるときに重要な技術である。

5.6 5 章の結言

熔融金属流体の流動を解析した結果、以下の結言を得た。

- (1) Cusp 磁場印加 CZ 法を用いて解析を行ない、良い結晶を作るための条件は Cusp 磁場が溶液中心に位置するときである。これには誘導電流による Lorentz 力が大きく関与していることが分かった。
- (2) Cusp 磁場印加の速度場は実験結果と定性的・定量的な比較を行った。定性的には詳細な検討が得られたが、定量的にはまた不十分であるため表面張力、酸素濃度、物性値の温度依存性などの考慮が必要とされる。
- (3) ALE 法を用いて流体解析を行い、コイル中心部を境に上下に大きな対流がひとつずつできた。流れ場の最大流速は金子らの実験結果と比較し 85%に一致した。
- (4) 低周波交流電流印加の数値解析では、直流磁場を印加した結果、最大内部流速が 1/3 程度に抑えられている。特に、表面付近での速度が抑えられた。

5章の参考文献

- (5.1) 棚橋, 計算電気・電子工学シリーズ 8/電磁熱流体の数値解析, (1995), 森北出版.
- (5.2) 成 白能(偏訳), 基礎物理学, (1983), 半島出版.
- (5.3) 棚橋, 鉄と鋼, 79-2, (1993), 91.
- (5.4) 棚橋, 鉄と鋼, 79-4, (1993), 263.
- (5.5) 棚橋, 鉄と鋼, 79-5, (1993), 327.
- (5.6) ランダウ・リフシッツ, 電磁気学 (1)-(2), (1976), 東京図書.
- (5.7) de Vahl Davis, G. and Jones, I.P., Int. J. Num. Meth. Fluids, 3, (1983), 227.
- (5.8) 沖・棚橋, 機論, 59-563, B(1993), 2165.
- (5.9) Ozoe, H. and Maruo, E., JSME Int. J, 30-263, (1987), 774.
- (5.10) 尾添, 伝熱研究, 29, 112.
- (5.11) Mihelcic, L., et al, Forschungszentrum Jülich, 2, (1992), 106.
- (5.12) 干川・平田, 日本結晶学会誌, 27-3, (1985), 177.
- (5.13) 高須・他 3 名, 応用物理, 59-8, (1990), 1044.
- (5.14) Watanabe, M., et al, Proc. 8th International Symposium on Silicon Metaterials Science and Technology, (1998).
- (5.15) Lee, Y.-S., et al, J. Crystal Growth, 180, (1997), 477.
- (5.16) 中井・棚橋, 機論, (1996), 52.
- (5.17) 箕輪・他 2 名, 計算工学講演会論文集, 2-1, (1997), 217.
- (5.18) 金子ら, 第 28 回日本電熱シンポジウム講演論文集, (1991), 634.
- (5.19) 箕輪・棚橋, 第 75 期通常総会講演会講演論文集(), (1998), 295.
- (5.20) Minowa, T. and Tanahashi, T., Modeling and simulation based engineering, 1, (1998), 977.
- (5.21) Watanabe, M., et al, Proc. 8th International Symposium on Silicon Metaterials

Science and Technology , (1998) .

(5.22) Tsuboi , H. , et al , IEEE Transactions on Magnetics , 29-2 , (1993) , 1574.

(5.23) 金子ら , 第 28 回日本電熱シンポジウム講演論文集 , (1991) , 634.

(5.24) 小塚ら , 第 11 回材料電磁プロセッシング部会資料 , (1992) .

5 章の表および図

図 5.1 Cusp 磁場印加の計算モデル

図 5.2 計算格子(2D)

図 5.3 $t=120$ における速度場と温度場の分布($Pr=0.0164$, $Re=4.21\times 10^3$, $Ha=0$)

図 5.4 $t=220$ における速度場と温度場の分布($Pr=0.0164$, $Re=4.21\times 10^3$, $Ha=1,410$)

図 5.5 $t=220$ における電流密度ベクトルの分布

図 5.6 流跡線に対して実験と数値解析の比較

図 5.7 数値解析による粒子速度の経時変化($x,y,z=-0.33,-0.33,-0.80$)

図 5.8 粒子速度の経時変化(渡辺らの実験)

図 5.9 ALE 法の計算モデル

図 5.10 $t=0.40sec$ における実験と速度ベクトルの比較($Re=5.3\times 10^4$)

図 5.11 $t=0.15sec$ におけるメニスカス形状

図 5.12 交流・直流重畳印加時の内部速度ベクトル($t=0.15sec$, $t=0.40sec$)

図 5.13 溶湯盛り上がり高さの時間変化($B=0$, $B=0.5T$, $B=1.0T$)

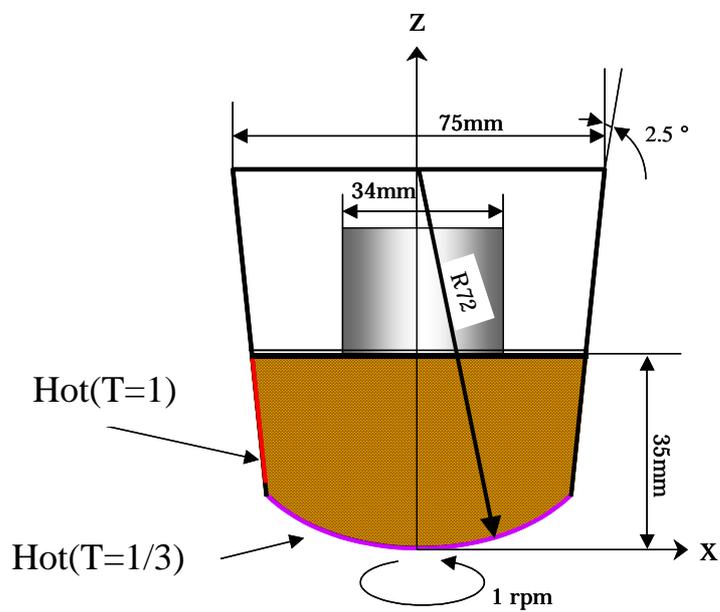


Fig. 5.1 Calculation model

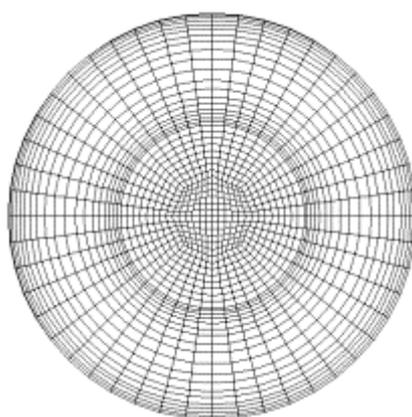


Fig. 5.2 2D mesh of x-y plane

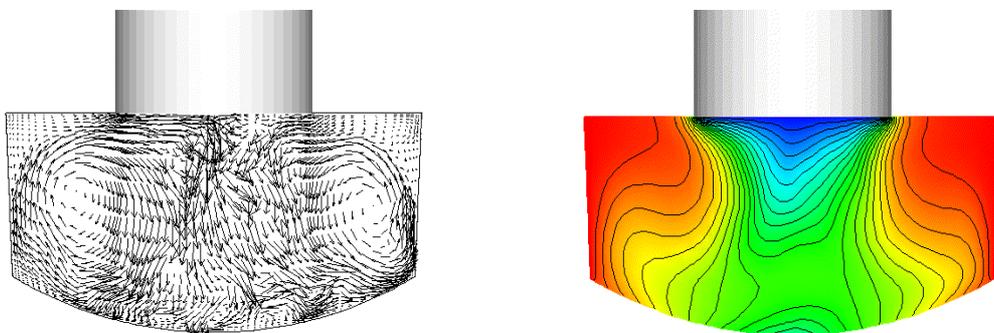


Fig. 5.3 Velocity vectors and isothermal counters on x - z plane

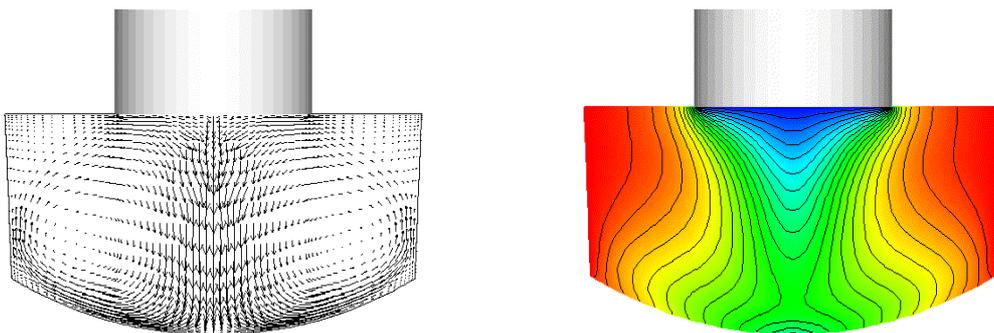


Fig. 5.4 Velocity vectors and isothermal counters on x - z plane

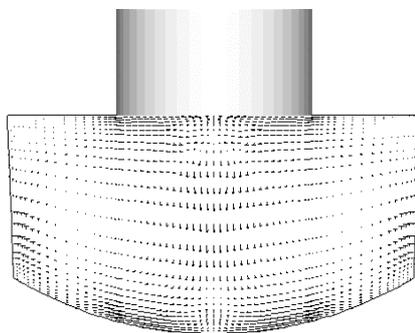
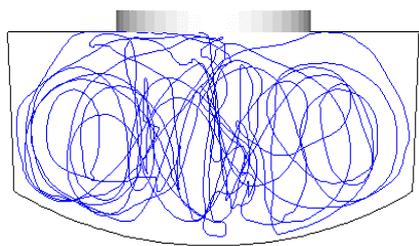
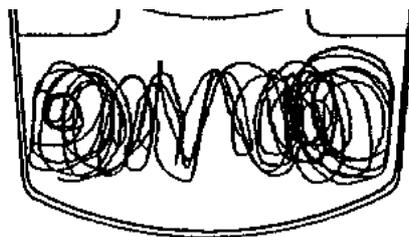


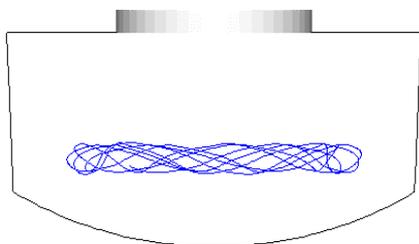
Fig. 5.5 Current density vectors on x - z plane



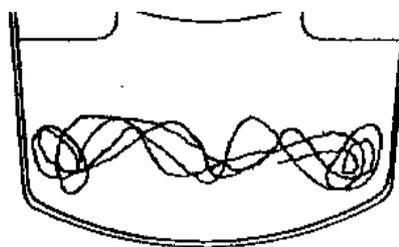
(a) No-magnetic field(Numerical)



(b) No-magnetic field(Experimental)



(c) Cusp(Numerical)



(d) Cusp(Experimental)

Fig. 5.6 Path line

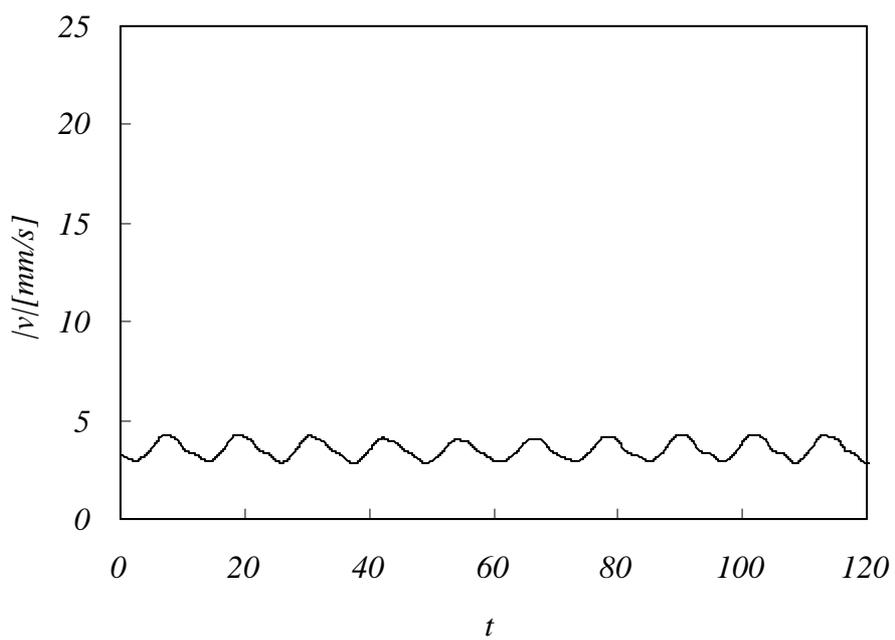


Fig. 5.7 Particle velocity(Numerical)

Velocity [mm/sec]

Fig. 5.8 Particle velocity(Experimental)

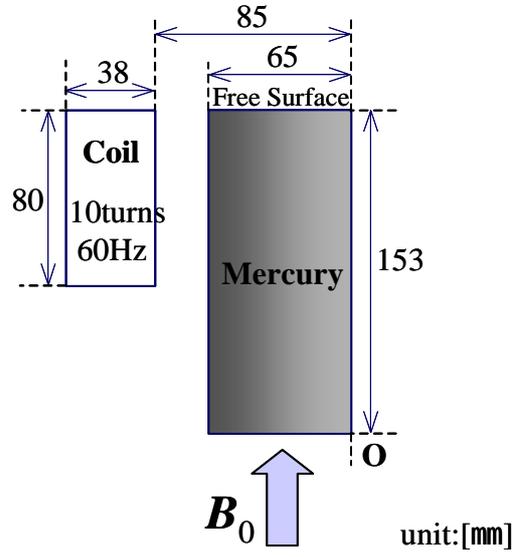


Fig. 5.9 Calculation model

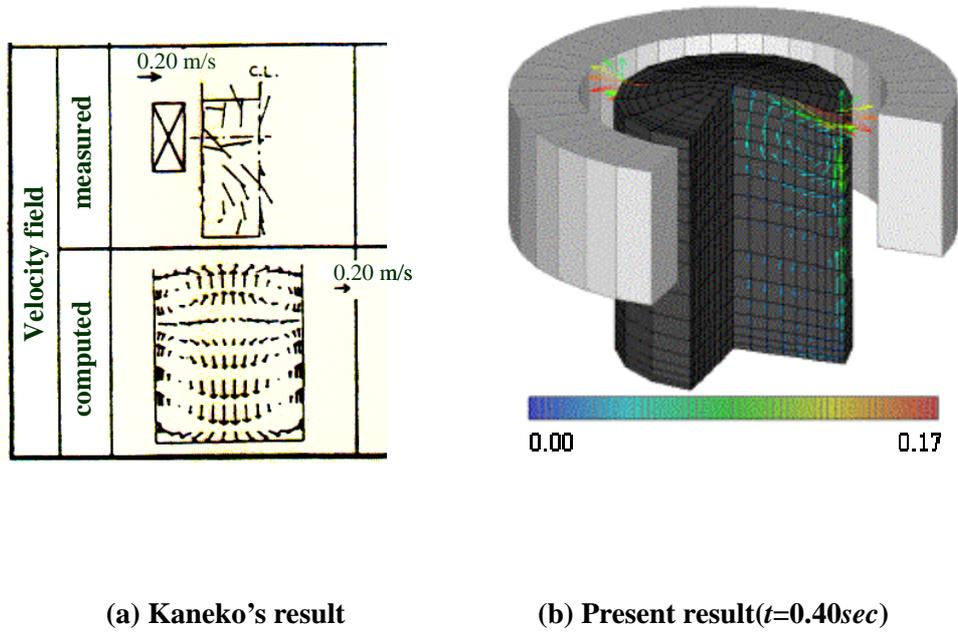


Fig. 5.10 Velocity vector map

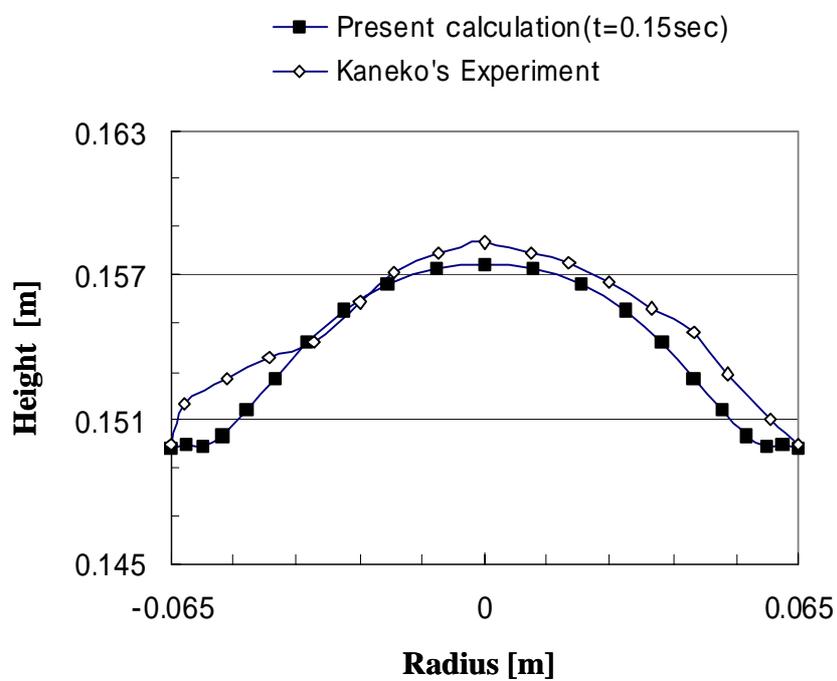


Fig. 5.11 Meniscus shapes

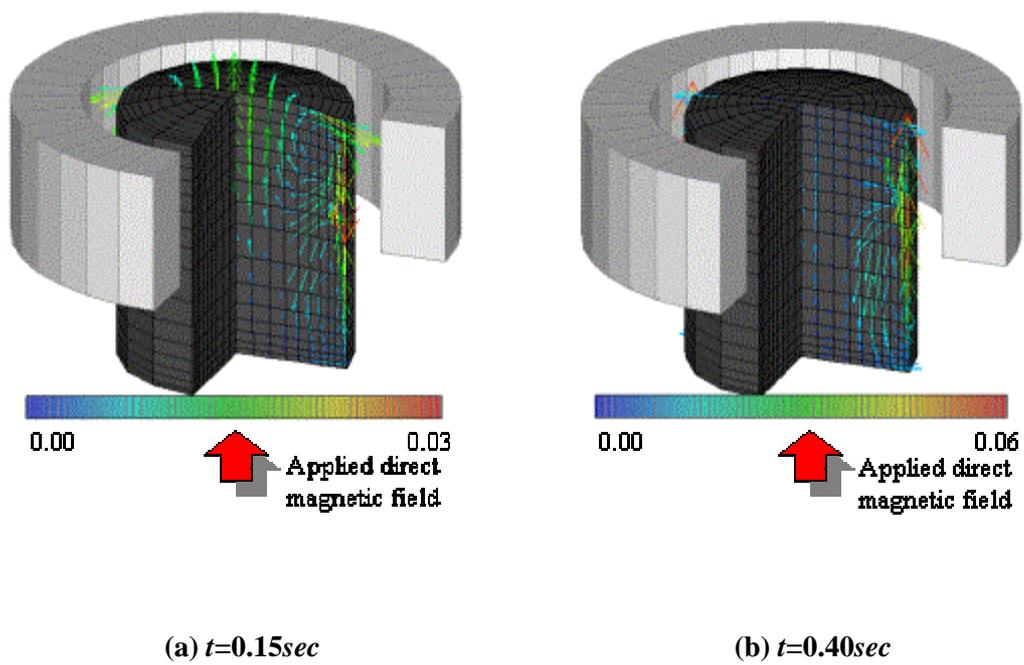


Fig. 5.12 Velocity vector map

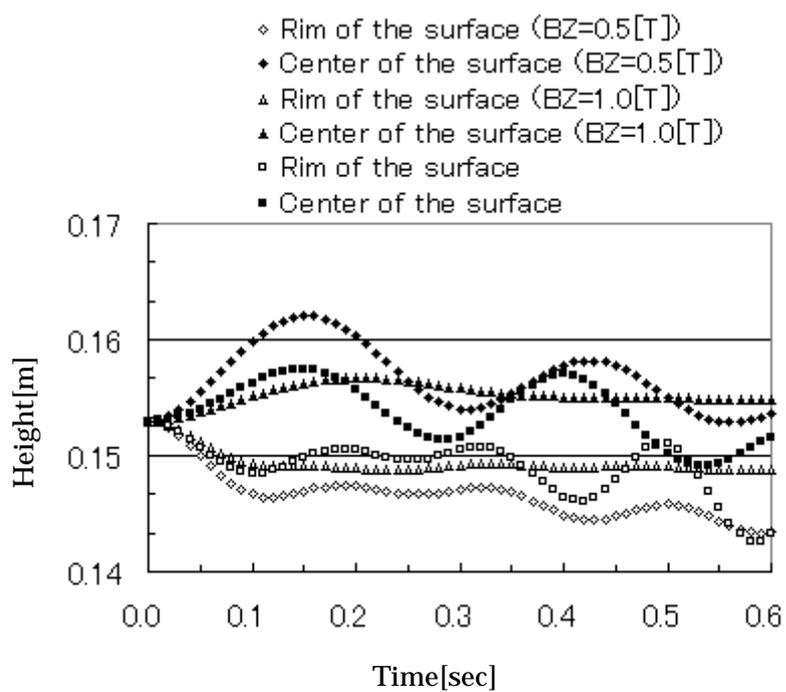


Fig. 5.13 Time history of the height

第6章 総括

第2章では、電磁熱流体の解析に必要な事項を中心に議論した。プロセス・シミュレーションにおいては流体と熱と電磁場が連成することが多い。流れ場と温度場と電磁場は互い相互作用し、時間発展してゆく。この場合、流体系と熱系と電磁系の現象に対する固有時間の違いは、複雑連成系の問題解決を困難にしている。ここではこの種の問題が GSMAC有限要素でどのように解決できるかの糸口を与えておいた。

第3章では GSMAC 有限要素法により同心二重球内の自然対流の解析を行った。作動流体が空気の場合、以下の結言を得た。

- (1) 計算に用いたパラメーターは $Pr = 0.71$,そして $Ra=7.1 \times 10^5$, $Ra=7.1 \times 10^6$ であり、これらの計算では定常解を得ている。 $Ra=7.1 \times 10^5$, $Ra=7.1 \times 10^6$ の計算結果は安定した流れを示している。
- (2) $Ra=7.1 \times 10^5$ において、半径比 3 と 18 の場合は月形状の渦を示した。半径比 0.86 に対して $Ra=7.1 \times 10^5$ と $Ra=7.1 \times 10^6$,そして半径比 3 に対して $Ra=7.1 \times 10^6$ の場合は腎臓形状渦を示した。その他の計算条件では不安定流れを示す。
- (3) $Ra=5,964$, $Ra=229,330$,そして $Ra=749,760$ の計算結果は Yin らの可視化実験結果と比較し、良好な一致が確認されている。可視化実験結果と比較を行った $Ra=5,964$ の解析結果は月形状の渦を示した。そして $Ra=229,330$ および $Ra=749,760$ の解析結果は腎臓形状渦を示した。いずれの結果も可視化実験結果を反映している。
- (4) $Ra=7.1 \times 10^6$ に対して、内球の半径が小さくなるほど計算は困難であることが分かった。また、定常に至る時間も長くなることが分かった。しかも熱の 9 割以上が二重球の上部に分布することが確認された。これらの原因は、計算格子に依存する性質と球の独特の現象によるものと考えられる。また、内球の半径が大きくなる程、熱は伝達よりは伝導が支配的になる。そのため、球の上部での熱の動きは複雑になることが確認された。

第4章では GSMAC 有限要素法により回転球殻内の溶融金属の熱対流解析を行った。その結果、以下の結言を得た。

- (1) 誘導磁場の働きを考察するため、電磁場解析に B 法を導入し解析を行ない、 α 法の結果と比較した。B 法による電磁場は α 法と同じ計算条件 ($Pr=0.025$, $Ra=100$, $Ta=0$, $Ha=100$ (α 法, B 法), $Rem=1$ (B 法))下で異なる結果を示した。
- (2) B 法を用いて誘導磁場がもとの磁場を強めるダイナモ作用が考察できた。 α 法は一定の印加磁場(0,0,-1)を持って流れ場に働くが, B 法の場合は局部によって異なる値を示している。特に, $\theta = 90^\circ$ と $\theta = -90^\circ$ において, 印加磁場の向きと流れの向きが逆方向の場所では誘導磁場は 1 より大きな値を, そして同じ方向の場所では 1 より小さな値を示した。
- (3) 無磁場下において Coriolis 力は流れ場に二つの影響を及ぼすことが分かった。まず, 回転軸方向の速度ベクトルは Coriolis 力との相互作用により $\theta = 90^\circ$ において西向きに斜めに向いている。そして, 回転軸に垂直な方向の速度成分は $\theta = 90^\circ$ において局所的に流速を加速する。
- (4) 磁場と Coriolis 力を同時に考慮する場合, 対流抑制効果の向上が確認された。磁場のみを印加する場合, $\theta = 90^\circ$ における流速 v_z は 1/10 に抑制される。また, 両者を考慮する場合, 流速- v は 7/10 に抑制されることが確認できた。
- (5) B 法を用いて計算した結果, 印加磁場の大きさ -1 に対して誘導磁場の最大大きさは -1.000056 であった。

第5章では, 熔融金属流体の流動を解析した結果, 以下の結言を得た。

- (1) Cusp 磁場印加 CZ 法を用いて解析を行ない, 良い結晶を作るための条件は Cusp 磁場が溶液中心に位置するときである。これには誘導電流による Lorentz 力が大きく関与していることが分かった。
- (2) Cusp 磁場印加の速度場は実験結果と定性的・定量的な比較を行った。定性的には詳細な検討が得られたが, 定量的にはまた不十分であるため表面張力, 酸素濃度, 物性値の温度依存性などの考慮が必要とされる。
- (3) ALE 法を用いて流体解析を行い, コイル中心部を境に上下に大きな対流がひとつずつできた。流れ場の最大流速は金子らの実験結果と比較し 85% に一致した。
- (4) 低周波交流電流印加の数値解析では, 直流磁場を印加した結果, 最大内部流速が 1/3 程度に抑えられている。特に, 表面付近での速度が抑えられた。

謝辞

本研究は、著者が慶應義塾大学大学院理工学研究科に在学中、本塾理工学部・棚橋隆彦教授の御指導のもとで行なったものである。著者は修士課程から博士課程まで電磁熱流体の有限要素法による流れの数値解析を研究してきたが、同教授より長期間にわたり熱心な御指導ならびに御鞭撻を賜り、本論文をまとめに導いていただきましたことに対して、心より御礼申し上げます。

また、本論文を作成するにあたり、有益な御討論ならびに御助言をいただきました本塾理工学部・野口裕久教授、松尾亜紀子助教授、そして植田利久教授に対して深く感謝し、御礼申し上げます。

また、著者が棚橋・澤田研究室に所属して以来、澤田研究室と別れるまで適切な御助言および御指導をいただきました本塾理工学部・澤田達男教授に厚く御礼申し上げます。

本研究を遂行するにあたり、数多くの先輩・同期・後輩に恵まれ、有益な御討論・御助言ならびに激励をいただきました。特に数多くの御助言をいただきました加藤保真博士、中井太二郎博士、榎原孝文博士、そして藤枝忠臣博士に、深く御礼申し上げます。

また、著者が在学中、公私共々御援助ならびに激励をいただいた小川裕司氏、箕輪哲郎氏、松尾拓真氏、新井和人氏、そして川本昇一氏に対し、感謝の意を表します。また、常にお互い励まし合いを協力していただいた韓国留学生会に厚く御礼申し上げます。

本研究を遂行するにあたり、文献の情報を提供していただいた理工学メディアセンターの職人長島敏樹氏、清野早苗氏、館田鶴子氏、そして青木秀憲氏に感謝いたします。また、留学生の研究活動ならびに私生活を支えていただいた国際センターの職人に感謝いたします。

最後に、長きにわたる留学生生活を続けて応援していただいた(財)留学生支援企業協力推進協会ならびに(財)ロータリー米山記念奨学会に心より感謝いたします。

2004年1月 鄭忠孝

公刊論文目録および口頭発表目録

公刊論文目録

- (1) 鄭忠孝, 箕輪哲郎, 棚橋隆彦, “ GSMAC-ALE 法を用いた交流磁場下における溶融金属の自由表面の数値解析”, 日本機械学会論文集, 66-647, B(2000), 1683-1690.
- (2) 鄭忠孝, 大萱見吾, 棚橋隆彦, “ GSMAC 有限要素法による印加磁場下の Rayleigh-Benard 対流の解析”, 日本機械学会論文集, 66-648, B(2000), 1959-1966.
- (3) 鄭忠孝, 箕輪哲郎, 棚橋隆彦, “ GSMAC-ALE 法を用いたコールド・クルーシブルにおける溶融金属の有限要素法解析”, 日本機械学会論文集, 66-650, B(2000), 2521-2528.
- (4) 鄭忠孝, 小川裕司, 棚橋隆彦, “ 有限要素法における移流項の高精度解析手法(双 2 次要素を用いた GSMAC-FEM)”, 日本機械学会論文集, 67-653, B(2001), 1-8.
- (5) 鄭忠孝, 小川裕司, 棚橋隆彦, “ Cusp 磁場印加 CZ 法による単結晶成長の GSMAC 有限要素法解析”, 日本機械学会論文集, 67-663, B(2001), 2641-2648.
- (6) 鄭忠孝, 棚橋隆彦, “ Coriolis 力と Lorentz 力が作用する熱流体の FEM 解析”, 日本計算工学会論文集, 20030023, (2003).
- (5) Jung, C.H., Ogawa, Y. and Tanahashi, T., “ GSMAC-FEM Analysis of Single-Crystal Growth by Cusp MCZ Method”, KSME International Journal, 15-12, (2001), 1876-1881.
- (1) Jung, C.H., Minowa, T. and Tanahashi, T., “ Numerical Analysis of Molten Metal under Magnetic Field Using ALE Method”, JSME International Journal Series A, 45-2, (2002), 153-160.
- (3) Jung, C.H., Minowa, T. and Tanahashi, T., “ Numerical Analysis on Molten Metal in Cold Crucible Using A- Method”, JSME International Journal Series B, 45-2, (2002), 240-248.

国際会議発表

- (1) Jung , C.H. , Ogawa , Y. and Tanahashi , T. , “ Numerical Simulation of MHD Fluids using GSMAC-FEM in Two Concentric Spheres ” , Proc. of the 4th KSME-JSME Fluids Engineering Conference(FEC4) , Pusan , Korea , (1998) , 609-612.
- (2) Jung ,C.H. ,Minowa ,T. and Tanahashi ,T. , “ Numerical Analysis on Molten Metal under Magnetic Field using GSMAC-FEM Method ” , Proc. of the 4th JSME-KSME Thermal engineering conference , Kobe , Japan , 1 , (2000) , 529-536.
- (3) Jung ,C.H. ,Ogawa ,Y. and Tanahashi ,T. , “ The GSMAC-FEM Analysis of Single Crystal Growth by Cusp MCZ Method ” ,The 6th Asian Symposium on Visualization ,Pusan ,Korea ,51 ,(2001) , 1-6.

国内口頭発表目録

- (1) 鄭忠孝, 小川裕司, 中井太二郎, 棚橋隆彦, “ GSMAC 有限要素法による二重球内の電磁熱流体数値解析”, 第 18 回計算電気・電子工学シンポジウム, 1- -13, (1997), 115-118.
- (2) 鄭忠孝, 中井太二郎, 棚橋隆彦, “ 同心二重球内自然対流の有限要素法解析”, 第 11 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1997), 575-576.
- (3) 鄭忠孝, 小川裕司, 棚橋隆彦, “ GSMAC 有限要素法による二重球内の電磁熱流体解析”, 日本機械学会 第 75 期通常総会講演会講演論文集(), (1998), 313-314.
- (4) 鄭忠孝, 棚橋隆彦, “ GSMAC 有限要素法による同心二重球内の Coriolis 力に関する数値解析”, 計算工学講演会論文集, 3-1, (1998), 185-188.
- (5) 鄭忠孝, 田淵豊, 棚橋隆彦, “ GSMAC 有限要素法による誘導磁場の新解析”, 第 12 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1998), 335-336.
- (6) 鄭忠孝, 棚橋隆彦, “ 印加磁場下の Rayleigh-Benard 対流の解析”, 第 11 回電磁力関連のダイナミクス シンポジウム講演論文集, (1999), 124-127.

その他

- (1) 棚橋隆彦, 鄭忠孝, “磁性流体の界面現象()”, 機械の研究, 50-6, (1998), 632-637.
- (2) 棚橋隆彦, 鄭忠孝, “磁性流体の界面現象()”, 機械の研究, 50-7, (1998), 747-752.
- (3) 棚橋隆彦, 鄭忠孝, “GSMAC 有限要素法による電磁熱流体解析”, 電磁力を利用した材料プロセッシングの新展開, 9517, (1999), 日本鉄鋼協会, 191-202.
- (4) 棚橋隆彦, 鄭忠孝, “熱や物質拡散を伴う流れ解析の基礎とシミュレーション技術の動向”, 講習会「流れと環境問題」, 99-11, 日本機械学会, (1999), 55-60.
- (5) Tanahashi, T., Makihara, T. and Jung, C.H., “Numerical Simulation of Moving Interfaces in Engineering Problems”, Numerical Treatment for Dynamics of Interfaces and Patterns, Kobe Workshop, (1999), 4-6.
- (6) 棚橋隆彦 鄭忠孝, “計算流体力学のための局所厳密解” 数理科学会論文集, 1-1 (2000), 3-10.