

主論文要旨

報告番号	甲第	号	氏名	武藤 幸康
<p>主論文題名</p> <p>Existence and Construction of Array Type Block Designs and Their Generalization to Edge-Colored Graph Decompositions (配列型ブロックデザインの存在と構成およびその辺彩色グラフ分解への一般化)</p>				
<p>内容の要旨</p> <p>1979年に Singh と Dey が統計的観点から <i>balanced incomplete block design with nested rows and columns</i> (以後 BIBRC と省略する) を導入した。一方, Raghavarao (1971) により square lattice デザインが導入され, 最近, Fu, Hwang, Jimbo, Mutoh と Shiue (2004) が DNA ライブラリスクリーニングに応用することを目的として, square lattice デザインを <i>grid-block</i> デザインに拡張した。これらの組合せデザインは“配列型”と呼ばれるデザインであり, 本論文の主題である。</p> <p>V を要素数 v の有限集合とし V の各要素を点と呼ぶ。また A を V の元を要素にもつ $k_1 \times k_2$ 配列の集合とする。V の任意の異なる 2 点 x と y をともに含む A の行の数を $\lambda_R\{x, y\}$, 列の数を $\lambda_C\{x, y\}$, 配列の数を $\lambda_B\{x, y\}$ とする。このとき, 以下の条件を満たす組合せ構造 (V, A) を BIBRC と呼ぶ。(i) A の各配列に同じ点が 2 回以上現われない。(ii) すべての点は A のちょうど r 個の配列に現われる。(iii) 任意の異なる 2 点 x と y に対して, $k_1\lambda_R\{x, y\} + k_2\lambda_C\{x, y\} - \lambda_B\{x, y\}$ が一定 ($= \lambda$) となる。また, (V, A) が <i>grid-block</i> デザインであるとは, 条件 (i), (ii) と次の条件 (iv) を満たすことである。(iv) 任意の異なる 2 点 x と y に対して, $\lambda_R\{x, y\} + \lambda_C\{x, y\} = 1$ が成り立つ。</p> <p>本論文では, 配列型ブロックデザインのさまざまな構成法を与え, ある種のパラメータを持つデザインの存在問題を解決し, さらに一般的な漸近存在定理を与える。</p> <p>第 1 章で, 本論文に関する組合せデザインの背景を述べたのち, 第 2 章では, まず, <i>grid-block</i> デザインについて既存の結果を述べる。次に cyclic BIB デザイン,</p>				

有限アフィン幾何および組分け型デザインを用いて grid-block デザインの構成法を与える．また，配列のサイズが 2×4 ， 3×3 ， $2 \times 2 \times 2$ の grid-block デザインについては，デザインの存在のための自明な必要条件が十分条件でもあることを証明する．まず 2×4 grid-block デザインについて，点の数 v の値が小さい 9 個 ($33, 65, 97, 193, 225, 257, 289, 321, 353$) の grid-block デザインと組分け型 grid-block デザインを直接構成し，それらをもとに組分け型デザインを用いた逐次構成法によりデザインの存在の十分性を示す．また， 3×3 grid-block デザインについては，cyclic BIB デザインを用いた構成法と grid-block デザインの直接構成法によりデザインの存在の十分性を示す．同様に $2 \times 2 \times 2$ grid-block デザインについても cyclic あるいは rotational と呼ばれる代数的性質をもつデザインを直接構成することによりデザインの存在の十分性を示す．また，*resolvable* grid-block デザインおよびパッキングの存在問題と構成法についても言及する．

第 3 章では，有限体，有限アフィン幾何を用いた BIBRC の構成法を与える．まず，有限アフィン幾何のすべての t -フラットが BIB デザインをなすことは良く知られているが， t -フラットの一部を利用して会合数の少ない BIB デザインが構成できることを示し，この構成法を用いることにより会合数の小さい nested BIBD と BIBRC が構成できることを証明する．また，有限体を用いることにより，既存の構成法よりも会合数の小さい BIBRC を構成することができることも証明する．さらに配列の大きさ $k_1 \times k_2$ を任意に固定したとき，点の数 v が十分大きい素数幂で $\lambda(v-1) \equiv 0 \pmod{k_1 k_2 (k_1 - 1)(k_2 - 1)}$ を満たすならば，BIBRC が存在することを示す．また，実用的な範囲の小さいパラメータをもつ BIBRC ($13 \leq v \leq 101$ ， $3 \leq k_1 \leq k_2 \leq 11$) についてはその存在が示されるパラメータの表を付録 A に掲載する．

配列のサイズ $k_1 \times k_2$ を任意に固定したとき grid-block デザインの点の数 v が十分大きければ，デザインの存在の自明な必要条件が十分条件でもあることが Wilson (1976) による完全グラフの単純グラフへの分解の漸近存在定理を用いて証明される．また，Lamken と Wilson (2000) は完全グラフの単純辺彩色グラフへの分解の必要条件が漸近的に十分条件となることを示した．彼らの結果は種々の組合せデザインの存在を示すのに有効である．しかしながら彼らの方法は BIBRC のようなある種の配列型ブロックデザインの存在問題には適用することができない．そこで第 4 章では *tree-ordered* と呼ばれる概念を導入して，*colorwise simple* グラフによる完全グラフの分解に関する漸近存在定理を証明する．

第 5 章では第 4 章の結果を用いることにより，任意の配列サイズ $k_1 \times k_2$ に対して，点の数 v が十分大きいとき，これらのパラメータが必要条件を満たすならば BIBRC が存在することを証明する．