

連続平面ならびにネットワーク空間における
通過量の基礎理論と都市分析への応用

平成 16 年度

田 中 健 一

目次

第 1 章	序論	1
1.1	はじめに	1
1.2	本研究の目的	1
1.3	本研究で扱う時刻依存型の通過量モデル	2
1.4	連続型の交通モデル	2
1.5	関連する既存研究の整理	4
1.5.1	連続平面における交通量分布のモデル	4
1.5.2	ネットワーク空間における交通量分布のモデル	6
1.5.3	時刻に依存した交通量分布のモデル	6
1.6	論文の構成	7
第 2 章	数学的準備と通過量の理論的性質	11
2.1	はじめに	11
2.2	都市モデルと移動経路に関する仮定	11
2.2.1	線分都市モデル	11
2.2.2	直線距離を想定した任意形状都市モデル	12
2.2.3	放射・環状距離を想定した円形都市モデル	12
2.2.4	直交距離を想定した矩形都市モデル	13
2.3	トリップ密度の定式化	14
2.3.1	トリップ密度の定義	15
2.3.2	起点と終点の都市内分布	16
2.3.3	一様独立なトリップ密度と起・終点分布	17
2.4	移動速度と到着時刻分布	18
2.4.1	移動速度に関する仮定	18
2.4.2	到着時刻分布に関する仮定	18
2.5	通過量の定義と基礎的性質	19
2.5.1	線分都市モデルにおける通過量	19
2.5.2	直線距離モデルにおける通過量	20
2.5.3	放射・環状距離モデルにおける通過量	21
2.5.4	直交距離モデルにおける通過量	23
2.6	第 2 章のまとめ	24
第 3 章	線分領域における時空間通過量	25

3.1	はじめに	25
3.2	通過量の導出	25
3.2.1	一般のトリップ密度のもとでの通過量	25
3.2.2	一様なトリップ密度のもとでの通過量	27
3.3	通過密度の導出	28
3.3.1	通過密度の定義	28
3.3.2	一般のトリップ密度と出社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数	29
3.3.3	一様なトリップ密度と出社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数	34
3.4	通過密度の数値例	35
3.4.1	通過密度の空間的分布	36
3.4.2	通過密度の時間的分布	36
3.5	モデルの拡張	39
3.5.1	出社時刻分布に関する一般化	39
3.6	第3章のまとめ	44
第4章	直線距離に基づく任意形状都市における時空間通過量	45
4.1	はじめに	45
4.2	凸領域における通過量の導出	45
4.2.1	一般のトリップ密度のもとでの通過量	45
4.2.2	一様なトリップ密度のもとでの通過量	48
4.3	凸領域における通過密度の導出	49
4.3.1	通過密度の定義	49
4.3.2	一般のトリップ密度と出社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数	49
4.3.3	一様なトリップ密度と出社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数	53
4.4	非凸領域における通過量の導出	54
4.4.1	一般のトリップ密度のもとでの通過量	54
4.4.2	一様なトリップ密度のもとでの通過量	56
4.5	非凸領域における通過密度の導出	57
4.5.1	通過密度の定義	57
4.5.2	一般のトリップ密度と出社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数	57
4.5.3	一様なトリップ密度と出社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数	61
4.6	通過量と通過密度の数値例	62
4.6.1	通過量の数値例	62
4.6.2	通過密度の空間的分布	64
4.6.3	通過密度の時間的分布	64
4.7	現実の都市領域を用いた通過量と通過密度の計算例	75
4.7.1	通過量の数値例	75
4.7.2	通過密度の数値例	75
4.8	第4章のまとめ	81
第5章	放射・環状距離に基づく円形都市における時空間通過量	83

5.1	はじめに	83
5.2	通過量の導出	83
5.2.1	一般のトリップ密度のもとでの環状路の通過量	83
5.2.2	一様なトリップ密度のもとでの環状路の通過量	86
5.2.3	一般のトリップ密度のもとでの放射路の通過量	86
5.2.4	一様なトリップ密度のもとでの放射路の通過量	88
5.3	通過量の数値例	88
5.4	環状路の通過密度の導出	90
5.4.1	通過密度の定義	90
5.4.2	一般のトリップ密度と出社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数	91
5.4.3	一様なトリップ密度と出社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数	102
5.5	放射路の通過密度の導出	104
5.5.1	通過密度の定義	104
5.5.2	一般のトリップ密度と出社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数	104
5.5.3	一様なトリップ密度と出社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数	112
5.6	環状路と放射路の通過密度の数値例	115
5.6.1	通過密度の空間的分布	115
5.6.2	通過密度の時間的分布	125
5.7	モデルの拡張	128
5.7.1	Clark 型の起・終点分布に基づく通過量	128
5.7.2	通過量の数値例	128
5.7.3	無限領域の都市を想定した場合	129
5.8	第 5 章のまとめ	131
第 6 章	直交距離に基づく矩形都市における時空間通過量	133
6.1	はじめに	133
6.2	通過量の導出	133
6.2.1	一般のトリップ密度のもとでの通過量	133
6.2.2	一様なトリップ密度のもとでの通過量	135
6.3	通過密度の導出	136
6.3.1	通過密度の定義	136
6.3.2	一般のトリップ密度と出社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数	137
6.3.3	一様なトリップ密度と出社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数	140
6.4	通過密度の数値例	144
6.4.1	通過密度の空間的分布	144
6.4.2	通過密度の時間的分布	145
6.5	第 6 章のまとめ	150
第 7 章	ネットワーク空間における時空間通過量	151
7.1	はじめに	151
7.2	モデルの仮定	151

7.3	通過量の導出	153
7.3.1	2つの基本ケース	153
7.3.2	衝突点とその性質	159
7.3.3	起・終点が同一リンク上にある場合の通過量	159
7.3.4	起・終点が異なるリンクにある場合の通過量	160
7.3.5	合計の通過量	165
7.4	通過量の数値例	165
7.5	通過密度の導出	166
7.5.1	ケース I とケース II の通過密度の導入	167
7.5.2	ケース I における通過時刻の密度関数	167
7.5.3	ケース II における通過時刻の密度関数	172
7.6	通過密度の数値例	177
7.6.1	ケース I の通過密度の数値例	177
7.6.2	ケース II の通過密度の数値例	177
7.6.3	合計の通過密度の数値例	178
7.7	第 7 章のまとめ	183
第 8 章	結論と今後の課題	185
8.1	本研究の結論	185
8.2	本研究の課題と展望	186
付録 A	環状路と放射路の通過時刻の密度関数	189
A.1	環状路を先に利用する場合の環状路の通過時刻の密度関数	189
A.2	放射路の上り方面の通過時刻の密度関数	194

目次

2.1	長さ $2l$ の線分都市モデル.	12
2.2	都市領域 D とその凸包.	12
2.3	東京圏の道路網.	14
2.4	日吉駅周辺の道路網.	14
2.5	放射・環状交通網を有する円形都市モデル.	14
2.6	京都駅周辺の道路網.	15
2.7	格子上交通網を有する矩形都市モデル.	15
2.8	都市領域内部の部分領域間のトリップ数.	16
2.9	通勤者の出社時刻 t の分布を記述する密度関数 $f(t)$.	19
2.10	線分都市における通過量の定義.	20
2.11	地点 P 近傍の微小線分を通過する移動.	20
2.12	φ の向きへの通過量 $q(P, \varphi)$ の定義.	21
2.13	放射・環状交通網を有する円形都市における通過量の定義：(a) 環状路の場合；(b) 放射路の場合.	22
2.14	地点 P 近傍の微小領域を通過するトリップ：(a) 環状路の場合；(b) 放射路の場合.	23
2.15	格子上交通網を有する矩形都市における通過量の定義.	24
3.1	長さ $2l$ の線分都市モデル.	25
3.2	地点 P を通過するための起・終点の領域の組み合わせ.	26
3.3	起・終点ペア (x_1, x_2) を表す直積空間.	27
3.4	通過量 $q_{\text{合}}(z)$ の概形.	28
3.5	通過量 $q_{\text{正}}(z)$ と通過密度 $p_{\text{正}}(z, t)$ の関係.	29
3.6	地点 P から目的地までの所要時間が u である移動者.	30
3.7	条件付きの通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{正}}(t; z u)$.	31
3.8	地点 P からの所要時間が u 以下である終点集合.	31
3.9	地点 P からの所要時間が u 以下である割合の特定.	31
3.10	地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示.	32
3.11	正の向きの通過密度 $p_{\text{正}}(z, t)$ の概形（一斉到着の場合）.	37
3.12	正の向きの通過密度 $p_{\text{正}}(z, t)$ の概形（一様到着の場合）.	37
3.13	合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の概形（一斉到着の場合）.	38
3.14	合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の概形（一様到着の場合）.	38
3.15	計算に用いた 4 通りの一様な出社時刻分布.	39

3.16	正の向きへの通過密度 $p_{\text{正}}(z, t)$ の時間的分布	40
3.17	負の向きへの通過密度 $p_{\text{負}}(z, t)$ の時間的分布	40
3.18	合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の時間的分布	41
3.19	合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の概形 (2 次関数型到着の場合)	43
3.20	合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の時間的分布 (2 次関数型到着の場合)	43
4.1	φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ の定義	45
4.2	Holroyd と Millar による φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ の導出法	46
4.3	一様な直線の定義	47
4.4	一様な直線を用いた φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ の導出法	48
4.5	領域 D と直線 g との交わりの弦の上での座標設定	50
4.6	条件付きの通過時刻の密度関数 $\psi(t; \mathbf{P}, \varphi u)$	50
4.7	地点 \mathbf{P} からの所要時間が u 以下である終点集合	51
4.8	地点 \mathbf{P} からの所要時間が u 以下である割合の特定	51
4.9	地点 \mathbf{P} を通過する時刻 t と \mathbf{P} から \mathbf{Q}_2 までの所要時間 u の集合の図示	52
4.10	非凸領域における一様な直線を用いた φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ の導出法	54
4.11	非凸領域における $q(\mathbf{P}, \varphi)$ の導出 : (a) \mathbf{P} が D の内部にあるとき ; (b) \mathbf{P} が D の外部にあるとき	56
4.12	線分対間の φ の向きへの通過量の導出法	56
4.13	領域 D と直線 g との交わりの弦の上での座標設定	58
4.14	地点 \mathbf{P} からの所要時間が u 以下である割合の特定	59
4.15	地点 \mathbf{P} を通過する時刻 t と \mathbf{P} から \mathbf{Q}_2 までの所要時間 u の集合の図示	59
4.16	数値例で用いる 3 種類の都市形状 : (a) 円盤 ; (b) 正方形 ; (c) 一部が欠けた正方形	62
4.17	円盤領域における通過量 : (a) $\varphi = 0$ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$; (b) 通過量 $q_{\text{合}}(\mathbf{P})$	63
4.18	正方形領域における φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$: (a) $\varphi = 0$ の場合 ; (b) $\varphi = \pi/4$ の場合	63
4.19	一部が欠けた正方形領域における φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$: (a) $\varphi = 0$ の場合 ; (b) $\varphi = \pi/4$ の場合	63
4.20	通過量 $q_{\text{合}}(\mathbf{P})$: (a) 正方形の場合 ; (b) 一部が欠けた正方形の場合	64
4.21	円盤領域における $\varphi = 0$ の向きへの通過密度 $p(\mathbf{P}, t, \varphi)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合)	65
4.22	円盤領域における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合)	66
4.23	正方領域における $\varphi = 0$ の向きへの通過密度 $p(\mathbf{P}, t, \varphi)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合)	67
4.24	正方領域における $\varphi = \pi/4$ の向きへの通過密度 $p(\mathbf{P}, t, \varphi)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合)	68
4.25	正方領域における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合)	69
4.26	一部が欠けた正方形における $\varphi = 0$ の向きへの通過密度 $p(\mathbf{P}, t, \varphi)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合)	70

4.27 一部が欠けた正方形における $\varphi = \pi/4$ の向きへの通過密度 $p(\mathbf{P}, t, \varphi)$ の立体図 (時間区
間 $[2, 3]$ の一様出社の場合). 71

4.28 一部が欠けた正方形における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の
場合). 72

4.29 3種類の都市領域における観測地点の設定. 72

4.30 円盤領域における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の時間的分布. 73

4.31 正方形における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の時間的分布. 74

4.32 一部が欠けた正方形における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の時間的分布. 74

4.33 多角形近似した東京 23 区の境界データ. 75

4.34 現実の都市の境界データを用いた $q_{\text{合}}(\mathbf{P})$ の立体図: (a) 港区; (b) 新宿区; (c) 目黒区;
(d) 23 区境界. 76

4.35 港区における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合). 77

4.36 新宿区における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合). 78

4.37 目黒区における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合). 79

4.38 東京 23 区における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合). 80

5.1 放射・環状交通網を有する円形都市における環状路の通過量の定義. 84

5.2 地点 \mathbf{P} に設けられた線分 L を環状路に沿って左回りに通過するための起・終点の領域
の組み合わせ: (a) 環状路を先に利用する場合; (b) 放射路を先に利用する場合. 85

5.3 放射・環状交通網を有する円形都市における放射路の通過量の定義. 87

5.4 地点 \mathbf{P} に設けられた弧 C を放射路に沿って通過するための起・終点の領域の組み合わ
せ: (a) 上り方面の場合; (b) 下り方面の場合. 88

5.5 環状路の通過量の概形: (a) 立体図; (b) 断面図. 89

5.6 放射路の通過量の概形: (a) 立体図; (b) 断面図. 90

5.7 環状路と放射路の合計の通過量の概形: (a) 立体図; (b) 断面図. 91

5.8 地点 \mathbf{P} からの所要時間 u の等高線: (a) $z = 0$; (b) $z = 0.2R$; (c) $z = 0.4R$; (d)
 $z = 0.6R$; (e) $z = 0.8R$; (f) $z = R$ 93

5.9 地点 \mathbf{P} を左回りに通過する移動者の起・終点ペアの集合のうち \mathbf{P} からの所要時間が u
以内の割合の特定 ($0 \leq z < \frac{R}{3}$ の場合). 94

5.10 地点 \mathbf{P} を左回りに通過する移動者の起・終点ペアの集合のうち \mathbf{P} からの所要時間が u
以内の割合の特定 ($\frac{R}{3} \leq z \leq R$ の場合). 94

5.11 地点 \mathbf{P} を通過する時刻 t と \mathbf{P} から \mathbf{Q}_2 までの所要時間 u の集合の図示 ($a = 0.6R/v$, $z =$
 $0.2R$ の場合). 97

5.12 環状路を先に利用する場合の環状路の通過時刻の密度関数を導出するための a - z 平面. 97

5.13 地点 \mathbf{P} を左回りに通過する移動者の起・終点ペアの集合のうち \mathbf{P} からの所要時間が u
以内の割合の特定. 99

5.14 地点 \mathbf{P} を通過する時刻 t と \mathbf{P} から \mathbf{Q}_2 までの所要時間 u の集合の図示. 101

5.15 平行四辺形の形状を決定するための a - z 平面. 101

5.16 地点 \mathbf{P} を上り方面に向かって通過する移動者の起・終点ペアの集合のうち \mathbf{P} からの所
要時間が u 以内の割合の特定. 106

5.17	地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 ($a = 1.2R/v$, $z = 0.4R$ の場合)	108
5.18	上り方面の放射路の通過時刻の密度関数を導出するための a - z 平面	108
5.19	地点 P を下り方面に通過する移動者の起・終点ペアの集合のうち P からの所要時間が u 以内の割合の特定	110
5.20	地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示	112
5.21	平行四辺形の形状を決定するための a - z 平面	113
5.22	環状路の通過密度 $p_{環}(P, t)$ の立体図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合)	116
5.23	環状路の通過密度 $p_{環}(P, t)$ の断面図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合)	116
5.24	環状路の通過密度 $p_{環}(P, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一斉出社の場合)	117
5.25	環状路の通過密度 $p_{環}(P, t)$ の断面図 (時間区間 $[2, 3]$ の一斉出社の場合)	118
5.26	放射路の上り方面の通過密度 $p_{放上}(P, t)$ の立体図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合)	118
5.27	放射路の上り方面の通過密度 $p_{放上}(P, t)$ の断面図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合)	119
5.28	放射路の上り方面の通過密度 $p_{放上}(P, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一斉出社の場合)	119
5.29	放射路の上り方面の通過密度 $p_{放上}(P, t)$ の断面図 (時間区間 $[2, 3]$ の一斉出社の場合)	120
5.30	放射路の下り方面の通過密度 $p_{放下}(P, t)$ の立体図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合)	120
5.31	放射路の下り方面の通過密度 $p_{放下}(P, t)$ の断面図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合)	120
5.32	放射路の下り方面の通過密度 $p_{放下}(P, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一斉出社の場合)	121
5.33	放射路の下り方面の通過密度 $p_{放下}(P, t)$ の断面図 (時間区間 $[2, 3]$ の一斉出社の場合)	121
5.34	環状路と放射路の合計の通過密度 $p_{合}(P, t)$ の立体図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合)	122
5.35	環状路と放射路の合計の通過密度 $p_{合}(P, t)$ の断面図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合)	123
5.36	環状路と放射路の合計の通過密度 $p_{合}(P, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一斉出社の場合)	123
5.37	環状路と放射路の合計の通過密度 $p_{合}(P, t)$ の断面図 (時間区間 $[2, 3]$ の一斉出社の場合)	124
5.38	環状路の通過密度 $p_{環}(P, t)$ の時間的分布	126
5.39	放射路の上り方面の通過密度 $p_{放上}(P, t)$ の時間的分布	126
5.40	放射路の下り方面の通過密度 $p_{放下}(P, t)$ の時間的分布	127
5.41	環状路と放射路の合計の通過密度 $p_{合}(P, t)$ の時間的分布	127
5.42	Clark 型の起・終点分布	129
5.43	環状路の通過量の概形: (a) 立体図; (b) 断面図	130
5.44	放射路と通過量の概形: (a) 立体図; (b) 断面図	130
5.45	環状路と放射路の合計の通過量の概形: (a) 立体図; (b) 断面図	130
6.1	格子上交通網を有する矩形都市における通過量の定義	134
6.2	地点 P 近傍の線分 L を東向きに通過するための起・終点の領域の組み合わせ: (a) L を通過した後に方向転換を行う場合; (b) L を通過する前に方向転換を行う場合	135
6.3	通過量の立体図: (a) 東向きと西向きの合計; (b) 南向きと北向きの合計; (c) すべての向きの合計	136
6.4	地点 P からの所要時間の等高線	138
6.5	地点 P からの所要時間が u 以内の割合の特定	138
6.6	端点への衝突の順番に応じた矩形の領域分割: (a) $l_2 \leq l_1$ の場合; (b) $l_1 \leq l_2$ の場合	139

6.7	地点 P からの所要時間が u 以内の割合の特定.	140
6.8	地点 P からの所要時間が $[u, u + \Delta u]$ 以内の割合の特定.	141
6.9	東向きの通過密度 $p_{\text{東}}(P, t)$ の立体図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合).	145
6.10	東向きの通過密度 $p_{\text{東}}(P, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一斉出社の場合).	146
6.11	東西南北合計の通過密度 $p_{\text{合}}(P, t)$ の立体図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合).	147
6.12	東西南北合計の通過密度 $p_{\text{合}}(P, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一斉出社の場合).	148
6.13	図 6.14 と図 6.15 に用いた 4 つの観測地点.	148
6.14	東向きの通過密度 $p_{\text{東}}(P, t)$ の時間的分布.	149
6.15	合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の時間的分布.	149
7.1	起・終点が連続的に分布するネットワーク空間.	151
7.2	(a) 起・終点が連続的に分布する総長 l_T のネットワーク空間と (b) 起・終点の直積空間.	152
7.3	2 つの基本ケース : (a) ケース I ; (b) ケース II.	153
7.4	ケース I の各地点における通過量の導出 : (a) $P \in L_1$ のとき ; (b) $P \in R$ のとき ; (c) $P \in L_2$ のとき.	154
7.5	図 7.4 の各グラフに対応する直積空間 : (a) $P \in L_1$ のとき ; (b) $P \in R$ のとき ; (c) $P \in L_2$ のとき.	155
7.6	ケース I の通過量の立体図.	155
7.7	ケース II の $P \in L_1$ の場合の通過量の導出 : (a) 起・終点ペアの集合 ; (b) 直積空間における図示.	157
7.8	ケース II の $P \in R_2$ の場合の通過量の導出 : (a) 起・終点ペアの集合 ; (b) 直積空間における図示.	157
7.9	ケース II の $P \in L_2$ の場合の通過量の導出 : (a) 起・終点ペアの集合 ; (b) 直積空間における図示.	158
7.10	ケース II の通過量の立体図 : (a) R_2 のみ ; (b) R_1 と R_2 の両方.	158
7.11	衝突点の基礎的性質 : (a) 性質 1 の説明 ; (b) 性質 2 の説明.	159
7.12	起・終点が同一リンク L にある場合に他の経路 R を用いる場合.	160
7.13	リンクペア間の 4 通りの移動経路.	161
7.14	パターン 1 の例.	162
7.15	パターン 2 の例.	162
7.16	パターン 3 の例 ($l_1 < l_2$ の場合).	163
7.17	パターン 4 の例.	164
7.18	パターン 5 の例.	164
7.19	合計の通過量の導入.	166
7.20	(a) 計算例に用いたネットワークと (b) 合計の通過量 $q_{\text{合}}(z)$ の立体図.	166
7.21	地点 P からの所要時間が u 以下である終点集合 : (a) $P \in L_1$ のとき ; (b) $P \in R$ のとき ; (c) $P \in L_2$ のとき.	168
7.22	地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 ($P \in L_1$ の場合).	168
7.23	地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 ($P \in R$ の場合).	169

7.24	地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 ($P \in L_2$ の場合).	169
7.25	地点 P からの所要時間が u 以下である終点集合 ($P \in L_1$ の場合).	172
7.26	地点 P からの所要時間が u 以下である割合の特定 ($P \in L_1$ の場合).	173
7.27	地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 ($P \in L_1$ の場合).	174
7.28	地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 ($P \in R_2$ の場合).	174
7.29	地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 ($P \in L_2$ の場合).	174
7.30	ケース I の通過密度の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).	178
7.31	ケース II の一方の経路を用いる移動のみに着目した場合の通過密度の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).	179
7.32	ケース II の通過密度の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).	180
7.33	図 7.20 (a) のネットワークにおける通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).	181
7.34	図 7.36 の計算に用いたネットワーク上の 4 つの観測地点.	182
7.35	図 7.36 の計算に用いた 4 通りの一様な出社時刻分布.	182
7.36	図 7.20 (a) のネットワークにおける通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の時間的分布.	182
A.1	環状路を先に利用する場合の環状路の通過時刻の密度関数を導出するための a - z 平面.	189
A.2	放射路の上り方面の通過時刻の密度関数を導出するための a - z 平面.	195

表目次

1.1	既存研究と各章で扱う通過密度との対応	2
5.1	図 5.12 の a - z 平面に対応する端点の出現順序の整理	98
5.2	図 5.18 の a - z 平面に対応する端点の出現順序の整理	109
6.1	図 6.6 に対応する端点の出現順序の整理	139
7.1	起・終点が同一リンクにある場合の基本ケースへの分割	160
7.2	リンクペア間の移動に用いられる 4 つの最短経路の組み合わせ	161
7.3	パターン 1 から 5 におけるリンク L_1 と L_2 に出現する衝突点数の合計	161
7.4	パターン 2 の基本ケースへの分割 (図 7.15 の場合)	162
7.5	パターン 3 の基本ケースへの分割 (図 7.16 (a) の場合)	163
7.6	パターン 3 の基本ケースへの分割 (図 7.16 (b) の場合)	163
7.7	パターン 4 の基本ケースへの分割 (図 7.17 の場合)	164
7.8	パターン 5 の基本ケースへの分割 (図 7.18 の場合)	165

第1章 序論

1.1 はじめに

本章では、本研究の目的を述べたのち、連続型の交通モデルの歴史を、この分野の発展に貢献した人物とその業績とともに概観する。さらに、都市内交通量分布に関連する既存研究を紹介しながら、本研究の理論的位置付けを明らかにする。最後に各章の構成を述べる。

1.2 本研究の目的

これまで、都市・地域計画学、都市経済学、オペレーションズ・リサーチ、交通工学等の分野では、都市内の輸送・交通に関する様々な数理モデルが提案されてきた。そのうち、与えられた交通網においてどの地点をどのくらいの移動が通過するかを記述する、「交通流」あるいは「通過量」に関する話題は、交通計画や交通渋滞を分析する上での最も基礎的な指標であり、多くの研究者の興味を惹き付けてきた。これらの中には、土木・交通工学の分野で開発された四段階推定法に代表される大規模な交通需要予測モデルから、交通政策の巨視的な指針を得ることを目的とした連続平面上の解析的なモデルまで、実に様々なものが存在する。

本研究は後者の、連続平面におけるマクロな都市交通モデルの系譜に位置付けられる。これらの分野では、現実の忠実なる再現や精度の高い予測を目指すというよりはむしろ、複雑な現実から本質的と思われる要因のみを抽出し、交通現象を貫く巨視的な構造を解明するための努力がなされてきた。大胆な単純化の結果として現実の再現性や記述力が損なわれるものの、複雑な現実の観察のみからは得られない、都市問題の本質を浮き彫りにする場面もあるのである。

ロンドン大学の Traffic Studies の初代教授に就任した Smeed は、1960 年代初めから 70 年代後半にかけて、連続平面における交通モデルにおいて膨大な蓄積を残した人物である。Smeed (1963) は、移動の起・終点の都市内分布と起・終点間の移動経路を所与として上で、任意地点を通過する交通量を記述する指標である、*travel intensity* の概念を提案した。Smeed (1963) の *travel intensity* は、Holroyd, Pearce, Vaughan などによって一般化され、交通網の幾何学的パターンや都市・地域の形状、起・終点の都市内分布などによって *travel intensity* がどのような影響を受けるのか、という根本的な問いに対して興味向けられ、様々な知見が蓄積されてきた。

しかしながら、これらの既存研究のほとんどは交通量の時間的な変動を無視しており、通勤交通に代表されるような、流量が時々刻々と変化する状況を記述するための連続平面モデルは十分な蓄積がなされていない。このような背景から、本研究は Smeed や Vaughan のアプローチを基礎として、時間軸上の行動パターンにも着目することで、総通過量を扱った既存研究の、時刻に関する密度を導くための数理的基礎を構成することを目的とする。さらに、上記の枠組みをもとに、既存研究で追求されてきた直線距離、放射・環状距離、直交距離を想定した連続平面上の通過量モデルの、時刻に関する密度を実際に導出し、既存研究では得られなかった知見の蓄積を目指す。さらに近年、田村・腰塚 (2000) によ

て提案された、連続的な起・終点を想定したネットワーク空間における通過量モデルの、時刻に関する密度を導出し、都市交通網を分析する際の道具立てを構成することを目標とする。

本研究の枠組みによって、出社時刻パターンの時間的な広がりや度合いが、混雑緩和に与える影響を把握することが可能となる。このモデルは、オフピーク通勤の導入効果を記述するモデルとして位置付けられる。また、ダンツィクとサアティによって提案されたコンパクトシティでは、交通混雑を初めとする都市が抱える多くの問題を、時間軸を有効活用することにより解決しようとする試案が示されている (Dantzig and Saaty, 1973)。本研究はまた、これらのような、人々の時間軸上の行動パターンが本質的となる対象を記述する、マクロな都市交通モデルとしての意味合いも持っている。

1.3 本研究で扱う時刻依存型の通過量モデル

本論文で扱う時刻依存型の通過量モデルについて簡単に説明する。

Smeed (1963) の *travel intensity* は、Holroyd and Millar (1966) によって観測地点における移動の向きを考慮した *flow density* へと一般化された。Smeed の *travel intensity* と Holroyd と Millar の *flow density* は、Pearce, Vaughan などによって追求され、様々な交通網パターンやトリップ密度のもとで、理想化された都市モデルを用いた分析が行われてきた。

本研究は、人々の目的地への到着時刻分布を所与として、*flow density* の時刻に関する密度を導入する。本論文では、この指標を通過密度と名付け、通過密度を導くための数理的枠組みを構成する。それをもとに、既存研究で扱われた規範的な交通網パターンを有する都市モデルにおける、通過密度を具体的に計算する。表 1.1 に、各章で時刻に関する密度として拡張する際の基本モデルとなる既存研究を示した。なお、各章の詳しい内容とその他の既存研究との関連は、本章の第 1.6 節で説明する。

表 1.1 既存研究と各章で扱う通過密度との対応。

	都市モデル	移動パターン	既存研究
3 章	線分都市	直線距離	腰塚 (1992)
4 章	任意形状都市	直線距離	Holroyd and Miller (1966), 大津・腰塚 (1999a)
5 章	円盤都市	放射・環状距離	Vaughan (1987)
6 章	矩形都市	直交距離	Holroyd (1968), Vaughan (1987)
7 章	ネットワーク	最短距離	田村・腰塚 (2000)

なお、本論文の一部はすでに学会等で発表済みである。以下にその内訳を示す。第 4 章の一部を田中・栗田 (2004a) で、第 5 章の主要部分を田中・栗田 (2003) で、第 6 章の主要部分を Tanaka and Kurita (2003) で発表した。

1.4 連続型の交通モデル

本研究では、連続平面モデルはもとより、ネットワーク空間モデルにおいても、連続的に分布する移動の起点と終点を前提とする。本節では、これまでに開発されてきた連続型の交通モデルを概観する。

対象物の考察空間内での位置の座標が、連続的な値を取り得るものと仮定してモデル化を図る「連続型」のモデル (continuous models) は、物理学を初めとする多くの学問分野で古くから用いられて

きた。

連続型モデルを用いて、(空間的な広がりをもって展開される)人々の社会・経済的な諸活動を、移動コストを主要な変数として組み込んで記述・分析する試みも、比較的古くから行われている。特に立地論(location theory)や経済地理学(economic geography)における歴史は古く、歴史的に有名な例として、Von Thünen (1826), Weber (1909), Hotelling (1921), Christaller (1933), Lösch (1940)などが挙げられる。

しかしながら、交通現象を直接の対象とし、その記述・分析や、政策効果の見積もりを行うために、連続型モデルが頻繁に用いられるようになったのは、比較的最近になってからのことである。連続平面における交通モデルの諸概念と基礎理論を築き、その後の研究の発展に大きく貢献した人物として、Beckmann, Wardrop および Smeed が挙げられる。

都市経済学における多大なる業績で有名な Beckmann は、連続平面における交通流モデルにおいても重要な貢献をしている(Beckmann, 1952)。Beckmann (1952)では、移動コストの場が与えられた場合の、人や物のフローを計算するための数学的手法が提案されている*¹。

都市交通に関する多岐に渡るモデルを提案し、ウォードロップの原理(Wardrop, 1952)で名高い Wardrop は、連続平面上の交通モデルにおいても重要な貢献をした人物である(Wardrop, 1969)。

しかしながら、連続平面における交通モデルの有用性を主張し、様々な基礎的概念と解析手法を提案することで、この分野のその後の発展に最も大きな影響を与えたのは、Smeed であろう。ロンドン大学の Traffic Studies の初代教授に就任した Smeed は、1960 年代初めから 70 年代後半にかけて、連続平面における交通モデルにおいて膨大な蓄積を残した(Smeed, 1963; 1968; 1977)。Smeed の手法は、Holroyd, Pearce, Vaughan などによって推し進められ、1970 年代から 1980 年代にかけて数多くの研究を生んだ。ここで、Smeed の論文から、Smeed の思想が端的に表現されている言葉を紹介する*²(Smeed, 1977, p. 9)。

Before examining the detail, however, it may be worthwhile commenting on the general approach. It is sometimes argued that an idealized distribution of origins and destinations cannot represent the situation in a real town and that any traffic patterns deduced from such assumptions cannot represent the situation in a real town. Insofar as exact correlation between model and actuality are concerned, this must be agreed. But in practice we usually only need a model that represents the real situation sufficiently well to make it possible to draw conclusions for policy-making. For this, idealized distributions may often be sufficient and may even have advantages over the actual ones. With such distributions, it is usually easier to visualize the assumptions, the results and the effect of changes in the variables involved. It is therefore often easier to visualize the relevance of the conclusions drawn to actual problems.

このころは、計算機を用いたネットワークモデルが盛んに用いられ、膨大なデータを利用した四段階推定法を初めとする大規模な交通需要予測モデルが盛んに研究され現場に適用されていた時代である。そのような時代にあって、理想化された巨視的なモデルを用いて都市を分析していくことの意義が端的に表現されている。巨視的な連続型モデルを用いて都市交通を分析する際には、(大規模シミュレーションや実データの観測や分析のみからは把握しきれない)都市交通の構造や政策的な指針を得ることが重要なのである。

*¹ Beckmann (1952) のモデルは、Puu (2003) によって詳しい解説がなされている。

*² 以下の一節は Vaughan (1987) でも引用されている。

Vaughan (1987) は、Smeed のアプローチを基礎として、連続平面の交通モデルにおいて極めて広範な貢献をした人物である。Vaughan は、Smeed の流れを汲む連続型の交通モデルのおそらく唯一の成書である、「*Urban Spatial Traffic Patterns*」を著し、(Vaughan 自身による多数のモデルも含め) 既存研究を網羅的に整理している。特に、交通量や交差量^{*3}の都市内分布および平均移動距離を用いて都市交通を分析することの有用性を唱え、移動の起・終点の分布と経路パターンが与えられたときに、これらの指標を計算する方法を詳細に述べている。また、これらの理論モデルを用いて、世界のさまざまな都市の交通量データをもとに、モデルの検証を行っている点も大きな特徴である。

速度場が与えられた連続平面上での最短時間経路を前提にし、多くの魅力的な交通モデルを提案した Angel and Hyman (1976) は、その著書「*Urban Fields*」の導入部で以下のように述べている。

The numerical approach enables us to describe and analyze a greater structural variety of cities and transportation systems than had been previously accommodated in the earlier geometrical representation of space. However, the perceptions of general patterns and principles of the organization of space in urban regions—the most important insights into earlier developments of regional science, urban economics and regional geography—have become difficult to find in the cumbersome detail of the numerical framework.

この例のように、連続型モデルの初期の発展に貢献した研究者の多くは、(詳細なるネットワークモデルからは判明し難い) 交通現象の理解を助ける道具としての連続型モデルの有用性を主張している。

いかに計算機が発達し、大規模で複雑な問題が扱えるようになるろうとも、その結果を解釈したり政策決定を行う人間側の認識力が及ばなければ、その出力を有効に活用することはできない。その意味で、連続型モデルを用いて、政策効果に関する明示的な知見を積み重ねておくことは、都市計画の現場で用いられる複雑で大規模なモデルの出力の解釈を助けるという重要な役割ももっているのである。

Langevin らは、連続型モデルを用いた輸送問題や物流問題に関する既存研究を網羅的に分類し、その有用性や限界点を数理計画モデルと対比しながら詳細に分析している (Langevin et al., 1996)。

1.5 関連する既存研究の整理

これまでに、交通工学、都市・地域計画学、都市経済学、オペレーションズ・リサーチ等の分野で、都市内移動に基づく交通量の分布を記述・分析するための様々なモデルが提案されてきた。これらの分野で開発されてきた膨大なモデル群を網羅的に整理し尽くすことは困難なので、本研究と関連の深い理論的なモデルを中心に紹介し、本研究の位置付けを明確にする。以下では、連続平面モデルとネットワークモデルの双方において交通量分布を扱ったモデルを紹介したのちに、本研究の主要な対象である交通量の時間的変動を明示的に扱ったモデルを紹介する。

1.5.1 連続平面における交通量分布のモデル

連続平面における交通量の分布を記述するための基礎概念を構成し、その後の多くの研究の基礎を築いたのは Smeed である。Smeed (1963) は、移動の起・終点の分布と起・終点間の移動経路を所与として上で、任意地点を通過する交通量を記述する指標である、*travel intensity* の概念を提案した。Smeed

^{*3} 移動経路の交差数を単位面積当りの密度で表したもので定義され、交通渋滞の潜在性の高さを記述する指標として用いられている。

の travel intensity は、単位面積当りの総移動距離として定義される。これは、交通工学の分野でしばしば、[台・キロ] の単位で記述される総輸送量を、連続平面上の密度として記述したものに相当する。travel intensity は、交通の激しさの都市内分布を表す指標であり、移動に伴うエネルギー消費や住環境とも関連の深い重要な指標である。

Horloyd and Miller (1966) は、Smeed (1963) の travel intensity の概念を一般化し、任意地点を特定の向きへと通過する交通量を記述する、*flow density* の概念を提案した。Horloyd and Miller (1966) は、直線距離に基づく移動を想定し、一般的なトリップ密度のもとで flow density を計算する方法を初めて示し、円盤領域に一様独立に分布する 2 点間の直線移動を想定した場合の flow density を具体的に導いた。

Vaughan (1987) は、「*Urban Spatial Traffic Patterns*」の中で、都市内交通量の分布モデルに関して多くの紙面を割き、travel intensity と flow density に関する既存研究を（Vaughan 自身による多数のモデルも含め）網羅的に整理している。特に、交通網の形状と経路パターンによってこれらの指標がどのように変化するかを詳細に調べ、モデルの特徴を比較・検討している。また、世界のさまざまな都市の交通量データをもとに、これらの理論モデルの検証を行っている。本研究の、第 4 章から第 6 章の内容は、Vaughan (1987) にまとめられた一連の連続型の通過量モデルの時刻に関する密度として一般化される。

これら Smeed の流れを汲む一連の研究では、最短経路に基づくモデルが主流であった。これに対し、連続平面上で地点に依存する速度場 (velocity field) が与えられたときに、その速度場の上での最短所要時間とそのときの移動経路を（微分幾何学と変分法を主な道具として）計算する方法も追求されている (Wardrop, 1969; Angel and Hyman, 1976)。この手法に基づいて、Angel and Hyman (1976) は、さまざまな半径の円周を横切る交通量を計算し、都市内交通量の分布を導いている。また、Puu は、Angel and Hyman (1976) の手法を援用し、Smeed の travel intensity と本質的に同一の指標を、円盤領域における単純なモデルを用いて導いている (Puu, 1977; 1979)。田口 (1983) は、このような問題をさらに一般的な立場から扱っており、規模の大きい密なネットワークを連続な流れ場で近似するモデルを提案している。連続体上の各点には、(リンクの容量や通過に要する時間に対応する) 連続体の容量と速度が定義されており、これらの特性は、非均質・非等方である。このような連続体の上で、最大流問題、最短経路問題、最小費用流問題などが定式化され、現実の都市道路網を用いた応用が扱われている。

我が国の都市工学分野でも、これまでに連続平面における交通量の分布モデルが盛んに研究されてきた。それらの先駆けとなったのは、腰塚による一連の研究である。腰塚は、都市を構成する交通網や建築物などの人工物を、利用者の移動という観点から分析・評価することの重要性を唱え、そのための道具立てとして「距離分布」と「通過量分布」を基礎として挙げている。距離分布については、本研究の直接の対象ではないため詳しくは述べないが、施設間の距離や、人と施設との距離、領域内のあらゆる 2 点間の距離の分布が扱われており、多くの独創的な研究が行われてきた (腰塚, 1986; 腰塚・大津, 2001)。

通過量モデルについては、腰塚 (1992) に基礎的な概念が述べられている。腰塚 (1992) では、移動の出発点と目的点を中心に集中していなくてさえ都心が混雑する構造を、単純な通過量モデルを用いて数理的に明示している。大津・腰塚による一連の研究では、直線距離に基づく移動を前提とした通過量モデルについて、理論的・数理的な側面と、それを用いたマクロな都市交通モデルが精力的に追求され、数多くの興味深い成果が得られている (大津・腰塚, 1997; 1998; 1999a; 1999b; 2000)。

また、都市内に必要となる交通容量の割り当て問題に関する分析も数多く行われている。これらの研究は、伊藤 (1963) によって提案された、人や車が移動する際に必要となる面積を記述する「流動線面積」の概念が出发点となっている。流動線面積は、単位時間あたりに交通機関（例えば車）が必要とする面積と移動距離との積をもとに、都市内の交通容量の見積りに利用されている。奥平 (1976) では、流動線面積の概念を用いて、居住面積と道路面積の配分問題を構成している。田口 (1995) は、領域内の人の対がある確率で互いに行き来をするという交通を想定し、移動経路に沿って交通量に応じた交通容量を割り当てた場合の、居住領域と交通領域の配分問題を論じている。同様のアプローチは、放射・環状パターンを想定したモデル (秋澤・茅, 1995; 山田ら, 2001) や、高層建築物で同様の問題を追求した研究 (田口, 1997; 田口・腰塚, 2001)、さらには立体的な土地利用構造を扱ったモデル (小林・田口, 2001) においても採用されている。

また、人々の空間的な流動パターンを前提として、その途中経路で利用されるタイプの施設の配置問題を扱った、フロー需要型の施設配置問題も追及されている (鈴木, 2002; 2003)。

1.5.2 ネットワーク空間における交通量分布のモデル

土木・交通工学の分野で開発され、交通計画の現場に適用されてきた交通需要予測手法に、四段階推定法がある。四段階推定法は、具体的な（鉄道路線や道路網などの）路線の交通量予測に至る過程を、社会経済指標・交通指標を入力として、発生・集中交通量、分布交通量、交通手段別分担交通量、配分交通量を、4つの段階に分けて順次推定するものである（例えば、大蔵, 1993）。

これらの多大なコストを要する大規模なモデルとは別に、ネットワークの形態や構造に着目し、（解析学や離散数学等のアプローチにより）交通量の分布を求めるための規範的なモデルも追求されている。田口・大山 (1993) は、与えられた道路網において、すべての頂点間の最短経路のうち、各リンクが含む最短経路の本数を各リンクの重要度と定義し、規則的な格子状や放射・環状のネットワークにおける重要度を式の形で導いている。この手法を東京と岐阜の道路網に対して適用し、実際の道路網の評価を行っている。

これに対し、腰塚 (1999) は、同様の問題を起・終点がリンク上で連続的に分布するネットワークにおいて計算している。腰塚の論文では、放射状と格子状という代表的な道路パターンを想定し、距離分布と通過量分布が解析的に導かれており、両者の性質が比較されている。この研究を一般化し、起・終点が連続的に分布する任意のネットワーク空間において、通過量分布をシステムティックに導く方法が田村・腰塚 (2000) によって開発された。この研究は、ネットワーク空間上で解析的な移動モデルを構成する際の、基本モデルとして位置付けられる。本研究の第7章の内容は、田村・腰塚 (2000) のモデルをもとに、時刻に関する密度として一般化される。

1.5.3 時刻に依存した交通量分布のモデル

以上のように、連続平面とネットワーク空間の双方において、巨視的な通過量モデルを中心に紹介してきたが、これらはいずれも各地点を通過する総交通量を扱ったものであり、時間的な変動を分析するためのモデルは（総量を扱ったものと比較し）十分な蓄積がなされていない。ここでは、既存研究で扱われてきた時刻依存型の交通モデルを紹介する。

2次元連続平面において、（Smeedの流れを汲む）時刻依存型の通過量モデルは、唯一 Pearce (1975) によって研究されている。Pearce は円盤領域において、環状路と放射路を組み合わせた移動経路を前

提として、到着時刻分布を所与とした通過量を導く方法を提案している。Pearce は、出社時刻分布が一般的な分布に従う場合の計算法を抽象的に示してはいるものの、具体的な計算は、すべての通勤者が同時刻に出社すると仮定した場合にのみ行っているに過ぎず、この点に関する一般化が望まれる。

これに対し、1次元領域における、ミクロな自動車交通流の時間的変化を記述するモデルは過去様々な形で研究されている。Lighthill and Whitham (1955) は、その先駆けとなった研究であり、高速道路上の自動車交通流の挙動を流体力学的な視点から扱っている。同様の問題を、偏微分方程式を用いて追求したモデル群を平易に解説した成書に、Haberman (1998) がある。この分野の歴史的展開や最新の研究成果は、日本応用数理学会編集 (2002) に詳しく紹介されている。

しかしながら、Pearce の研究以降、時刻依存型のマクロな交通モデルを解析的な視点から追求した研究は現れていない。このことは、地点と時刻に依存した通過量を厳密に導出するためには、解析的な取り扱いが（総通過量を扱ったものと比較し）格段に難しくなる点、および、近年の計算機の発達により大規模な数理計画問題やシミュレーションによるアプローチが可能になった点と無関係ではないように思われる。例えば、田口 (2004) は大規模な通勤交通モデルを用いて時差出勤効果の予測を行っている。時刻表通りに運行する首都圏電車ネットワークを再現し、「大都市交通センサス」から OD 需要データを得て、利用者均衡配分問題を扱っている。混雑を避けるようなコスト関数を与え、最寄り駅から乗り込む電車の利用時間範囲を、センサス回答より広げることによって時差出勤が表現されている。時差出勤モデルではピーク前後の時間に乗客が分散し、混雑緩和が実現される様子が示されている。

本研究の連続平面における時空間通過量モデルは、Smeed や Vaughan を中心に追求されてきた一連のモデル群を、時間的な変動を直接取り扱うことのできるモデルへと拡張するための、数理的な枠組みを整備したものである。具体的には、一般的に与えられた起・終点の分布と移動経路に加え、任意の密度関数で指定された到着時刻の分布を所与とした場合に、通過量の時刻に関する密度を導出するための手法を提案するものである。この枠組みを基礎として、第 3 章で線分領域における時空間通過量を、第 4 章、第 5 章および第 6 章では、それぞれ、任意形状の領域における直線距離に基づくモデル、円盤領域における放射・環状距離に基づくモデル、矩形領域における直交距離に基づくモデルを、具体的に導出する。さらに最近、田村・腰塚 (2000) で提案された、移動の起点と終点がネットワーク上に連続的に分布するネットワーク空間における通過量モデルを、本研究の枠組みをもとに、時刻依存型のモデルへと拡張する。各章では、時間軸上の行動パターンを前提として、時々刻々と変化する交通量を分析して初めて得られる知見を積み重ねることを基本姿勢とする。

1.6 論文の構成

本論文は、本章第 1 章を含めて全部で 8 章からなる。第 8 章は、本研究の結論と今後の課題をまとめたものである。以下に、数学的準備と具体的な通過量モデルを構成する、第 2 章から第 7 章までの概要を既存研究との関連に触れながら紹介する。

第 2 章の概要

第 2 章では、通過量モデルを構成する際の数学的な準備と通過量の理論的性質を論じる。はじめに、Smeed や Horloyd によって基礎が築かれ、Vaughan らによって精力的に研究されてきた通過量モデルを紹介する。これらのモデルは、(1) 都市領域の形状、(2) 移動の起・終点の分布（トリップ密度）、(3) 起・終点間の移動経路が与えられたときに、任意地点を特定の向きへと通過する交通量を地点に依

存する量として計量するものであり、Vaughan (1987) に数理的基礎が整理されている。第2章では、Vaughan (1987) の成果を参照しながら、本論文の各章で構成する通過量モデルで用いられる、これら3つの仮定について説明する。

続いて、既存研究の通過量モデルの時刻に関する密度を導入するために必要な、移動の速さと目的地への到着時刻の分布の概念を説明する。さらに、導入した通過量が、各地点を特定の向きへと通過する交通量に比例する量であるとともに、その地点における単位面積当りの総移動距離でもあることを示す。

第3章の概要

第3章では、線分領域における通過量モデルを構成する。現実には、人々の移動は面的な広がりをもつ都市領域で展開されるが、1次元領域における通過量モデルを構成することにはいくつかの意味がある。まず、移動現象がほぼ1次的に展開されていると見做せる場合には、単純な1次元都市はモデルの因果関係が把握しやすいために有効である。例えば、海岸線に沿って発達した都市や、特定の道路や鉄道に沿ってアクティビティーが分布する状況を記述する際には、1次元の都市モデルは説明力をもつであろう。

過去に、1次元領域における通過量モデルを扱ったものとして、Smeed (1977) および腰塚 (1992) が挙げられる。Smeed (1977) は、線分領域において通勤交通を記述する単純なモデルを構成し、ロンドンとブリストル (Bristol) の通勤交通データを用いてモデルの検証を行っている。一方で、腰塚 (1992) は、土浦駅前の商店街における歩行者流動量というミクロな流動を、線分領域における単純な通過量モデルを用いてうまく記述している。

また、本研究の主要な対象である2次元平面上の通過量モデル (第4章、第5章および第6章)、および、起・終点がリンク上で連続的に分布するネットワーク空間上の通過量モデル (第7章) は、本章の素直な一般化として導入される。したがって、操作性の高い1次元モデルで時空間通過量を導くための一般的枠組みを構成しておくことは、以降の章で扱うモデルの構造を明確にするという利点もある。

第4章の概要

第4章では、任意形状の都市において、直線距離による移動を想定した場合の通過量モデルを構成する。直線距離に基づく移動モデルは、地域科学や立地理論などの分野で古くから用いられてきたモデルである。現実の移動現象は交通網上で展開されるが、究極に理想化された移動である直線距離モデルは、特定の道路パターンの性質を議論する上でも極めて重要なものである。直線距離を想定した膨大な蓄積の中で、通過量モデルについては少数の理論的研究があるに留まっている。

直線距離に基づく通過量モデルを初めに扱ったのは、Holroyd and Miller (1966) であり、この論文で任意の地点を特定の向きへ通過する交通量を記述する指標である、flow density の概念が導入された。Holroyd and Miller (1966) は、任意のトリップ密度に基づく flow density の計算方法を提案し、円盤領域における一様独立な起・終点間の直線距離に基づくモデルにおいて、この指標を具体的に導いている。Pearce は、直線分の地理的障害物が存在する凸図形で与えられた都市において、起・終点が円盤領域に一様独立に分布する場合と、無限平面において Sherratt-Tanner 型に従って独立に分布する場合の flow density を導いている (Pearce, 1981)。大津・腰塚による一連の研究では、理論的・数理的な側面と、マクロな移動モデルの構成要素としての側面との両面から、興味深い成果が得られている (大津・腰塚, 1997; 1998; 1999a; 1999b; 2000)。

しかしながら、時間変動を考慮した通過量を解析的な視点から追求したモデルは見当たらず、本章の内容はその初めての試みである。前半部では、凸領域における通過量およびその時刻に関する密度の導出方法を述べ、後半部においてその内容を任意形状の都市領域のモデルへと拡張する。また、東京 23 区の境界データを用いて、本章で構成した通過密度の計算例を示す。

第 5 章の概要

第 5 章では、円形都市において放射・環状距離による移動を想定し、通過量モデルを構成する。円盤領域における放射・環状パターンを想定した都市モデルは、過去様々な形で研究が行われてきた。移動距離の分布や平均値などに関するもの (Vaughan, 1987; 栗田, 2001; 藤田・鈴木, 2003)、環状路の最適配置パターンを追求したもの (Pearce, 1974; 藤田・鈴木, 2003; 2004)、また施設配置問題に関連した内容のもの (Hyman and Mayhew, 2000a; 2000b) など、幅広く研究されている。

本研究の対象である交通量の分布を正面から扱ったモデルもいくつか提案されている。交通量分布に関する初期の研究は、Vaughan (1987) に見られる。Vaughan は、環状路と放射路からなる道路網上に様々な移動経路を設定し、任意地点を環状路と放射路に沿って通過する交通量の導出法を示し、起・終点が単位円盤上に一様独立に分布する都市 (Smeed の都市) において、交通量分布を具体的に導いており、経路パターンの違いによる比較が行われている。

同様の研究は、田中・栗田 (2001) でも行われており、港湾等による地理的制約を有する都市を扇形で記述し、通行不能領域が交通量の偏在に与える影響が明らかにされている。また、藤田・鈴木 (2003) では、稠密な放射路を有する円盤領域に複数本の環状路が配置された都市を想定し、平均移動距離が厳密に導かれている。さらに、平均距離を最小化する環状路の配置についても議論されており、最適配置パターンにおける環状路の通過量が導かれている。また、柳井 (1995) でも、シンプルな数理モデルを用いて、環状路の混雑の潜在性が明らかにされている。これらの既存研究では、(1) 都心からある程度離れた地点の環状路が混雑する点、(2) 都市中心は通過交通の影響で極めて混雑する点、などの知見が得られている。

この章では、Vaughan (1987) で追求されたモデルの、時刻に関する密度を厳密に導出する。環状路と放射路を通過する交通量の時空間分布を導くことにより、既存研究では得られなかった放射・環状パターンに関する数多くの興味深い性質が明らかになる。

第 6 章の概要

第 6 章では、矩形領域で与えられた都市において直交距離による移動を想定し、通過量モデルを構成する。格子状の交通網は、放射・環状網と並ぶ代表的な交通網パターンである。移動距離が (問題によっては直線距離よりも) 数理的に扱い易いことと、多くの都市に標準的に見られることなどから、理論的な都市交通モデルを作成する際にも、幅広く用いられてきた。

しかしながら、交通量の分布に関する研究については、十分な蓄積がなされていない。このことは、一般に、規則的な格子状網では、任意の 2 地点間の最短経路が複数存在することにより、移動経路をどのように設定するか、という特有の難しさを有することが理由の一つであると思われる。

規則的な格子状網上の通過量を扱ったものとしては以下のような蓄積がある。連続平面における初期のものとしては、Holroyd や Vaughan and Doyle が挙げられる (Holroyd, 1968; Vaughan and Doyle, 1979; 1981; Vaughan, 1987)。特に、Holroyd (1968) による研究は、正方形領域における一様独立に分布する 2 点間の移動を前提として、迂回を強いることなく、あらゆる移動経路の交差量が最小になる

ような経路配分について論じた独創的なものである。

その他，ネットワーク空間における規則的な格子状網モデルを扱ったものとして，田口・大山 (1993)，Oyama (2000) がある。また，起・終点が格子状ネットワークで連続的な分布に従うモデルは，腰塚 (1999)，田村ら (2003) で扱われている。田村ら (2003) では，格子状道路網上で一方通行の導入効果の分析が行われている。このモデルでは，一方通行導入による中心経由交通量の減少の度合いと，迂回による移動距離の増大のトレードオフの関係に着目した分析が行われており，興味深い知見が得られている。

この章では，Vaughan (1987) による最も単純な正方形領域モデルを，矩形領域で再構成し，通過量の時刻に関する密度を導出する。

第 7 章の概要

第 7 章では，居住地と勤務地の分布がリンク上で連続的に与えられたネットワーク空間を想定し，時空間通過量モデルを構成する。従来のネットワークモデルは，移動の起・終点をノードに集約したものがほとんどであったが，この仮定を一般化し，リンク上で連続的に分布する起・終点を前提としたモデル群もいくつか提案されている。それらの多くは，施設配置モデルや空間統計学的手法の開発に関する研究である。施設配置問題を扱ったものとしては，メジアン問題に関するもの (Cavalier and Sherali, 1986) や，ネットワーク上でのハフモデルを用いた店舗の売り上げ推定モデルや，それを応用した新規店舗の最適な出店位置に関する研究などが存在する (奥貫・岡部, 1996; Okabe and Okunuki, 2002)。また，従来の連続平面上のモデルとして開発された空間統計学的手法を，ネットワーク上のモデルへと拡張し，GIS への実装を念頭においた研究も行われている (Okabe et al., 1995; Okabe and Yamada, 2001)。

田村らの一連の研究では，これまで連続平面上の問題として扱われてきた都市内移動に関するモデルを，ネットワーク上のあらゆる 2 地点間の移動を前提としたモデルを用いて再構成し，都市分析への応用が積極的になされている (田村・腰塚, 2000; 田村・腰塚・大澤, 2001; 2003)。

これらの蓄積の中で，交通量分布に関するモデルは田村・腰塚 (2000) の，総通過量を扱った唯一のものに留まっている。本章では，第 3 章の線分領域のモデルを基礎として，田村・腰塚 (2000) の時刻に関する密度を解析的に導出する方法を提案し，いくつかの数値例を示す。本モデルは，連続平面における解析的な操作性の高さと，交通網の再現性の良さとを兼ね備えた新たな交通流モデルとして位置付けられる。

第 2 章 数学的準備と通過量の理論的性質

2.1 はじめに

本章では、第 3 章以降で扱う時刻依存型の通過量モデルを構成するための数学的準備を行う。ここの内容の大部分は、Vaughan (1987) に詳しくまとめられており、既存研究の紹介が中心となる。前半部で、各章で具体的に想定する都市モデルと移動パターンについて解説したのち、各地点を全時間を通じて通過する総量を扱ったモデルを概観する。

本章で導入する通過量の定義は、各章でその時刻に関する密度として拡張される。そのための準備として、第 2.4 節で移動速度と目的地への到着時刻分布について説明する。

2.2 都市モデルと移動経路に関する仮定

本節では、第 3 章以降の通過量モデルで具体的に想定する、都市モデルおよび起・終点間の移動距離と移動経路について説明する。連続平面上の移動パターンを記述する *routeing system* ^{*1} の概念を、初めて明確に述べたのは Smeed (1963) である。Smeed (1963) の *routeing system* は、連続平面上に無限に稠密に存在する交通網とその上での経路選択の規則を明確に与えることで、任意の 2 地点間の移動パターンを記述するものである。Holroyd (1966) は、都市モデルで頻繁に用いられてきた 12 種類の *routeing system* を取り上げ、それぞれに名称を与えた。これらの名称は、その後も多くの研究者の間で使用されており、本研究の各章で用いる経路パターンについても Holroyd の名称を付して紹介する。

2.2.1 線分都市モデル

第 3 章では、線分都市モデルを想定する。線分都市モデルは、操作性の高さから古くから頻繁に用いられてきたモデルである。その単純さゆえに、都市における様々な諸活動を説明したり、政策効果を記述する際に明示的な知見が得られる場合も多い。本研究でも、第 3 章における線分領域の時空間通過量モデルは、2 次元の連続平面モデルとネットワークモデルへの拡張を行う上での、基本モデルとして位置付けられる。

図 2.1 に示す、区間 $[-l, l]$ で定義された長さ $2l$ の線分都市を考える^{*2}。図中に示すような座標系を導入し、移動の起点 Q_1 と終点 Q_2 の座標をそれぞれ x_1 および x_2 と表す。ここで、起点 Q_1 と終点 Q_2 の間の移動距離を $d(Q_1, Q_2)$ と表すことにする。1 次元モデルの場合は起・終点間の移動経路は明らかで、移動距離は以下のように表される：

$$d(Q_1, Q_2) = |x_1 - x_2|. \quad (2.2.1)$$

^{*1} *smeed* は“*routeing*”の綴りを用いたため、その後の研究においてもこの通りに使用されている。

^{*2} ここで長さを $2l$ で与えたのは、原点を都市中心と見做し、長さ l を 2 次元モデルにおける半径に対応させるためである。

図 2.1 長さ $2l$ の線分都市モデル.

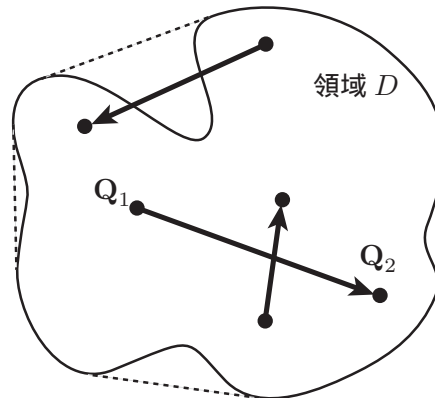
2.2.2 直線距離を想定した任意形状都市モデル

第 4 章では、直線距離による移動を前提とした任意形状の都市モデルを想定する。最も理想化された移動パターンである直線距離モデルは、古くから頻繁に用いられてきたモデルである。このモデルは、特定の道路パターンの性質を議論する上でも非常に重要なものである。

図 2.2 に示すような、任意形状で与えられた都市領域 D を考え、移動経路を起点 Q_1 と終点 Q_2 を結ぶ直線分で与える。図中に示す通り、領域 D の外側も自由に通行できるものとする。移動距離 $d(Q_1, Q_2)$ は、起点と終点を直交座標系で $Q_1(x_1, y_1)$ および $Q_2(x_2, y_2)$ と与えた場合、以下のように表される：

$$d(Q_1, Q_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (2.2.2)$$

この想定のもとでは、移動が観測される領域は、図 2.2 の点線で示された領域 D の凸包で与えられる。この移動パターンは、Holroyd (1966) による routing system の分類では *direct routeing* とよばれている。

図 2.2 都市領域 D とその凸包.

2.2.3 放射・環状距離を想定した円形都市モデル

第 5 章では、放射・環状距離を前提とした円形都市モデルを想定する。この交通網パターンは、中心という特別な点から伸びる放射路線とそれらを繋ぐ環状路線から構成されており、ヨーロッパの諸都市では散見されるパターンである。我が国でも、放射・環状を機軸パターンとする都市は多い。東京圏の主要幹線道路が、皇居を中心とした放射・環状網からなることはよく知られている（図 2.3）。また、規

模はずっと小さく半円状ではあるが，東急東横線の日吉駅の西側にも規則的な放射・環状パターンがみられる（図 2.4）。

第 5 章では，このような放射・環状パターンを有する，以下のような都市モデルを構成する．図 2.5 に示すような，無限に稠密な放射・環状交通網が存在する円形領域を想定する．起点 Q_1 と終点 Q_2 を円の中心を原点とする極座標系で $Q_1(r_1, \theta_1)$ および $Q_2(r_2, \theta_2)$ と与える．移動は起・終点を結ぶ最短経路で行われるものとする．最短経路は起点と終点の間の角差が 2rad 以下の場合には，図 2.5 の経路 I のように放射路と環状路を組み合わせた移動パターンとなり， 2rad 以上の場合には，経路 II のように放射路のみを用いて中心を経由する移動パターンとなる（Holroyd, 1966）．なお，起点が終点よりも中心に近い場合は，（図 2.5 の経路 I とは逆に）環状路を用いる移動を先に行うことになる．このとき，放射・環状交通網上の最短距離 $d(Q_1, Q_2)$ は，以下のように表される：

$$d(Q_1, Q_2) = \begin{cases} \min\{r_1, r_2\} \Psi + |r_1 - r_2| & (0 \leq \Psi < 2), \\ r_1 + r_2 & (2 \leq \Psi \leq \pi). \end{cases} \quad (2.2.3)$$

ここで，角差 Ψ を以下の通りに定義した：

$$\Psi = \min\{|\theta_1 - \theta_2|, 2\pi - |\theta_1 - \theta_2|\}. \quad (2.2.4)$$

この移動方法は，Holroyd (1966) による routeing system の分類では *radial-arc/radial routeing* とよばれている．また，極座標メッシュ上の最短経路であることから *polar routeing* という呼び名も存在する（Vaughan, 1987）．その他，規則的な放射・環状道路網を呈する学園都市として世界的に有名な，ドイツ南西部の都市カールスルーエ（Karlsruhe）の名を取って，*Karlsruhe metric* という呼び名も広く使用されている（Hyman and Mayhew, 2000b）．Holroyd (1966) では，放射路上と環状路上の移動経路を組み合わせたものとして，その他にも，中心経由を禁止した移動パターンや，環状路が 1 本のみ存在する状況での移動パターンなどが用いられている．また，藤田・鈴木 (2003) では，稠密な放射路と n 本の環状路が存在する都市における，最短経路が扱われている．

2.2.4 直交距離を想定した矩形都市モデル

第 6 章では，直交距離を前提とした矩形都市モデルを想定する．格子状の道路パターンは，街路レベルのミクロな道路パターンでは標準的にみられるものである．また，米国のマンハッタンやシカゴなどでも，規則的な格子状パターンがみられる．我が国では，京都（図 2.6）や札幌の中心部の道路パターンが格子状であることはよく知られている．

第 6 章では，このような格子状パターンを有する，以下のような都市モデルを構成する．図 2.7 に示す $l_1 \times l_2$ の矩形領域を考え，辺に平行に無限に稠密な格子状交通網が存在するものとする．図 2.7 に示すように，起点 Q_1 と終点 Q_2 を直交座標系で $Q_1(x_1, y_1)$ および $Q_2(x_2, y_2)$ と与える．移動は起・終点を結ぶ最短経路で行われるものとする．このとき最短距離 $d(Q_1, Q_2)$ は以下のように表される：

$$d(Q_1, Q_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|. \quad (2.2.5)$$

この距離は，格子状パターンとして世界的に有名なマンハッタン（Manhattan）からとって，*Manhattan distance* という名で広くよばれている．ここで，起点 Q_1 と終点 Q_2 を結ぶ最短経路が無数に存在することに注意されたい．そこで経路選択ルールを以下のように定める．最短経路のうち方向転換を 1 回の



図 2.3 東京圏の道路網.

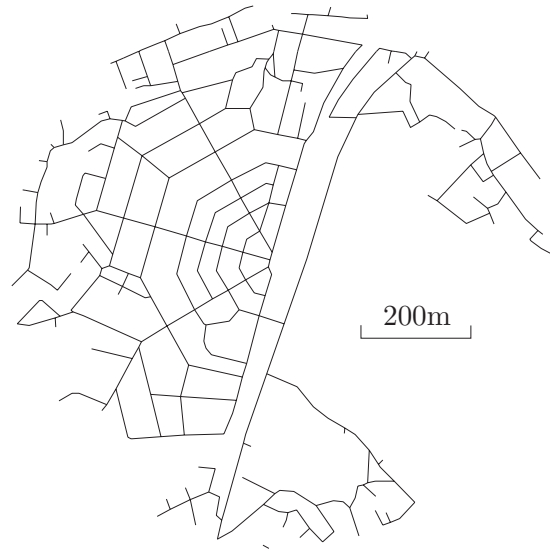


図 2.4 日吉駅周辺の道路網.

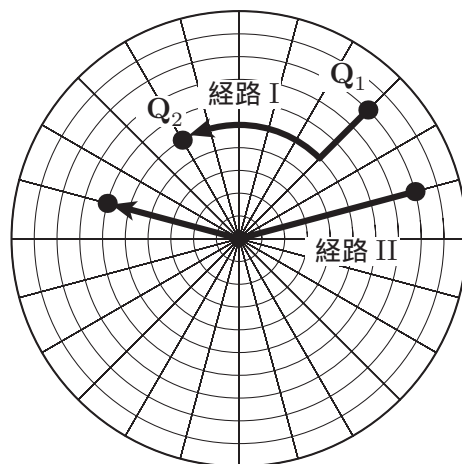


図 2.5 放射・環状交通網を有する円形都市モデル.

み行う移動経路は、図 2.7 に示す 2 通り存在するが、これらは等確率で選択されるものと想定する。移動距離が同じならば方向転換ができるだけ少ない移動方法を採用するという考えである。この経路選択ルールは、Holroyd (1966) による routeing system の分類では *rectangular routeing* とよばれている。なお、任意の 2 地点間に方向転換を一回のみ行う移動経路が 2 つ存在するという性質は、交通網が矩形の辺に平行でない場合や、矩形以外の都市形状のもとでは成立しないことに注意されたい。

2.3 トリップ密度の定式化

通過量モデルを構成する際に、与えられた地点を通過するための起・終点ペアの集合を特定し、その総量を計量するという操作を多用する。その際の計算で必要となる、起・終点ペアの都市内分布を記述するトリップ密度を定式化する。以下では、トリップ密度の定義を説明したのち、本研究で基本モデルとして用いる一様独立な起・終点分布を表すトリップ密度を具体的に与える。



図 2.6 京都駅周辺の道路網 .

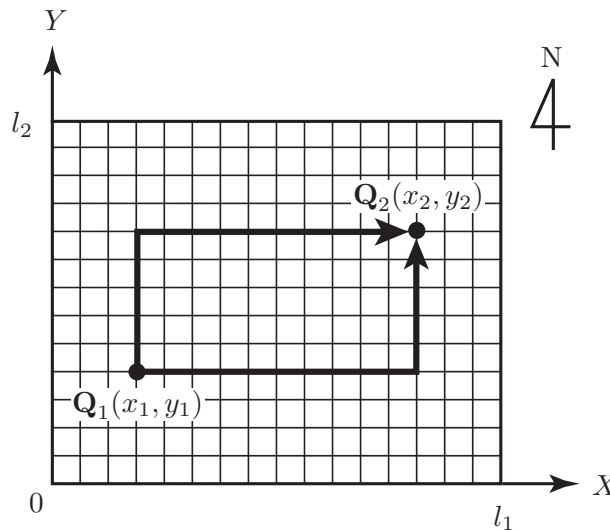


図 2.7 格子上交通網を有する矩形都市モデル.

2.3.1 トリップ密度の定義

起点 Q_1 近傍の単位面積から終点 Q_2 近傍の単位面積へのトリップ数の、都市全体のトリップ数に占める割合を記述する関数を $f(Q_1, Q_2)$ と表す . この定義から , $f(Q_1, Q_2)dQ_1dQ_2$ は , 起点 Q_1 近傍の微小面積 dQ_1 から終点 Q_2 近傍の微小面積 dQ_2 へのトリップの割合を意味する .

図 2.8 に示すように , 都市領域 D とその内部の 2 つの部分領域 S_1 と S_2 を考える . 定義より , S_1 に起点をもち , かつ S_2 に終点をもつトリップの割合は ,

$$\int_{S_2} \int_{S_1} f(Q_1, Q_2)dQ_1dQ_2 \tag{2.3.1}$$

で与えられる . もちろん , 起点 Q_1 と終点 Q_2 のペアを都市領域全体で積分した値は 1 となる :

$$\int_D \int_D f(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_1 d\mathbf{Q}_2 = 1. \quad (2.3.2)$$

いま，トリップ密度 $\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ を，都市内の総トリップ数 N を用いて次のように導入する．トリップ密度 $\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ を起点 \mathbf{Q}_1 近傍の単位面積から終点 \mathbf{Q}_2 近傍の単位面積へのトリップ数と定義する：

$$\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) = N \cdot f(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2). \quad (2.3.3)$$

図 2.8 の S_1 から S_2 へのトリップ数を n とすると，このトリップ数は， $\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ を起点集合 S_1 と終点集合 S_2 で積分することにより与えられる：

$$\int_{S_2} \int_{S_1} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_1 d\mathbf{Q}_2 = n. \quad (2.3.4)$$

もちろん，起点 \mathbf{Q}_1 と終点 \mathbf{Q}_2 のペアを都市領域全体で積分したものは，総トリップ数 N を与える：

$$\int_D \int_D \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_1 d\mathbf{Q}_2 = N. \quad (2.3.5)$$

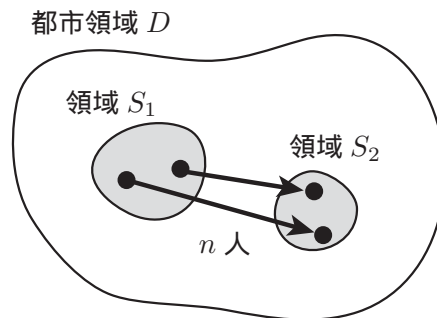


図 2.8 都市領域内部の部分領域間のトリップ数。

図 2.8 では，領域 S_1 と S_2 は交わりをもたない 2 つの領域の例で示したが，もちろんこれらが共通部分をもっていてかまわない．特に，2 つの領域が同一の場合 ($S_1 = S_2$ の場合) には，式 (2.3.4) はその領域の内々のトリップ数を与えることになる．

2.3.2 起点と終点の都市内分布

前小節で導入したトリップ密度は，起点 \mathbf{Q}_1 と終点 \mathbf{Q}_2 のペア $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ が都市平面上でどのように分布しているかを記述する関数であった．ここでは，起点 \mathbf{Q}_1 と終点 \mathbf{Q}_2 の各々の分布とトリップ密度との関係を説明する．単位面積当りに発生するトリップ起点 \mathbf{Q}_1 の割合を記述する関数を $\lambda(\mathbf{Q}_1)$ と表す．この関数は，起点 \mathbf{Q}_1 の都市内分布を記述する密度関数で，通勤交通に照らし合わせれば，通勤者の出発地点（居住地）の都市内分布に相当するものである．起点 \mathbf{Q}_1 の密度関数 $\lambda(\mathbf{Q}_1)$ は，起・終点ペアの同時密度 $f(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ を終点 \mathbf{Q}_2 に関して都市領域全体で積分することにより以下のように表される：

$$\lambda(\mathbf{Q}_1) = \int_D f(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_2. \quad (2.3.6)$$

同様に、単位面積当りに集中するトリップ終点 Q_2 の割合を記述する関数を $\mu(Q_2)$ と表す。この関数は、終点 Q_2 の都市内分布を記述する密度関数で、通勤交通に照らし合わせれば、通勤者の到着地点（勤務地）の都市内分布に相当するものである。終点 Q_2 の密度関数 $\mu(Q_2)$ は、起・終点ペアの同時密度 $f(Q_1, Q_2)$ を起点 Q_1 に関して都市領域全体で積分することにより以下のように表される：

$$\mu(Q_2) = \int_D f(Q_1, Q_2) dQ_1. \quad (2.3.7)$$

2.3.3 一様独立なトリップ密度と起・終点分布

通過量を導くためには、トリップ密度を起・終点の（位置の座標を変数とする）関数として具体的に定めなければならない。ここでは、本研究での基本となる、トリップ端点が一様かつ独立に分布する場合のトリップ密度および起・終点分布を与えておく。これはあらゆる2点間の移動が等しい頻度で発生する状況に対応し、考え得る最も単純な想定である。一般に、起点 Q_1 と終点 Q_2 が独立に分布する場合、トリップ密度は起点の密度 $\lambda(Q_1)$ と終点の密度 $\mu(Q_2)$ との積に、総トリップ数 N を掛けたもので与えられる：

$$\tau(Q_1, Q_2) = N \cdot f(Q_1, Q_2) = N \cdot \lambda(Q_1) \cdot \mu(Q_2). \quad (2.3.8)$$

この独立性の仮定に加え、起点 Q_1 と終点 Q_2 が共に一様に分布すると仮定する場合のトリップ密度は簡単な形で表現される。起点や終点が一様に分布するとは、これらが空間的に偏りなく均一に分布することを意味し、起点や終点の密度は地点に依存しないものとなる。したがって、これらは都市領域の面積 S の逆数で与えられる：

$$\lambda(Q_1) = \frac{1}{S}, \quad (2.3.9)$$

$$\mu(Q_2) = \frac{1}{S}. \quad (2.3.10)$$

これらと式 (2.3.8) より、一様独立な起・終点分布を記述するトリップ密度は以下のように与えられる：

$$\tau(Q_1, Q_2) = \frac{N}{S^2}. \quad (2.3.11)$$

もちろん、現実の人々の社会・経済活動は空間的な偏りをもって分布している。それにもかかわらず、理想化された一様な起・終点分布を本研究の基本モデルとして位置付ける理由を説明しておく。

最も重要な点は、想定する都市の形状やネットワークパターンがもつ幾何学的な性質そのものを明らかにしたいがために、まずは分布に偏りのない状態を想定するという点である。また、特定の交通網パターンによって都市を覆うことで、移動からみた効率やエネルギー消費などがどのように実現されるのか、という基本的な問いを追求する上でも一様な起・終点分布が出発点となろう。この結果を踏まえおけば、現実との差異を分析することにより、逆に現実の都市活動のもつ特徴を浮き彫りにすることができる局面もある。

さらに、起・終点が一様なモデルは数学的な取り扱いが容易であることから、本研究の対象とする通過量が式の形で明示的に導かれるという点も大きな利点である。この点は、因果関係が把握し易いモデルにつながり、もっと複雑なモデルを構成する際にも有利になるものである。

2.4 移動速度と到着時刻分布

時刻に依存した通過量を導くためには、(1) 都市領域の形状、(2) 移動経路、(3) トリップ密度の 3 者の仮定に加え、(4) 人々の移動速度、および、(5) 目的地への到着時刻の分布（出社時刻分布）に関する仮定が必要である。以下に本研究で想定する、移動速度と出社時刻分布について説明する。なお、本研究では通勤交通を想定したモデルを構成するため、出社時刻分布を到着時刻分布と同じ意味で用いることに注意されたい。

2.4.1 移動速度に関する仮定

本研究では、移動速度は地点や移動の向きや時刻に依存せず一定値 v であるものと想定する。そして、通勤者は最短所要時間を実現する移動経路を選択するものと仮定する。この仮定は、移動速度を一定値 v で与えた場合、最短経路を選択することと等価である。最短経路の選択行動は、道路の容量が十分に大きいと考えられる場合や、運転者が渋滞を予想していない場合には自然な仮定である（田口・大山, 1993）。以下に、移動速度が交通流に依存するモデルや、地点に依存するモデルの蓄積について簡単に触れる。

現実には、交通密度の増加に伴って平均速度が減少するのが常である。交通工学の分野では、交通密度と平均速度の関数関係を表現する、さまざまな指標が提案されている（例えば、大蔵, 1993）。

これに対し、移動速度が地点に依存する関数で与えられた速度場（velocity field）を所与とし、その速度場の上での最短所要時間とそのときの移動経路を（微分幾何学と変分法を主な道具として）計算する方法も追求されている（Wardrop, 1969; Angel and Hyman, 1976）。

2.4.2 到着時刻分布に関する仮定

いつどこがどのくらい混雑するか、という時刻に依存した通過量を特定するためには、人々がどのような時間的分布に従って目的地へ到着するか、という情報を与えなければならない。これを記述するのが出社時刻分布である。本研究では、出社時刻分布を出社時刻 t の密度関数として与え、 $f(t)$ と表すことにする。具体的には、図 2.9 に示すような、時間区間 $[t_0, t_0 + a]$ で定められる任意の密度関数

$$f = f(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + a) \quad (2.4.1)$$

を想定する。ここで、 $f(t)$ の意味をもう少し明確にしておこう。

いま、都市領域内のある部分領域に n 人が通勤する場合を考える。このとき、この部分領域への通勤者のうち、時間区間 $[t, t + dt]$ に出社する割合が

$$f(t)dt \quad (2.4.2)$$

で与えられ、時間区間 $[t, t + dt]$ に出社する人数が

$$n \cdot f(t)dt \quad (2.4.3)$$

で与えられるような密度関数を意味する。本研究では、最も単純に、この関係が任意の部分領域で成り立っている場合を想定する。

ただし、この想定のもとで時刻依存型の通過量モデルを構成しておけば、異なる到着時刻パターンをもつ複数の主体が混在する状況へも、直ちに対応することができる。例えば、通勤と通学という2種類の移動を想定した場合、各集団に対応するトリップ密度と到着時刻分布のもとでの結果を重ね合わせればよいのである。

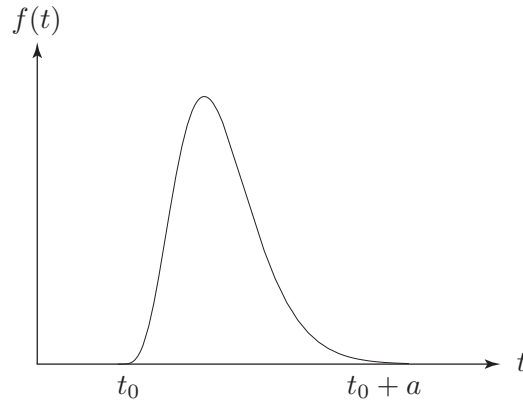


図 2.9 通勤者の出社時刻 t の分布を記述する密度関数 $f(t)$.

2.5 通過量の定義と基礎的性質

本節では、第3章以降で時刻依存型の通過量モデルを構成する際に必要となる、各地点を全時間を通じて通過する総量を扱ったモデルを、既存研究を参照しながら紹介する。特に、以下で導入する通過量が、ある地点を特定の向きへと通過する交通量に比例する指標であるとともに、その地点における単位面積当たりの総移動距離でもあるという性質は重要である。以降に示す総量を扱ったモデルは、各章でその時刻に関する密度として一般化される。

2.5.1 線分都市モデルにおける通過量

第3章で扱う線分都市モデルにおける通過量の定義を与える。このモデルは、腰塚 (1992) において扱われている。この論文では通過量を用いて都市を分析することの重要性が説かれており、その後の多くのモデルの手本となった研究である。

図 2.10 に示す、長さ $2l$ の線分都市において、任意地点 $P = z$ を通過する総トリップ数を記述する指標を導入する。地点 P を正の向き（座標値の増加する向き）および負の向き（座標値の減少する向き）に通過するトリップ数を $q_{正}(z)$ および $q_{負}(z)$ と記述する。また、両者の合計 $q_{合}(z)$ を

$$q_{合}(z) = q_{正}(z) + q_{負}(z) \quad (2.5.1)$$

と定義する。

第3章で扱う1次元のモデルでは、 $q_{正}(z)$ および $q_{負}(z)$ は、総トリップ数 N と同じ次元をもつが、以降に示す2次元平面におけるモデルでは、この関係は成り立たなくなることに注意されたい。2次元平面上の特定地点を通過する交通量は0になってしまうため、以降で示すように密度の形で計量する必要があるのである。

いま定義した通過量 $q_{正}(z)$ および $q_{負}(z)$ は、上述した意味に加え、地点 P における単位長さ当たりの総移動距離という意味をもつことを、 $q_{正}(z)$ の場合を例に示す。いま、地点 P における単位長さ当たりの



図 2.10 線分都市における通過量の定義.

総移動距離を α_P と表すことにする．図 2.11 に示すように，地点 P 近傍の微小幅 dz をもつ線分を考える．地点 P を正の向きに通過する人数は，定義より $q_{\text{正}}(z)$ である．また，その地点を正の向きに通過する人の，微小線分内での移動距離は一律に dz である^{*3}から， α_P は以下のように表される：

$$\begin{aligned} \alpha_P &= \frac{\text{地点 } P \text{ 近傍の微小線分を正の向きに通過する人々の総移動距離}}{\text{地点 } P \text{ 近傍の微小線分の長さ}} = \frac{q_{\text{正}}(z) \cdot dz}{dz} \\ &= q_{\text{正}}(z). \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

図 2.11 地点 P 近傍の微小線分を通過する移動.

2.5.2 直線距離モデルにおける通過量

第4章で扱う直線移動を想定した任意形状都市モデルにおける通過量の定義を与える．以下に導入する通過量の定義は，Holroyd and Millar (1966) によって提案された *flow density* である．*flow density* は，与えられた領域内の任意の地点 P を角度 φ の向きに通過する移動量を記述する指標である．本研究では，これを φ の向きへの通過量とよび $q(P, \varphi)$ と表すことにする．ただし，角度 φ は $[0, 2\pi]$ の範囲で定義される．以下に，*flow density* の定義を述べる．

図 2.12 に示す領域 D の地点 P において，移動の向きに垂直に設けられた微小幅 dw の線分を考える．この線分を角度 $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ の範囲で通過するトリップ数が $q(P, \varphi)dwd\varphi$ で与えられるような $q(P, \varphi)$ が *flow density* の定義である．

いま導入した φ の向きへの通過量 $q(P, \varphi)$ は，上述した意味に加え，地点 P における単位面積，単位角度当りの総移動距離という意味をもつことを以下に示す．図 2.12 に示すように，地点 P 近傍の面積 sdw をもつ微小矩形を考える．この矩形を $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ の範囲で通過するトリップ数は $q(P, \varphi)dwd\varphi$ であり，この微小矩形における移動距離は一律に s である．これより，微小矩形を角度 $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ の範囲で通過する移動者の単位面積，単位角度当りの総移動距離 α_P は，以下のように表される：

$$\begin{aligned} \alpha_P &= \frac{\text{地点 } P \text{ 近傍の微小領域を角度 } [\varphi, \varphi + d\varphi] \text{ の範囲で通過する人々の総移動距離}}{\text{地点 } P \text{ 近傍の微小領域の面積} \cdot \text{微小角度}} \\ &= \frac{q(P, \varphi)dwd\varphi \cdot s}{sdw \cdot d\varphi} = q(P, \varphi). \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

^{*3} dz が極めて小さいとき，この微小区間に目的地をもつ移動者数は無視できるほど小さくすべての人が微小領域を通過すると考えられるから，各自が微小領域内で dz だけ移動すると考えられる．

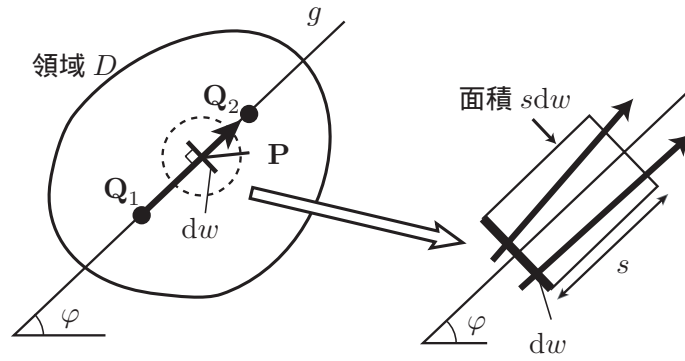


図 2.12 φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ の定義.

次に、地点 \mathbf{P} を様々な向きから横切る移動量を記述する指標を導入しよう。地点 \mathbf{P} における単位面積当りの総移動距離を地点 \mathbf{P} における通過量とよび、 $q_{\text{合}}(\mathbf{P})$ と表すことにしよう。これは、 φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ を角度に関して $[0, 2\pi]$ の範囲で積分することによって得られる：

$$q_{\text{合}}(\mathbf{P}) = \int_0^{2\pi} q(\mathbf{P}, \varphi) d\varphi. \tag{2.5.4}$$

2.5.3 放射・環状距離モデルにおける通過量

第 5 章で扱う放射・環状距離を想定した円形都市モデルにおける通過量の定義を与える。以下に導入する通過量の定義は Vaughan (1987) で扱われており、単位円盤に一様独立に分布する起・終点間の移動に基づく結果が示されている。

放射・環状交通網の場合には、どの地点においても 4 つの向きへの移動が可能である。それらは、環状路に沿って右回りまたは左回りに進む場合、放射路に沿って上り方面（都心方面）または下り方面（郊外方面）へ進む場合、の 4 通りである。これら 4 通りの移動に対応する通過量を、環状路を用いる場合の $q_{\text{環右}}(\mathbf{P})$ と $q_{\text{環左}}(\mathbf{P})$ 、および放射路を用いる場合の $q_{\text{放上}}(\mathbf{P})$ と $q_{\text{放下}}(\mathbf{P})$ 、と表すことにする。そして、 $q_{\text{環右}}(\mathbf{P})$ と $q_{\text{環左}}(\mathbf{P})$ は地点 \mathbf{P} における放射路断面の単位長さ当りを横切るトリップ数と定義し、 $q_{\text{放上}}(\mathbf{P})$ と $q_{\text{放下}}(\mathbf{P})$ は地点 \mathbf{P} における環状路断面の単位長さ当りを横切るトリップ数と定義する。

ここで、図 2.13 (a) に示すような、 φ 方向へ伸びる放射路上の z_a から z_b の範囲で定義された線分 L を考える。線分 L を右回りに通過するトリップ数 $n_{\text{環右}}$ と、左回りに通過するトリップ数 $n_{\text{環左}}$ は、 $q_{\text{環右}}(\mathbf{P})$ および $q_{\text{環左}}(\mathbf{P})$ の定義から以下のように与えられる：

$$n_{\text{環右}} = \int_{z_a}^{z_b} q_{\text{環右}}(\mathbf{P}) dz, \tag{2.5.5}$$

$$n_{\text{環左}} = \int_{z_a}^{z_b} q_{\text{環左}}(\mathbf{P}) dz. \tag{2.5.6}$$

次に、図 2.13 (b) に示すような、半径 z の環状路上の φ_a から φ_b の範囲で定義された弧 C を考える。弧 C を上り方面に向かって通過するトリップ数 $n_{\text{放上}}$ と、下り方面に向かって通過するトリップ数 $n_{\text{放下}}$ は、 $q_{\text{放上}}(\mathbf{P})$ および $q_{\text{放下}}(\mathbf{P})$ の定義から以下のように与えられる：

$$n_{\text{放上}} = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} q_{\text{放上}}(\mathbf{P}) z d\varphi, \tag{2.5.7}$$

$$n_{\text{放下}} = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} q_{\text{放下}}(\mathbf{P}) z d\varphi. \tag{2.5.8}$$

いま定義した環状路の通過量 $q_{\text{環右}}(\mathbf{P})$ と $q_{\text{環左}}(\mathbf{P})$, および放射路の通過量 $q_{\text{放上}}(\mathbf{P})$ と $q_{\text{放下}}(\mathbf{P})$ は , 上述した意味に加え , 地点 \mathbf{P} における単位面積当りの総移動距離という意味をもつことを示す . 図 2.14 に示すような , 地点 \mathbf{P} 近傍の面積 $z dz d\varphi$ の微小領域を考える . まず , 環状路の右回りの通過量 $q_{\text{環右}}(\mathbf{P})$ の場合を考える . 図 2.14 (a) の微小領域の線分 L を右回りに横切るトリップ数は定義より $q_{\text{環右}}(\mathbf{P}) dz$ であり , 微小領域での各自の移動距離は一律に $z d\varphi$ であるから , 地点 \mathbf{P} における単位面積当りの環状路を右回りに通過する総移動距離 $\alpha_{\mathbf{P}\text{環右}}$ は以下のように表される :

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{P}\text{環右}} &= \frac{\text{地点 } \mathbf{P} \text{ 近傍の微小領域を右回りに通過する人々の総移動距離}}{\text{地点 } \mathbf{P} \text{ 近傍の微小領域の面積}} = \frac{q_{\text{環右}}(\mathbf{P}) dz \cdot z d\varphi}{z dz d\varphi} \\ &= q_{\text{環右}}(\mathbf{P}). \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

環状路の左回りの通過量 $q_{\text{環左}}(\mathbf{P})$ の場合も全く同様の関係が示される .

次に , 放射路の上り方面の通過量 $q_{\text{放上}}(\mathbf{P})$ の場合を考える . 図 2.14 (b) の微小領域の弧 C を上り方面に向かって横切るトリップ数は定義より $q_{\text{放上}}(\mathbf{P}) z d\varphi$ であり , 微小領域での各自の移動距離は一律に dz であるから , 地点 \mathbf{P} における単位面積当りの上り方面へ通過する総移動距離 $\alpha_{\mathbf{P}\text{放上}}$ は以下のように表される :

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{P}\text{放上}} &= \frac{\text{地点 } \mathbf{P} \text{ 近傍の微小領域を放射路に沿って上り方面に通過する人々の総移動距離}}{\text{地点 } \mathbf{P} \text{ 近傍の微小領域の面積}} \\ &= \frac{q_{\text{放上}}(\mathbf{P}) z d\varphi \cdot dz}{z dz d\varphi} = q_{\text{放上}}(\mathbf{P}). \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

放射路の下り方面の通過量 $q_{\text{放下}}(\mathbf{P})$ の場合も全く同様の関係が示される .

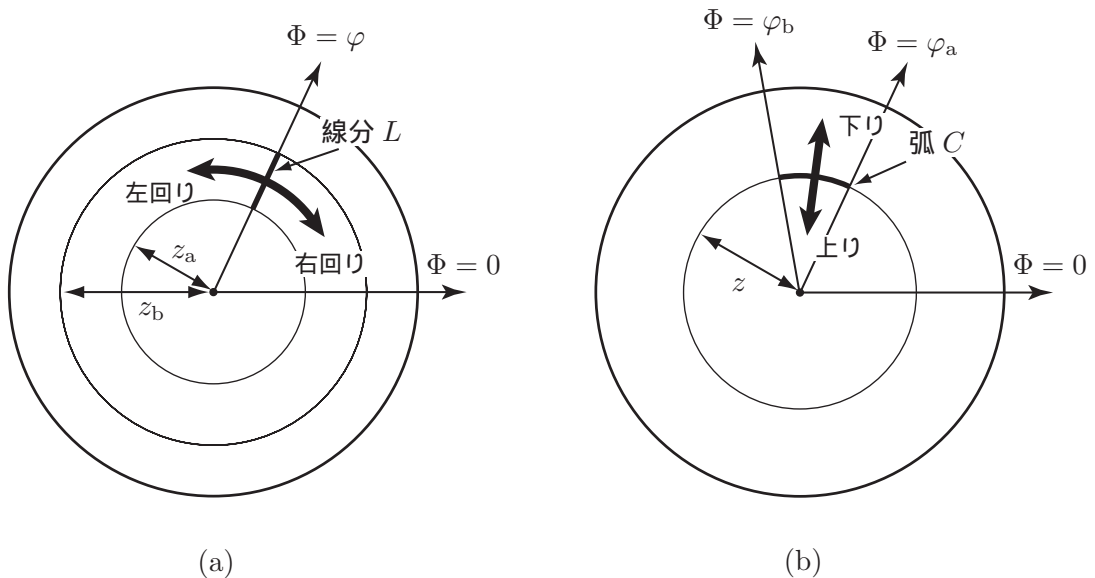


図 2.13 放射・環状交通網を有する円形都市における通過量の定義 : (a) 環状路の場合 ; (b) 放射路の場合 .

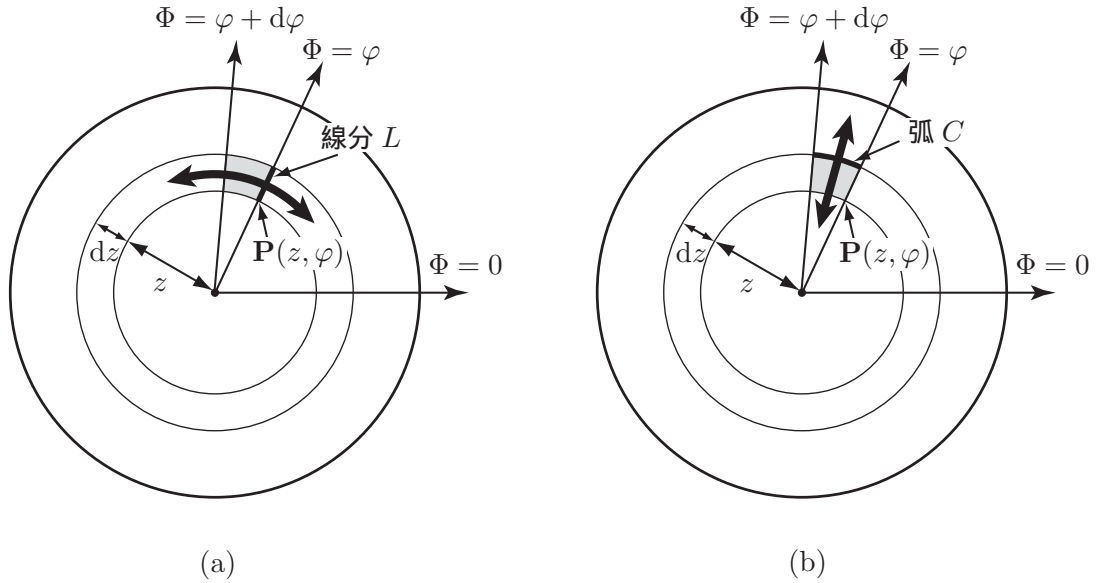


図 2.14 地点 P 近傍の微小領域を通過するトリップ：(a) 環状路の場合；(b) 放射路の場合。

2.5.4 直交距離モデルにおける通過量

第 6 章で扱う直交距離を想定した矩形都市モデルにおける通過量の定義を与える。以下に導入する通過量の定義は Holroyd (1968) で扱われており、単位正方形に一様独立に分布する起・終点間の移動に基づく結果が Vaughan(1987) に示されている。

図 2.15 (a) に示すように、 y 軸の正の向きを北向きに定めると、東西南北 4 つの向きへの移動が存在することになる。地点 P における各向きへの移動に対応する通過量を（それぞれの移動の向きに対応する添え字を付けて） $q_{東}(P)$, $q_{西}(P)$, $q_{南}(P)$ および $q_{北}(P)$ と表すことにする。東向きの通過量 $q_{東}(P)$ を例に、通過量の定義を述べる。地点 P における東向きの通過量 $q_{東}(P)$ を、移動方向に垂直な軸（東向きの場合は南北方向の軸）の単位長さ当りを横切るトリップ数として定義する。図 2.15 (a) に示すような、地点 x に設けられた y_a から y_b の範囲で定義された線分を考える。この線分を東向きに通過するトリップ数 $n_{東}$ は $q_{東}(P)$ の定義から以下のように与えられる：

$$n_{東} = \int_{y_a}^{y_b} q_{東}(P) dy. \tag{2.5.11}$$

その他の 3 つの向きへの移動に対する通過量も同様に定義する。

いま定義した通過量 $q_{東}(P)$, $q_{西}(P)$, $q_{南}(P)$ および $q_{北}(P)$ は、上述した意味に加え、地点 P における単位面積当りのそれぞれの向きへの移動に着目した総移動距離という意味をもつことを、 $q_{東}(P)$ の場合を例に示す。図 2.15 (b) に示すような、地点 P 近傍の面積 $dx dy$ をもつ微小な矩形を考える。この矩形の太線で示した幅 dy の微小線分を横切るトリップ数は定義より $q_{東}(P) dy$ であり、微小矩形での各自の移動距離は一律に dx であるから、地点 P における単位面積当りの東向きの総移動距離 $\alpha_{P東}$ は以下のように表される：

第3章 線分領域における時空間通過量

3.1 はじめに

本章では、線分領域における通過量モデルを構成する。現実には、人々の移動は面的な広がりをもつ都市領域で展開されるが、1次元領域のモデルを構成することにはいくつかの意味がある。

まず、移動現象がほぼ1次的に展開されていると見做せる場合には、単純な1次元都市はモデルの因果関係が把握しやすいために有効である。例えば、海岸線に沿って発達した都市や、特定の道路や鉄道に沿ってアクティビティが分布する状況を記述する際には、1次元の都市モデルは説明力をもつであろう。

また、本研究の主要な対象である2次元平面上の通過量モデル（第4章、第5章および第6章）、および、起・終点がリンク上で連続的に分布するネットワーク空間上の通過量モデル（第7章）は、本章の素直な一般化として導入される。したがって、操作性の高い1次元モデルで時空間通過量を導くための一般的枠組みを構成しておくことは、以降の章で扱うモデルの構造を明確にするという利点もある。

3.2 通過量の導出

3.2.1 一般のトリップ密度のもとでの通過量

図3.1に示す、区間 $[-l, l]$ で定義される長さ $2l$ の線分都市を考える^{*1}。ここでは、区間 $[-l, l]$ 上の起点 Q_1 と終点 Q_2 の間のトリップ密度 $\tau(Q_1, Q_2)$ が、任意に与えられた場合の通過量の導出法を述べる。もちろん以降の議論は、曲線分の都市モデルを想定しても成立することは言うまでもない。

いま、観測地点 P の座標を z と表す。観測地点 $z \in [-l, l]$ における正の向きおよび負の向きの通過量を $q_{\text{正}}(z)$ および $q_{\text{負}}(z)$ と表し、両者の合計

$$q_{\text{合}}(z) = q_{\text{正}}(z) + q_{\text{負}}(z) \quad (3.2.1)$$

を導入する（第2.5.1小節、19ページ）。以下に、 $q_{\text{正}}(z)$ および $q_{\text{負}}(z)$ の導出方法を説明する。



図3.1 長さ $2l$ の線分都市モデル。

まず、正の向きの移動に着目する。地点 P を正の向きに通過するために、起点と終点が満たすべき領域の組み合わせをそれぞれ $A_{\text{正}}$ および $B_{\text{正}}$ と表す。図3.2(a)に示すように、地点 P の左側に起点が

^{*1} ここで長さを $2l$ で与えたのは、原点を都市中心と見做し、長さ l を2次元モデルにおける半径に対応させるためである。

あり、かつ P の右側に終点があるすべての移動は P を正の向きに通過することになる。すなわち、 $A_{\text{正}}$ および $B_{\text{正}}$ は以下のように表される：

$$A_{\text{正}} = \{x_1 \mid -l \leq x_1 \leq z\}, \quad (3.2.2)$$

$$B_{\text{正}} = \{x_2 \mid z \leq x_2 \leq l\}. \quad (3.2.3)$$

全く同様にして、地点 P を負の向きに通過するために、起点と終点が満たすべき領域をそれぞれ $A_{\text{負}}$ および $B_{\text{負}}$ と表せば、図 3.2 (b) より $A_{\text{負}}$ および $B_{\text{負}}$ は以下のように表される：

$$A_{\text{負}} = \{x_1 \mid z \leq x_1 \leq l\}, \quad (3.2.4)$$

$$B_{\text{負}} = \{x_2 \mid -l \leq x_2 \leq z\}. \quad (3.2.5)$$

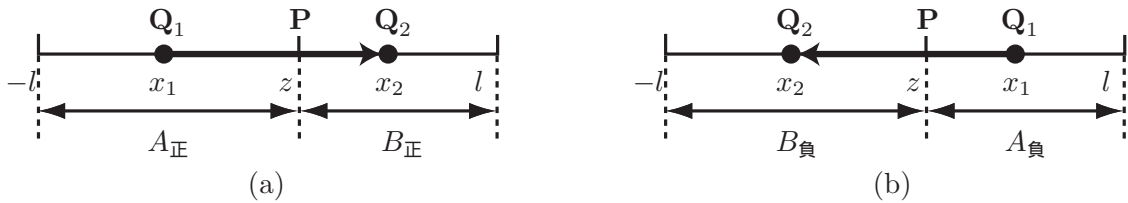


図 3.2 地点 P を通過するための起・終点の領域の組み合わせ.

したがって、 $q_{\text{正}}(z)$ および $q_{\text{負}}(z)$ は以下のように表される：

$$q_{\text{正}}(z) = \int_{Q_1 \in A_{\text{正}}} \int_{Q_2 \in B_{\text{正}}} \tau(Q_1, Q_2) dQ_2 dQ_1, \quad (3.2.6)$$

$$q_{\text{負}}(z) = \int_{Q_1 \in A_{\text{負}}} \int_{Q_2 \in B_{\text{負}}} \tau(Q_1, Q_2) dQ_2 dQ_1. \quad (3.2.7)$$

式 (3.2.6) と式 (3.2.7) において、起点 Q_1 の座標 x_1 と終点 Q_2 の座標 x_2 を用いて表せば、 $q_{\text{正}}(z)$ および $q_{\text{負}}(z)$ は以下のように与えられる：

$$q_{\text{正}}(z) = \int_{x_1=-l}^z \int_{x_2=z}^l \tau(Q_1, Q_2) dx_2 dx_1, \quad (3.2.8)$$

$$q_{\text{負}}(z) = \int_{x_1=z}^l \int_{x_2=-l}^z \tau(Q_1, Q_2) dx_2 dx_1. \quad (3.2.9)$$

ここで、起・終点のペア (x_1, x_2) で定義される移動を、起・終点の直積空間 $[-l, l] \times [-l, l]$ 上で視覚化する方法を示しておく。いま、図 3.3 に示す x_1 - x_2 平面を考える。この平面上の 1 点 (x_1, x_2) は起・終点の座標ペアを表すから、線分上の一つの移動に対応する。この平面上に、地点 P を正の向きおよび負の向きに通過するための起・終点ペアの集合を図示すると、グレーで示した領域が得られる。式 (3.2.8) および式 (3.2.9) の積分は、 x_1 - x_2 平面上で定義されるトリップ密度 $\tau(Q_1, Q_2)$ を、図 3.3 のそれぞれの対応するグレーの領域上で積分したものに相当する。

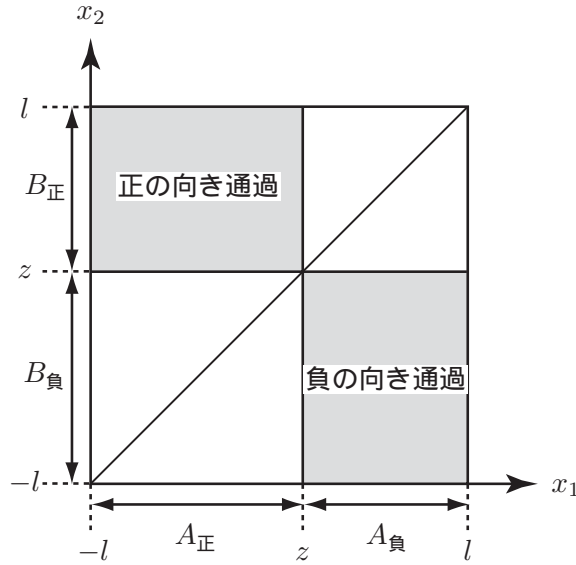


図 3.3 起・終点ペア (x_1, x_2) を表す直積空間.

3.2.2 一様なトリップ密度のもとでの通過量

移動の起点 Q_1 と終点 Q_2 が区間 $[-l, l]$ で、一様かつ独立に分布する場合の通過量を導出する．この場合のトリップ密度は以下のように与えられる：

$$\tau(Q_1, Q_2) = N \cdot \frac{1}{2l} \cdot \frac{1}{2l} = \frac{N}{4l^2}. \tag{3.2.10}$$

この場合の通過量 $q_{正}(z)$ および $q_{負}(z)$ は、式 (3.2.10) を式 (3.2.8) と式 (3.2.9) に代入すれば容易に計算できて、以下のように導かれる：

$$q_{正}(z) = \frac{N}{4l^2}(l+z)(l-z), \tag{3.2.11}$$

$$q_{負}(z) = \frac{N}{4l^2}(l+z)(l-z). \tag{3.2.12}$$

以上より、両者の合計 $q_{合}(z) = q_{正}(z) + q_{負}(z)$ は以下のように表される：

$$q_{合}(z) = \frac{N}{2l^2}(l+z)(l-z). \tag{3.2.13}$$

通過量 $q_{合}(z)$ の概形は図 3.4 のような、中心で最大値をとる 2 次関数となる．すなわち、移動の起・終点の分布が一様であっても、中心付近ほど多くの移動が横切るのである．都市という有限領域で人々が行き来をするならば、自ずと中心部が混雑するという構造をこのモデルは鮮やかに記述している．なお、中心を通過するトリップ数は総トリップ数 N のちょうど半分の $N/2$ になることがわかる．

ここで、線分領域における通過量を扱った既存研究を 2 点挙げておく．

Smeed (1977) は、線分領域において通勤交通を記述する単純なモデルを構成し、ロンドンとブリストル (Bristol) の通勤交通データを用いてモデルの検証を行っている．Smeed のモデルでは、都心から指数関数的に減少する起点と終点の分布と、起・終点間の距離の増大に伴って指数関数的に減少するトリップ密度が採用されている．この想定のもとで、任意地点を通過する交通量をはじめ、平均移動距

離や移動距離の分布等が厳密に導かれており、現実の通勤データをかなりうまく再現できることが示されている。

一方で、腰塚 (1992) は、線分領域の通過量モデル構成し、土浦駅前の商店街における歩行者流動量というミクロな流動をうまく記述するモデルを提案している。腰塚のモデルは、商店街の任意地点における通過量を、一方の端点を土浦駅にもつ移動パターンと、商店街全体で一様に発生するパターンとの合成で記述し、歩行者流動データを推定している。

どちらのモデルも、ごく少数のパラメータを用いた単純なモデルであるが、現実のデータの大まかな傾向をうまく記述している。これらの研究は、連続平面における交通モデルの有用性を示す典型例といえよう。

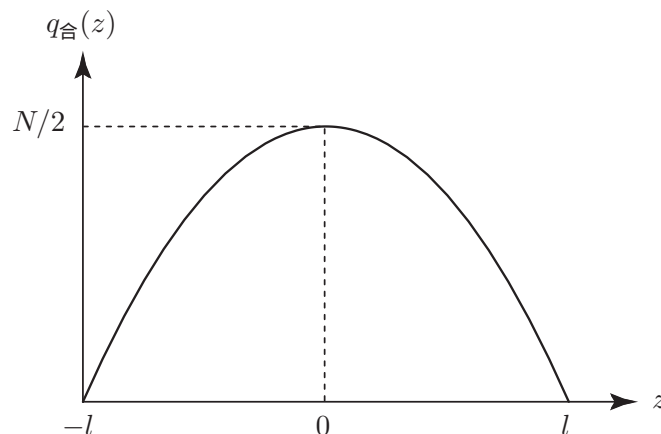


図 3.4 通過量 $q_{\text{合}}(z)$ の概形。

3.3 通過密度の導出

3.3.1 通過密度の定義

前節で扱った通過量 $q_{\text{正}}(z)$, $q_{\text{負}}(z)$ および $q_{\text{合}}(z)$ の、時刻に関する密度を導入する。これを通過密度とよび、それぞれ $p_{\text{正}}(z, t)$, $p_{\text{負}}(z, t)$ および $p_{\text{合}}(z, t)$ と表す。

いま、地点 P を正の向きに通過する移動者の、地点 P を通過する時刻 t の分布を記述する密度関数 $\psi_{\text{正}}(t; z)$ を導入し、以後これを (正の向き) 通過時刻の密度関数とよぶ。ここで $p_{\text{正}}(z, t)$ は、時刻 t の関数であるが、P の座標 z にも依存するためにこのように記述した。通過密度 $p_{\text{正}}(z, t)$ は、通過量の時刻に関する密度だから、 $p_{\text{正}}(z, t)$ は $q_{\text{正}}(z)$ と $\psi_{\text{正}}(t; z)$ の積として以下のように表される：

$$p_{\text{正}}(z, t) = q_{\text{正}}(z) \cdot \psi_{\text{正}}(t; z). \quad (3.3.1)$$

直観的には、式 (3.3.1) の意味は、 $q_{\text{正}}(z)$ が観測地点 P を正の向きに通過する総人数を記述し、通過時刻の時間的分布については $\psi_{\text{正}}(t; z)$ が受け持っている、と解釈することができる。地点 P に立っている人が、目の前を正の向きに通過する人数の時間的な変化の様子を時刻の密度関数として記述したものが、 $\psi_{\text{正}}(t; z)$ なのである。

通過密度の定義より、地点 P を時間区間 $[t, t + dt]$ に通過するトリップ数は $p_{\text{正}}(z, t)dt$ で与えられる。いま、式 (3.3.1) の両辺を時刻に関して全範囲で積分すれば以下の関係が得られる：

$$q_{\text{正}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\text{正}}(z, t) dt. \quad (3.3.2)$$

ここで、通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{正}}(t; z)$ の時刻に関する総積分値が 1 になるという関係を用いた：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\text{正}}(t; z) dt = 1. \quad (3.3.3)$$

式 (3.3.2) より、図 3.5 に示すように、 $p_{\text{正}}(z, t)$ を時刻の関数として描いたとき、 $p_{\text{正}}(z, t)$ と t 軸とによって囲まれる部分の面積は $q_{\text{正}}(z)$ に等しいことがわかる。また、時間区間 $[t_1, t_2]$ に地点 P を正の向きに通過するトリップ数は

$$\int_{t_1}^{t_2} p_{\text{正}}(z, t) dt \quad (3.3.4)$$

で与えられ、図 3.5 のグレーの部分の面積に相当する。

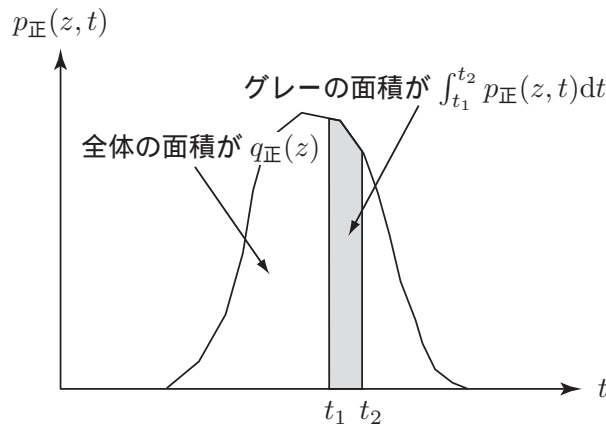


図 3.5 通過量 $q_{\text{正}}(z)$ と通過密度 $p_{\text{正}}(z, t)$ の関係.

全く同様にして、地点 P を負の向きに通過する移動者の通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{負}}(t; z)$ を導入すれば、負の向きの通過密度 $p_{\text{負}}(z, t)$ は、 $q_{\text{負}}(z)$ と $\psi_{\text{負}}(t; z)$ の積として以下のように表される：

$$p_{\text{負}}(z, t) = q_{\text{負}}(z) \cdot \psi_{\text{負}}(t; z). \quad (3.3.5)$$

これより、正の向きと負の向きの通過密度の合計 $p_{\text{合}}(z, t) = p_{\text{正}}(z, t) + p_{\text{負}}(z, t)$ は以下のように表される：

$$p_{\text{合}}(z, t) = q_{\text{正}}(z) \cdot \psi_{\text{正}}(t; z) + q_{\text{負}}(z) \cdot \psi_{\text{負}}(t; z). \quad (3.3.6)$$

以上より、目的の $p_{\text{正}}(z, t)$ 、 $p_{\text{負}}(z, t)$ および $p_{\text{合}}(z, t)$ を得るためには、通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{正}}(t; z)$ および $\psi_{\text{負}}(t; z)$ を求めればよいことがわかった。次節で、これらの導出方法を説明する。

3.3.2 一般のトリップ密度と入社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数

一般のトリップ密度 $\tau(Q_1, Q_2)$ と入社時刻分布 $f(t)$ を想定した場合の、通過時刻の密度関数の導出方法を説明する。以下では正の向きの移動に対応する $\psi_{\text{正}}(t; z)$ の導出手順を述べる。

図 3.6 に示す，地点 P を正の向きに横切る移動者の，P から目的地 Q_2 までの所要時間を u と表す（移動速度は一定値 v を仮定しているため P と Q_2 の距離は $v \cdot u$ となる）．いま，P から目的地までの所要時間が u である移動者に着目し，この移動者が地点 P を通過する時刻の分布を記述する，条件付きの通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{正}}(t; z|u)$ を導入する．目的の $\psi_{\text{正}}(t; z)$ は，条件付きの密度関数 $\psi_{\text{正}}(t; z|u)$ をもとにして，以下の積分によって導出される：

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \int_0^{u_{\max}} \psi_{\text{正}}(t; z|u)g(u)du. \quad (3.3.7)$$

ただし， $g(u)$ は所要時間 u の密度関数を意味し， u_{\max} は u の最大値を意味する．この例では u_{\max} は

$$u_{\max} = \frac{l - z}{v} \quad (3.3.8)$$

となる．

なお，確率論の言葉を用いれば，式 (3.3.7) の積分は，地点 P を通過する時刻 T と P から目的地 Q_2 までの所要時間 U の同時確率密度関数 $f_{T,U}(t, u) = \psi_{\text{正}}(t; z|u)g(u)$ から， T の周辺分布（周辺確率密度関数）を求める作業に他ならない．以下に， $\psi_{\text{正}}(t; z|u)$ および $g(u)$ の各々の導出方法を説明し，それらを用いて式 (3.3.7) の積分を具体的に実行する方法を述べる．

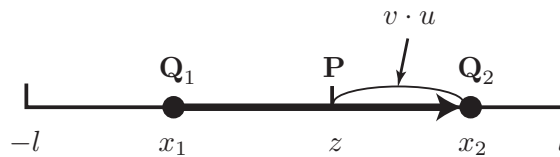


図 3.6 地点 P から目的地までの所要時間が u である移動者.

条件付きの通過時刻の密度関数

地点 P からの所要時間が u である地点に勤務地 Q_2 をもつ移動者に着目する．この移動者が勤務地 Q_2 へ時刻 t に出勤するためには，地点 P を時刻 $t - u$ に通過しなければならない．したがって，条件付きの通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{正}}(t; z|u)$ は，図 3.7 に示すように，出勤時刻分布 $f(t)$ を時間軸の負の向きに u だけ平行移動した以下の式で与えられる：

$$\psi_{\text{正}}(t; z|u) = f(t + u) \quad (t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u). \quad (3.3.9)$$

この関係は，もちろん一般のトリップ密度 $\tau(Q_1, Q_2)$ と出勤時刻分布 $f(t)$ のもとで成り立つ性質である．また，以降の章で扱う 2 次元連続平面のモデル（第 4 章，第 5 章，および第 6 章）やネットワーク空間におけるモデル（第 7 章）を構成する際にも，式 (3.3.9) の関係を用いることができる．

観測地点から勤務地までの所要時間の密度関数

地点 P から勤務地 Q_2 までの所要時間 u の密度関数 $g(u)$ を求めるために，まずその累積分布 $G(u)$ を導く．累積分布 $G(u)$ は，地点 P から所要時間 u 以下で到達可能な勤務地の割合であるから，図 3.8 のグレー部分で示した領域に勤務地をもつ割合で表される．

この領域を， x_1 - x_2 平面に図示したものが図 3.9 である．図中の太枠で示した領域 F は地点 P を正の向きに通過するための起・終点ペアの集合に対応し，グレー部分で示した領域 C はそのうち P から

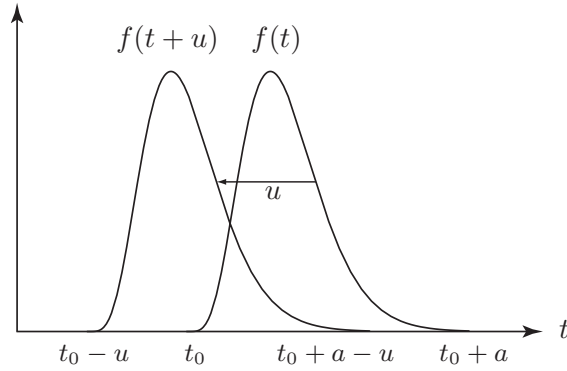


図 3.7 条件付きの通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{正}}(t; z|u)$.

の所要時間が u 以下である起・終点ペアの集合に対応する . したがって , 累積分布 $G(u)$ は以下のように表される :

$$G(u) = \frac{\iint_C \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) dx_2 dx_1}{\iint_F \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) dx_2 dx_1} \quad (0 \leq u \leq \frac{l-z}{v}) . \quad (3.3.10)$$

この式を具体的なトリップ密度 $\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ のもとで計算し , それを u に関して微分すれば目的の $g(u)$ を得ることができる (もちろん $G(u)$ が u の関数として陽に得られた場合) .

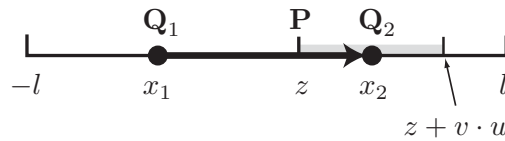


図 3.8 地点 P からの所要時間が u 以下である終点集合 .

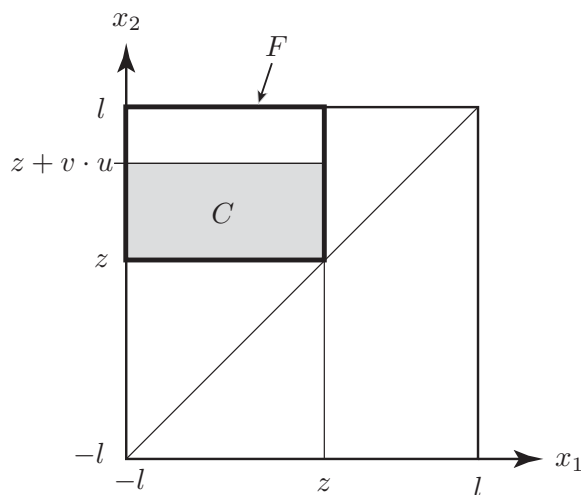


図 3.9 地点 P からの所要時間が u 以下である割合の特定 .

通過時刻の密度関数

以上で、通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{正}}(t; z)$ を計算するための準備が整った．以下に、 $\psi_{\text{正}}(t; z|u)$ および $g(u)$ が得られているものとして、式 (3.3.7) の積分を具体的に実行する方法を説明する．

いま、地点 P を正の向きに通過する移動者集合に着目し、その移動者集合の地点 P を通過する時刻 t と P からの所要時間 u のペアの集合に着目する．この集合を t - u 平面上に特定する．この領域は、式 (3.3.9) および式 (3.3.10) の定義域を満たす領域 E で定められ、

$$E = \left\{ (t, u) \mid t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u, 0 \leq u \leq \frac{l-z}{v} \right\} \tag{3.3.11}$$

で与えられる．式 (3.3.11) で定められる領域 E は、図 3.10 に示す t - u 平面上に太枠で示した平行四辺形に対応する．この平行四辺形の形状には、図 3.10 に示す 2 通りが存在し、到着時間幅 a と $u_{\text{max}} = \frac{l-z}{v}$ との大小関係により、 $a \leq \frac{l-z}{v}$ の場合は図 3.10 (a) のように、 $a > \frac{l-z}{v}$ の場合は図 3.10 (b) のようになる．

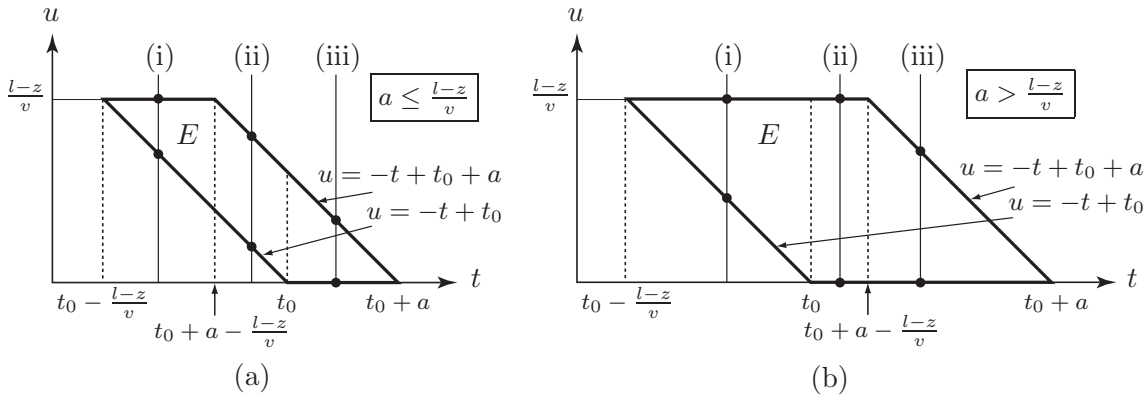


図 3.10 地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示．

図 3.10 の平行四辺形を利用して、式 (3.3.7) の積分

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \int_0^{u_{\text{max}}} \psi_{\text{正}}(t; z|u)g(u)du$$

を行えばよい．この式の積分範囲は、図 3.10 (a) および (b) に示す通り、通過時刻 t の範囲によって 3 つの異なる場合をもつ．具体的には、図 3.10 (a) の場合は、(i) $t_0 - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l-z}{v}$, (ii) $t_0 + a - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0$, (iii) $t_0 \leq t \leq t_0 + a$, の 3 通りであり、図 3.10 (b) の場合は、(i) $t_0 - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0$, (ii) $t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{l-z}{v}$, (iii) $t_0 + a - \frac{l-z}{v} \leq t \leq t_0 + a$, の 3 通りである．積分範囲は、 t 軸に垂直な (i), (ii), (iii) で示したこれらの線分と、平行四辺形 E との交わりの部分で与えられる．式 (3.3.7) において、式 (3.3.9) の

$$\psi_{\text{正}}(t; z|u) = f(t+u) \quad (t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u)$$

なる関係を用いれば、 $\psi_{\text{正}}(t; z)$ は以下の通りに表される：

(a) $a \leq \frac{l-z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l-z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \int_{-t+t_0}^{\frac{l-z}{v}} f(t+u)g(u)du, \quad (3.3.12)$$

(ii) $t_0 + a - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \int_{-t+t_0}^{-t+t_0+a} f(t+u)g(u)du, \quad (3.3.13)$$

(iii) $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \int_0^{-t+t_0+a} f(t+u)g(u)du. \quad (3.3.14)$$

(b) $a > \frac{l-z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \int_{-t+t_0}^{\frac{l-z}{v}} f(t+u)g(u)du, \quad (3.3.15)$$

(ii) $t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{l-z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \int_0^{\frac{l-z}{v}} f(t+u)g(u)du, \quad (3.3.16)$$

(iii) $t_0 + a - \frac{l-z}{v} \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \int_0^{-t+t_0+a} f(t+u)g(u)du. \quad (3.3.17)$$

以上のように、任意のトリップ密度 $\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ と出社時刻分布 $f(t)$ が与えられたとき、 $\psi_{\text{正}}(t; z)$ を導く方法が示された。負の向きの移動に対応する $\psi_{\text{負}}(t; z)$ についても全く同様の手順で導くことができる。トリップ密度が中心対称な分布の場合には、 $\psi_{\text{正}}(t; z)$ の z を $-z$ で置き換えれば、直ちに $\psi_{\text{負}}(t; z)$ を得ることができる：

$$\psi_{\text{負}}(t; z) = \psi_{\text{正}}(t; -z). \quad (3.3.18)$$

一斉到着の場合の通過密度

これまで、任意の出社時刻分布 $f(t)$ のもとでの通過密度の導出法について説明してきた。ここでは、すべての通勤者が同時刻に出社するという条件のもとでの通過密度の導出法について説明する。この想定は、通勤が極めて短時間に集中する状況をモデル化する際には、出社時間帯のパラメータ a が不要である点でモデルの単純化につながる。

一斉出社に基づく通過密度は、もちろん任意の出社時刻分布 $f(t)$ に基づく通過密度の特殊例であるから、これまでの結果が直接利用できる。実際、区間 $[t_0, t_0 + a]$ の出社時刻のもとでの結果において、 $a \rightarrow 0$ とした極限は、すべての人が時刻 t_0 に出社する場合に対応する。

しかしながら、一斉出社に対応する通過密度を求めることのみを目標とする場合、所要時間の密度関数 $g(u)$ から通過時刻の密度関数を直ちに（そして簡便に）導くことができる。この方法を以下に示そう。

すべての通勤者が時刻 t_0 に一斉に出社する状況を考える。いま、観測地点 P からの所要時間が u の地点に勤務地をもつ通勤者に着目する。この通勤者が時刻 t_0 に出社するためには、地点 P を時刻 $t_0 - u$ に通過しなければならない。したがって、地点 P を通過する時刻 t と P からの所要時間 u との間には

$$t = t_0 - u \quad (3.3.19)$$

なる関係が成り立つ。ここで、 u の密度関数はすでに $g(u)$ として得られているから、(分布の判明している) 変数 u との関係式 (3.3.19) が与えられれば、変数 t の密度関数を導くことができる（例えば、福田, 2003, 111 ページ）。したがって、通過時刻の密度関数を $\psi_{\text{正}}(t; z)$ と表せば、 $\psi_{\text{正}}(t; z)$ は以下のように与えられる：

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = g(t_0 - t) \cdot \left| \frac{du}{dt} \right| \quad (t_0 - u_{\text{max}} \leq t \leq t_0). \quad (3.3.20)$$

ここで、 $\left| \frac{du}{dt} \right| = 1$ だから、 $\psi_{\text{正}}(t; z)$ は $g(u)$ を用いて以下のように導かれる：

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = g(t_0 - t) \quad (t_0 - u_{\text{max}} \leq t \leq t_0). \quad (3.3.21)$$

このように、一斉到着の場合には、 $\psi_{\text{正}}(t; z)$ を所要時間の密度関数 $g(u)$ から直接求めることができるのである。

3.3.3 一様なトリップ密度と出社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数

トリップ密度として区間 $[-l, l]$ で一様かつ独立な起・終点分布に対応する以下のものを想定する：

$$\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) = \frac{N}{4l^2}. \quad (3.3.22)$$

出社時刻分布としては時間区間 $[t_0, t_0 + a]$ の一様分布を想定する：

$$f(t) = \frac{1}{a} \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + a). \quad (3.3.23)$$

地点 P から勤務地までの所要時間の累積分布 $G(u)$ は式 (3.3.10) より以下のように導かれる：

$$G(u) = \frac{vu}{l-z} \quad (0 \leq u \leq \frac{l-z}{v}). \quad (3.3.24)$$

これを u について微分すると $g(u)$ は以下の通りに導かれる：

$$g(u) = \frac{v}{l-z} \quad (0 \leq u \leq \frac{l-z}{v}). \quad (3.3.25)$$

以上の想定のもとで，式 (3.3.7) の積分を実行すれば $\psi_{\text{正}}(t; z)$ は以下のように導かれる：

(a) $a \leq \frac{l-z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l-z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \frac{v(t - t_0) + l - z}{a(l - z)}, \quad (3.3.26)$$

(ii) $t_0 + a - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \frac{v}{l - z}, \quad (3.3.27)$$

(iii) $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \frac{v(-t + t_0 + a)}{a(l - z)}. \quad (3.3.28)$$

(b) $a > \frac{l-z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \frac{v(t - t_0) + l - z}{a(l - z)}, \quad (3.3.29)$$

(ii) $t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{l-z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \frac{1}{a}, \quad (3.3.30)$$

(iii) $t_0 + a - \frac{l-z}{v} \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \frac{v(-t + t_0 + a)}{a(l - z)}. \quad (3.3.31)$$

3.4 通過密度の数値例

本節では，式 (3.3.22) の一様なトリップ密度に基づく通過密度の数値例を示す．出社時刻分布としては，式 (3.3.23) の一様分布と，一斉出社のものを採用する．まず，第 3.4.1 小節で通過密度の空間的分布を扱い，次に，第 3.4.2 小節で通過密度の時間的分布を扱う．

各パラメータの数値例として，本節を通じて以下のものを採用する．最大距離 $2l$ の所要時間を $2l/v = 2$ と定め，最も早く移動を開始する（家を出る）通勤者の移動開始時刻が $t = 0$ となるように $t_0 = 2$ とする．また，都市の中心からの距離を $l = 1$ ，総トリップ数を $N = 1$ とする．

3.4.1 通過密度の空間的分布

図 3.11 と図 3.12 に正の向きの通過密度 $p_{\text{正}}(z, t)$ の概形を、図 3.13 と図 3.14 に合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の概形を示した（負の向きの通過密度は正の向きの通過密度と中心に関して対称なグラフとなるためここでは省略する）。図 3.11 と図 3.13 は、すべての通勤者が $t = 2$ に一斉に出社する場合に、図 3.12 と図 3.14 は、時間区間 $[2, 3]$ に一様に出社する場合に対応する。移動が観測される時刻は、図 3.11 と図 3.13 では $t \in [0, 2]$ となり、図 3.12 と図 3.14 では $t \in [0, 3]$ となる。以下にそれぞれの場合の考察を与える。

正の向きの通過密度

図 3.11 の一斉出社の場合、 $p_{\text{正}}(z, t)$ は z に関して線形に増加する。移動の立ち上がりが左端から起こるのは、 z が小さくほど最長の所要時間（右端に出社する場合の所要時間）の値が大きくなり、早く移動を開始する（家を出る）必要があることに対応している。

図 3.12 の一様到着の場合、出社が時間的に広がったことにより、交通集中が緩和されている様子が見て取れる（縦軸のスケールは図 3.11 と同一）。興味深い点は、交通量のピークが見られる点である（ $t = 2.0$ 付近）。人々の出社パターンが時間軸上に一様に分布していても、交通量の都市内分布は自ずとピークをもつことがわかった。この点は、全時間を通じて観測される通過量を扱った既存研究からは判明し難い知見であり、本研究の重要な理論的貢献であるといえる。

合計の通過密度

図 3.13 の一斉出社の場合、 $p_{\text{合}}(z, t)$ は各地点における通過密度の最大値が同一であるという著しい特徴が見て取れる。最大交通量は、都市内の各地点で必要となる交通容量を考える上で、最も重要な基準の一つである。都市内の各地点において、その地点の最大交通量に見合った交通容量を準備するならば、図 3.13 のシナリオのもとでは、「均一に交通施設を配置すべきである」、との結論が導かれる。この事実が都市計画の現場で直接用いられるかどうかは別として、この結果は人々の時間的な行動パターンによって必要となる交通容量とその都市内分布が大きく変化する可能性を示しており、極めて示唆的であるといえよう。

図 3.14 の一様到着の場合は、一斉出社には見られなかったピークが表れている。ピークの時刻は $t = 2.0$ 付近であり、通過密度の最大値は $t = 2.0$ における都市中心で観測される。この $t = 2.0$ という時刻は、最も早い出社時刻 t_0 に対応し、「出社が開始される時刻付近で通勤混雑が最大になる」、という一つの有益な知見が得られた。少々強引ではあるが、現実の出社パターンが仮に 8 時 30 分から 9 時 30 分の間に集中していると考えよう。このとき、先の結論に照らし合わせれば、8 時 30 分に最大の通勤ラッシュが観測される、という結果が得られる。これは、通勤時の交通混雑を考える上で一つの基準と考えられよう。

3.4.2 通過密度の時間的分布

図 3.16 と図 3.17 は、それぞれ正の向きの通過密度 $p_{\text{正}}(z, t)$ と負の向きの通過密度 $p_{\text{負}}(z, t)$ とを示しており、図 3.18 は両者の合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ を示している。各グラフにおいて、4 つの観測地点 $z = 0.2, z = 0.4, z = 0.6, z = 0.8$ における通過密度の時間的変化を与えており、さらに、各地点

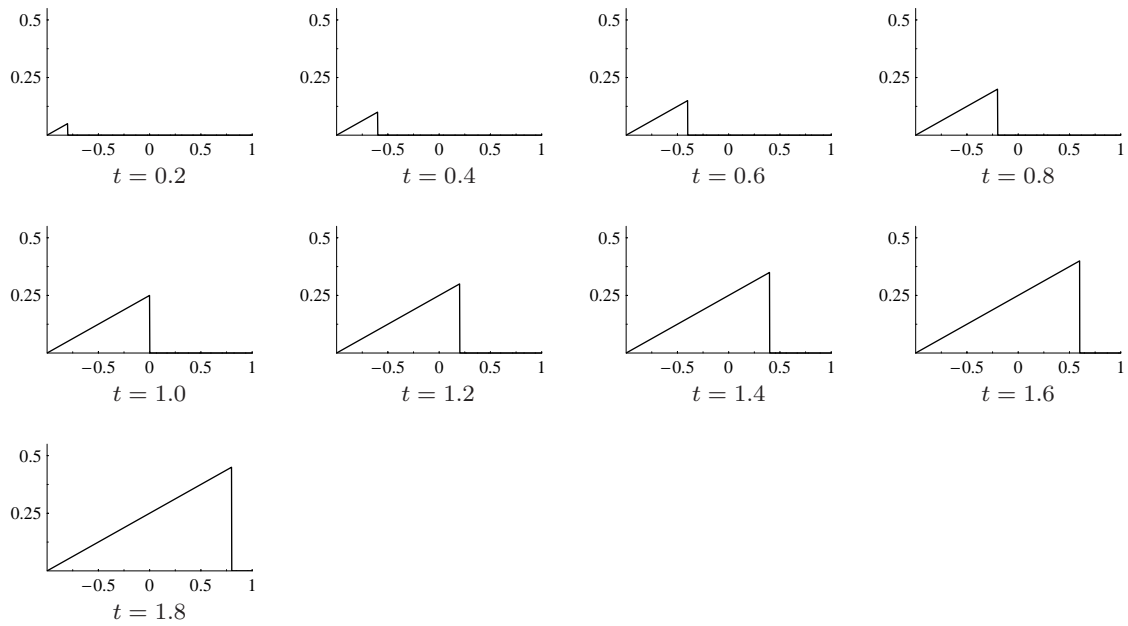


図 3.11 正の向きの通過密度 $p_+(z, t)$ の概形 (一斉到着の場合).

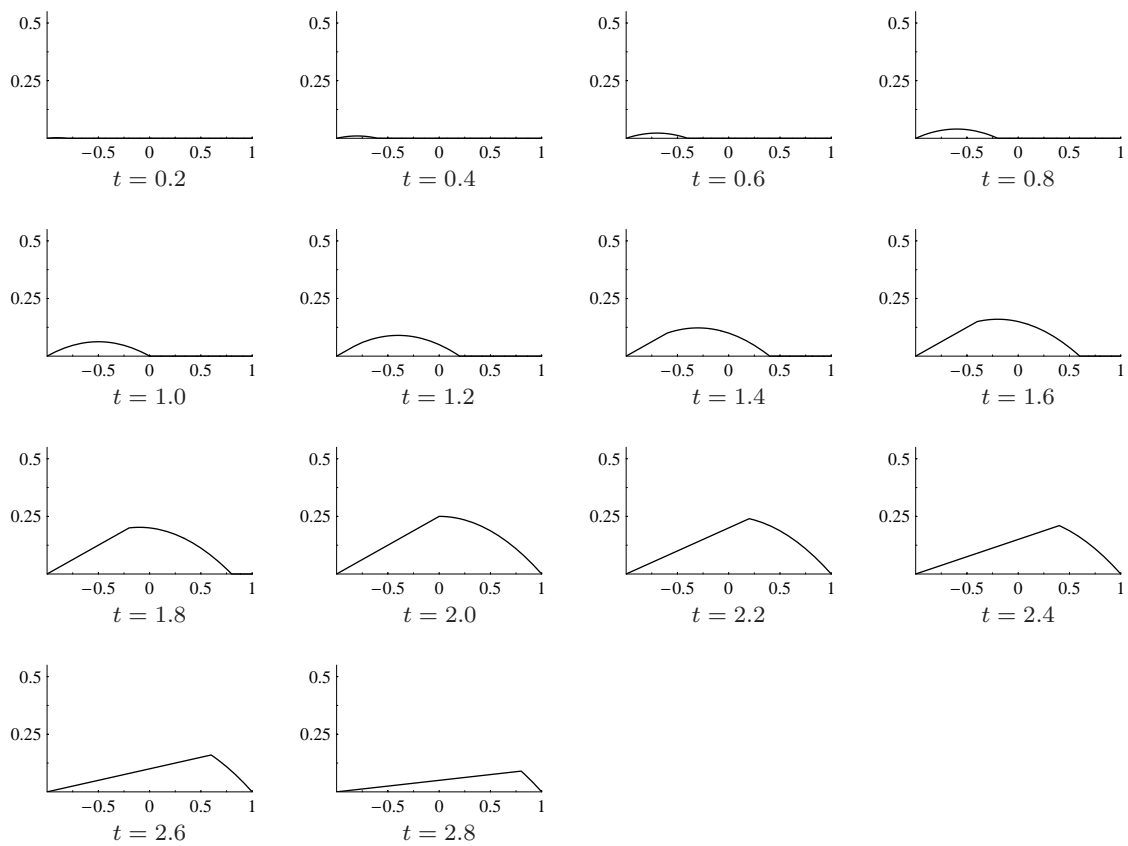


図 3.12 正の向きの通過密度 $p_+(z, t)$ の概形 (一様到着の場合).

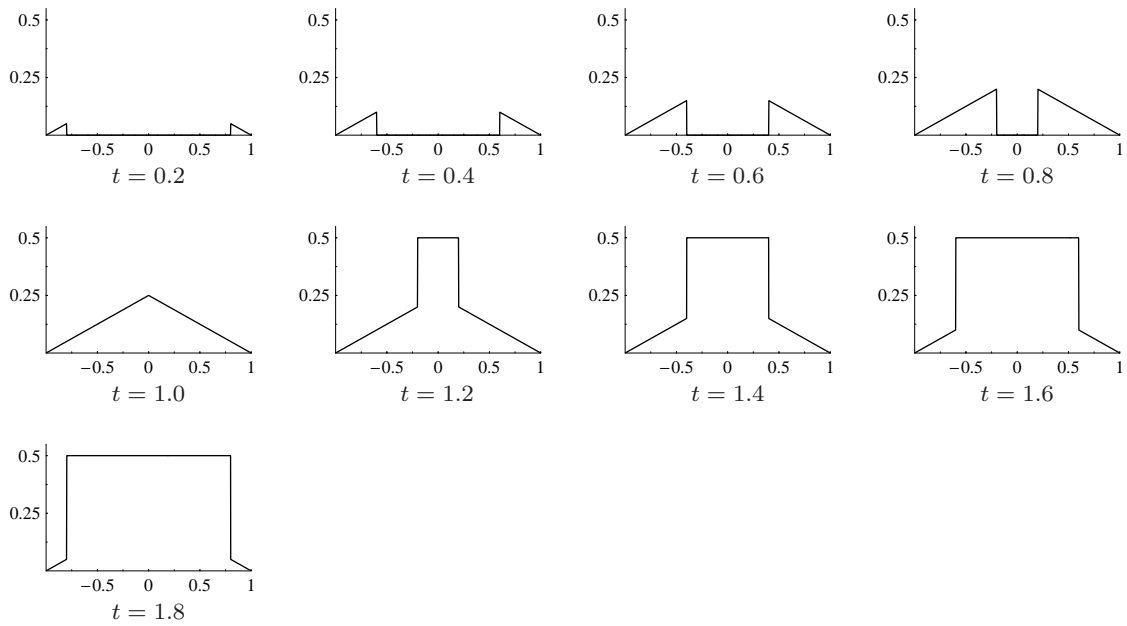


図 3.13 合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の概形 (一斉到着の場合)。

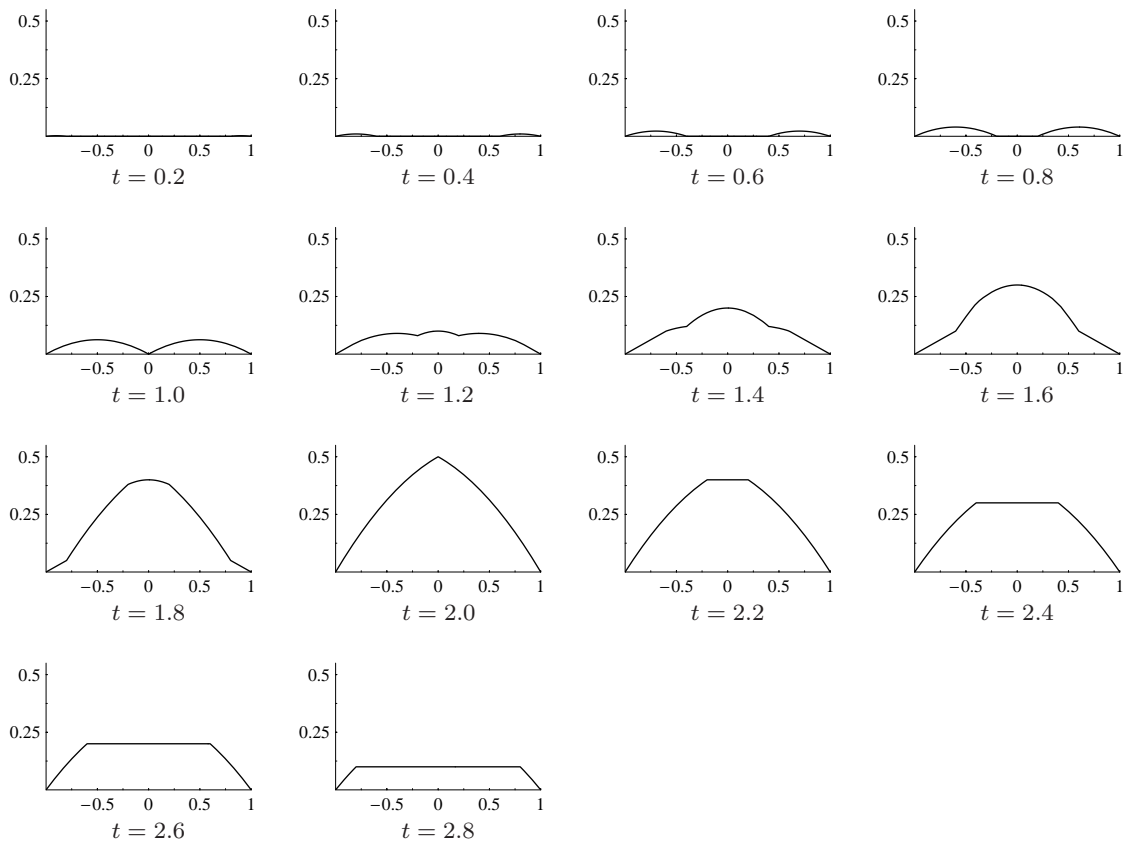


図 3.14 合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の概形 (一様到着の場合)。

におけるグラフにおいて、出社時刻分布として、一斉出社と図 3.15 に示す $a = 0.5$, $a = 1.0$, $a = 1.5$, $a = 2.0$ の一様出社の、合計 5 パターンを示している。以下にそれぞれの場合の考察を与える。

正の向きと負の向きの通過密度

図 3.16 と図 3.17 から、各地点における出社時刻の広がり具合が混雑緩和に与える影響を、直ちに読み取ることができる。各地点における、正の向きと負の向きの全時間を通じた通過量は、式 (3.2.11) と式 (3.2.12) に示したとおり全く同一であるのに対し、対応する通過密度の $p_{\text{正}}(z, t)$ と $p_{\text{負}}(z, t)$ とを比較すると、大きな違いが表れる点は大変興味深い。

正の向きの通過密度では、全体的には中心付近ほど (z が小さいほど) 大きな交通量が観測されるが、一斉到着の場合には、最大値は郊外ほど (z が大きいほど) 大きな値をとっていることがわかる。総通過量で比較すれば郊外ほど小さいが、交通が短時間に集中するためにこのようなことが起こるわけである。一斉到着の $a = 0.5$ の場合にも、($z = 0.2$ ではなく) $z = 0.4$ に最も大きな値が観測される点は興味深い。

負の向きの通過密度では、正の向きの場合よりも移動が観測される時間区間が全体的に長いため、(総通過量は同一であるが) 同一地点で比較した場合、正の向きの通過密度よりも小さな値をとることがわかる。

合計の通過密度

図 3.18 に、図 3.16 と図 3.17 の合計の通過密度の時間的变化を示した。一斉到着の場合には、図 3.13 でみたように、合計の通過密度の最大値は地点に依存せず一定値をとることがわかる。一様到着の場合には、どの地点においても、最も早い出社時刻 $t_0 = 2$ で最大値をとる様子が見て取れる。

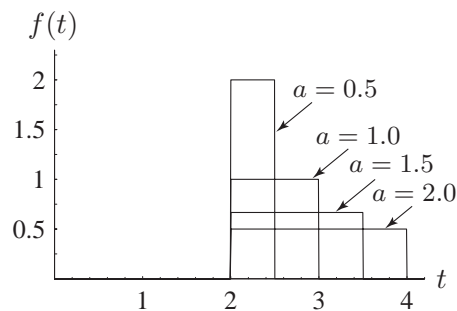


図 3.15 計算に用いた 4 通りの一様な出社時刻分布。

3.5 モデルの拡張

3.5.1 出社時刻分布に関する一般化

これまで、一様な出社時刻分布に基づく通過密度を式の形で導出し、いくつかの数値例を示した。実際の出社時刻分布は、特定時刻付近に集中したパターンをもつものと思われる。ここでは、出社時刻分布の一般化として、ピークをもつパターンのうち、比較的単純な 2 次関数で与えられたものに対応する通過密度の数値例を示す。

なお、トリップ密度の関数型に関する一般化は、過去いくつか行われている。Smeed (1977) は、(起

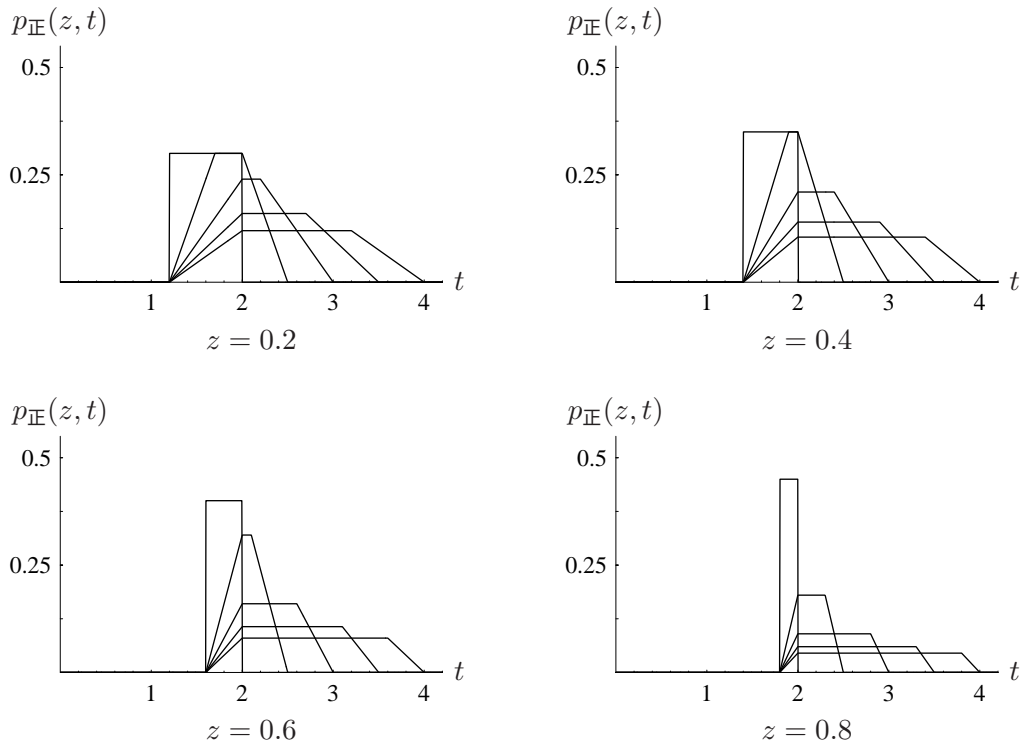


図 3.16 正の向きの通過密度 $p_{\text{正}}(z, t)$ の時間的分布 .

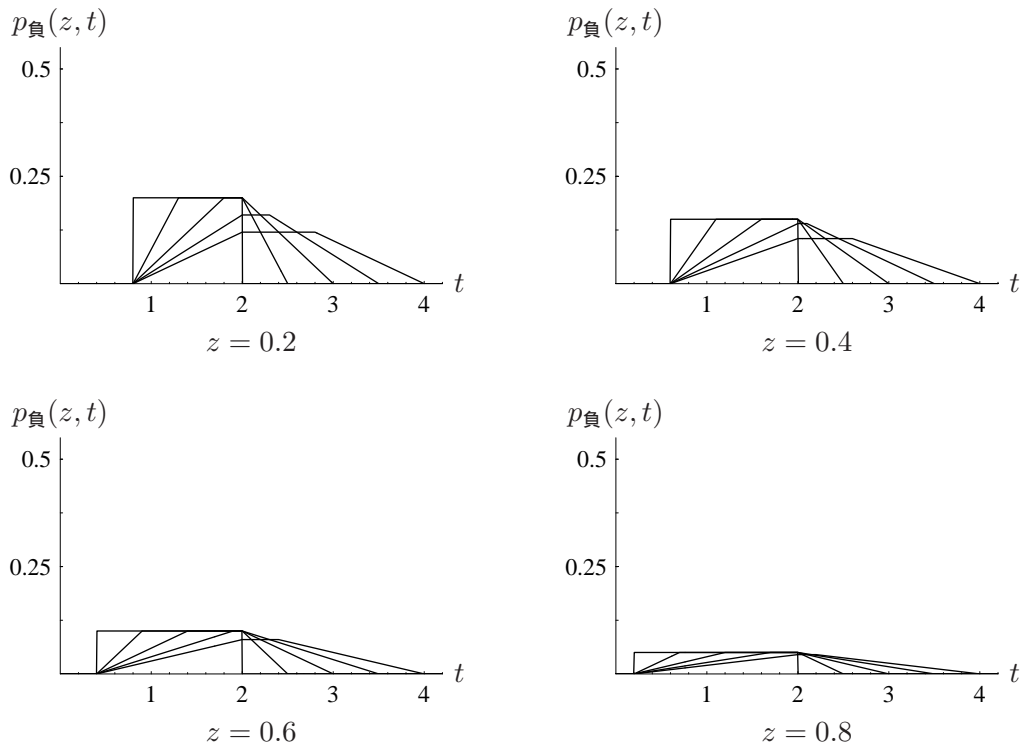


図 3.17 負の向きの通過密度 $p_{\text{負}}(z, t)$ の時間的分布 .

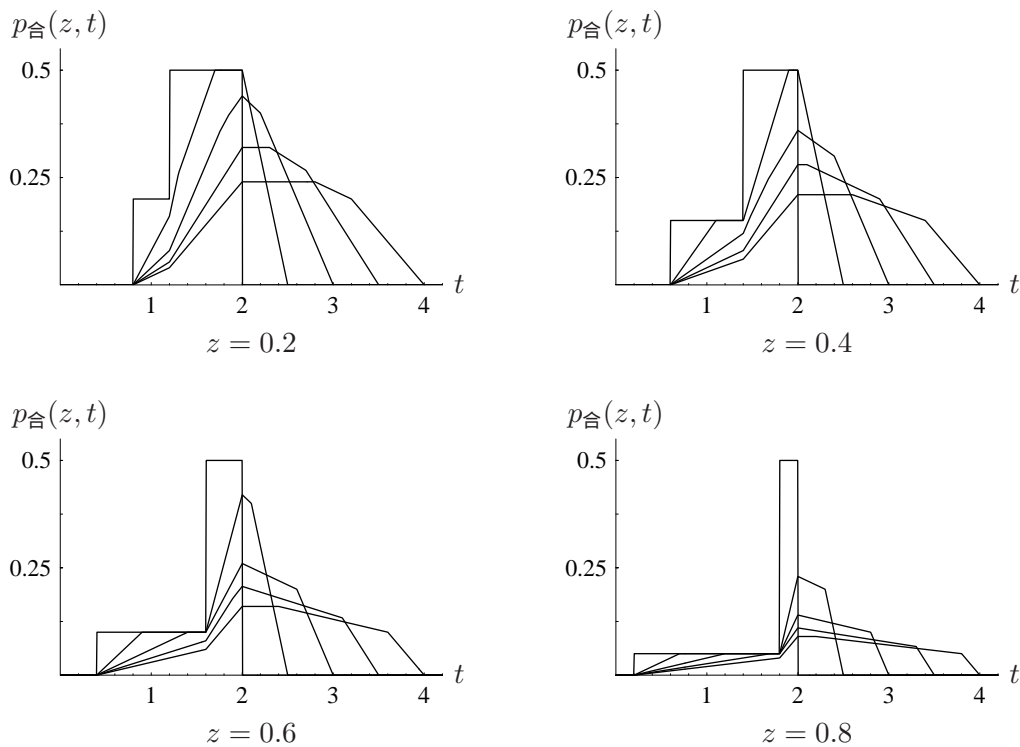


図 3.18 合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の時間的分布 .

点と終点とで中心からの距離の減少度合いが異なる) Clark 型のモデルを想定し, 通過量に加え, 移動距離の分布や特性値などを陽に導いている. Smeed のモデルでは, 都市領域を無限に伸びる直線分を与えることによる単純化が図られている. また, 大津 (2000) では, 一様分布以外の起・終点分布として, 1 次元区間における線形減少モデル, Clark 型モデルおよび Sherratt 型モデルが扱われている.

出社時刻の分布が, 時間区間 $[t_0, t_0 + a]$ で定められる以下の 2 次関数で与えられるものとする:

$$f(t) = \frac{6}{a^3}(t - t_0)(t_0 + a - t). \tag{3.5.1}$$

このとき, 正の向きの通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{正}}(t; z)$ の式 (3.3.12) から式 (3.3.17) において, 式 (3.5.1) を用いて具体的に計算すると, $\psi_{\text{正}}(t; z)$ は以下のように導かれる:

(a) $a \leq \frac{l - z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l - z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l - z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \frac{(l - vt_0 + vt - z)^2(2vt_0 - 2vt + 2z + 3va - 2l)}{a^3v^2(l - z)}, \tag{3.5.2}$$

(ii) $t_0 + a - \frac{l - z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \frac{v}{l - z}, \tag{3.5.3}$$

(iii) $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \frac{v(a + t_0 - t)^2(a - 2t_0 + 2t)}{a^3(l - z)}. \quad (3.5.4)$$

(b) $a > \frac{l - z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l - z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \frac{(l - vt_0 + vt - z)^2(2vt_0 - 2vt + 2z + 3va - 2l)}{a^3v^2(l - z)}, \quad (3.5.5)$$

(ii) $t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{l - z}{v}$ ならば

$$\begin{aligned} \psi_{\text{正}}(t; z) = & \frac{-6v^2t^2 + 6v(2vt_0 + z + va - l)t - 2l^2 - 3va(2vt_0 + z)}{a^3v^2} \\ & + \frac{(3va + 6t_0z + 4z)l - 2(3v^2t_0^2 + 3vt_0z + z^2)}{a^3v^2}, \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

(iii) $t_0 + a - \frac{l - z}{v} \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{正}}(t; z) = \frac{v(a + t_0 - t)^2(a - 2t_0 + 2t)}{a^3(l - z)}. \quad (3.5.7)$$

このように、2次関数の到着時刻分布に基づく通過時刻の密度関数は、かなり簡便に表されることがわかった。分布を記述するのに必要なパラメータは、(一様分布と同じ) a だけであるから、かなり操作性の高いモデルといえよう。

以下に、2次関数の到着時刻分布に基づく合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の数値例を示す。数値例として、都市の中心からの距離を $l = 1$ 、総トリップ数を $N = 1$ 、移動の速さを $v = 1$ とする。さらに、最も早く移動を開始する(家を出る)通勤者の移動開始時刻が $t = 0$ となるように t_0 を定める。この場合、最長の所要時間が $2l/v = 2$ となることから、 $t_0 = 2$ とすればよい。

図 3.19 に通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の空間分布を、図 3.20 に合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の時間分布を示した。図 3.20 では、各グラフにおいて、4つの観測地点 $z = 0.2, z = 0.4, z = 0.6, z = 0.8$ における通過密度の時間的变化を与えており、各地点におけるグラフにおいて、出社時間帯のパラメータとして $a = 0.5, a = 1.0, a = 1.5, a = 2.0$ の4パターンを採用した。

図 3.19 も図 3.20 の、対応する一様な出社時刻に基づく図 3.14 および図 3.18 と比較すると、全体的な傾向としてはさほど大きな違いは見られないが、分布が滑らかになっている様子が見て取れる。モデルの操作性の高さを考えると、ピークをもつ出社時刻分布の第一次近似モデルとしては、2次関数の到着時刻分布はかなり有用であるものと思われる。

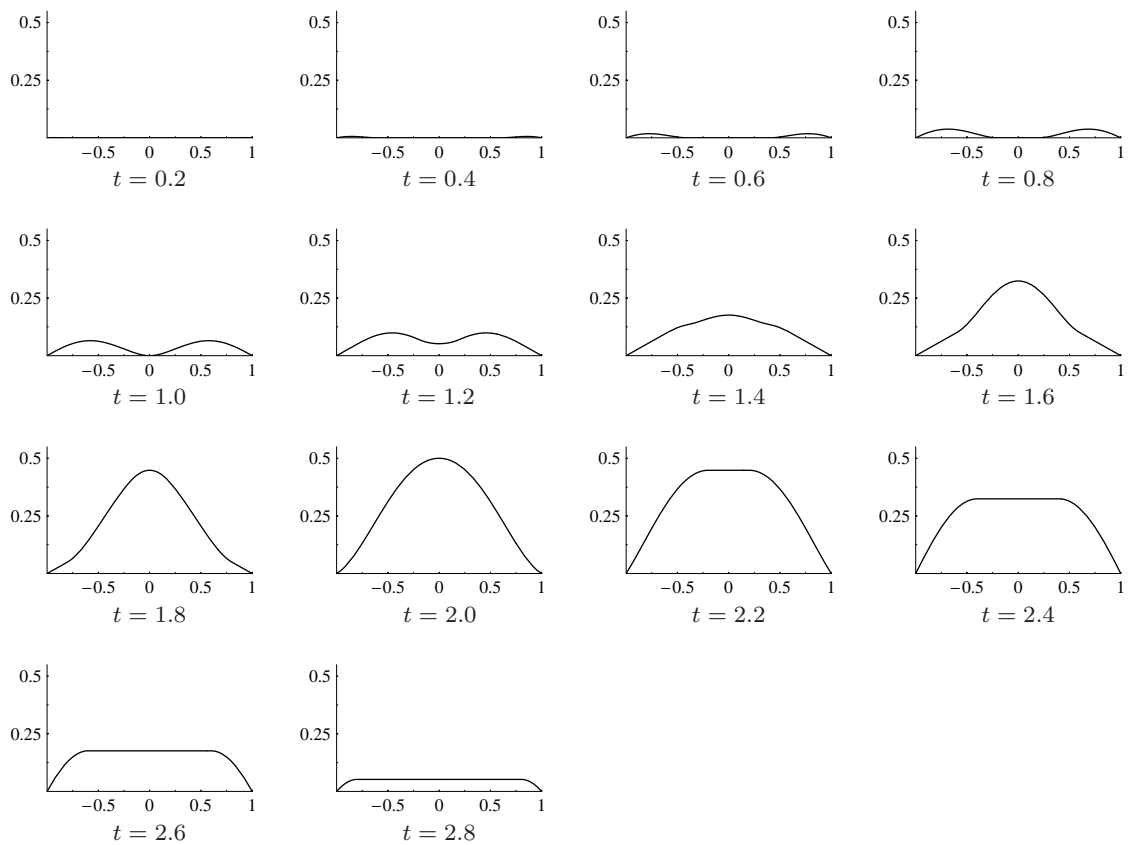


図 3.19 合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の概形 (2 次関数型到着の場合).

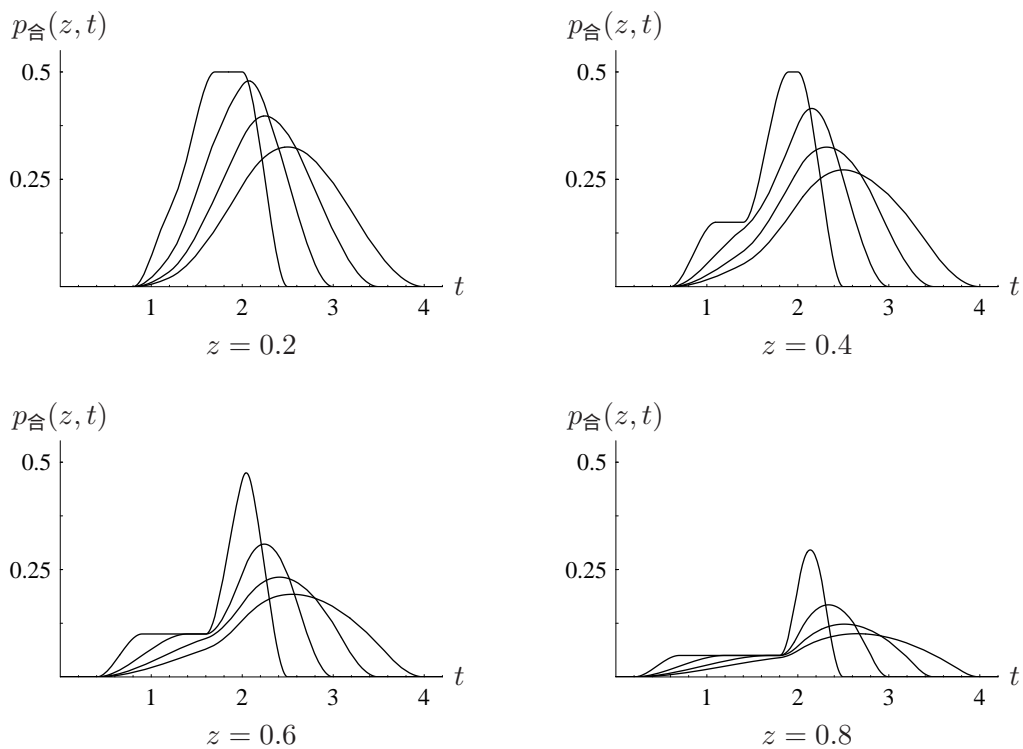


図 3.20 合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の時間的分布 (2 次関数型到着の場合).

3.6 第3章のまとめ

本章では、線分領域において通過量の時刻に関する密度を導く方法を定式化し、一様独立なトリップ密度のもとで、(1) 一斉到着の場合、(2) 一様到着の場合、(2) 2次関数型の到着の場合、の3パターンについて、通過密度を厳密に導くことに成功した。開発した手法により、到着分布パターンの時間的広がりや度合いが混雑緩和に与える影響を直接分析することが可能となった。本研究は、フレックスタイム制度やオフピーク通勤の導入効果を測る、マクロな都市交通モデルとして位置付けられよう。このことは、時刻に依存する形で交通量を導いて初めて分析可能となるものであり、本研究の重要な理論的貢献である。

総通過量を扱った既存研究では、起・終点が一様に分布していても中心部が混雑する、という構造が示されている。この知見は、有限領域で人々が行き来をする都市の宿命として強調されてきた。本研究では時間軸上のパターンについても、近い関係を示すことができた。すなわち、出社時刻パターンが一様に分布していてもピーク時刻が必ず出現する、という構造である。この点は、時空間的な人々の行動パターンが生み出す、興味深い性質として広く認識されるべき重要なものであると考える。

本研究では、出社時刻分布を所与として交通量の時空間分布を導いたが、混雑をできるだけ抑えるような出社時刻パターンを追求する、という問題も考えられる。例えば、ある定められた時間幅に出社が行われる状況を想定したとき、どのような関数型の出社時刻分布を設定すれば混雑を分散させることができるのか、という問題は興味深い。最適化の規準のひとつとしては、最大交通量の最小化という問題が考えられる。現状のトリップパターンのもとで交通混雑を分散させるための出社時刻分布を追求する、という問題は、理論的な興味をそそられるだけでなく、都市計画やオペレーションズ・リサーチの分野で追求すべき重要な実際的課題であるものとする。

今回のモデルでは、到着時刻分布として共通のものを採用したが、トリップの目的に応じて異なる分布を想定することも可能である。例えば、通勤と通学という2種類の移動に着目するものとしよう。このとき、通勤移動を行う集団のトリップ密度分布と到着時刻分布、および通学移動を行う集団のトリップ密度分布と到着時刻分布を用意しておけば、本章で示した手法を適用してそれぞれの通過密度を導き足し合わせるにより、2種類の移動パターンに基づく通過密度を直ちに導くことができる。

第4章 直線距離に基づく任意形状都市における時空間通過量

4.1 はじめに

本章では、任意形状の都市において、直線距離による移動を想定した場合の通過量モデルを構成する。直線距離に基づく移動モデルは、地域科学や立地理論などの分野で古くから用いられてきたモデルである。究極に理想化された移動である直線距離モデルは、特定の道路パターンの性質を議論する上でも極めて重要なモデルである。直線距離を想定した都市交通モデルの中で、通過量に関するものは少数の理論的研究に留まっている。しかしながら、時間変動を考慮した通過量を解析的な視点から追求したモデルは見当たらず、本章の内容はその初めての試みである。本章の前半部で、凸領域における通過量および通過密度の導出方法を述べ、後半部においてその内容を任意形状の都市領域のモデルへと拡張する。

4.2 凸領域における通過量の導出

4.2.1 一般のトリップ密度のもとでの通過量

図 4.1 に示すような、凸領域 D を想定し、この領域における φ の向きへの通過量を導出する。

第 2 章で導入した、 φ の向きへの通過量 $q(P, \varphi)$ の定義を振り返っておく。図 4.1 に示す領域 D の地点 P において、 φ の向きに垂直に設けられた微小幅 dw の線分を考える。この線分を角度 $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ の範囲で通過するトリップ数が $q(P, \varphi)dw d\varphi$ で与えられるような $q(P, \varphi)$ を、 φ の向きへの通過量と定義する（第 2.5.2 小節, 20 ページ）。

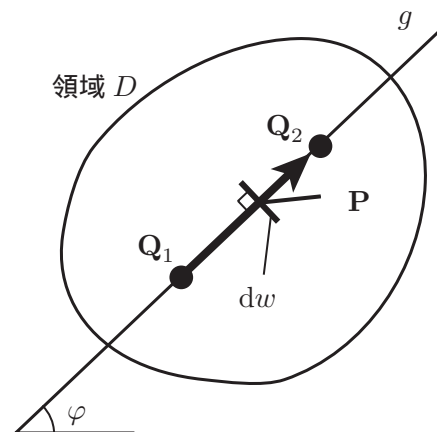


図 4.1 φ の向きへの通過量 $q(P, \varphi)$ の定義.

第 2 章で述べたように、 $q(P, \varphi)$ は Holroyd と Millar によって最初に提案された指標である (Holroyd

and Miller, 1966). Holroyd と Millar は, 都市領域 D が凸図形で与えられた場合の $q(\mathbf{P}, \varphi)$ の導出法を示しており, 円盤領域において $q(\mathbf{P}, \varphi)$ を解析的に導いている. 以下に, Holroyd と Millar による導出法を紹介する.

図 4.2 に示す凸領域 D において, 観測地点 \mathbf{P} を通り φ 方向に伸びる直線 g を考える. 地点 \mathbf{P} を φ の向きに通過するためには, 起点 \mathbf{Q}_1 と終点 \mathbf{Q}_2 が直線 g 上にあり, 地点 \mathbf{P} を図 4.2 のように挟んでいればよい. 地点 \mathbf{P} から起点 \mathbf{Q}_1 と終点 \mathbf{Q}_2 までの距離をそれぞれ s_1 および s_2 とし, 地点 \mathbf{P} から最も遠い起点と終点の \mathbf{P} からの距離を, それぞれ s_1^* および s_2^* とする. Holroyd と Millar (1966) によれば, φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ は以下のように与えられる:

$$q(\mathbf{P}, \varphi) = \int_{s_1=0}^{s_1^*} \int_{s_2=0}^{s_2^*} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)(s_1 + s_2) ds_2 ds_1. \quad (4.2.1)$$

Pearce は, 同一の指標を, 直線分の地理的障害物が存在する凸図形で与えられた都市において扱っており, 式 (4.2.1) と同一の関係式を導いている (Pearce, 1981).

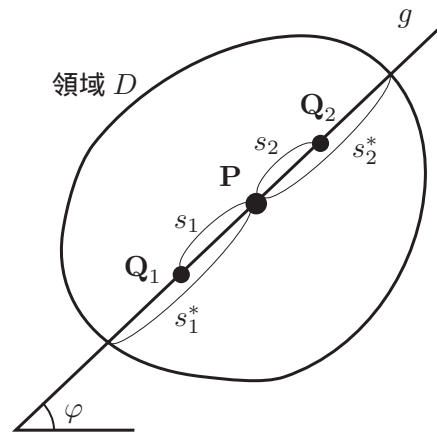


図 4.2 Holroyd と Millar による φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ の導出法.

また, 大津と腰塚による直線移動に基づく通過量モデルを扱った一連の研究 (大津・腰塚, 1998; 1999a) においても, Holroyd と Millar によって導入された $q(\mathbf{P}, \varphi)$ と本質的には同一のものが扱われている^{*1}.

大津・腰塚による一連の研究では, 通過量を導くための道具立てとして, 積分幾何学における一様な直線概念を用いている. 以下に, 大津らの一様な直線による方法を用いて, 式 (4.2.1) が得られることを示す. 初めに, 一様な直線の定義を簡単に紹介する.

図 4.3 に示すように, x - y 平面上の直線 g を考える. この直線 g を, 原点から垂線の足 \mathbf{Q} までの距離 p と, x 軸との成す角度 θ を用いて表現する. パラメータ (p, θ) を指定すると, x - y 平面上の一本の直線 g が決まるわけである. ここで, 一様な直線とは, p - θ 平面において一様に分布する点に対する, x - y 平面の直線の集合 G で定義される. このようにして定義された一様な直線は, 積分幾何学や幾何確率の分野で幅広く用いられる基礎的な概念であり, 線密度^{*2}の期待値が位置に依存せず考察空間内で一定

^{*1} 厳密には, 大津らの用いた指標と Holroyd と Millar によって提案された $q(\mathbf{P}, \varphi)$ とは, 以下の 2 つの点で異なっている. それらは, (1) 総トリップ数 N に相当するものを領域面積の 2 乗で与えている点, (2) 線分上での 2 つの向き (φ の向きと $\varphi + \pi$ の向き) を区別していない点, の 2 点である.

^{*2} 単位面積当りに含まれる直線の総延長を意味する.

であるという特徴をもっている (Santalo, 1976; Solomon, 1978).

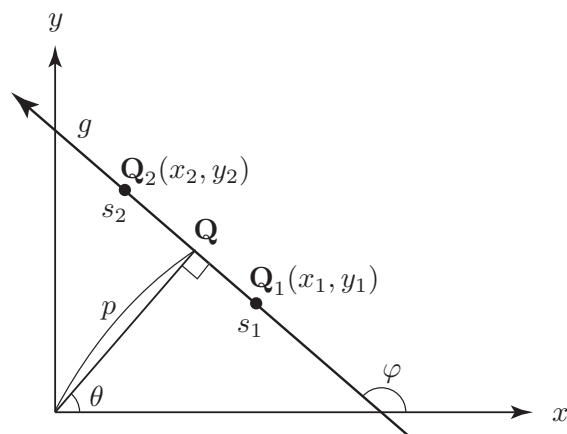


図 4.3 一様な直線の定義.

次に, 2次元平面内の点のペア Q_1 および Q_2 を考え, それらの座標を $Q_1(x_1, y_1)$ および $Q_2(x_2, y_2)$ と記述する. ここで, 点のペア Q_1 と Q_2 は次の 4 つの変数を用いても表すことができる. すなわち, Q_1 と Q_2 を結ぶ直線 $g = (p, \theta)$ と, 図 4.3 のように g 上に向きを与えたときの Q_1 と Q_2 の g での座標 s_1 と s_2 の 4 つの変数である. このとき, 以下の関係が成立することが知られている (腰塚, 1976; Santalo, 1976):

$$[dx_1 dy_1 dx_2 dy_2] = |s_2 - s_1| [ds_1 ds_2 dp d\theta]. \quad (4.2.2)$$

ここで, $[\cdot]$ は外積演算を意味する. なお, 以上の議論では g 上での原点を Q に設定したが, 直線上の他の点に原点をとっても式 (4.2.2) の関係が成立することが示される (腰塚, 1976).

いま, 図 4.3 に示す直線 g の向きを φ と表すと, $\varphi + \pi/2 = \theta$ だから

$$[dx_1 dy_1 dx_2 dy_2] = |s_2 - s_1| [ds_1 ds_2 dp d\varphi] \quad (4.2.3)$$

が成立する. ここで, ある固定された直線 $g = (p, \varphi)$ 上に存在する点のペア $Q_1(x_1, y_1)$ と $Q_2(x_2, y_2)$ に着目すると, 式 (4.2.3) の関係より, 以下の式が得られる:

$$\int_{(Q_1, Q_2) \in g} dQ_2 dQ_1 = \int_{s_1 \in [0, l], s_2 \in [0, l]} |s_2 - s_1| ds_2 ds_1. \quad (4.2.4)$$

式 (4.2.4) は, 左辺の $Q_1(x_1, y_1)$ と $Q_2(x_2, y_2)$ に関する 4 重積分を, 右辺の (s_1, s_2) に関する 2 重積分に置き換える操作であり, 固定された直線上の点対に関する積分を実行する際には極めて強力な道具となる. 以上の準備をもとに, 式 (4.2.1) を導こう.

図 4.4 に示すように, 平面上に凸領域 D を与え, g 上の 2 点 Q_1 と Q_2 を考える. いま, D と g の共通部分の長さを l とする. この直線上に図 4.4 のような新たな座標軸を設定する. ここで, 地点 P を φ の向きへ通過するために, 起点と終点が満たすべき領域を, それぞれ A および B と表す. これらは, 図 4.4 に示す線分上の座標系を用いると以下のように表される:

$$A = \{s_1 \mid 0 \leq s_1 \leq z\}, \quad (4.2.5)$$

$$B = \{s_2 \mid z \leq s_2 \leq l\}. \quad (4.2.6)$$

これより， φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ は以下のように表される：

$$\begin{aligned}
 q(\mathbf{P}, \varphi) &= \int_{\mathbf{Q}_1 \in [0, z]} \int_{\mathbf{Q}_2 \in [z, l]} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_2 d\mathbf{Q}_1 \\
 &= \int_{s_1=0}^z \int_{s_2=z}^l \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) (s_2 - s_1) ds_2 ds_1.
 \end{aligned}
 \tag{4.2.7}$$

ここで，2 番目の等式で式 (4.2.4) を用いている．

大津による式 (4.2.7) は，(座標系の設定の違いを除けば) 本質的には Holroyd と Miller の導いた式 (4.2.1) と同じものである．積分幾何学による一様な直線を用いれば，式 (4.2.7) がただちに得られるという点で，大津らによる方法は強力かつエレガントである．

第 3 章で示した線分領域における通過量の式 (3.2.8) と式 (4.2.7) とを比較すると，両者の違いはヤコビアン $|s_2 - s_1|$ による項のみであることがわかる．このことから，式 (4.2.7) は 4 次元の積分を 2 次元の積分に帰着させるものであり非常に見通しがよい．また，大津らの方法を用いた式 (4.2.7) は，第 3 章の線分領域のモデルで導いた式 (3.2.8) と座標系の設定が同一であるので，本研究では式 (4.2.7) による方法を用いることにする．これにより，本章の以降の内容では，第 3 章の拡張としてスムーズに論理展開が行える．

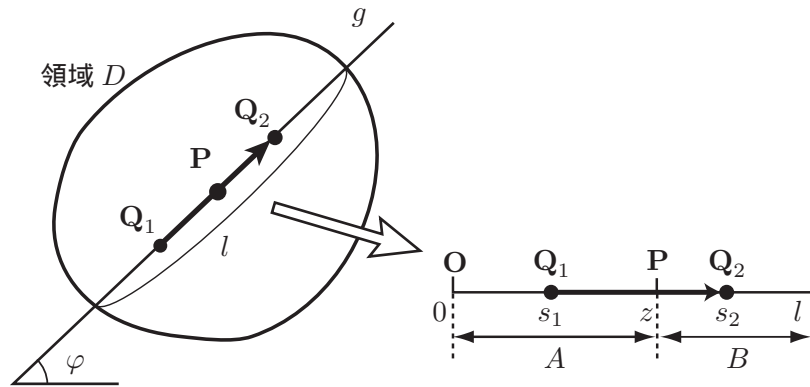


図 4.4 一様な直線を用いた φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ の導出法.

4.2.2 一様なトリップ密度のもとでの通過量

面積 S の凸領域 D を想定し，移動の起点 \mathbf{Q}_1 と終点 \mathbf{Q}_2 が領域 D 上で一様かつ独立に分布する場合の通過量を導出する．すなわち，トリップ密度として

$$\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) = \frac{N}{S^2}
 \tag{4.2.8}$$

を想定する．この場合，式 (4.2.7) の積分は容易に実行できて， $q(\mathbf{P}, \varphi)$ は以下のように導かれる：

$$\begin{aligned}
 q(\mathbf{P}, \varphi) &= \frac{N}{S^2} \int_{\mathbf{Q}_1 \in [0, z]} \int_{\mathbf{Q}_2 \in [z, l]} d\mathbf{Q}_2 d\mathbf{Q}_1 \\
 &= \frac{N}{S^2} \int_{s_1=0}^z \int_{s_2=z}^l (s_2 - s_1) ds_2 ds_1 \\
 &= \frac{N}{S^2} \cdot \frac{z(l-z)l}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{4.2.9}$$

このように $q(\mathbf{P}, \varphi)$ は、地点 \mathbf{P} の線分の端点からの距離 z の 2 次関数として表される。式 (4.2.9) は、第 3 章の式 (3.2.11) と似ているが、式 (4.2.9) には線分の長さ l がさらに掛けられている。例えば、線分の長さ l が 2 倍になると、その線分の中間点では 8 倍の通過量が観測されるのである。これは、式 (4.2.7) のヤコビアン項がかかった結果であり、面的な広がりをもつ都市の特徴を端的に表している。

ここで、式 (4.2.9) を、2 次元領域において実際に計算する方法について簡単に触れておく。式 (4.2.9) における z , $l - z$ および l は線分の長さである。線分の長さはその両端点の座標が与えられれば直ちに計算することができる。したがって、都市領域と、 \mathbf{P} と φ で指定された直線が与えられた場合、式 (4.2.9) の計算は計算幾何学における交点列挙問題に帰着する。現実の都市領域を用いた分析を行う際には、境界を多角形近似すればほとんどの場合十分であろう。多角形と直線との交点列挙問題は、計算幾何学の分野で効率的に求める方法が追求されており、都市分析へ応用する際には、これらのアルゴリズムを利用することで、式 (4.2.9) を比較的簡便に計算することができる。

4.3 凸領域における通過密度の導出

4.3.1 通過密度の定義

凸領域における通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ の時刻に関する密度を導入する。これを通過密度とよび、 $p(\mathbf{P}, t, \varphi)$ と表す。いま、地点 \mathbf{P} を φ の向きに通過する移動者の通過時刻の密度関数 $\psi(t; \mathbf{P}, \varphi)$ を導入する。ここで、 $\psi(t; \mathbf{P}, \varphi)$ は t の関数であるが、 \mathbf{P} と $\psi(t; \mathbf{P}, \varphi)$ にも依存するためこのように記述した。第 3 章の線分領域における通過密度の場合と同様に、通過密度は通過量と地点 \mathbf{P} を通過する時刻の密度関数との積で表される：

$$p(\mathbf{P}, t, \varphi) = q(\mathbf{P}, \varphi) \cdot \psi(t; \mathbf{P}, \varphi). \quad (4.3.1)$$

これより、 $p(\mathbf{P}, t, \varphi)$ を導くためには $\psi(t; \mathbf{P}, \varphi)$ を導けばよいことがわかる。以下に、 $\psi(t; \mathbf{P}, \varphi)$ の導出方法を示す。

4.3.2 一般のトリップ密度と入社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数

一般のトリップ密度 $\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ と入社時刻分布 $f(t)$ を想定した場合の通過時刻の密度関数の導出方法を説明する。ここでの導出方法も、第 3 章で用いた方法とほぼ同様である。図 4.4 のように、領域 D と直線 g との交わりの弦を考え、図 4.5 に示すような座標系を導入する。地点 \mathbf{P} を φ の向きへ横切る移動者の、 \mathbf{P} から目的地 \mathbf{Q}_2 までの所要時間を u と表す。いま、 \mathbf{P} から目的地 \mathbf{Q}_2 までの所要時間が u である移動者に着目し、この移動者の条件付きの通過時刻の密度関数 $\psi(t; \mathbf{P}, \varphi|u)$ を導入する。目的の $\psi(t; \mathbf{P}, \varphi)$ は、条件付きの密度関数 $\psi(t; \mathbf{P}, \varphi|u)$ をもとにして、以下の積分によって導出される：

$$\psi(t; \mathbf{P}, \varphi) = \int_0^{u_{\max}} \psi(t; \mathbf{P}, \varphi|u) g(u) du. \quad (4.3.2)$$

ただし、 $g(u)$ は所要時間 u の密度関数を意味し、 u_{\max} は u の最大値を意味する（この例では $u_{\max} = \frac{l-z}{v}$ ）。以下に、 $\psi(t; \mathbf{P}, \varphi|u)$ および $g(u)$ の導出方法を説明し、それらを用いて式 (4.3.2) の積分を具体的に実行する方法を述べる。

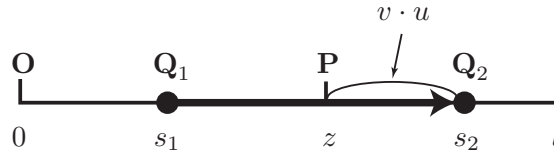


図 4.5 領域 D と直線 g との交わりの弦の上での座標設定.

条件付きの通過時刻の密度関数

地点 P からの所要時間が u である位置に勤務地をもつ通勤者が時刻 t に出社するためには、地点 P を時刻 $t - u$ に通過しなければならない。したがって、条件付きの通過時刻の密度関数 $\psi(t; P, \varphi|u)$ は、図 4.6 に示すように、出社時刻分布を時間軸の負の向きに u だけ平行移動した以下の式で与えられる：

$$\psi(t; P, \varphi|u) = f(t + u) \quad (t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u). \quad (4.3.3)$$

この関係は、もちろん一般のトリップ密度 $\tau(Q_1, Q_2)$ と出社時刻分布 $f(t)$ のもとで成り立つ性質である。

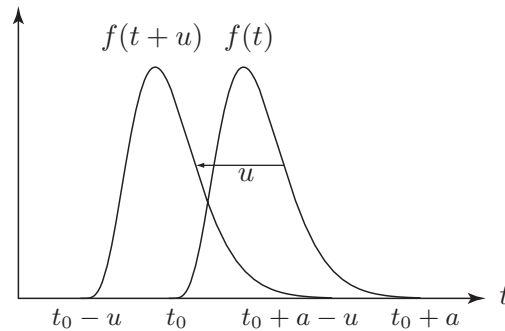


図 4.6 条件付きの通過時刻の密度関数 $\psi(t; P, \varphi|u)$.

観測地点から勤務地までの所要時間の密度関数

地点 P から終点 Q_2 までの所要時間 u の密度関数 $g(u)$ を求めるために、まずその累積分布 $G(u)$ を導く。累積分布 $G(u)$ は、地点 P から所要時間 u 以下で到達可能な勤務地の割合を意味し、図 4.7 のグレー部分で示した領域に勤務地をもつ割合である。

この領域を、 s_1 - s_2 平面に図示したものが図 4.8 である。図中の太枠で示した領域 F は、地点 P を φ の向きに通過するための起・終点ペアの集合に対応し、グレー部分で示した領域 C はそのうち P からの所要時間が u 以下である起・終点ペアの集合に対応する。したがって、累積分布 $G(u)$ は以下のように表される：

$$G(u) = \frac{\iint_C \tau(Q_1, Q_2)(s_2 - s_1) ds_2 ds_1}{\iint_F \tau(Q_1, Q_2)(s_2 - s_1) ds_2 ds_1} \quad (0 \leq u \leq \frac{l-z}{v}). \quad (4.3.4)$$

この式を具体的なトリップ密度 $\tau(Q_1, Q_2)$ ものもとで計算し、それを u に関して微分すれば目的の $g(u)$ を得ることができる（もちろん $G(u)$ が u の関数として陽に得られた場合）。

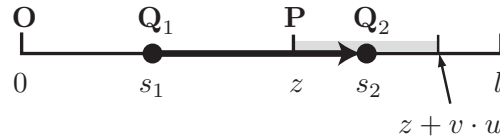


図 4.7 地点 P からの所要時間が u 以下である終点集合 .

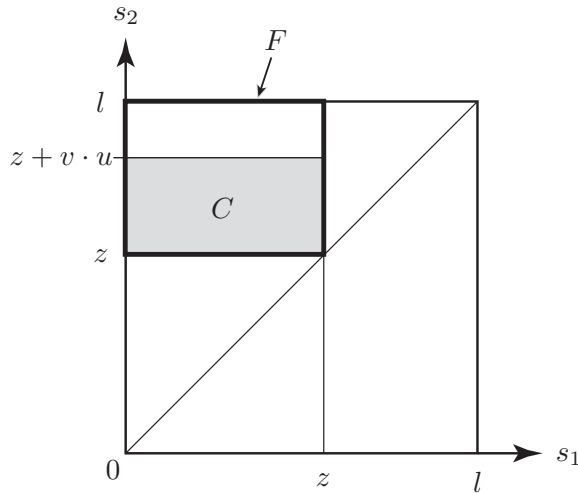


図 4.8 地点 P からの所要時間が u 以下である割合の特定 .

以上で、通過時刻の密度関数 $\psi(t; \mathbf{P}, \varphi)$ を計算するための準備が整った。以下に、 $\psi(t; \mathbf{P}, \varphi|u)$ および $g(u)$ が得られているものとして、式 (4.3.2) の積分を具体的に実行する方法を説明する。

いま、地点 P を φ の向きに通過する移動者に着目し、その移動者の地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u のペアの集合に着目する。この集合は、式 (4.3.3) および式 (4.3.4) の定義域を満たす領域 E で定められ、

$$E = \left\{ (t, u) \mid t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u, 0 \leq u \leq \frac{l-z}{v} \right\} \tag{4.3.5}$$

与えられる。式 (4.3.5) で定められる領域 E は、図 4.9 に示す $t-u$ 平面上の平行四辺形に対応する。この平行四辺形の形状には、図 4.9 に示す 2 通りが存在し、到着時間幅 a と $\frac{l-z}{v}$ との大小関係により、 $a \leq \frac{l-z}{v}$ の場合は図 4.9 (a) のようになり、 $a > \frac{l-z}{v}$ の場合は図 4.9 (b) のようになる。

図 4.9 を利用して、式 (4.3.2) の積分

$$\psi(t; \mathbf{P}, \varphi) = \int_0^{u_{\max}} \psi(t; \mathbf{P}, \varphi|u)g(u)du$$

を行えばよい。この式の積分範囲は、図 4.9 (a) および (b) に示す通り、通過時刻 t の範囲によって 3 つの異なる場合をもつ。具体的には、図 4.9 (a) の場合は、(i) $t_0 - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l-z}{v}$, (ii) $t_0 + a - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0$, (iii) $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ の 3 通り、図 4.9 (b) の場合は、(i) $t_0 - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0$, (ii) $t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{l-z}{v}$, (iii) $t_0 + a - \frac{l-z}{v} \leq t \leq t_0 + a$ の 3 通りである。積分範囲は、 t 軸に垂直な (i), (ii), (iii) で示したこれらの線分と、平行四辺形 E との交わりの部分で与えられる。式 (4.3.3) の

$$\psi(t; \mathbf{P}, \varphi|u) = f(t+u) \quad (t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u)$$

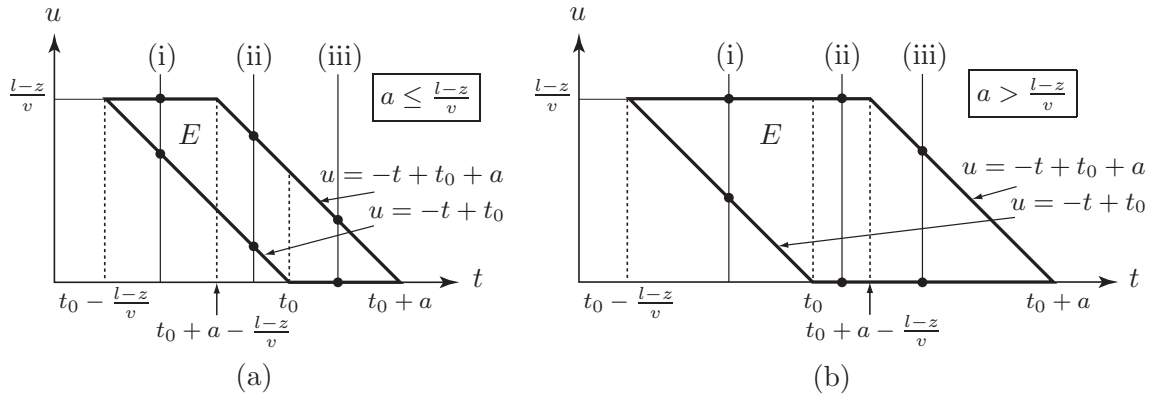


図 4.9 地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 .

なる関係を用いれば, $\psi(t; \mathbf{P}, \varphi)$ は以下の通りに表される :

(a) $a \leq \frac{l-z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l-z}{v}$ ならば

$$\psi(t; \mathbf{P}, \varphi) = \int_{-t+t_0}^{\frac{l-z}{v}} f(t+u)g(u)du, \quad (4.3.6)$$

(ii) $t_0 + a - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi(t; \mathbf{P}, \varphi) = \int_{-t+t_0}^{-t+t_0+a} f(t+u)g(u)du, \quad (4.3.7)$$

(iii) $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi(t; \mathbf{P}, \varphi) = \int_0^{-t+t_0+a} f(t+u)g(u)du. \quad (4.3.8)$$

(b) $a > \frac{l-z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi(t; \mathbf{P}, \varphi) = \int_{-t+t_0}^{\frac{l-z}{v}} f(t+u)g(u)du, \quad (4.3.9)$$

(ii) $t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{l-z}{v}$ ならば

$$\psi(t; \mathbf{P}, \varphi) = \int_0^{\frac{l-z}{v}} f(t+u)g(u)du, \quad (4.3.10)$$

(iii) $t_0 + a - \frac{l-z}{v} \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi(t; \mathbf{P}, \varphi) = \int_0^{-t+t_0+a} f(t+u)g(u)du. \quad (4.3.11)$$

4.3.3 一様なトリップ密度と入社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数

ここでは，トリップ密度として領域 D 上で一様かつ独立に分布する起・終点に対応する以下のものを想定する：

$$\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) = \frac{N}{S^2}. \quad (4.3.12)$$

入社時刻分布としては時間区間 $[t_0, t_0 + a]$ の一様分布を想定する：

$$f(t) = \frac{1}{a} \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + a). \quad (4.3.13)$$

まず，地点 P から勤務地までの所要時間の累積分布 $G(u)$ は式 (4.3.4) より以下のように導かれる：

$$G(u) = \frac{vu(vu + z)}{l(l - z)} \quad (0 \leq u \leq \frac{l-z}{v}). \quad (4.3.14)$$

これを u について微分すると $g(u)$ は以下の通りに導かれる：

$$g(u) = \frac{v(2vu + z)}{l(l - z)} \quad (0 \leq u \leq \frac{l-z}{v}). \quad (4.3.15)$$

以上の想定のもとで，式 (4.3.2) の積分を実行すれば $\psi(t; \mathbf{P}, \varphi)$ は以下のように導かれる：

(a) $a \leq \frac{l-z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l-z}{v}$ ならば

$$\psi(t; \mathbf{P}, \varphi) = \frac{-(vt - vt_0 + l - z)(vt - vt_0 - l)}{al(l - z)}, \quad (4.3.16)$$

(ii) $t_0 + a - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi(t; \mathbf{P}, \varphi) = \frac{v(2vt_0 - 2vt + z + va)}{l(l - z)}, \quad (4.3.17)$$

(iii) $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi(t; \mathbf{P}, \varphi) = \frac{v(t - t_0 + a)(vt - vt_0 - z - va)}{al(l - z)}. \quad (4.3.18)$$

(b) $a > \frac{l-z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l-z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi(t; \mathbf{P}, \varphi) = \frac{-(vt - vt_0 + l - z)(vt - vt_0 - l)}{al(l - z)}, \quad (4.3.19)$$

(ii) $t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{l-z}{v}$ ならば

$$\psi(t; \mathbf{P}, \varphi) = \frac{1}{a}, \quad (4.3.20)$$

(iii) $t_0 + a - \frac{l-z}{v} \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi(t; \mathbf{P}, \varphi) = \frac{v(t - t_0 + a)(vt - vt_0 - z - va)}{al(l - z)}. \quad (4.3.21)$$

4.4 非凸領域における通過量の導出

4.4.1 一般のトリップ密度のもとでの通過量

図 4.10 に示すように、凸でない領域 D における φ の向きへの通過量の導出法を述べる。ただし、図中に示すように領域 D の外側も自由に通行できるものとする。このとき、移動が観測される領域は、図 4.10 の点線で示した D の凸包で与えられることに注意されたい。

なお、凸領域に限定されたモデルでは、地理的障害物を明示的に組み込んだモデルが Pearce によって提案されている (Pearce, 1981)。Pearce は、直線分で与えられた通行不能領域を導入し、(1) 起・終点が半径 R の円盤領域において一様独立に分布する場合と、(2) 無限平面において Sherratt-Tanner 型に従って独立に分布する場合の双方において、 φ の向きへの通過量を解析的に導いている。

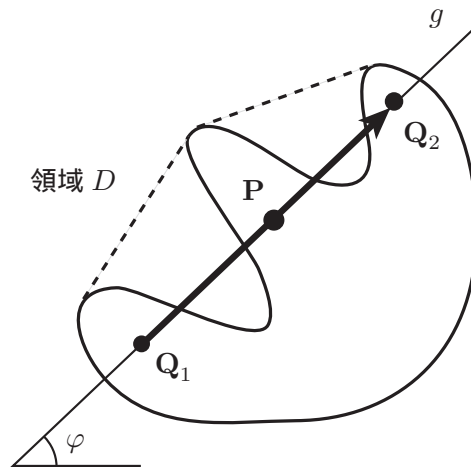


図 4.10 非凸領域における一様な直線を用いた φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ の導出法.

領域 D が凸でない場合、観測地点 \mathbf{P} を通り φ 方向へ伸びる直線 g との交点数は、4 点以上になるケースが存在する*3。ここで、領域 D が凸でない場合の $q(\mathbf{P}, \varphi)$ を導く際に、直線 g との交点数によって以下 2 つの場合に分類して考える：

- (i) 領域 D と直線 g との交点数が 2 つの場合；
- (ii) 領域 D と直線 g との交点数が 4 つ以上の場合。

*3 直線 g と領域 D との交点数は偶数個であると考えてよい。

(i) の交点が 2 つの場合は、通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ は凸領域の場合の式 (4.2.7) に一致する．したがって、(ii) の交点が 4 つ以上の場合について、 φ の向きへの通過量をシステムティックに計算するための方法を用意しておけば、任意形状の領域内に起・終点が分布する状況にも対応することができる．(ii) のうち、交点がちょうど 4 つの場合の $q(\mathbf{P}, \varphi)$ については、大津・腰塚 (1999a) に導出方法が示されている．以下では、大津・腰塚 (1999a) の方法を用いて、交点がちょうど 4 つの場合の $q(\mathbf{P}, \varphi)$ を導出する．続いて、この結果を用いれば交点数が 6 つ以上の場合にも対応できることを示し、任意の交点数の場合の $q(\mathbf{P}, \varphi)$ の導出方法を示す．

図 4.11 に示すように、直線 g と領域 D とが 4 点以上で交わる場合を考え、交点数を $2m$ ($m \geq 2$) とする．ここで、図 4.11 (a) は、地点 \mathbf{P} が領域 D の内部にある場合を表しており、図 4.11 (b) は、地点 \mathbf{P} が領域 D の外部にある場合を表している．どちらの場合も、領域と直線との共通部分 $D \cap g$ は、複数本の線分から構成されることになる．

以下に各々の場合について、 φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ の導出法を示す．いま、図 4.11 (a) と (b) に示すように、これらの線分に順に番号を振る．ただし、図 4.11 (a) においては、 \mathbf{P} を含む線分は \mathbf{P} を境に 2 つの線分に分割されるものとする．このとき、図 4.11 (a) の場合には、起点が番号 1 から k のいずれかの線分に存在し、終点 \mathbf{Q}_2 が番号 $(k+1)$ から $(m+1)$ のいずれかの線分へ存在するようなすべての移動は、地点 \mathbf{P} を φ の向きへ横切ることになる．同様に、図 4.11 (b) の場合には、番号 1 から k のいずれかの線分に起点をもち、番号 $(k+1)$ から m のいずれかの線分へ終点をもち移動は、すべて地点 \mathbf{P} を φ の向きへ横切ることになる．したがって、 \mathbf{P} を挟むように位置する線分ペアの間の移動に基づく φ の向きへの通過量を用意し、これをすべての線分ペアについて計算して足し上げることによって、目的の φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ を導くことができる．これを式の形で表しておこう．

いま、 i 番目の線分に起点をもち、 j 番目の線分に終点をもち移動にのみ着目したときの、地点 \mathbf{P} における φ の向きへの通過量を $q_{ij}(\mathbf{P}, \varphi)$ と表す．このとき、図 4.11 (a) に示すように地点 \mathbf{P} が領域 D の内部に存在する場合は、トータルの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ は以下のように表される：

$$q(\mathbf{P}, \varphi) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{m+1} q_{ij}(\mathbf{P}, \varphi). \quad (4.4.1)$$

同様に、図 4.11 (b) に示すように地点 \mathbf{P} が領域 D の外部に存在する場合は、トータルの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ は以下のように表される：

$$q(\mathbf{P}, \varphi) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^m q_{ij}(\mathbf{P}, \varphi). \quad (4.4.2)$$

以下に、 $q_{ij}(\mathbf{P}, \varphi)$ の導出法を示す．

線分対間の φ の向きへの通過量の導出法

図 4.12 に示すように、領域と直線との共通部分 $D \cap g$ の線分集合のうち、地点 \mathbf{P} を挟むように位置する線分 i と線分 j に着目する．ここで、線分 i の \mathbf{P} から遠い側の端点に原点 \mathbf{O} をとり、図 4.12 のように座標系を導入する．いま、線分 i は区間 $[0, l_1]$ で定義され、線分 j は区間 $[l_2, l_3]$ で定義されているものとする．このとき、線分 i から線分 j への移動に対応する通過量 $q_{ij}(\mathbf{P}, \varphi)$ は以下のように表される：

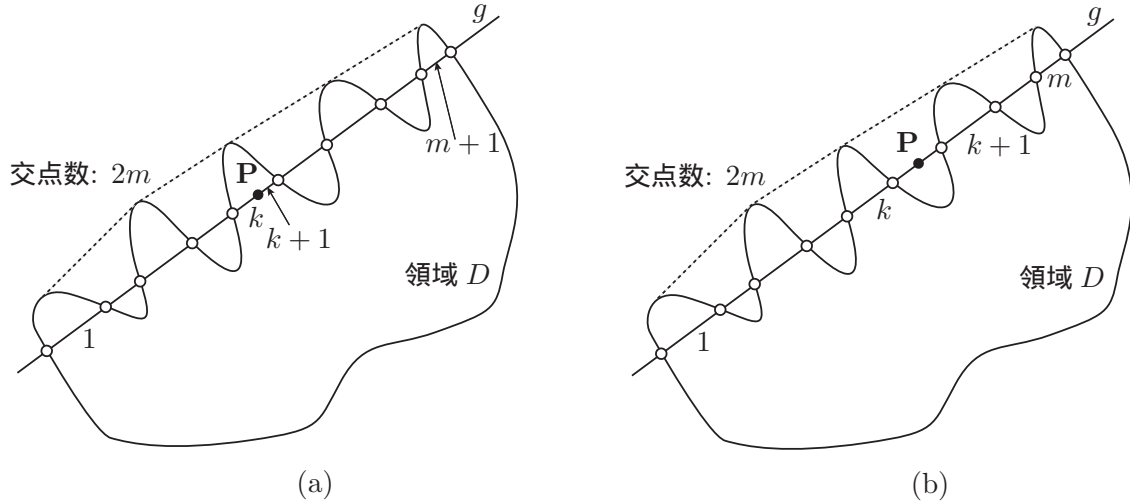


図 4.11 非凸領域における $q(\mathbf{P}, \varphi)$ の導出 : (a) \mathbf{P} が D の内部にあるとき ; (b) \mathbf{P} が D の外部にあるとき .

$$\begin{aligned}
 q_{ij}(\mathbf{P}, \varphi) &= \int_{\mathbf{Q}_1 \in [0, l_1]} \int_{\mathbf{Q}_2 \in [l_2, l_3]} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_1 d\mathbf{Q}_2 \\
 &= \int_{s_1=0}^{l_1} \int_{s_2=l_2}^{l_3} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) (s_2 - s_1) ds_2 ds_1.
 \end{aligned}
 \tag{4.4.3}$$

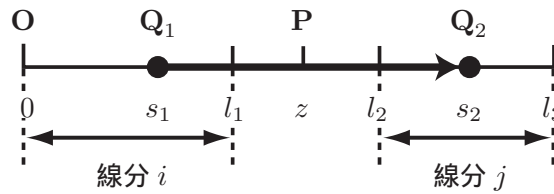


図 4.12 線分対間の φ の向きへの通過量の導出法 .

4.4.2 一様なトリップ密度のもとでの通過量

移動の起点 \mathbf{Q}_1 と終点 \mathbf{Q}_2 が領域 D 上で一様かつ独立に分布する場合の、線分対間の φ の向きへの通過量を導出する。この場合のトリップ密度は以下のように与えられる：

$$\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) = \frac{N}{S^2}.
 \tag{4.4.4}$$

このとき、式 (4.4.3) の積分は容易に実行できて、 $q_{ij}(\mathbf{P}, \varphi)$ は以下のように導かれる：

$$\begin{aligned}
 q_{ij}(\mathbf{P}, \varphi) &= \frac{N}{S^2} \int_{\mathbf{Q}_1 \in [0, l_1]} \int_{\mathbf{Q}_2 \in [l_2, l_3]} d\mathbf{Q}_1 d\mathbf{Q}_2 \\
 &= \frac{N}{S^2} \int_{s_1=0}^{l_1} \int_{s_2=l_2}^{l_3} (s_2 - s_1) ds_2 ds_1 \\
 &= \frac{N}{S^2} \left[\frac{l_1(l_3 - l_1)l_3}{2} - \frac{l_1(l_2 - l_1)l_2}{2} \right].
 \end{aligned}
 \tag{4.4.5}$$

ここで、地点 P の座標 z が式 (4.4.5) に表れていないことに注意されたい。線分 i と線分 j とに挟まれているどの地点においても、線分間のすべての移動が P を通過することになるのである。ただし、後で示すように、この関係は通過密度については成り立たない。通過時刻まで含めて考えれば、観測地点 P が区間 $[l_1, l_2]$ 上のどの地点にあるかが意味をもつのである。

式 (4.4.5) において、 $l_1 = l_2 = z$ を代入すれば、(第 2 項目がゼロとなり) 式 (4.2.9) の結果に一致する。その意味で、式 (4.2.9) は式 (4.4.5) の特殊例であることがわかる。

これをもとに、 φ の向きへの通過量 $q(P, \varphi)$ を導くには、図 4.11 (a) の場合には式 (4.4.1) を用いて、図 4.11 (b) の場合には式 (4.4.2) を用いて、すべての線分対間の通過量を足し上げればよい。

4.5 非凸領域における通過密度の導出

4.5.1 通過密度の定義

非凸領域において直線 g との交点が 4 つ以上の場合の通過密度 $p(P, t, \varphi)$ を導入する。ここでも通過量を導いたときと同様に考え、 P を挟むように位置する線分対間の移動に対応する通過密度を用意し、最後にすべての組み合わせについて足し上げることで、目的の通過密度を導こう。図 4.12 に示すように、線分 i から線分 j への移動にのみ着目したときの通過密度を $p_{ij}(P, t, \varphi)$ と記述する。このときの地点 P を通過する時刻の密度関数を $\psi_{ij}(t; P, \varphi)$ と表す。ここで、通過密度 $p_{ij}(P, t, \varphi)$ を線分 i から線分 j への移動に対応する通過量 $q_{ij}(P, \varphi)$ の時刻に関する密度として導入する：

$$p_{ij}(P, t, \varphi) = q_{ij}(P, \varphi) \cdot \psi_{ij}(t; P, \varphi). \quad (4.5.1)$$

ここで、図 4.11 (a) に示すように地点 P が領域 D の内部に存在する場合は、通過密度 $p(P, t, \varphi)$ は以下のように表される：

$$\begin{aligned} p(P, t, \varphi) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{m+1} p_{ij}(P, t, \varphi) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{m+1} q_{ij}(P, \varphi) \cdot \psi_{ij}(t; P, \varphi). \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

同様にして、図 4.11 (b) に示すように地点 P が領域 D の外部に存在する場合は、通過密度 $p(P, t, \varphi)$ は以下のように表される：

$$\begin{aligned} p(P, t, \varphi) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^m p_{ij}(P, t, \varphi) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^m q_{ij}(P, \varphi) \cdot \psi_{ij}(t; P, \varphi). \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

以下に、 $\psi_{ij}(t; P, \varphi)$ の導出方法を示す。

4.5.2 一般のトリップ密度と出社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数

非凸領域において一般のトリップ密度 $\tau(Q_1, Q_2)$ と出社時刻分布 $f(t)$ を想定した場合の通過時刻の密度関数の導出方法を説明する。

線分対における通過時刻の密度関数の定式化

図 4.13 に示すように領域 D が直線 g によって切り取られる弦のうち、区間 $[0, l_1]$ で定義される i 番目の線分から、区間 $[l_2, l_3]$ で定義される j 番目の線分への移動に着目し、地点 P を通過する時刻の密度関数を $\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi)$ と表す。いま、 P から目的地 Q_2 までの所要時間が u である移動者に着目し、この移動者の条件付きの通過時刻の密度関数 $\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi|u)$ を導入する。目的の $\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi)$ は、条件付きの密度関数 $\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi|u)$ をもとにして、以下の積分によって導出される：

$$\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi) = \int_0^{u_{\max}} \psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi|u) g(u) du. \quad (4.5.4)$$

ただし、 $g(u)$ は所要時間 u の密度関数を意味し、 u_{\max} は u の最大値を意味する。式 (4.5.4) の積分を具体的に実行するために、 $\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi|u)$ および $g(u)$ の導出方法を説明する。

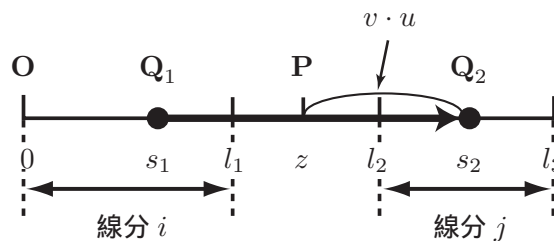


図 4.13 領域 D と直線 g との交わりの弦の上での座標設定。

地点 P からの所要時間が u である位置に勤務地をもつ通勤者が時刻 t に出勤するためには、地点 P を時刻 $t - u$ に通過しなければならない。したがって、条件付きの通過時刻の密度関数 $\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi|u)$ は、出勤時刻分布を時間軸の負の向きに u だけ平行移動した以下の式で与えられる：

$$\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi|u) = f(t + u) \quad (t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u). \quad (4.5.5)$$

この関係は、もちろん一般のトリップ密度 $\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ と出勤時刻分布 $f(t)$ のもとで成り立つ性質である。

次に、地点 P からの所要時間 u の密度関数 $g(u)$ を求めるために、まずその累積分布 $G(u)$ を導く。累積分布 $G(u)$ は、地点 P から所要時間 u 以下で到達可能な勤務地の割合を意味する。この領域を、 s_1 - s_2 平面に図示すると図 4.14 のようになる。図中の太枠で示した領域 F は地点 P を φ の向きに通過するための起・終点ペアの集合に対応し、グレー部分で示した領域 C はそのうち P からの所要時間が u 以下である起・終点ペアの集合に対応する。したがって、累積分布 $G(u)$ は以下のように表される：

$$G(u) = \frac{\iint_C \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)(s_2 - s_1) ds_2 ds_1}{\iint_F \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)(s_2 - s_1) ds_2 ds_1} \quad \left(\frac{l_2 - z}{v} \leq u \leq \frac{l_3 - z}{v} \right). \quad (4.5.6)$$

ここで、 u の定義域が、(0 からではなく) $\frac{l_2 - z}{v} \leq u \leq \frac{l_3 - z}{v}$ で定義されることに注意されたい。この式を具体的なトリップ密度 $\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ ものもとで計算し、それを u に関して微分すれば目的の $g(u)$ を得ることができる (もちろん $G(u)$ が u の関数として陽に得られた場合)。

以上で、通過時刻の密度関数 $\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi)$ を計算するための準備が整った。以下に、 $\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi|u)$ および $g(u)$ が得られているものとして、式 (4.5.4) の積分を具体的に実行する方法を説明する。

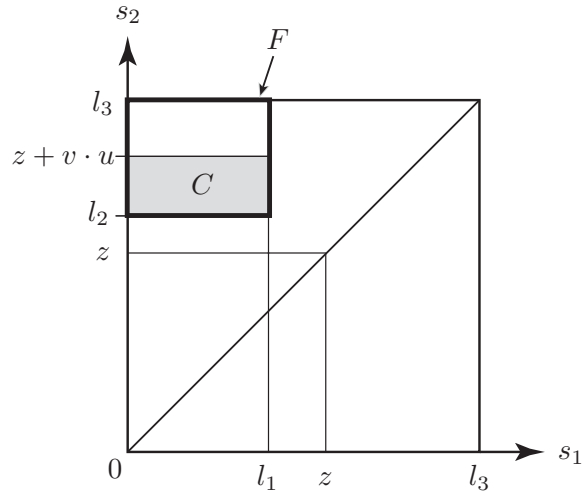


図 4.14 地点 P からの所要時間が u 以下である割合の特定 .

いま , 線分 i から線分 j への移動に対応する , 地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u のペアの集合に着目する . この集合を t - u 平面上に特定する . この領域は , 式 (4.5.5) および式 (4.5.6) の定義域を満たす領域 E で定められ ,

$$E = \left\{ (t, u) \mid t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u, \frac{l_2 - z}{v} \leq u \leq \frac{l_3 - z}{v} \right\} \quad (4.5.7)$$

与えられる . 式 (4.5.7) で定められる領域 E は , 図 4.15 に示す t - u 平面上の平行四辺形に対応する . この平行四辺形の形状には図 4.15 に示す 2 通りが存在し , 到着時間幅 a と $\frac{l_3 - l_2}{v}$ との大小関係により , $a \leq \frac{l_3 - l_2}{v}$ の場合には図 4.15 (a) のようになり , $a > \frac{l_3 - l_2}{v}$ の場合には図 4.15 (b) のようになる .

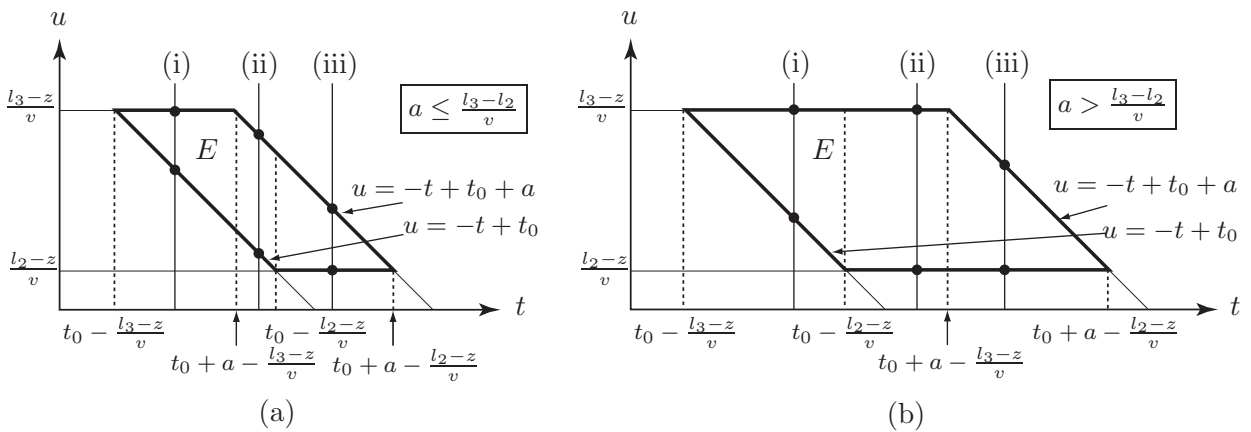


図 4.15 地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 .

図 4.15 を利用して , 式 (4.5.4) の積分

$$\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi) = \int_0^{u_{\max}} \psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi|u)g(u)du$$

の計算方法を説明する . この式の積分範囲は , 図 4.15 (a) および (b) に示す通り , 通過時刻 t の範囲によって 3 つの異なる場合をもつ . 具体的には , 図 4.15 (a) の場合は , (i) $t_0 - \frac{l_3 - z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l_3 - z}{v}$,

(ii) $t_0 + a - \frac{l_3 - z}{v} \leq t < t_0 - \frac{l_2 - z}{v}$, (iii) $t_0 - \frac{l_2 - z}{v} \leq t \leq t_0 + a - \frac{l_2 - z}{v}$ の3通り, 図 4.15 (b) の場合は, (i) $t_0 - \frac{l_3 - z}{v} \leq t < t_0 - \frac{l_2 - z}{v}$, (ii) $t_0 - \frac{l_2 - z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l_3 - z}{v}$, (iii) $t_0 + a - \frac{l_3 - z}{v} \leq t \leq t_0 + a - \frac{l_2 - z}{v}$ の3通りである. 積分範囲は, t 軸に垂直な (i), (ii), (iii) で示したこれらの線分と, 平行四辺形 E との交わりの部分で与えられる. 式 (4.5.5) の

$$\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi|u) = f(t+u) \quad (t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u)$$

なる関係を用いれば, $\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi)$ は以下の通りに表される:

(a) $a \leq \frac{l_3 - l_2}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l_3 - z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l_3 - z}{v}$

$$\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi) = \int_{-t+t_0}^{\frac{l_3 - z}{v}} f(t+u)g(u)du, \quad (4.5.8)$$

(ii) $t_0 + a - \frac{l_3 - z}{v} \leq t < t_0 - \frac{l_2 - z}{v}$

$$\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi) = \int_{-t+t_0}^{-t+t_0+a} f(t+u)g(u)du, \quad (4.5.9)$$

(iii) $t_0 - \frac{l_2 - z}{v} \leq t \leq t_0 + a - \frac{l_2 - z}{v}$

$$\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi) = \int_{\frac{l_2 - z}{v}}^{-t+t_0+a} f(t+u)g(u)du. \quad (4.5.10)$$

(b) $a > \frac{l_3 - l_2}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l_3 - z}{v} \leq t < t_0 - \frac{l_2 - z}{v}$

$$\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi) = \int_{-t+t_0}^{\frac{l_3 - z}{v}} f(t+u)g(u)du, \quad (4.5.11)$$

(ii) $t_0 - \frac{l_2 - z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l_3 - z}{v}$

$$\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi) = \int_{\frac{l_2 - z}{v}}^{\frac{l_3 - z}{v}} f(t+u)g(u)du, \quad (4.5.12)$$

(iii) $t_0 + a - \frac{l_3 - z}{v} \leq t \leq t_0 + a - \frac{l_2 - z}{v}$

$$\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi) = \int_{\frac{l_2 - z}{v}}^{-t+t_0+a} f(t+u)g(u)du. \quad (4.5.13)$$

4.5.3 一様なトリップ密度と出社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数

ここでは，トリップ密度として領域 D 上で一様かつ独立な起・終点分布に対応する以下のものを想定する：

$$\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) = \frac{N}{S^2}. \quad (4.5.14)$$

出社時刻分布としては時間区間 $[t_0, t_0 + a]$ の一様分布を想定する：

$$f(t) = \frac{1}{a} \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + a). \quad (4.5.15)$$

まず，地点 \mathbf{P} から勤務地までの所要時間の累積分布 $G(u)$ は式 (4.5.6) より以下のように導かれる：

$$G(u) = \frac{(z + vu - l_2)(z + vu + l_2 - l_1)}{(l_3 - l_2)(l_3 + l_2 - l_1)} \quad \left(\frac{l_2 - z}{v} \leq u \leq \frac{l_3 - z}{v} \right). \quad (4.5.16)$$

これを u について微分すると $g(u)$ は以下の通りに導かれる：

$$g(u) = \frac{v(2z + 2vu - l_1)}{(l_3 - l_2)(l_3 + l_2 - l_1)} \quad \left(\frac{l_2 - z}{v} \leq u \leq \frac{l_3 - z}{v} \right). \quad (4.5.17)$$

以上の想定のもとで，式 (4.5.4) の積分を実行すれば $\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi)$ は以下のように導かれる：

(a) $a \leq \frac{l_3 - l_2}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l_3 - z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l_3 - z}{v}$

$$\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi) = \frac{(vt - vt_0 + l_3 - z)(vt_0 - vt + l_3 + z - l_1)}{a(l_3 - l_2)(l_3 + l_2 - l_1)}, \quad (4.5.18)$$

(ii) $t_0 + a - \frac{l_3 - z}{v} \leq t < t_0 - \frac{l_2 - z}{v}$

$$\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi) = \frac{v(2vt_0 - 2vt + 2z - l_1 + va)}{(l_3 - l_2)(l_3 + l_2 - l_1)}, \quad (4.5.19)$$

(iii) $t_0 - \frac{l_2 - z}{v} \leq t \leq t_0 + a - \frac{l_2 - z}{v}$

$$\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi) = \frac{(vt - vt_0 - va - z + l_2)(vt - vt_0 - va - z - l_2 + l_1)}{a(l_3 - l_2)(l_3 + l_2 - l_1)}. \quad (4.5.20)$$

(b) $a > \frac{l_3 - l_2}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l_3 - z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l_3 - z}{v}$

$$\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi) = \frac{(vt - vt_0 + l_3 - z)(vt_0 - vt + l_3 + z - l_1)}{a(l_3 - l_2)(l_3 + l_2 - l_1)}, \quad (4.5.21)$$

$$(ii) t_0 + a - \frac{l_3 - z}{v} \leq t < t_0 - \frac{l_2 - z}{v}$$

$$\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi) = \frac{1}{a}, \quad (4.5.22)$$

$$(iii) t_0 - \frac{l_2 - z}{v} \leq t \leq t_0 + a - \frac{l_2 - z}{v}$$

$$\psi_{ij}(t; \mathbf{P}, \varphi) = \frac{(vt - vt_0 - va - z + l_2)(vt - vt_0 - va - z - l_2 + l_1)}{a(l_3 - l_2)(l_3 + l_2 - l_1)}. \quad (4.5.23)$$

4.6 通過量と通過密度の数値例

本節では、一様なトリップ密度に基づく通過量と通過密度の数値例を示す。

都市領域の形状として、図 4.16 に示すように、凸図形の例として円盤（図 4.16 (a)）と正方形（図 4.16 (b)）を採用し、非凸な図形の例として一部（右下の 1/4 の正方形部分）が欠けた正方形（図 4.16 (c)）を採用する。

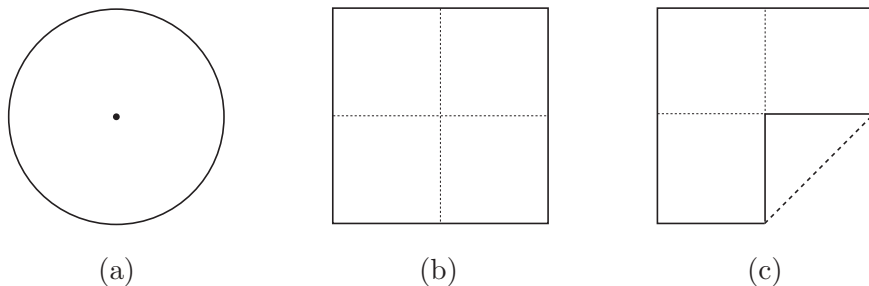


図 4.16 数値例で用いる 3 種類の都市形状：(a) 円盤；(b) 正方形；(c) 一部が欠けた正方形。

4.6.1 通過量の数値例

本小節では、 φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ と、それを角度に関して積分して得られる合計の通過量 $q_{\text{合}}(\mathbf{P})$ の数値例を示す。以下の数値例では、総トリップ数 $N = 1$ を採用した。

図 4.17 は、円盤領域における計算例を示している。図 4.17 (a) に示す $q(\mathbf{P}, \varphi)$ と図 4.17 (b) に示す $q_{\text{合}}(\mathbf{P})$ とを比べると、おおまかな形状は近いものの、 $q_{\text{合}}(\mathbf{P})$ の方が中心部における集中度合いが若干高くなっている様子が見て取れる。

図 4.18 と図 4.19 は、それぞれ正方形と一部が欠けた正方形における、 φ の向きへの通過量の計算例を示す。（ともに $\varphi = 0$ と $\varphi = \pi/4$ の 2 つの例を示した）。大きな移動距離が存在する $\varphi = \pi/4$ のグラフは $\varphi = 0$ のものと比較して、相対的にかなり大きな値を取ることがわかる（縦軸のスケールの違いに注意）。このことは、式 (4.2.9) の結果を吟味すると理解しやすい。領域 D と φ 方向へ伸びる直線 g との共通部分の線分の長さ l が 2 倍になると、その線分の中間点では 8 倍の通過量が観測されるのである。この結果は、通行不能部分や特定方向への高速鉄道網などの存在により細長く発達した都市領域では、発達方向への移動が中心部に大きな影響を与えることを示している。図 4.20 に、正方形と一部が欠けた正方形における、通過量 $q_{\text{合}}(\mathbf{P})$ の計算例を示す。どちらも、中心付近における高い集中が見て取れる。

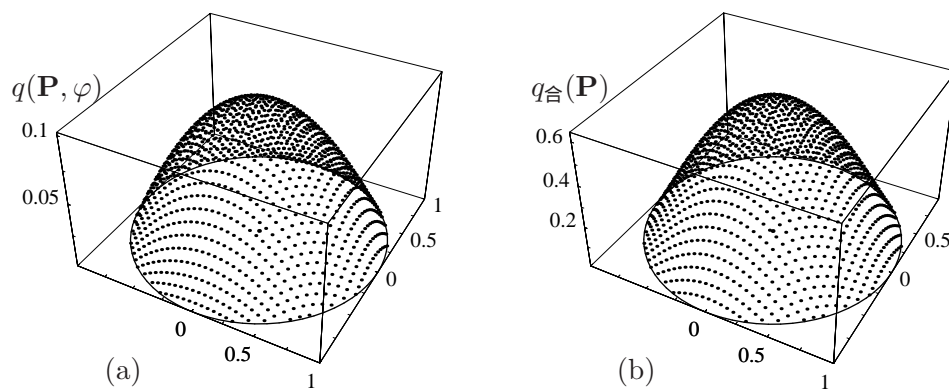


図 4.17 円盤領域における通過量 : (a) $\varphi = 0$ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$; (b) 通過量 $q_{\text{合}}(\mathbf{P})$.

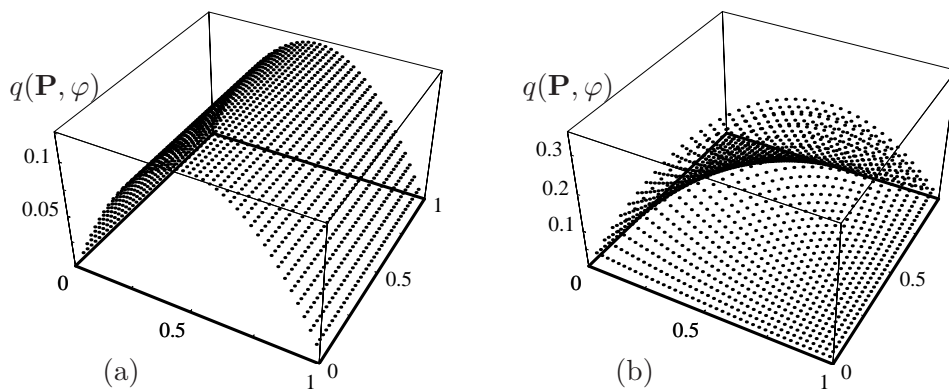


図 4.18 正方形領域における φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$: (a) $\varphi = 0$ の場合; (b) $\varphi = \pi/4$ の場合 .

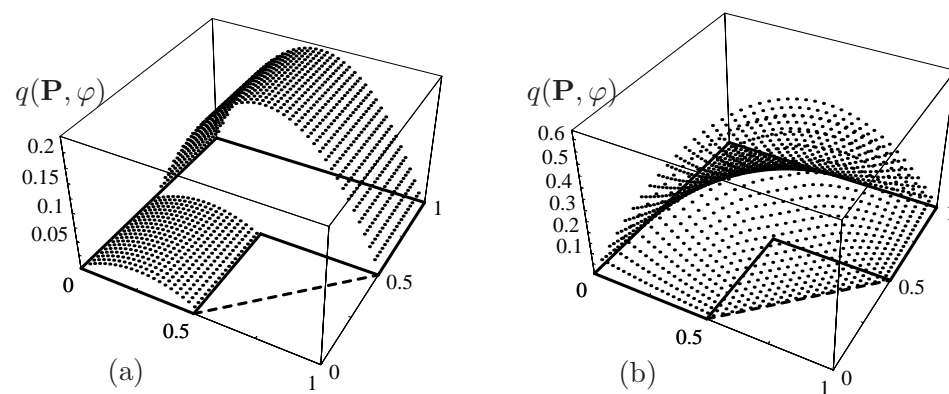


図 4.19 一部が欠けた正方形領域における φ の向きへの通過量 $q(\mathbf{P}, \varphi)$: (a) $\varphi = 0$ の場合; (b) $\varphi = \pi/4$ の場合 .

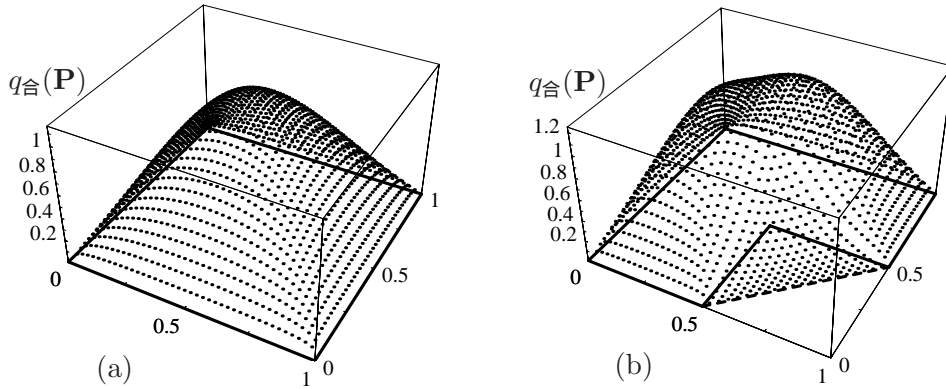


図 4.20 通過量 $q_{\text{合}}(\mathbf{P})$: (a) 正方形の場合; (b) 一部が欠けた正方形の場合 .

4.6.2 通過密度の空間的分布

本小節では、 φ の向きへの通過密度 $q(\mathbf{P}, \varphi)$ と、それを角度に関して積分して得られる合計の通過密度 $q_{\text{合}}(\mathbf{P})$ の空間的分布の数値例を示す。各パラメータの数値例として以下のものを採用する。

最大距離^{*4}の所要時間を 2 と定め、最も早く移動を開始する通勤者の移動開始時刻が $t = 0$ となるように $t_0 = 2$ とする。出社時刻分布としては、時間区間 $[2, 3]$ の間の一様分布のものを採用する。この例では、移動が観測される時間区間は $t \in [0, 3]$ となる。また、総トリップ数を $N = 1$ とする。

図 4.21 に円盤領域における $\varphi = 0$ 方向への通過密度 $p(\mathbf{P}, t, \varphi)$ の概形を、図 4.22 に合計の通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の概形を示した。図 4.21 より、最大の通過密度が観測される地点は、時刻の経過と共に移動の向きにシフトしていく様子が見て取れる。

図 4.23 と図 4.24 に、それぞれ正方形領域における $\varphi = 0$ と $\varphi = \pi/4$ の向きへの通過密度 $p(\mathbf{P}, t, \varphi)$ の概形を示した。また、図 4.25 に合計の通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の概形を示した。

図 4.26 と図 4.27 に、それぞれ一部が欠けた正方形領域における $\varphi = 0$ と $\varphi = \pi/4$ の向きへの通過密度 $p(\mathbf{P}, t, \varphi)$ の概形を示した。また、図 4.28 に合計の通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の概形を示した。

4.6.3 通過密度の時間的分布

以下に、3つの都市領域における、図 4.29 に示す各観測地点における通過密度の時間的変化を示す。図 4.30、図 4.31 および図 4.32 にそれぞれ円盤領域、正方形および一部が欠けた正方形における合計の通過密度の時間的分布を示す。各地点における出社時刻分布として、一斉出社と $a = 0.5$, $a = 1.0$, $a = 1.5$ および $a = 2.0$ の一様出社の、合計 5 パターンに対応する通過密度を示している。

これら 3つのグラフの中心付近の観測地点では、一斉出社の場合や a の値の小さい一様到着の場合には、出社が開始される $t = 2$ よりもかなり前にピークをもつ傾向が見て取れる。このことは、中心部を経由目的で通過するトリップが多く含まれるためだと思われる。

図 4.32 の観測地点 $(x, y) = (0.6, 0.4)$ は、領域外部に位置する点である。この点における観測値は、他の地域（この場合は一部が欠けた正方形地域）の内々の移動によってその地点がどのくらい通過のために用いられるかを示すものである。自動車交通を想定すれば、ある地域の内部同士の移動によって、

*4 円盤の場合は直径の両端点間の移動距離に対応し、正方形の場合には対角線の両端点間の移動距離に対応する。

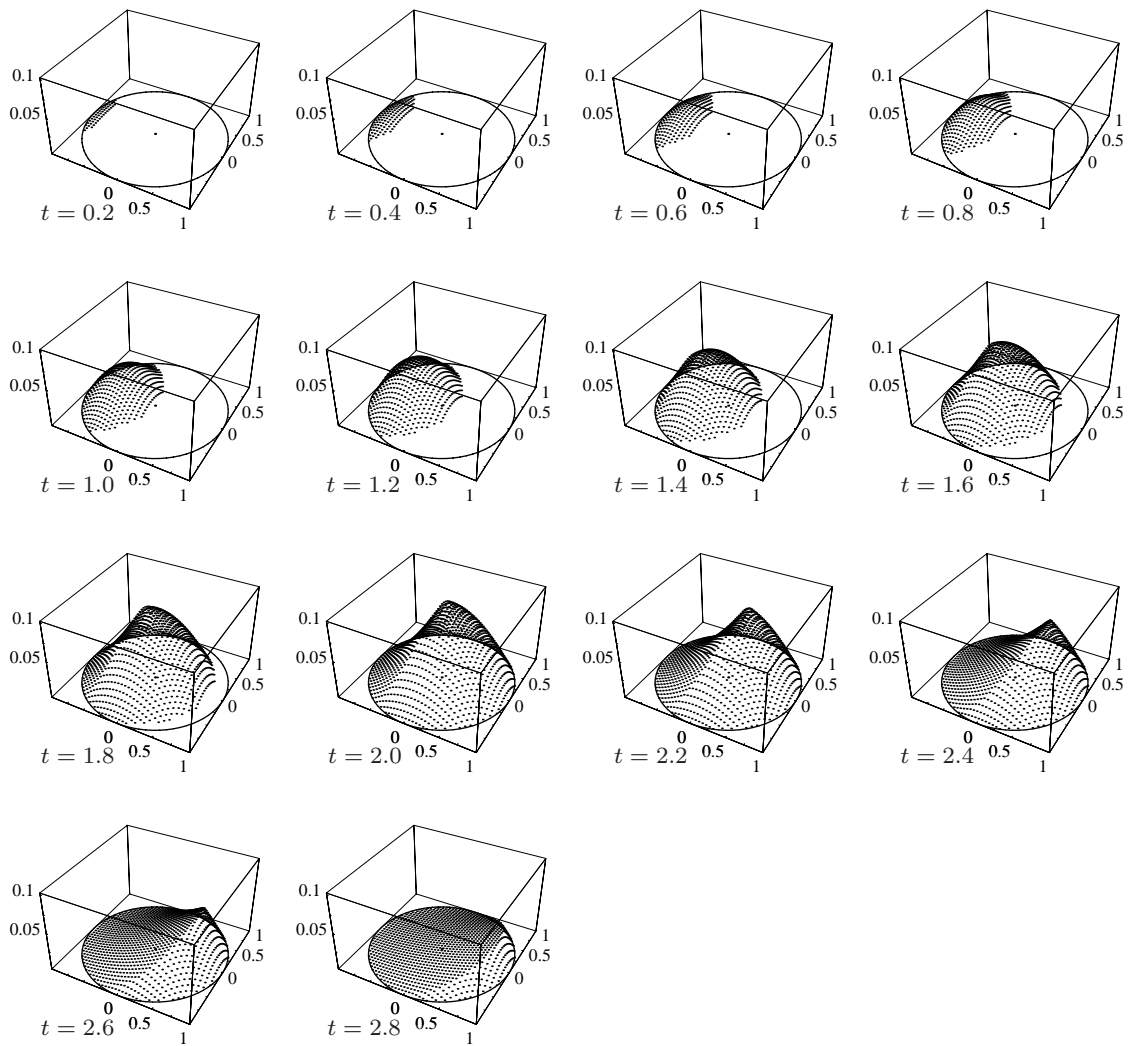


図 4.21 円盤領域における $\varphi = 0$ の向きへの通過密度 $p(P, t, \varphi)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).

外の地域にどのくらいの排気ガスを撒き散らすかを測る，基本モデルと位置付けられよう．図 4.32 の例では，ある程度の通過が観測されることが見て取れる．

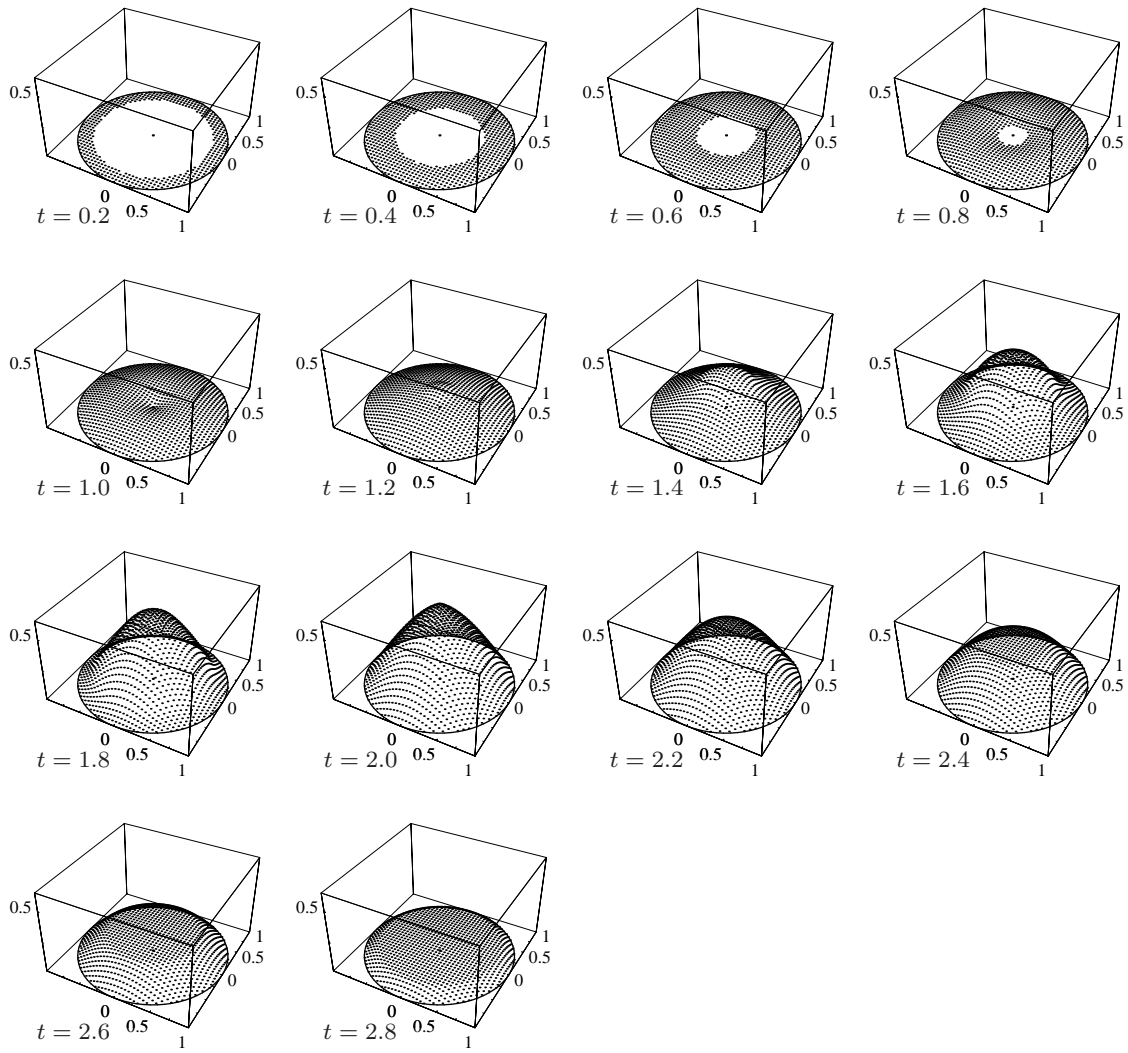


図 4.22 円盤領域における通過密度 $p_0(P, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).

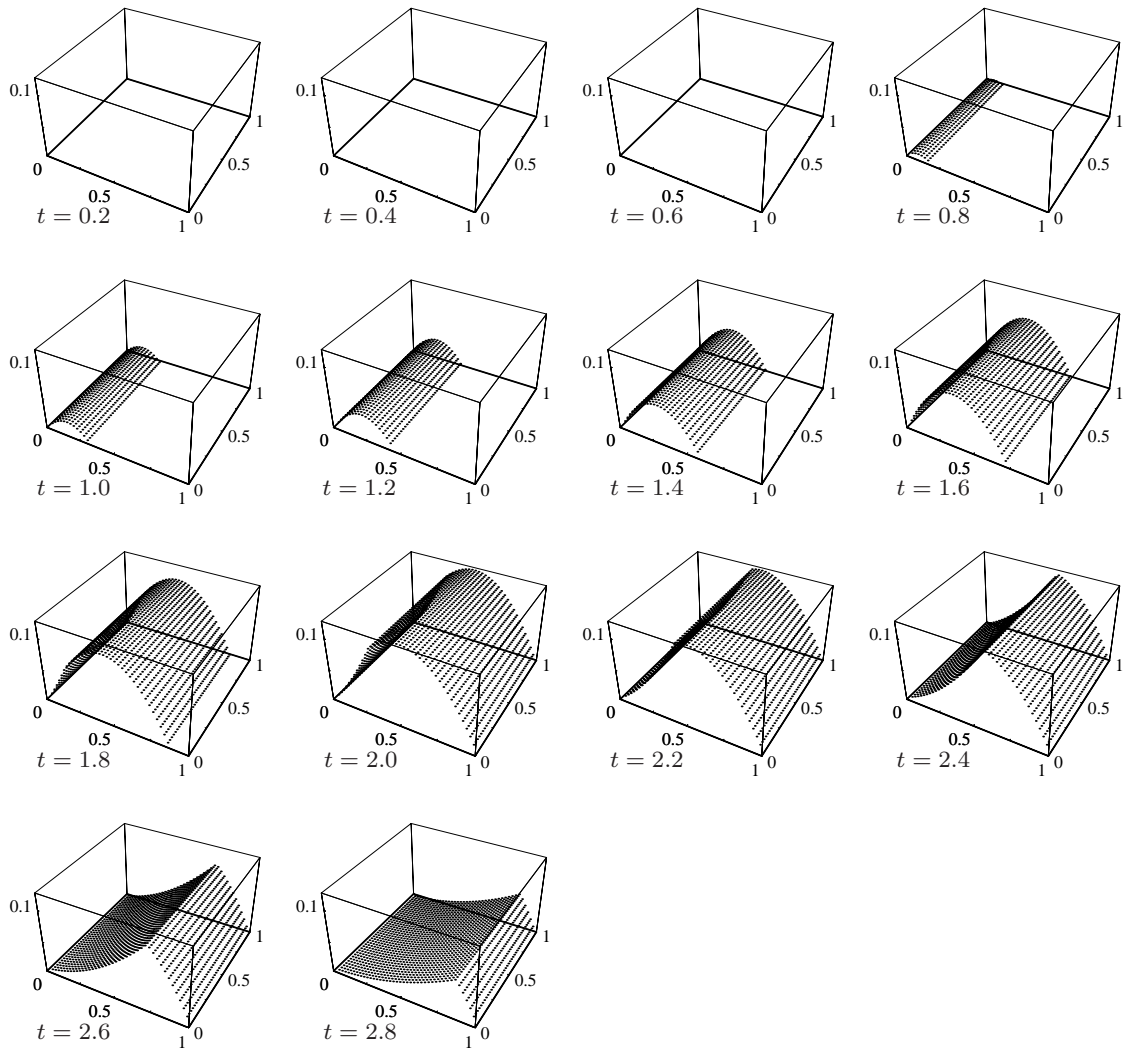


図 4.23 正方領域における $\varphi = 0$ の向きへの通過密度 $p(P, t, \varphi)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).

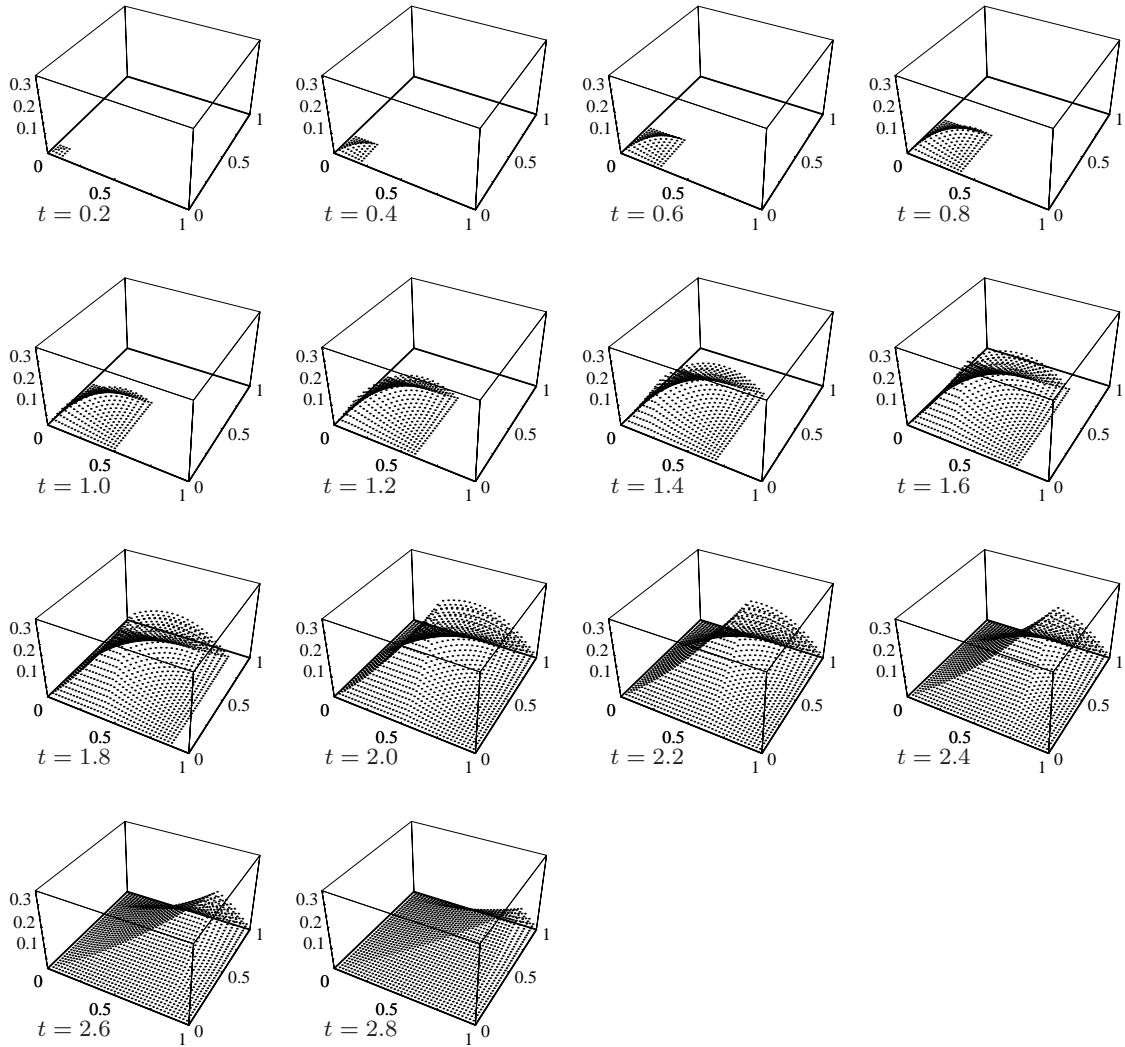


図 4.24 正方領域における $\varphi = \pi/4$ の向きへの通過密度 $p(\mathbf{P}, t, \varphi)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合)。

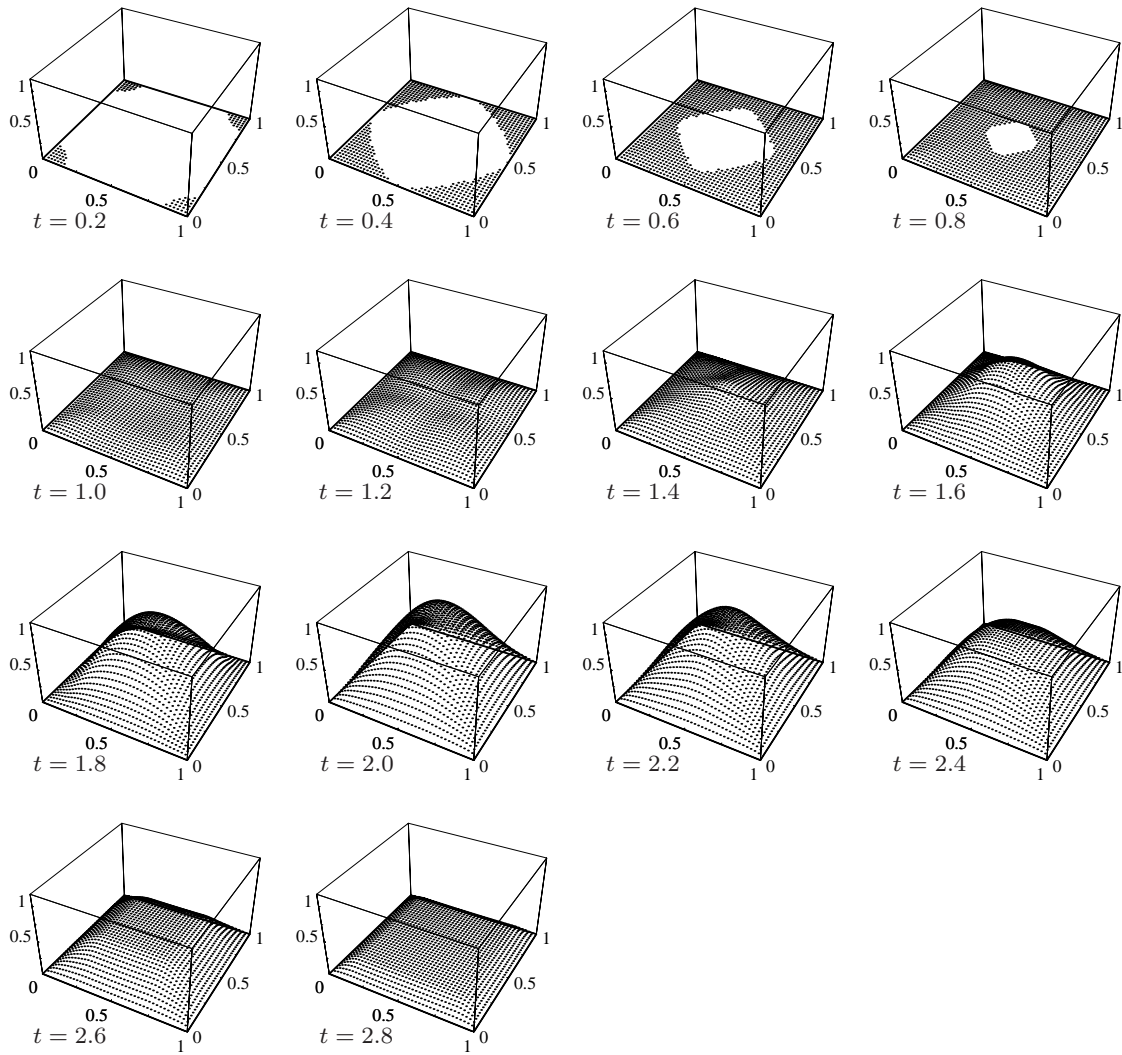


図 4.25 正方領域における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).

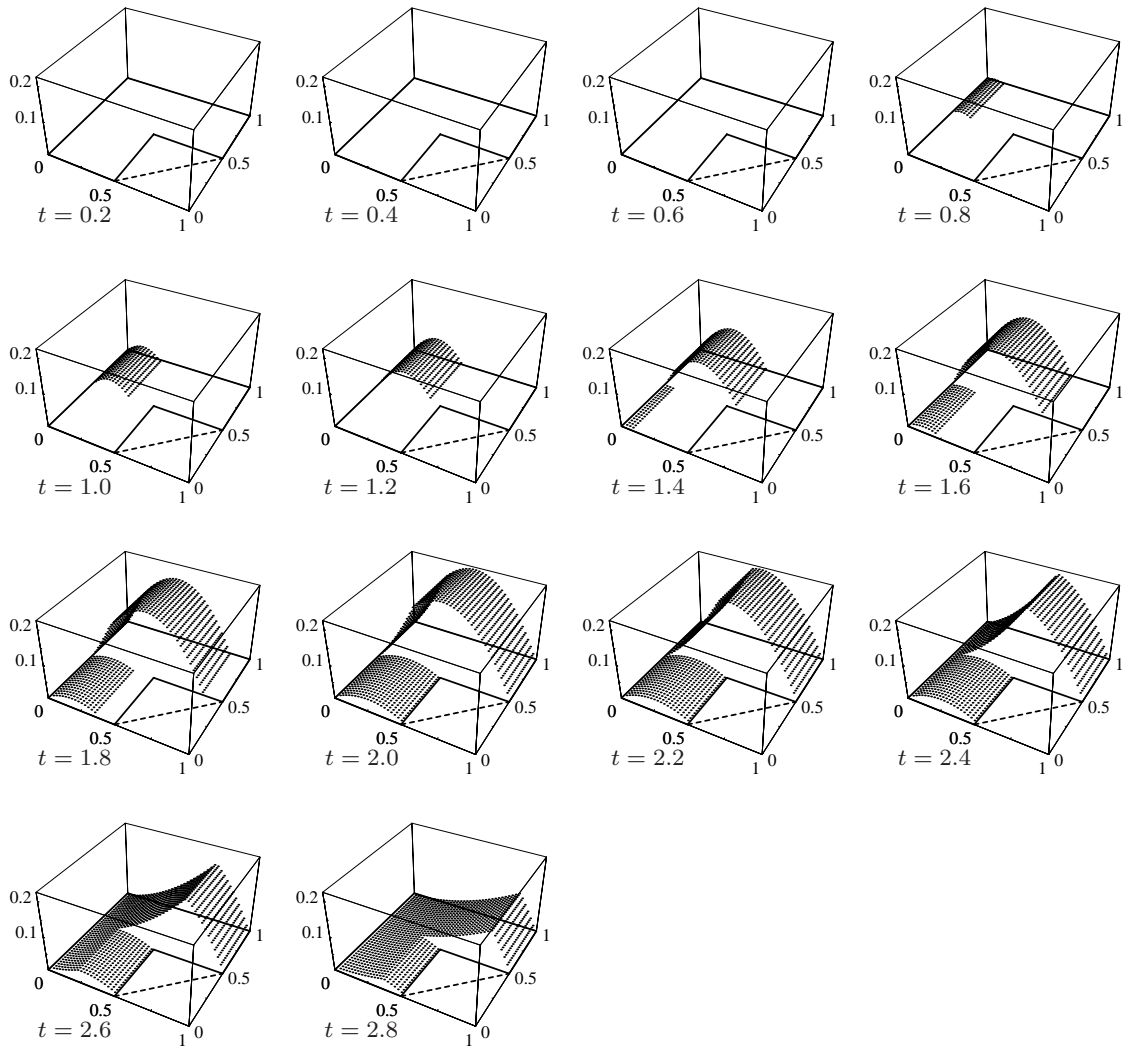


図 4.26 一部が欠けた正方形における $\varphi = 0$ の向きへの通過密度 $p(\mathbf{P}, t, \varphi)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).

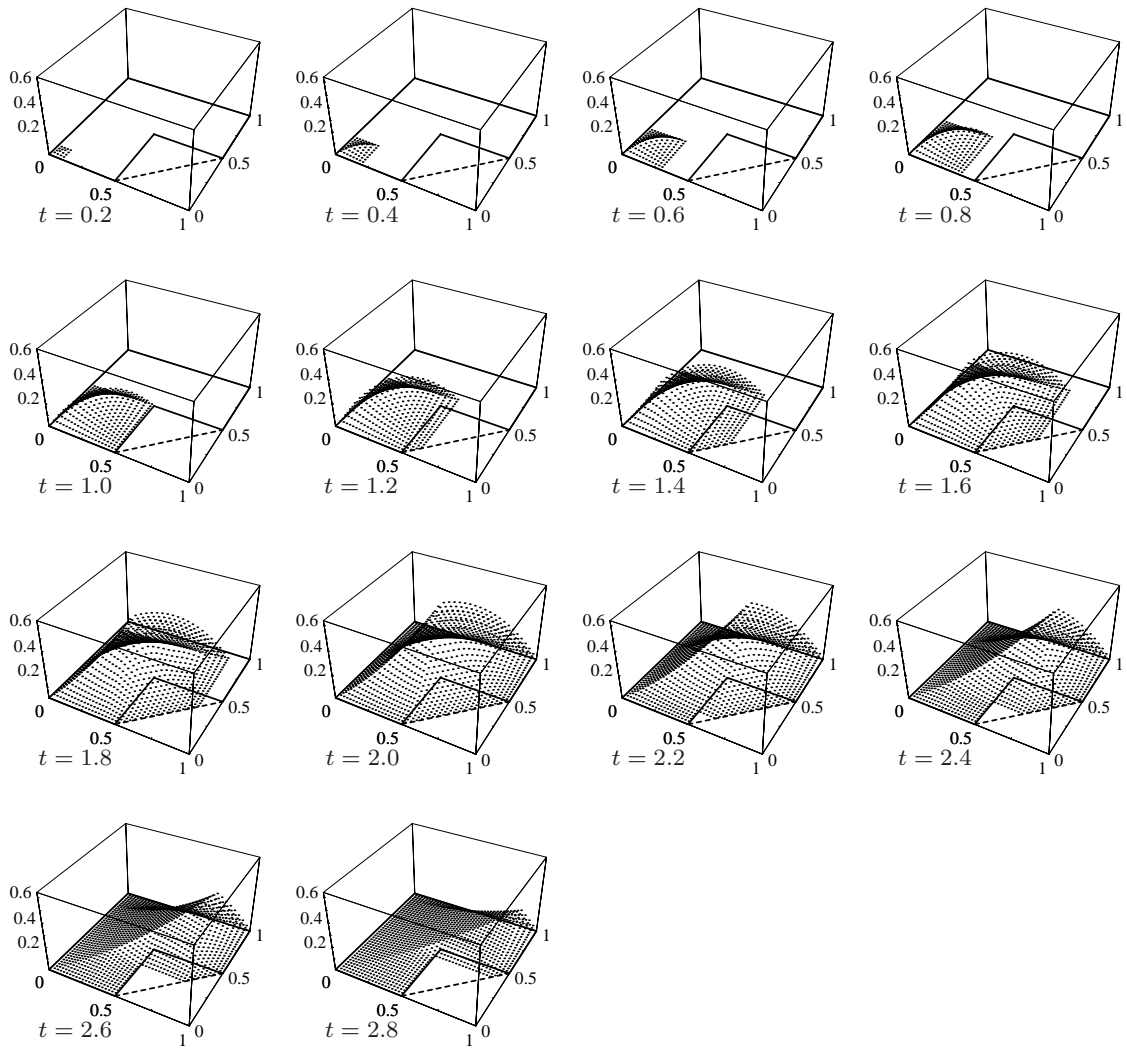


図 4.27 一部が欠けた正方形における $\varphi = \pi/4$ の向きへの通過密度 $p(\mathbf{P}, t, \varphi)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).

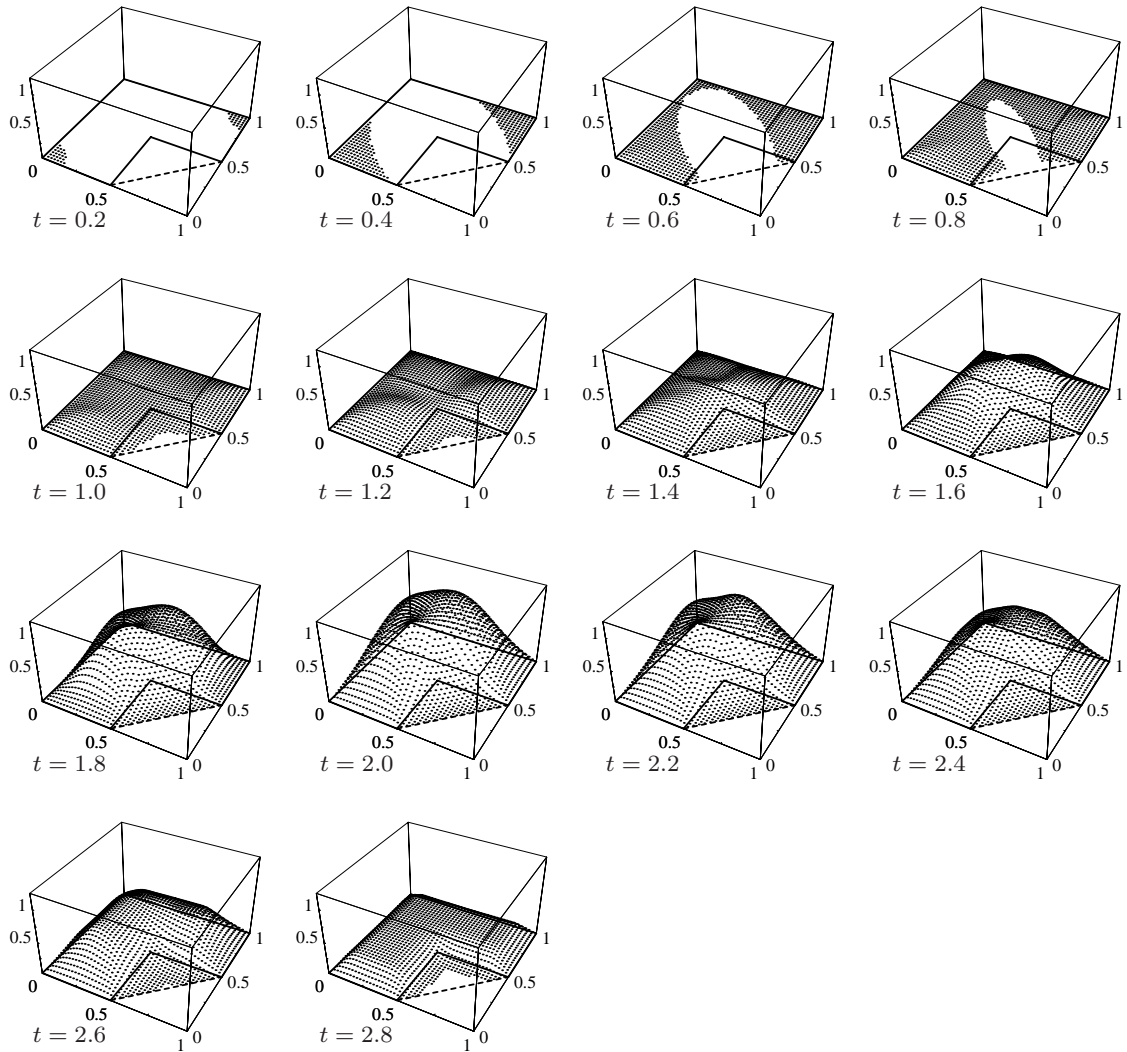


図 4.28 一部が欠けた正方形における通過密度 $p_{\text{合}}(P, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).

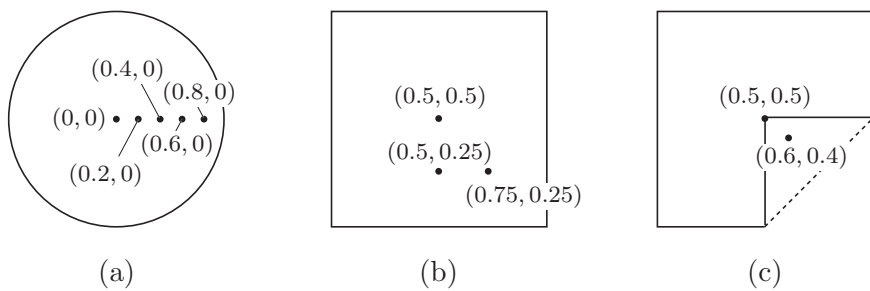


図 4.29 3 種類の都市領域における観測地点の設定 .

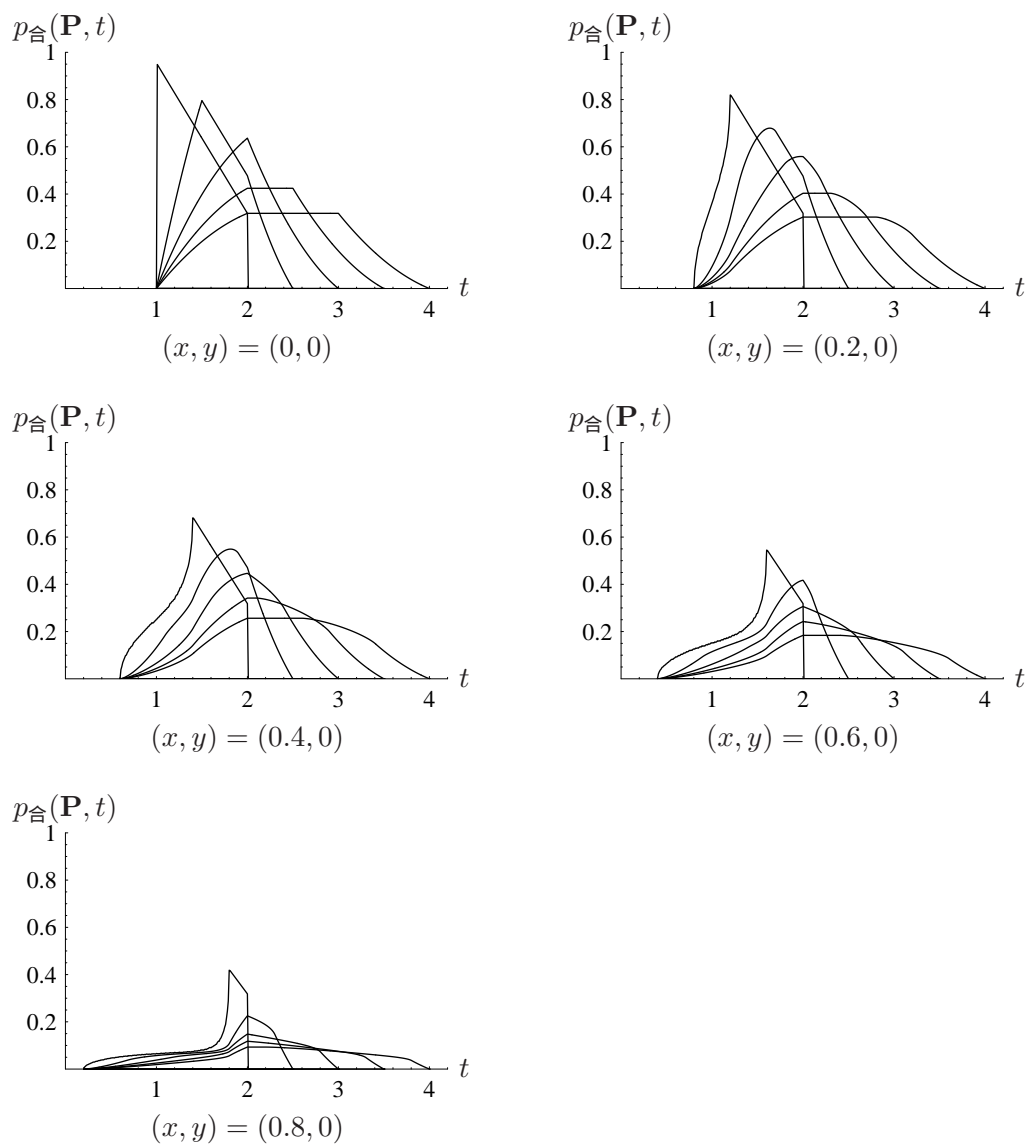


図 4.30 円盤領域における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の時間的分布 .

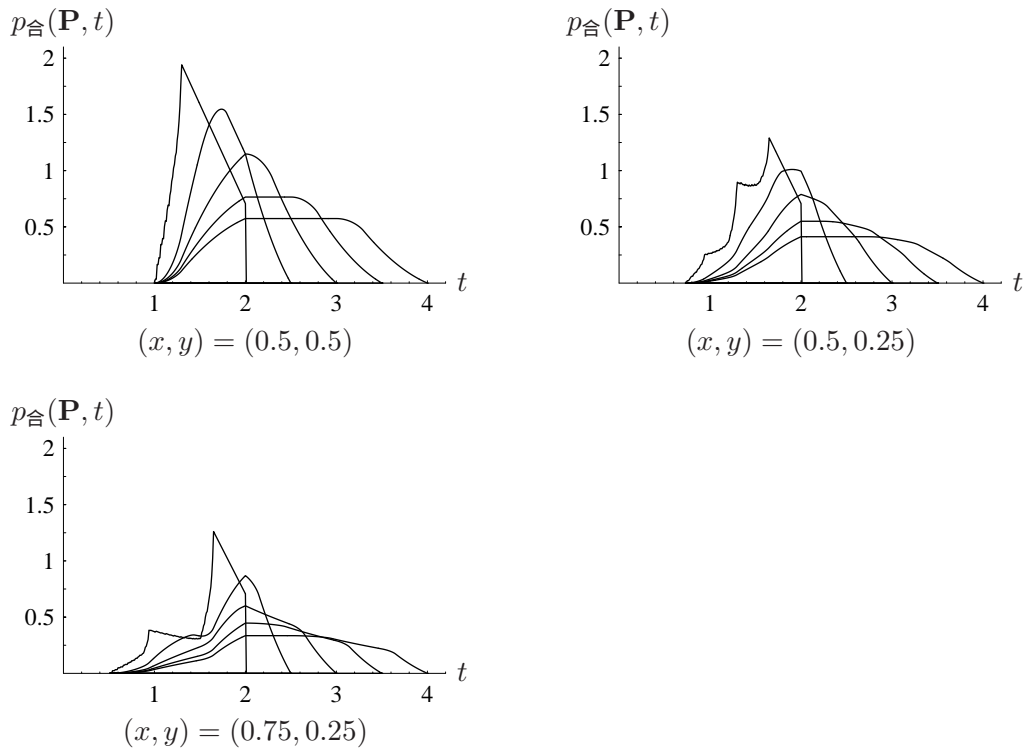


図 4.31 正方形における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の時間的分布 .

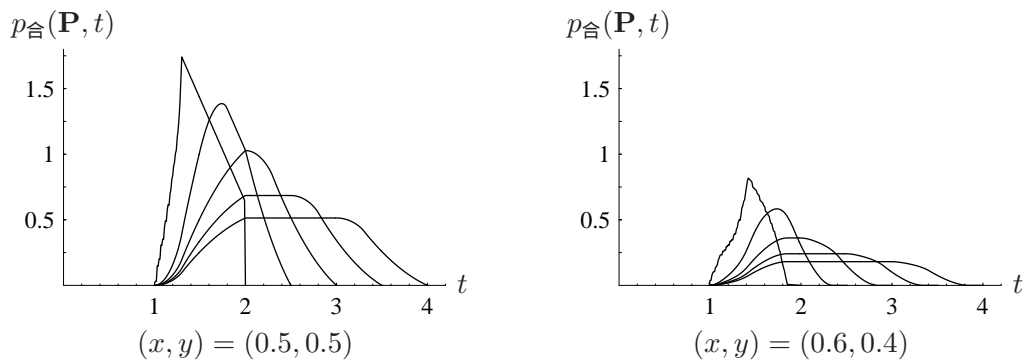


図 4.32 一部が欠けた正方形における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の時間的分布 .

4.7 現実の都市領域を用いた通過量と通過密度の計算例

本節では、現実の都市領域の境界データを用いた通過量と通過密度の計算例を示す。ただしここでは、都市領域の境界の形状がもつ性質のみを分析対象とする。

図 4.33 は、東京 23 区の各区を（頂点数が数十程度の）多角形で近似したものを示している。ここでは、境界データとして、港区、新宿区、目黒区および東京 23 区全体のものを用いる。



図 4.33 多角形近似した東京 23 区の境界データ。

4.7.1 通過量の数値例

図 4.34 は、港区、新宿区、目黒区および東京 23 区全体の境界データを利用した通過量の計算例である。目黒区の大きく窪んだ部分（世田谷区）では、かなり多くの移動が横切っている様子が見て取れる。

4.7.2 通過密度の数値例

本小節では、図 4.34 の境界データを用いた、通過密度 $q_{\text{合}}(\mathbf{P})$ の空間的分布の数値例を示す。各パラメータの数値例として以下のものを採用する。

最大距離の所要時間を 2 と定め、最も早く移動を開始する通勤者の移動開始時刻が $t = 0$ となるように $t_0 = 2$ とする。出社時刻分布としては、時間区間 $[2, 3]$ の間の一様分布のものを採用する。この例では、移動が観測される時間区間は $t \in [0, 3]$ となる。また、総トリップ数を $N = 1$ とする。

図 4.35、図 4.36、図 4.37 および図 4.38 は、港区、新宿区、目黒区および東京 23 区全体の境界データを利用した通過密度の計算例である。港区、新宿区および目黒区のグラフを観察すると、中心部では最長距離の方向にかなり多くの移動が集中する様子が見て取れる。

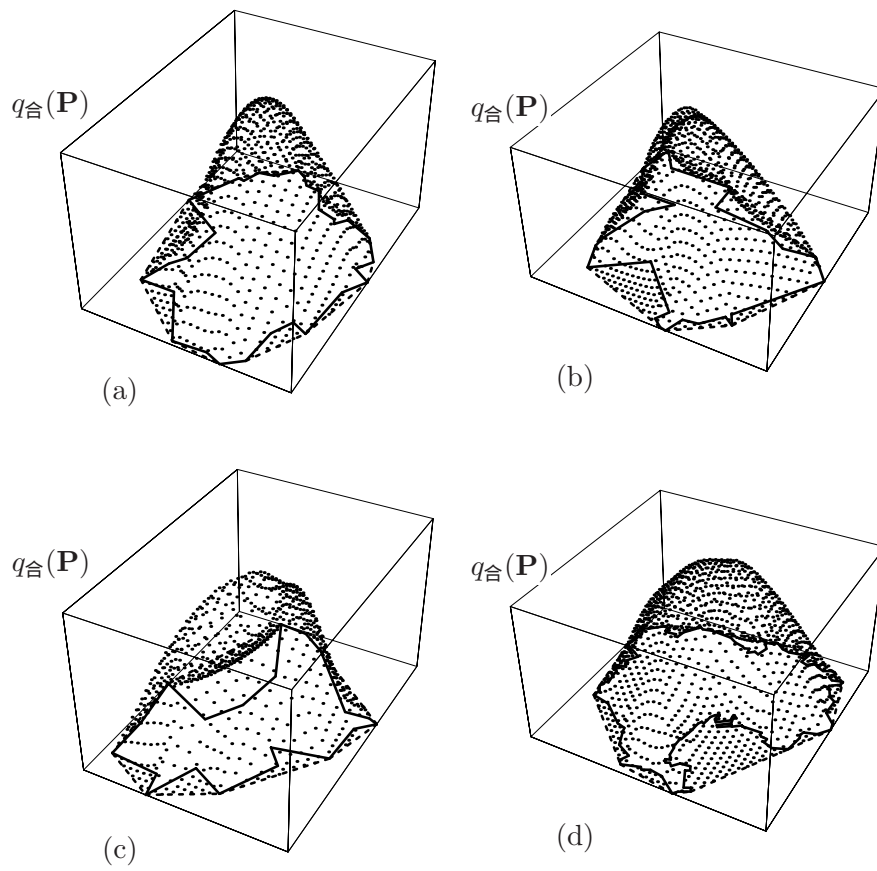


図 4.34 現実の都市の境界データを用いた $q_{\text{合}}(\mathbf{P})$ の立体図：(a) 港区；(b) 新宿区；(c) 目黒区；(d) 23区境界。

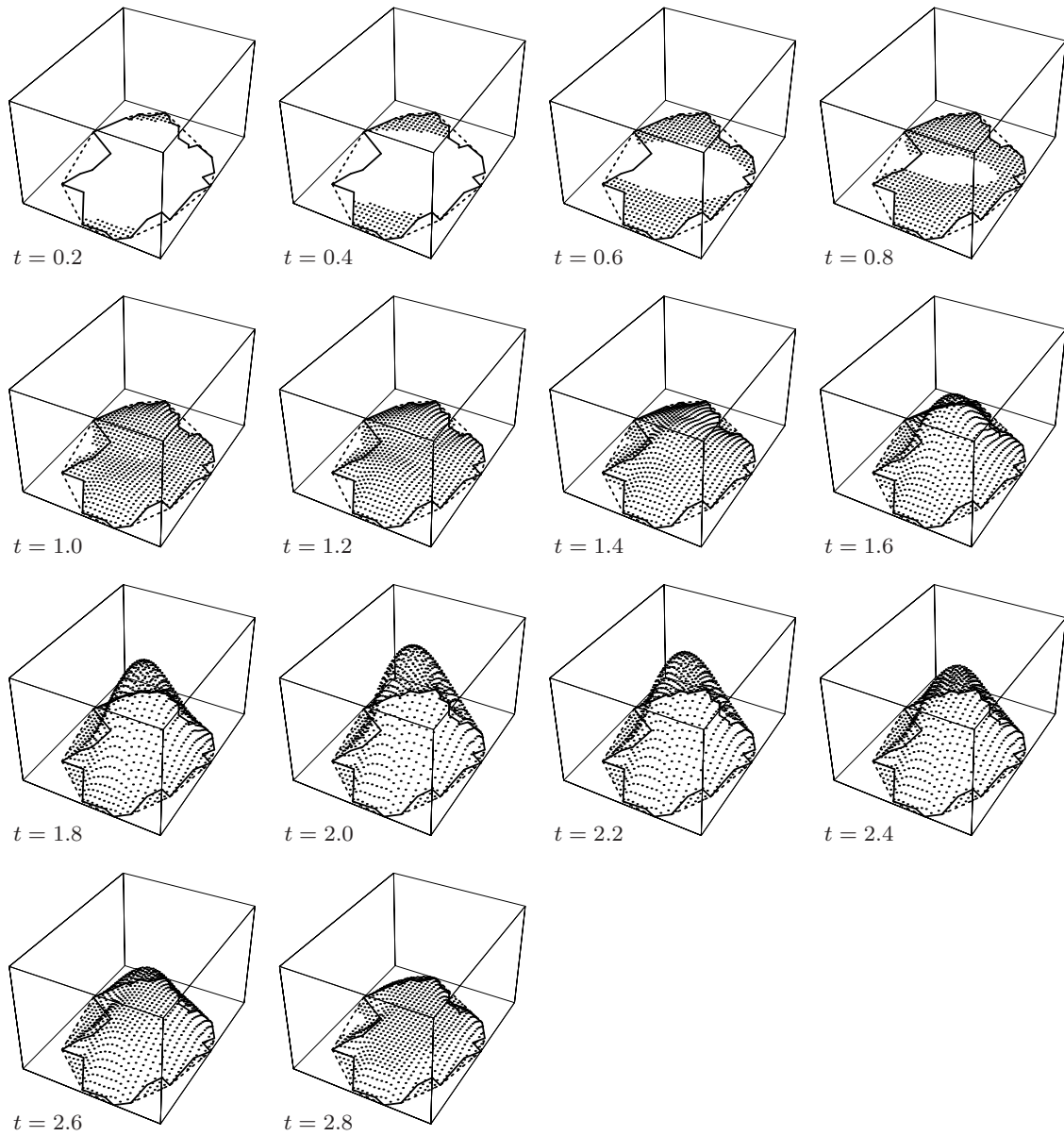


図 4.35 港区における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).

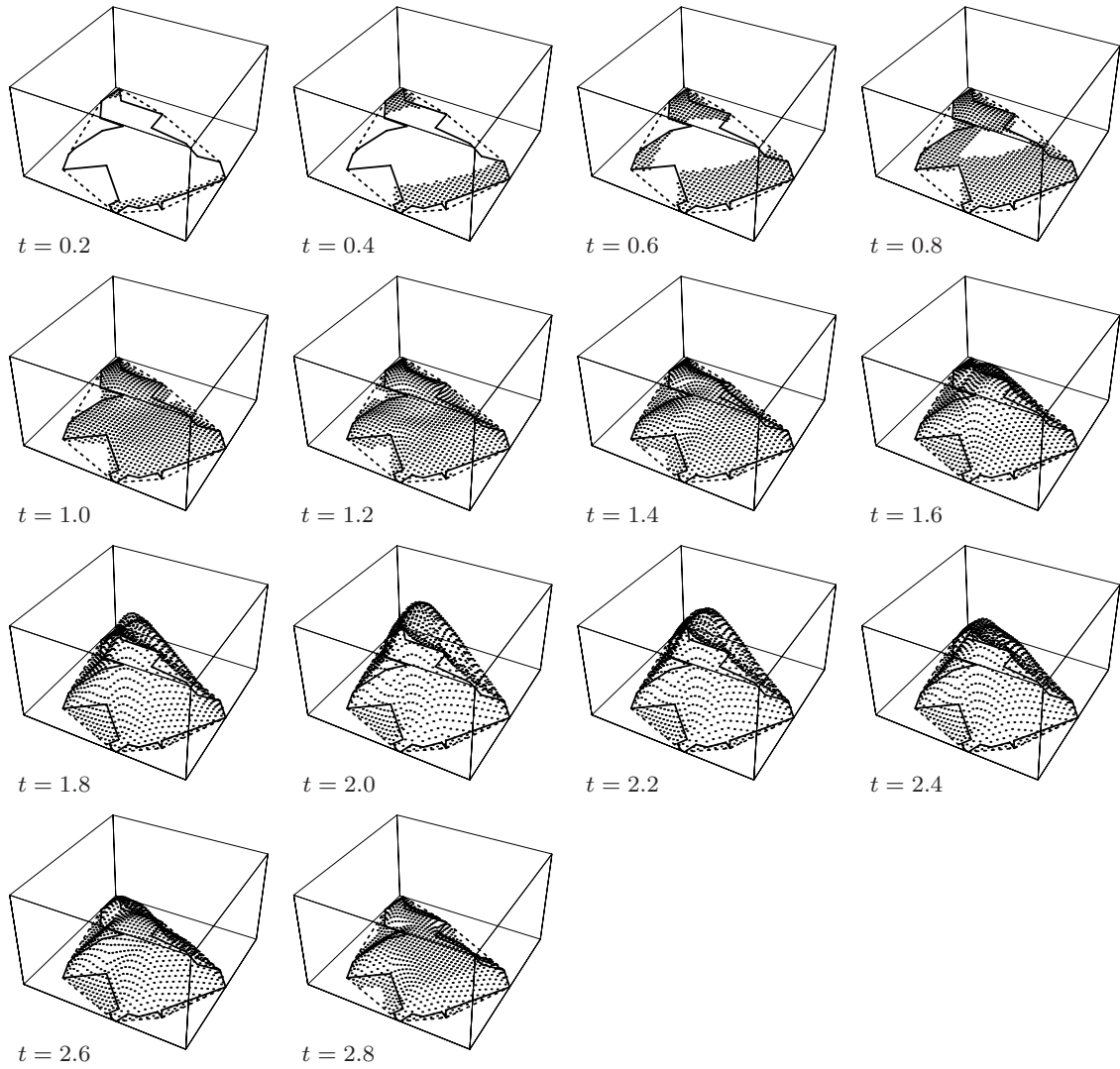


図 4.36 新宿区における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).

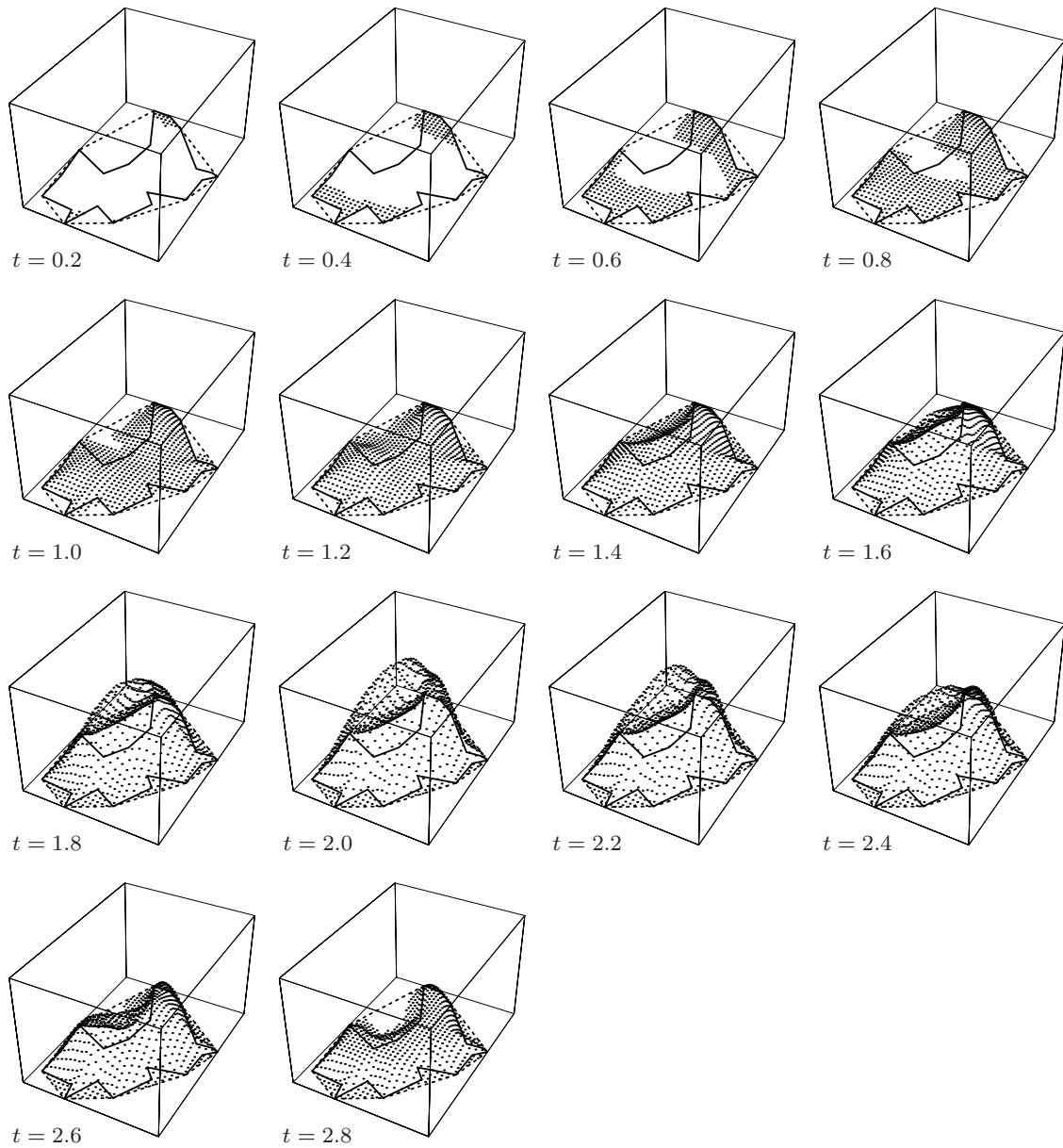


図 4.37 目黒区における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).

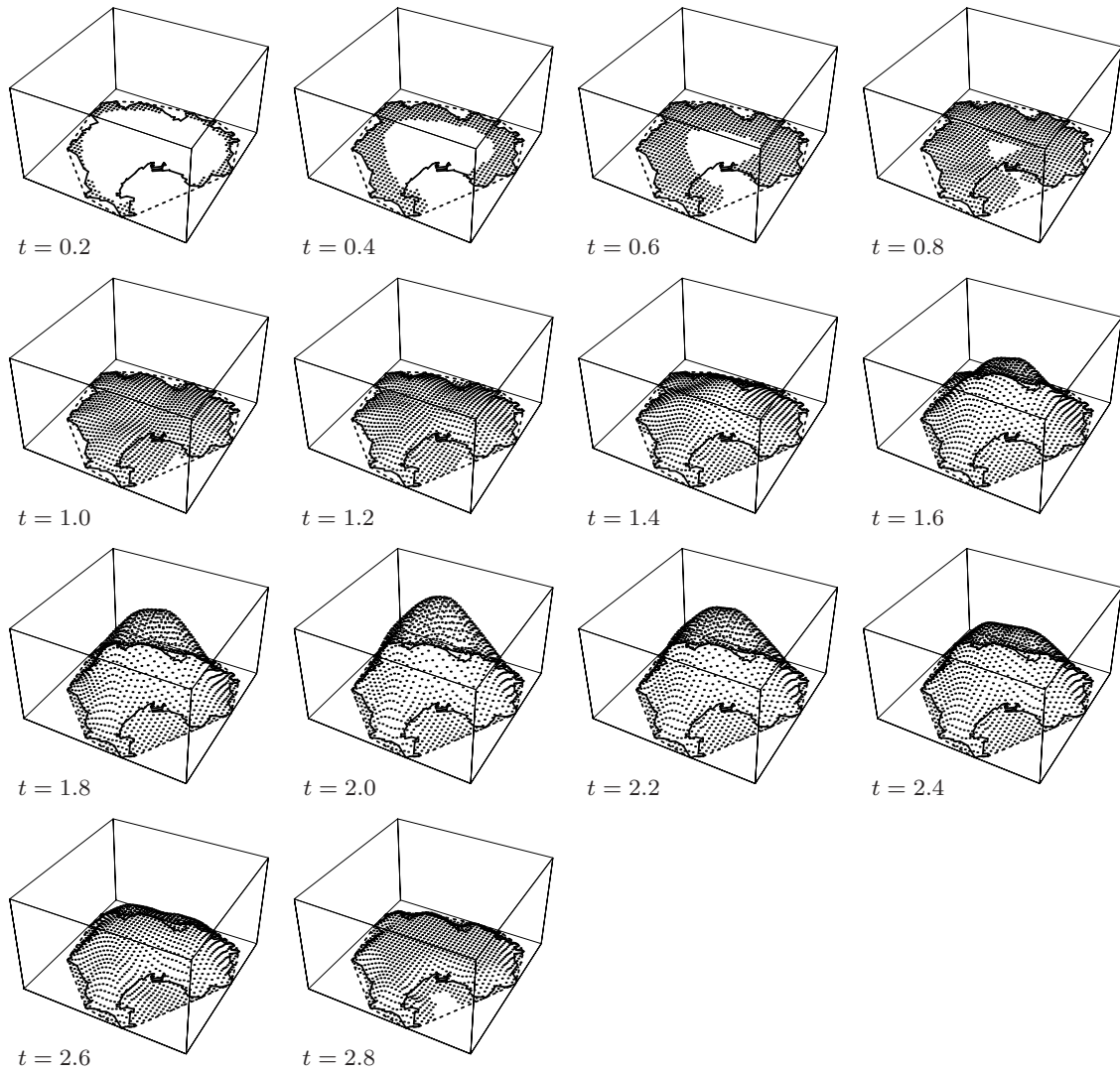


図 4.38 東京 23 区における通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).

4.8 第4章のまとめ

本章では、起・終点が任意形状の都市領域内部に存在する状況を想定し、移動が直線距離で行われる場合の通過密度を導出した。大津らの一様な直線上での計算方法を援用すると、一様なトリップ密度と一様な出社時刻分布のもとでの通過密度が、かなり単純な式の形で表せたのは大きな収穫である。以下に、今後の課題を述べる。

本研究では、領域内々の移動のみを扱ったが、一様な直線を用いて領域間の移動に基づく通過密度を導くことも可能である(田中・栗田, 2004b)。2つの領域にまたがる移動が、途中の領域にどのくらいの通過量をもたらすか、という問題は、複数の国を横断する大規模な道路や鉄道網の配置場所やその必要容量を見積もる際にも重要であり、追求する価値のある応用問題であると考えられる。

本研究では、起・終点が存在する領域の外側も自由に通行可能であるとして定式化を行った。通行不可能な領域を導入してモデル化を図れば、現実の都市における地理的障害物が都市空間の移動パターンに与える影響を分析するモデルへと発展させることができるだろう。計算幾何学の分野では、多角形の障害物が与えられた領域内での、2地点間の最短経路を計算する方法が精力的に追求されている(伊理・腰塚, 1993)。この方法を援用すれば(原理的には)本章で扱った通過密度を導くことができるものと思われるが、本章で示したような解析的に操作性の高いモデルは望めそうにない。また、有限のトリップが通過する集中点が出現する場合もあり、計算方法のみならず描画方法の工夫も必要となろう。都市領域を有限な部分領域に区切り、部分領域ごとに通過密度を計算して集計するなどの泥臭いアプローチが避けられないものと思われる。

都市分析へ応用する際に、本質的かつ最も重要な問題として、直線移動の妥当性の問題がある。直線距離と道路距離との間には、かなり安定した比例関係が存在することが経験的に明らかにされている(腰塚・小林, 1983)。過去様々な形で、領域内の直線距離の分布や平均値に関する理論研究とその都市分析への応用(腰塚・大津, 2001)が行われてきた背景には、この関係を用いて道路距離を近似的に推定できることが理由の一つにあると思われる。これに対し、道路網上の移動経路をどの程度直線分で近似できるかという問題はそれほど単純ではなく、直線距離による通過量モデルを都市分析へ応用する際には、今後この問題を正面から扱っていく必要があるだろう。

第5章 放射・環状距離に基づく円形都市における時空間通過量

5.1 はじめに

本章では、円形都市において放射・環状距離による移動を想定し、通過量モデルを構成する。都心に端を発する放射路とそれらを結ぶ同心円状の環状路から構成される交通網は、典型的な交通網パターンの一つである。円盤領域における放射・環状パターンを想定した都市内移動のモデルは、過去様々な形で研究が行われてきたが、交通量の分布を正面から扱ったモデルは十分に研究されていない。任意地点を環状路と放射路に沿って、全時間を通じて通過する交通量を厳密に算出ことにより、都心からある程度離れた地点の環状路が混雑する点、都市中心は通過交通の影響で極めて混雑する点、が導かれる。これらに加え、環状路と放射路を通過する交通量の時空間分布を導くことにより、既存研究では得られなかった放射・環状パターンに関する興味深い数多くの性質が明らかになる。

5.2 通過量の導出

Vaughan (1987) は、単位円盤上に一様独立に分布する起・終点を想定した場合の、環状路と放射路の通過量を導いている。本節で、Vaughan (1987) のモデルをもとに半径 R の円盤領域における通過量を導き、第 5.4 節と第 5.5 節で、その時刻に関する密度を厳密に導出する。

また、第 5.7 節では、トリップ密度の一般化として、起・終点の密度を Clark 型分布で与えた場合の通過量を厳密に導出する。なお、トリップ密度は本章を通じて回転対称なものを想定する。

5.2.1 一般のトリップ密度のもとでの環状路の通過量

第 2 章で導入した、環状路の通過量 $q_{環右}(\mathbf{P})$ と $q_{環左}(\mathbf{P})$ の定義を振り返っておく。いま、円の中心を原点とする極座標系を導入し、観測地点 \mathbf{P} の座標を $\mathbf{P}(z, \varphi)$ と表し、トリップの起点 \mathbf{Q}_1 と終点 \mathbf{Q}_2 の座標をそれぞれ $\mathbf{Q}_1(r_1, \theta_1)$ および $\mathbf{Q}_2(r_2, \theta_2)$ と表す。地点 \mathbf{P} における放射路断面の単位幅当りを右回りに横切るトリップ数を $q_{環右}(\mathbf{P})$ 、左回りに横切るトリップ数を $q_{環左}(\mathbf{P})$ と定義する。この定義から、図 5.1 に示した放射軸 $\Phi = \varphi$ 上の線分 L を、環状路に沿って右回りに通過するトリップ数 $n_{環右}$ と、左回りに通過するトリップ数 $n_{環左}$ は以下のように与えられる (第 2.5.3 小節, 21 ページ):

$$n_{環右} = \int_{z_a}^{z_b} q_{環右}(\mathbf{P}) dz, \quad (5.2.1)$$

$$n_{環左} = \int_{z_a}^{z_b} q_{環左}(\mathbf{P}) dz. \quad (5.2.2)$$

回転対称なトリップ密度を想定した場合、右回りの通過量 $q_{環右}(\mathbf{P})$ と左回りの通過量 $q_{環左}(\mathbf{P})$ は明ら

かに等しくなるため，どちらか一方を導けばよい．以下では左回りの移動に着目し $q_{環左}(P)$ の導出法を述べる．

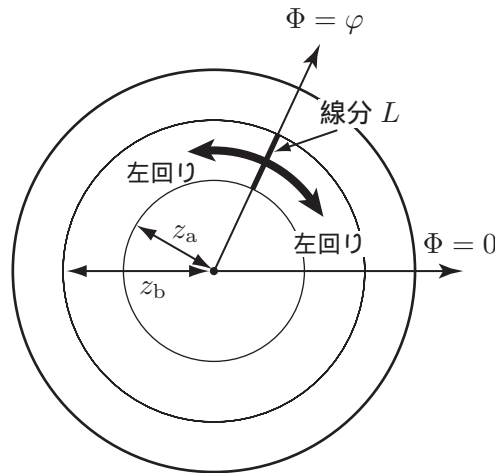


図 5.1 放射・環状交通網を有する円形都市における環状路の通過量の定義．

トリップ密度と円の回転対称性から， $q_{環左}(P)$ は明らかに中心からの距離 z のみの関数となる．したがって，以降では記述を簡単にするために，地点 P を $\Phi = 0$ に固定し，地点 $P(z, 0)$ における左回りの通過量に着目する．図 5.2 に示すように，地点 $P(z, 0)$ に設けられた微小幅 dz の線分 L を考える．図 5.2 は，起点集合を斜線の領域で，終点集合をグレーの領域で示している．線分 L を左回りに通過するための起・終点の領域の組み合わせには，図 5.2 (a) に示す環状路を先に利用する場合と，図 5.2 (b) に示す放射路を先に利用する場合の 2 通りが存在する．

図 5.2 (a) に対応する起・終点の領域の組み合わせを $A_{左a}$ および $B_{左a}$ と表せば，これらは以下のように記述される：

$$A_{左a} = \{(r_1, \theta_1) \mid z \leq r_1 \leq z + dz, \theta_2 - 2 \leq \theta_1 \leq 0\}, \quad (5.2.3)$$

$$B_{左a} = \{(r_2, \theta_2) \mid z \leq r_2 \leq R, 0 \leq \theta_2 \leq 2\}. \quad (5.2.4)$$

ここで，起点 $Q_1(r_1, \theta_1)$ の集合が，終点 $Q_2(r_2, \theta_2)$ の座標に依存していることに注目されたい． $B_{左a}$ に存在する，角度がある θ_2 に固定された終点 Q_2 への移動が線分 L を通過するためには，起点 Q_1 の座標が $\theta_2 - 2 \leq \theta_1 \leq 0$ を満たす必要があるのである．したがって，終点 Q_2 の角度 θ_2 が $\Phi = 0$ に近いほど，線分 L を通過するための，対応する起点の量が増加することになる．なお，同じ起・終点ペアの集合を表すのに，終点 $Q_2(r_2, \theta_2)$ の集合を起点 $Q_1(r_1, \theta_1)$ の座標を含む形式で書き換えることももちろん可能である*1．

同様に，図 5.2 (b) に対応する起・終点の領域の組み合わせを $A_{左b}$ および $B_{左b}$ と表せば，これらは以下のように記述される：

$$A_{左b} = \{(r_1, \theta_1) \mid z \leq r_1 \leq R, \theta_2 - 2 \leq \theta_1 \leq 0\}, \quad (5.2.5)$$

$$B_{左b} = \{(r_2, \theta_2) \mid z \leq r_2 \leq z + dz, 0 \leq \theta_2 \leq 2\}. \quad (5.2.6)$$

*1 実際，Vaughan (1987) は後者の立場を取っている．本研究では，地点 P から目的地 Q_2 までの所要時間の密度関数 $g(u)$ を導く際に，前者の表現の方が説明上便利な点が多いためこちらを採用した．

いま，図 5.2 (a) に対応する左向きの通過量を $q_{環左a}(\mathbf{P})$ ，図 5.2 (b) に対応する左向きの通過量を $q_{環左b}(\mathbf{P})$ と表せば， $q_{環左}(\mathbf{P})$ はこれらの合計として，以下のように与えられる：

$$q_{環左}(\mathbf{P}) = q_{環左a}(\mathbf{P}) + q_{環左b}(\mathbf{P}). \tag{5.2.7}$$

いま，図 5.2 (a) のように，環状路を先に利用して左回りに線分 L を通過するトリップ数は，定義より $q_{環左a}(\mathbf{P})dz$ となる．同様に，図 5.2 (b) のように，放射路を先に利用して左回りに線分 L を通過するトリップ数は， $q_{環左b}(\mathbf{P})dz$ となる．

以上より， $q_{環左a}(\mathbf{P})dz$ および $q_{環左b}(\mathbf{P})dz$ は起点集合と終点集合を用いて以下のように表される：

$$q_{環左a}(\mathbf{P})dz = \int_{\mathbf{Q}_2 \in B_{左a}} \int_{\mathbf{Q}_1 \in A_{左a}} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_1 d\mathbf{Q}_2, \tag{5.2.8}$$

$$q_{環左b}(\mathbf{P})dz = \int_{\mathbf{Q}_2 \in B_{左b}} \int_{\mathbf{Q}_1 \in A_{左b}} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_1 d\mathbf{Q}_2. \tag{5.2.9}$$

これらを起点と終点の座標を用いて明示的に記述すると以下の通りとなる（極座標上の微小領域が $d\mathbf{Q}_1 = r_1 dr_1 d\theta_1$ および $d\mathbf{Q}_2 = r_2 dr_2 d\theta_2$ となることから以下の式には $r_1 r_2$ の項が掛けられている）：

$$q_{環左a}(\mathbf{P})dz = \int_{r_2=z}^R \int_{\theta_2=0}^2 \int_{r_1=z}^{z+dz} \int_{\theta_1=\theta_2-2}^0 \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2, \tag{5.2.10}$$

$$q_{環左b}(\mathbf{P})dz = \int_{r_2=z}^{z+dz} \int_{\theta_2=0}^2 \int_{r_1=z}^R \int_{\theta_1=\theta_2-2}^0 \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2. \tag{5.2.11}$$

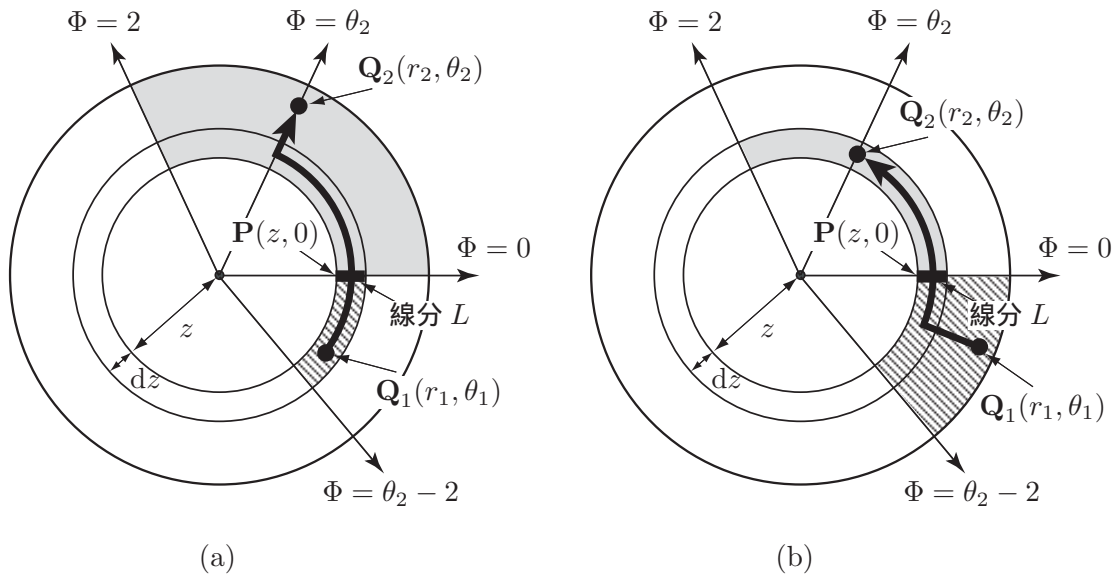


図 5.2 地点 \mathbf{P} に設けられた線分 L を環状路に沿って左回りに通過するための起・終点の領域の組み合わせ：(a) 環状路を先に利用する場合；(b) 放射路を先に利用する場合。

5.2.2 一様なトリップ密度のもとでの環状路の通過量

移動の起点 Q_1 と終点 Q_2 が円盤上で一様かつ独立に分布する場合の通過量を導出する．このときのトリップ密度は以下のように表される：

$$\tau(Q_1, Q_2) = \frac{N}{(\pi R^2)^2}. \quad (5.2.12)$$

このトリップ密度のもとで，式 (5.2.10) と式 (5.2.11) の積分を具体的に実行し，両辺を dz で除した後， $dz \rightarrow 0$ とすると， $q_{環左a}(P)$ と $q_{環左b}(P)$ は以下のように導かれる：

$$q_{環左a}(P) = \frac{Nz(R+z)(R-z)}{\pi^2 R^4}, \quad (5.2.13)$$

$$q_{環左b}(P) = \frac{Nz(R+z)(R-z)}{\pi^2 R^4}. \quad (5.2.14)$$

したがって，式 (5.2.7) より $q_{環左}(P)$ は以下の通りに導かれる：

$$q_{環左}(P) = \frac{2Nz(R+z)(R-z)}{\pi^2 R^4}. \quad (5.2.15)$$

トリップ密度と円の回転対称性より， $q_{環右}(P)$ は $q_{環左}(P)$ と等しくなるから

$$q_{環右}(P) = \frac{2Nz(R+z)(R-z)}{\pi^2 R^4}. \quad (5.2.16)$$

以上より，地点 P における環状路の通過量 $q_{環}(P)$ は以下のように表される：

$$q_{環}(P) = \frac{4Nz(R+z)(R-z)}{\pi^2 R^4}. \quad (5.2.17)$$

5.2.3 一般のトリップ密度のもとでの放射路の通過量

第 2 章で導入した，放射路の通過量 $q_{放上}(P)$ と $q_{放下}(P)$ の定義を振り返っておく．地点 P 近傍の環状路断面の単位長さ当りを上り方面に向かって横切るトリップ数を $q_{放上}(P)$ ，下り方面に向かって横切るトリップ数を $q_{放下}(P)$ と定義する．この定義から，図 5.3 に示した弧 C を放射路に沿って上り方面に向かって通過するトリップ数 $n_{放上}$ と，下り方面に向かって通過するトリップ数 $n_{放下}$ は以下のように与えられる（第 2.5.3 小節, 21 ページ）：

$$n_{放上} = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} q_{放上}(P) z d\varphi, \quad (5.2.18)$$

$$n_{放下} = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} q_{放下}(P) z d\varphi. \quad (5.2.19)$$

図 5.4 に示すように，地点 $P(z, 0)$ 近傍に設けられた長さ $z d\varphi$ の微小な弧 C を考える．弧 C を上り方面および下り方面に向かって横切るための起・終点の領域の組み合わせを明らかにし，領域間のトリップ数が $q_{放上}(P) z d\varphi$ および $q_{放下}(P) z d\varphi$ に等しくなるという関係をもとに $q_{放上}(P)$ と $q_{放下}(P)$ を導こう．

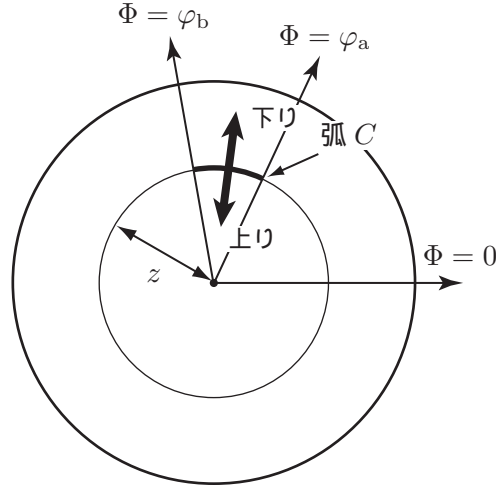


図 5.3 放射・環状交通網を有する円形都市における放射路の通過量の定義。

図 5.4 (a) は、弧 C を上り方面に向かって横切るための、起点と終点の領域の組み合わせを表しており、起点集合を斜線の領域で、終点集合をグレーの領域で示している。図 5.4 (a) の起・終点の領域の組み合わせを A_{\uparrow} および B_{\uparrow} と表せば、これらは以下のように記述される：

$$A_{\uparrow} = \{(r_1, \theta_1) \mid z \leq r_1 \leq R, 0 \leq \theta_1 \leq d\varphi\}, \quad (5.2.20)$$

$$B_{\uparrow} = \{(r_2, \theta_2) \mid 0 \leq r_2 \leq z, -2 \leq \theta_2 \leq 2\} \cup \{(r_2, \theta_2) \mid 0 \leq r_2 \leq R, 2 \leq \theta_2 \leq 2\pi - 2\}. \quad (5.2.21)$$

同様に、図 5.4 (b) は、弧 C を下り方面に向かって横切るための、起点と終点の領域の組み合わせを表しており、起点集合を斜線の領域で、終点集合をグレーの領域で示している。図 5.4 (b) の起・終点の領域の組み合わせを A_{\downarrow} および B_{\downarrow} と表せば、これらは以下のように記述される：

$$A_{\downarrow} = \{(r_1, \theta_1) \mid 0 \leq r_1 \leq z, -2 \leq \theta_1 \leq 2\} \cup \{(r_1, \theta_1) \mid 0 \leq r_1 \leq R, 2 \leq \theta_1 \leq 2\pi - 2\}, \quad (5.2.22)$$

$$B_{\downarrow} = \{(r_2, \theta_2) \mid z \leq r_2 \leq R, 0 \leq \theta_2 \leq d\varphi\}. \quad (5.2.23)$$

以上より、 $q_{\text{放}\uparrow}(\mathbf{P})z d\varphi$ および $q_{\text{放}\downarrow}(\mathbf{P})z d\varphi$ は、起点集合と終点集合を用いて以下のように表される：

$$q_{\text{放}\uparrow}(\mathbf{P})z d\varphi = \int_{\mathbf{Q}_2 \in B_{\uparrow}} \int_{\mathbf{Q}_1 \in A_{\uparrow}} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_1 d\mathbf{Q}_2, \quad (5.2.24)$$

$$q_{\text{放}\downarrow}(\mathbf{P})z d\varphi = \int_{\mathbf{Q}_2 \in B_{\downarrow}} \int_{\mathbf{Q}_1 \in A_{\downarrow}} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_1 d\mathbf{Q}_2. \quad (5.2.25)$$

これらを起点と終点の座標を用いて明示的に記述すると以下の通りとなる：

$$\begin{aligned} q_{\text{放}\uparrow}(\mathbf{P})z d\varphi &= \int_{r_2=0}^z \int_{\theta_2=-2}^2 \int_{r_1=z}^R \int_{\theta_1=0}^{d\varphi} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \\ &+ \int_{r_2=0}^R \int_{\theta_2=2}^{2\pi-2} \int_{r_1=z}^R \int_{\theta_1=0}^{d\varphi} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2, \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

$$\begin{aligned} q_{\text{放}\downarrow}(\mathbf{P})z d\varphi &= \int_{r_2=z}^R \int_{\theta_2=0}^{d\varphi} \int_{r_1=0}^z \int_{\theta_1=-2}^2 \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \\ &+ \int_{r_2=z}^R \int_{\theta_2=0}^{d\varphi} \int_{r_1=0}^R \int_{\theta_1=2}^{2\pi-2} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2. \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

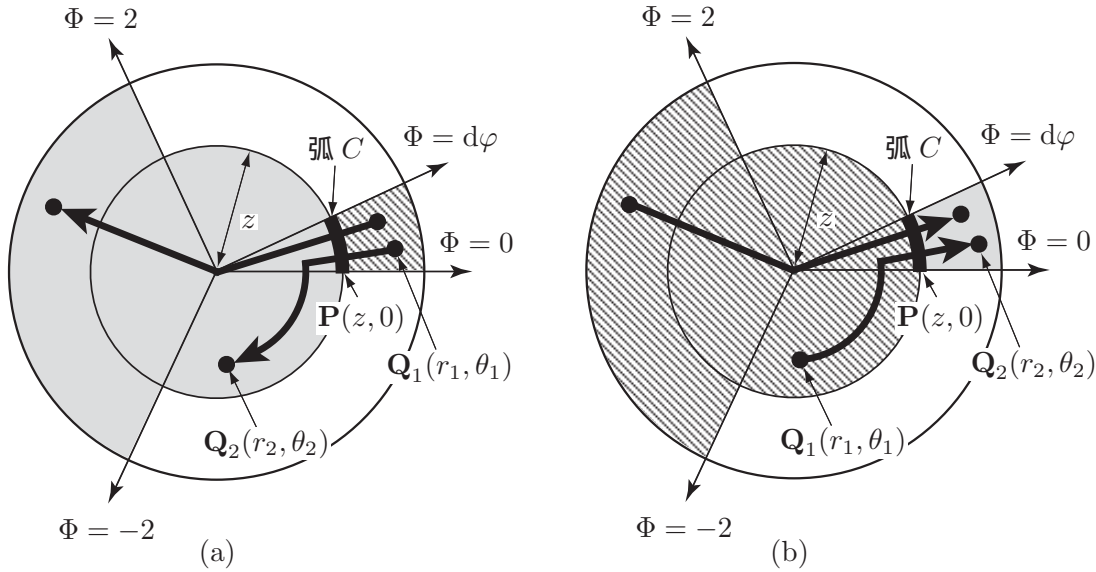


図 5.4 地点 P に設けられた弧 C を放射路に沿って通過するための起・終点の領域の組み合わせ：
 (a) 上り方面の場合； (b) 下り方面の場合。

5.2.4 一様なトリップ密度のもとでの放射路の通過量

移動の起点 Q_1 と終点 Q_2 が円盤上で一様かつ独立に分布する場合の通過量を導出する．このときのトリップ密度は以下のように表される：

$$\tau(Q_1, Q_2) = \frac{N}{(\pi R^2)^2} \tag{5.2.28}$$

式 (5.2.26) の積分を具体的に実行し，両辺を $z d\varphi$ で除すと $q_{\text{放上}}(P)$ は以下のように導かれる：

$$q_{\text{放上}}(P) = \frac{N(R+z)(R-z)\{2z^2 + (\pi - 2)R^2\}}{2\pi^2 R^4 z} \tag{5.2.29}$$

式 (5.2.27) の積分を具体的に実行し，両辺を $z d\varphi$ で除すと $q_{\text{放下}}(P)$ は以下のように導かれる：

$$q_{\text{放下}}(P) = \frac{N(R+z)(R-z)\{2z^2 + (\pi - 2)R^2\}}{2\pi^2 R^4 z} \tag{5.2.30}$$

式 (5.2.29) と式 (5.2.30) より， $q_{\text{放下}}(P)$ と $q_{\text{放上}}(P)$ とは等しいことがわかる（起点集合と終点集合を入れ換えて計算しただけだから当然の結果である）．

以上より，地点 P における放射路の通過量 $q_{\text{放}}(P)$ は以下のように表される：

$$q_{\text{放}}(P) = \frac{N(R+z)(R-z)\{2z^2 + (\pi - 2)R^2\}}{\pi^2 R^4 z} \tag{5.2.31}$$

5.3 通過量の数値例

本節では，一様なトリップ密度に基づく通過量の数値例を示す．各パラメータの数値例として，本節を通じて，都市の半径を $R = 1$ ，総トリップ数を $N = 1$ とする．以下に，環状路と放射路および両者の合計の通過量の概形を示しそれらの考察を行う．

環状路の通過量

図 5.5 (a) に環状路の通過量 $q_{\text{環}}(\mathbf{P})$ の立体図を，図 5.5 (b) にその断面図を示した．環状路の通過量は，都市中心と都市境界でゼロとなり，中心からある程度離れた地点で最大値をとる様子が見て取れる．

ここで，通過量 $q_{\text{環}}(\mathbf{P})$ が最大値を取る中心からの距離 z^* を求めてみよう．通過量 $q_{\text{環}}(\mathbf{P})$ を z について偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial z} q_{\text{環}}(\mathbf{P}) = \frac{4N(R + \sqrt{3}z)(R - \sqrt{3}z)}{\pi^2 R^4} \quad (5.3.1)$$

を得るから，通過量 $q_{\text{環}}(\mathbf{P})$ が最大値を取る中心からの距離 z^* は以下のように求められる：

$$z^* = \frac{1}{\sqrt{3}}R \quad (\approx 0.577R). \quad (5.3.2)$$

一様なトリップ密度のもとでは，都市中心と都市境界の中間点よりも，やや外側に位置する環状路に移動が集中する構造が明らかになった．また式 (5.3.2) の関係は，通行不能領域を有する都市を記述した扇形領域のモデルにおいても成立することが田中・栗田 (2001) で報告されている．

ここでは，環状路も放射路も無限に稠密に存在するケースを扱ったが，藤田・鈴木 (2002) では，無限に稠密な放射路線と n 本の環状路線を有する円盤都市において，平均移動距離と各環状路線の通過量が解析的に導かれている．藤田らは，(一様なトリップ密度のもとで) 平均距離を最小化する環状路配置では，都心と都市境界の中間点よりもやや外側の環状路に交通集中がみられるという知見を導いている．放射・環状網上で，人々が各自の移動経路が最小となるように移動するならば，特定半径の付近の環状路に移動経路が数多く重なる結果，交通需要の高い環状路が出現することがわかる．これは，放射・環状パターンの交通網が有する宿命ともいえるべき性質であり，広く認知されるべき知見であると思われる．

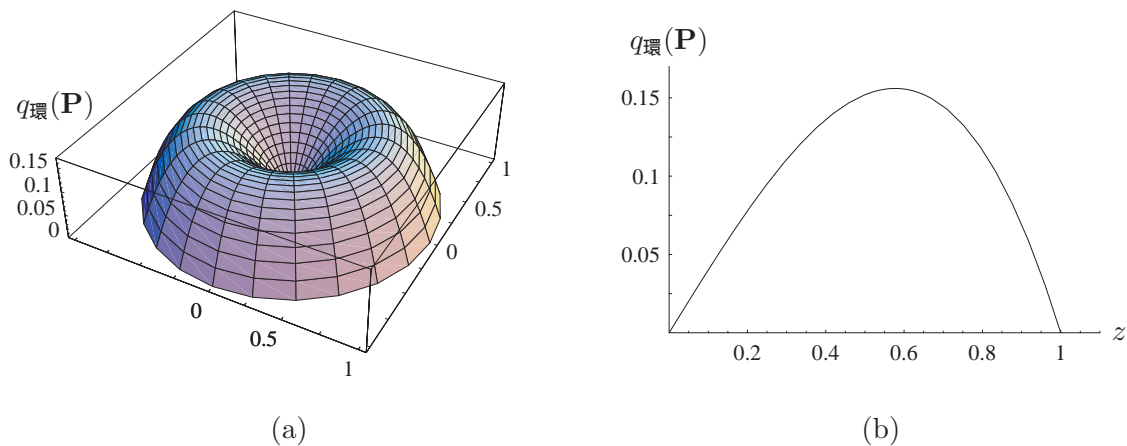


図 5.5 環状路の通過量の概形：(a) 立体図；(b) 断面図。

放射路の通過量

図 5.6 (a) に放射路の通過量 $q_{\text{放}}(\mathbf{P})$ の立体図を，図 5.6 (b) にその断面図を示した．放射路の通過量は，都心に近づくにつれて単調に増加し，都市中心では無限大に発散してしまう．このことは，2 次元

平面上の1点である都市中心を有限のトリップが通過することにより，中心部では単位面積当りの総移動距離は限りなく大きくなるためである．都心を直接の目的地としない移動が，都市中心を通過するという性質は，放射・環状パターンの有する大きな特徴の一つである．

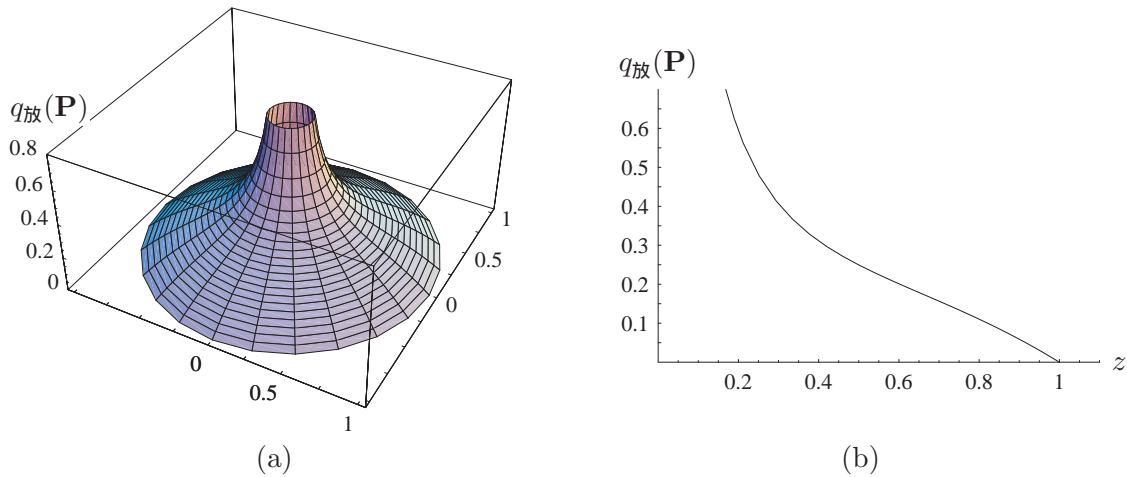


図 5.6 放射路の通過量の概形：(a) 立体図；(b) 断面図.

環状路と放射路の合計の通過量

図 5.7 (a) に環状路と放射路の合計の通過量 $q_{合}(\mathbf{P}) = q_{環}(\mathbf{P}) + q_{放}(\mathbf{P})$ の立体図を，図 5.7 (b) にその断面図を示した．図 5.7 (b) には比較のために， $q_{環}(\mathbf{P})$ と $q_{放}(\mathbf{P})$ のグラフも同時に示した．郊外では，環状路と放射路の通過量には大きな差はないが，中心付近では大部分の通過量が放射路に集中している．このように，放射・環状パターンのもとでは中心部を多くの移動が横切る結果，都心における混雑の潜在性が極めて高くなっている．放射・環状パターンのもとでは，都心の渋滞を和らげる仕組みが必要なのである．

Hyman and Mayhew (2000b) は，Karlsruhe metric の一つの一般化として，環状路上と放射路上の移動速度を異なる値で与え，最短所要時間による移動経路について考察している．これによると，環状路の放射路に対する速度比が $\pi/2 \approx 1.57$ を超えると，すべての移動が環状路を用いることになり，中心を經由する交通量がゼロとなる．放射・環状パターンの下では，(中心経由トリップを減らすために) 高速移動が可能な大容量の環状路を整備することが不可欠であろう．

5.4 環状路の通過密度の導出

5.4.1 通過密度の定義

環状路の通過密度を通過量の時刻に関する密度として導入する．左回りの通過量 $q_{環左}(\mathbf{P})$ には，図 5.2 (a) と図 5.2 (b) の 2 通りの起・終点ペアの集合が存在することをみた．このことはもちろん右回りの通過量 $q_{環右}(\mathbf{P})$ についても同様である．いま，通過量 $q_{環左}(\mathbf{P})$ と $q_{環右}(\mathbf{P})$ を，2 通りの起・終点ペアの和として以下のように表すことにする：

$$q_{環右}(\mathbf{P}) = q_{環右a}(\mathbf{P}) + q_{環右b}(\mathbf{P}), \quad (5.4.1)$$

$$q_{環左}(\mathbf{P}) = q_{環左a}(\mathbf{P}) + q_{環左b}(\mathbf{P}). \quad (5.4.2)$$

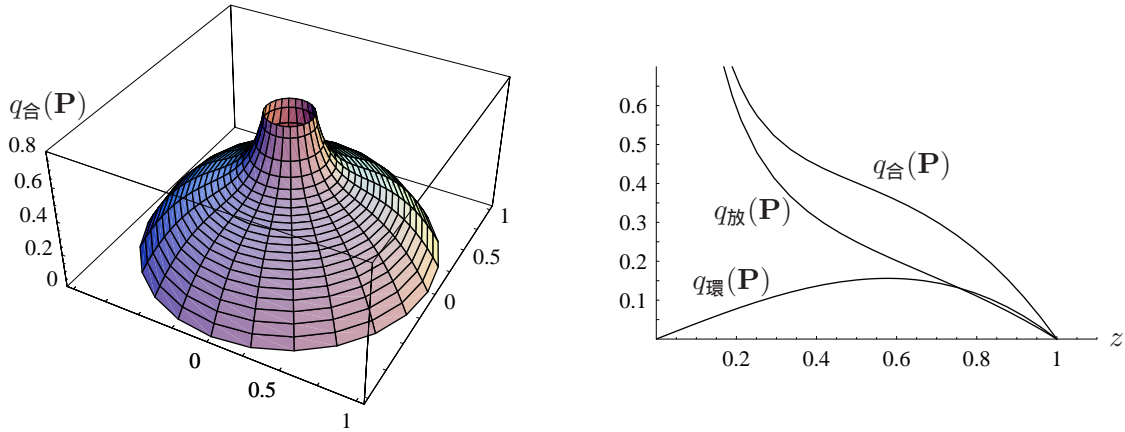


図 5.7 環状路と放射路の合計の通過量の概形：(a) 立体図；(b) 断面図。

いま，環状路の右回りと左回りの通過密度を，それぞれ $p_{環右}(P, t)$ および $p_{環左}(P, t)$ と表す．ここで，通過時刻の密度関数を導入しよう．環状路を先に利用する起・終点ペアの集合と，放射路を先に利用する起・終点ペアの集合に対応する通過時刻の密度関数を，右回りと左回りの場合についてそれぞれ用意し，右回りの場合の $\psi_{環右a}(t; P)$ と $\psi_{環右b}(t; P)$ ，左回りの場合の $\psi_{環左a}(t; P)$ と $\psi_{環左b}(t; P)$ を導入する．これらを用いると，通過密度 $p_{環右}(P, t)$ および $p_{環左}(P, t)$ は以下のように表される：

$$p_{環右}(P, t) = q_{環右a}(P) \cdot \psi_{環右a}(t; P) + q_{環右b}(P) \cdot \psi_{環右b}(t; P), \quad (5.4.3)$$

$$p_{環左}(P, t) = q_{環左a}(P) \cdot \psi_{環左a}(t; P) + q_{環左b}(P) \cdot \psi_{環左b}(t; P). \quad (5.4.4)$$

これらより $p_{環右}(P, t)$ および $p_{環左}(P, t)$ を求める問題は $\psi_{環右a}(t; P)$ と $\psi_{環右b}(t; P)$ および $\psi_{環左a}(t; P)$ と $\psi_{環左b}(t; P)$ を求める問題に帰着される．

ここで，回転対称なトリップ密度を用いた場合

$$p_{環右}(P, t) = p_{環左}(P, t) \quad (5.4.5)$$

が成立する．したがって，どちらか一方を求めて，合計の環状路の通過密度 $p_{環}(P, t)$ を

$$p_{環}(P, t) = 2p_{環右}(P, t), \quad (5.4.6)$$

あるいは

$$p_{環}(P, t) = 2p_{環左}(P, t) \quad (5.4.7)$$

なる関係から導けばよい．

以下では， $p_{環左}(P, t)$ を導くために， $\psi_{環左a}(t; P)$ と $\psi_{環左b}(t; P)$ の導出方法を示す．

5.4.2 一般のトリップ密度と出社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数

一般のトリップ密度 $\tau(Q_1, Q_2)$ と出社時刻分布 $f(t)$ を想定した場合の，通過時刻の密度関数の導出方法を説明する．ここでの導出手順も，第 3 章で示したものとほぼ同様である．

図 5.2 (a) と図 5.2 (b) において，地点 P を環状路に沿って左回りに横切る移動者の， P から目的地 Q_2 までの所要時間を u と表し，この移動者の条件付きの通過時刻の密度関数を $\psi_{環左a}(t; P|u)$ およ

び $\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}|u)$ と表す．目的の $\psi_{\text{環左a}}(t; \mathbf{P})$ と $\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P})$ を，条件付きの密度関数 $\psi_{\text{環左a}}(t; \mathbf{P}|u)$ と $\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}|u)$ をもとにして，以下の積分によって導出する：

$$\psi_{\text{環左a}}(t; \mathbf{P}) = \int_0^{u_{\max}} \psi_{\text{環左a}}(t; \mathbf{P}|u)g(u)du, \quad (5.4.8)$$

$$\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}) = \int_0^{u_{\max}} \psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}|u)g(u)du. \quad (5.4.9)$$

ただし， $g(u)$ と u_{\max} は，それぞれ図 5.2 (a) と図 5.2 (b) に対応する，所要時間 u の密度関数と u の最大値を意味する．

図 5.2 に示した通り，地点 \mathbf{P} を環状路に沿って左回りに通過するための起・終点ペアの集合には，環状路を先に利用する場合の図 5.2 (a) と，放射路を先に利用する場合の図 5.2 (b) との 2 通りが存在する．所要時間の密度関数 $g(u)$ は，図 5.2 (a) と図 5.2 (b) の場合でももちろん異なるから，それぞれに対応する $g(u)$ を導かなければならない．

以下に， $\psi_{\text{環左a}}(t; \mathbf{P})$ と $\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P})$ の導出するために， $\psi_{\text{環左a}}(t; \mathbf{P}|u)$ と $\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}|u)$ およびそれらに対応する $g(u)$ の導出方法を説明し，それらを用いて式 (5.4.8) と式 (5.4.9) の積分を具体的に実行する方法を述べる．

条件付きの通過時刻の密度関数

地点 \mathbf{P} からの所要時間が u である位置に勤務地をもつ通勤者が時刻 t に出社するためには，地点 \mathbf{P} を時刻 $t - u$ に通過しなければならない．したがって，条件付きの通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{環左a}}(t; \mathbf{P}|u)$ と $\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}|u)$ は，出社時刻分布を時間軸の負の向きに u だけ平行移動した以下の式で与えられる：

$$\psi_{\text{環左a}}(t; \mathbf{P}|u) = f(t + u) \quad (t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u), \quad (5.4.10)$$

$$\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}|u) = f(t + u) \quad (t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u). \quad (5.4.11)$$

この関係は，もちろん一般のトリップ密度 $\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ と出社時刻分布 $f(t)$ のもとで成り立つ性質である．

環状路を先に利用する場合の観測地点から勤務地までの所要時間の密度関数

図 5.2 (a) に示した，環状路を先に利用する場合の起・終点ペアの集合に対応する， \mathbf{P} から \mathbf{Q}_2 までの所要時間の密度関数 $g(u)$ の導出法を示す．地点 \mathbf{P} からの所要時間 u の密度関数 $g(u)$ を求めるために，まずその累積分布 $G(u)$ を導く．累積分布 $G(u)$ は，地点 \mathbf{P} から所要時間 u 以下で到達可能な勤務地の割合を意味する．この割合を特定するためには，地点 \mathbf{P} からの所要時間 u の等高線図を描き，地点 \mathbf{P} を環状路を先に利用し左回りに通過する移動者の起・終点ペアの集合のうち，等高線の内部に含まれる割合がどれだけあるかを調べればよい．

図 5.8 に，地点 $\mathbf{P}(z, 0)$ からの所要時間の等高線図を示す．図 5.8 では，6 つの固定点からの所要時間を示しており，順に，(a) $z = 0$, (b) $z = 0.2R$, (c) $z = 0.4R$, (d) $z = 0.6R$, (e) $z = 0.8R$, (f) $z = R$ となっている．図 5.8 から，固定点と終点との角差によって，2 つの異なるタイプの等高線が存在する様子が見て取れる．角差が 2rad よりも小さい範囲では，環状路と放射路を組み合わせた移動が行われ，微妙な曲線で与えられる等高線が見て取れる．角差が 2rad よりも大きい範囲では，中心を經由する放射路のみの移動が行われ，等高線は円弧で与えられる．所要時間 u が小さいうちは，等高線の形状は，直交距離に基づく等高線の形状に似ている（第 6 章の図 6.4）．これは，（局所的に眺めれば）どの地点

においてもその地点を通る放射路と環状路が直交するためである．所要時間 u が大きくなるに従って，環状路の円弧としての性質から，等高線は中心に歪められ，微妙な曲線を描くようになってゆく．

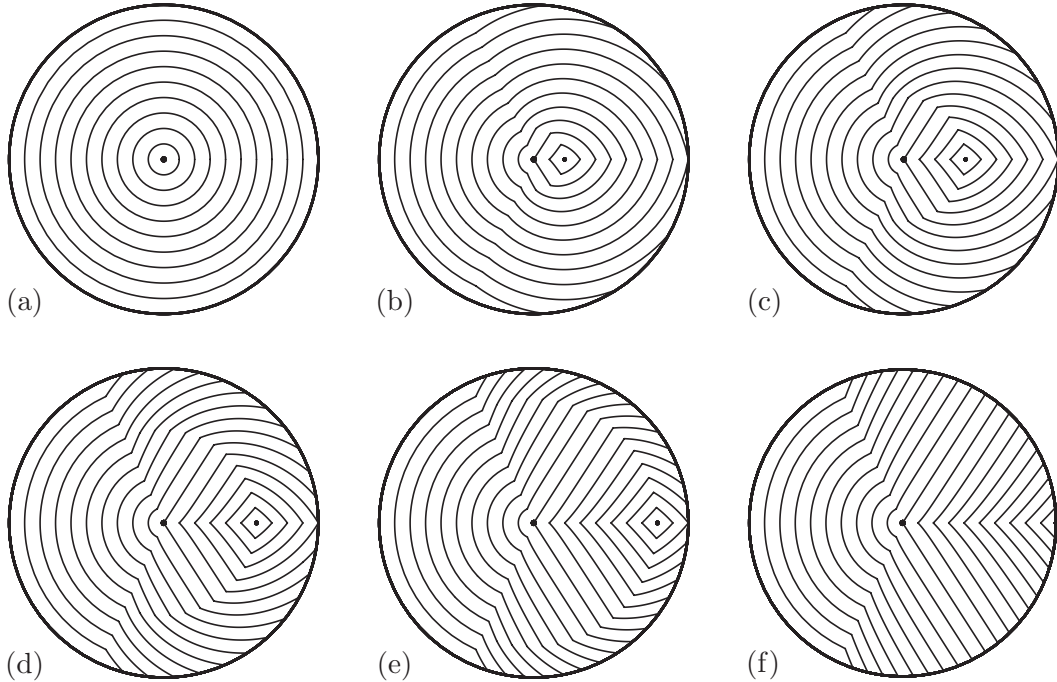


図 5.8 地点 P からの所要時間 u の等高線：(a) $z = 0$; (b) $z = 0.2R$; (c) $z = 0.4R$; (d) $z = 0.6R$;
(e) $z = 0.8R$; (f) $z = R$.

地点 P を環状路を先に利用し左回りに通過する移動者のうち，勤務地が P からの等高線の内部に含まれる割合を特定する．そのために，図 5.9 と図 5.10 に示すように，図 5.2 (a) の起・終点ペアの集合と等高線を重ねて描いた図を利用する．以下に，この図を用いて $G(u)$ を導く方法を説明する．

いま，図 5.9 と図 5.10 において，勤務地集合が存在する領域 $B_{\pm a}$ のうち等高線内部に含まれる領域（図中の太枠で囲った領域）を Λ と表すことにする．このとき，地点 P を環状路を先に利用し左回りに通過する移動者のうち， P からの所要時間が u 以内のトリップ数は，起・終点の領域の組み合わせが $A_{\pm a}$ と Λ で与えられるものである．したがって，累積分布 $G(u)$ は以下のように表される：

$$G(u) = \frac{\int_{Q_2 \in \Lambda} \int_{Q_1 \in A_{\pm a}} \tau(Q_1, Q_2) dQ_1 dQ_2}{\int_{Q_2 \in B_{\pm a}} \int_{Q_1 \in A_{\pm a}} \tau(Q_1, Q_2) dQ_1 dQ_2} \quad (0 \leq u \leq \frac{R+z}{v}). \quad (5.4.12)$$

ここで， u の最大値は地点 $(R, 2)$ までの所要時間となるから， $u_{\max} = \frac{R+z}{v}$ となる．

式 (5.4.12) の積分を実行するにあたり，分子に現れる終点の積分領域 Λ は，中心からの距離 z と所要時間 u に依存していくつかの異なる形状を有するため，以下にすべての形状を整理しておく．領域 Λ の形状は，都市の境界 $(R, 0)$ および地点 $(z, 2)$ にちょうど接触する所要時間で変化が起きる．さらにこの形状は，観測地点 P の中心からの距離 z の位置によって，等高線が $(R, 0)$ と $(z, 2)$ のどちらと先に接触するかによって異なる．これら 2 つの地点までの所要時間を比較することにより，図 5.9 に示す $0 \leq z < \frac{R}{3}$ の場合は $(z, 2)$ に先に接触し，図 5.10 に示す $\frac{R}{3} \leq z \leq R$ の場合は $(R, 0)$ に先に接触することが確かめられる．図 5.9 と図 5.10 の各々において，所要時間によって 3 通りの場合分けが存在する．具体的には，図 5.9 に示す $0 \leq z < \frac{R}{3}$ の場合は，(a) $0 \leq u < \frac{2z}{v}$ ，(b) $\frac{2z}{v} \leq u < \frac{R-z}{v}$ ，(c) $\frac{R-z}{v} \leq u \leq \frac{R+z}{v}$ となり，図 5.10 に示す $\frac{R}{3} \leq z \leq R$ の場合は，(a) $0 \leq u < \frac{R-z}{v}$ ，(b) $\frac{R-z}{v} \leq u < \frac{2z}{v}$ ，

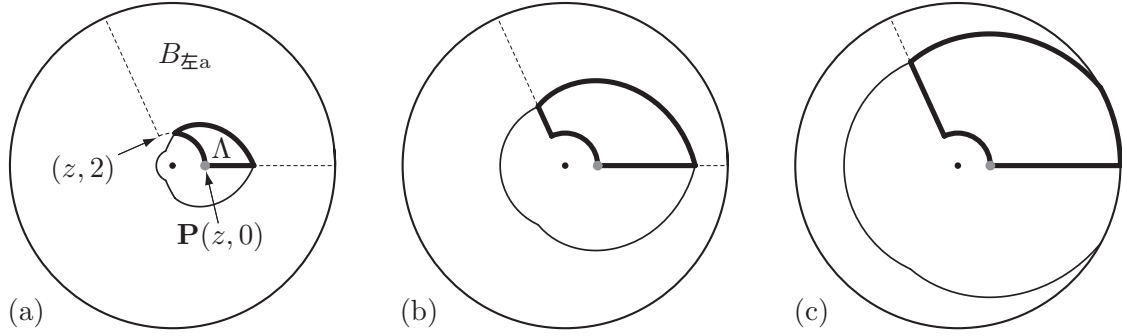


図 5.9 地点 P を左回りに通過する移動者の起・終点ペアの集合のうち P からの所要時間が u 以内の割合の特定 ($0 \leq z < \frac{R}{3}$ の場合).

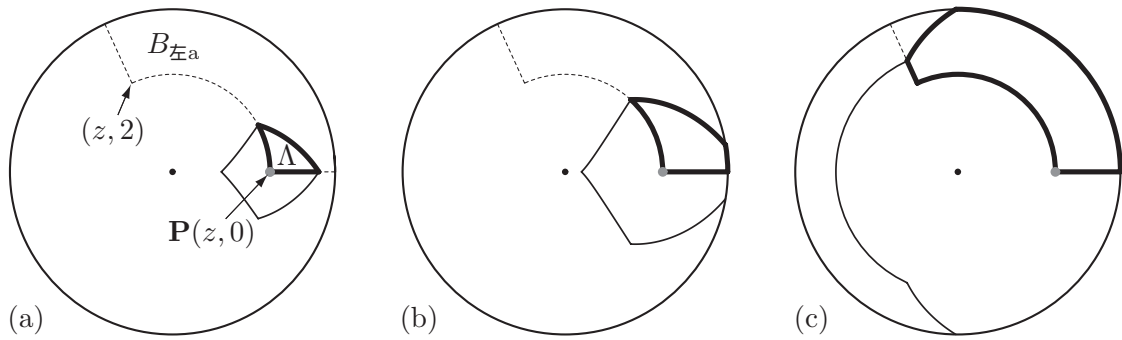


図 5.10 地点 P を左回りに通過する移動者の起・終点ペアの集合のうち P からの所要時間が u 以内の割合の特定 ($\frac{R}{3} \leq z \leq R$ の場合).

(c) $\frac{2z}{v} \leq u \leq \frac{R+z}{v}$, となる.

ここで, $P(z, 0)$ からの所要時間が u の等高線上の終点 $Q_2(r_2, \theta_2)$ 集合は, $vu = z\theta_2 + (r_2 - z)$ を満たすから, Λ は以下のように記述される:

$0 \leq z < \frac{R}{3}$ のとき

$$\Lambda = \left\{ (r_2, \theta_2) \mid z \leq r_2 \leq vu + z - z\theta_2, 0 \leq \theta_2 \leq \frac{vu}{z} \right\} \quad \left(0 \leq u < \frac{2z}{v} \right), \quad (5.4.13)$$

$$\Lambda = \left\{ (r_2, \theta_2) \mid z \leq r_2 \leq vu + z - z\theta_2, 0 \leq \theta_2 \leq 2 \right\} \quad \left(\frac{2z}{v} \leq u < \frac{R-z}{v} \right), \quad (5.4.14)$$

$$\Lambda = \left\{ (r_2, \theta_2) \mid z \leq r_2 \leq R, 0 \leq \theta_2 \leq \frac{vu+z-R}{z} \right\} \\ \cup \left\{ (r_2, \theta_2) \mid z \leq r_2 \leq vu + z - z\theta_2, \frac{vu+z-R}{z} \leq \theta_2 \leq 2 \right\} \quad \left(\frac{R-z}{v} \leq u \leq \frac{R+z}{v} \right). \quad (5.4.15)$$

$\frac{R}{3} \leq z \leq R$ のとき

$$\Lambda = \left\{ (r_2, \theta_2) \mid z \leq r_2 \leq vu + z - z\theta_2, 0 \leq \theta_2 \leq \frac{vu}{z} \right\} \quad \left(0 \leq u < \frac{R-z}{v} \right), \quad (5.4.16)$$

$$\Lambda = \left\{ (r_2, \theta_2) \mid z \leq r_2 \leq R, 0 \leq \theta_2 \leq \frac{vu+z-R}{z} \right\} \\ \cup \left\{ (r_2, \theta_2) \mid z \leq r_2 \leq vu + z - z\theta_2, \frac{vu+z-R}{z} \leq \theta_2 \leq \frac{vu}{z} \right\} \quad \left(\frac{R-z}{v} \leq u < \frac{2z}{v} \right), \quad (5.4.17)$$

$$\Lambda = \left\{ (r_2, \theta_2) \mid z \leq r_2 \leq R, 0 \leq \theta_2 \leq \frac{vu+z-R}{z} \right\} \\ \cup \left\{ (r_2, \theta_2) \mid z \leq r_2 \leq vu + z - z\theta_2, \frac{vu+z-R}{z} \leq \theta_2 \leq 2 \right\} \quad \left(\frac{2z}{v} \leq u \leq \frac{R+z}{v} \right). \quad (5.4.18)$$

これらをもとに起・終点の座標を用いて式 (5.4.12) を具体的に表現すると以下のようになる：

(a) $0 \leq z \leq \frac{R}{3}$ のとき

(i) $0 \leq u < \frac{2z}{v}$ ならば

$$G(u) = \frac{1}{h_{\text{環a}}(z)} \left[\int_{r_2=z}^{vu+z-z\theta_2} \int_{\theta_2=0}^{\frac{vu}{z}} \int_{r_1=z}^{z+dz} \int_{\theta_1=\theta_2-2}^0 \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \right], \quad (5.4.19)$$

(ii) $\frac{2z}{v} \leq u < \frac{R-z}{v}$ ならば

$$G(u) = \frac{1}{h_{\text{環a}}(z)} \left[\int_{r_2=z}^{vu+z-z\theta_2} \int_{\theta_2=0}^2 \int_{r_1=z}^{z+dz} \int_{\theta_1=\theta_2-2}^0 \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \right], \quad (5.4.20)$$

(iii) $\frac{R-z}{v} \leq u \leq \frac{R+z}{v}$ ならば

$$G(u) = \frac{1}{h_{\text{環a}}(z)} \left[\int_{r_2=z}^R \int_{\theta_2=0}^{\frac{vu+z-R}{z}} \int_{r_1=z}^{z+dz} \int_{\theta_1=\theta_2-2}^0 \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \right. \\ \left. + \int_{r_2=z}^{vu+z-z\theta_2} \int_{\theta_2=\frac{vu+z-R}{z}}^2 \int_{r_1=z}^{z+dz} \int_{\theta_1=\theta_2-2}^0 \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \right]. \quad (5.4.21)$$

(b) $\frac{R}{3} \leq z \leq R$ のとき

(i) $0 \leq u < \frac{R-z}{v}$ ならば

$$G(u) = \frac{1}{h_{\text{環a}}(z)} \left[\int_{r_2=z}^{vu+z-z\theta_2} \int_{\theta_2=0}^{\frac{vu}{z}} \int_{r_1=z}^{z+dz} \int_{\theta_1=\theta_2-2}^0 \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \right], \quad (5.4.22)$$

(ii) $\frac{R-z}{v} \leq u < \frac{2z}{v}$ ならば

$$G(u) = \frac{1}{h_{\text{環a}}(z)} \left[\int_{r_2=z}^R \int_{\theta_2=0}^{\frac{vu+z-R}{z}} \int_{r_1=z}^{z+dz} \int_{\theta_1=\theta_2-2}^0 \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \right. \\ \left. + \int_{r_2=z}^{vu+z-z\theta_2} \int_{\theta_2=\frac{vu+z-R}{z}}^{\frac{vu}{z}} \int_{r_1=z}^{z+dz} \int_{\theta_1=\theta_2-2}^0 \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \right], \quad (5.4.23)$$

(iii) $\frac{2z}{v} \leq u \leq \frac{R+z}{v}$ ならば

$$G(u) = \frac{1}{h_{\text{環a}}(z)} \left[\int_{r_2=z}^R \int_{\theta_2=0}^{\frac{vu+z-R}{z}} \int_{r_1=z}^{z+dz} \int_{\theta_1=\theta_2-2}^0 \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \right. \\ \left. + \int_{r_2=z}^{vu+z-z\theta_2} \int_{\theta_2=\frac{vu+z-R}{z}}^2 \int_{r_1=z}^{z+dz} \int_{\theta_1=\theta_2-2}^0 \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \right]. \quad (5.4.24)$$

ただし, $h_{環a}(z)$ は式 (5.4.12) の分母に対応し, 以下のように与えられる:

$$h_{環a}(z) = \int_{r_2=z}^R \int_{\theta_2=0}^2 \int_{r_1=z}^{z+dz} \int_{\theta_1=\theta_2-2}^0 \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2. \quad (5.4.25)$$

この式を具体的なトリップ密度 $\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ のもとで計算し, それを u に関して微分すれば目的の $g(u)$ を得ることができる (もちろん $G(u)$ が u の関数として陽に得られた場合). 以上で, 図 5.2 (a) に対応する $g(u)$ の導出方法が示された.

環状路を先に利用する場合の通過時刻の密度関数

以下に, $\psi_{環左a}(t; \mathbf{P}|u)$ および $g(u)$ が得られているものとして, 式 (5.4.8) の積分を具体的に実行する方法を説明する.

いま, 地点 \mathbf{P} を環状路を先に利用して左回りに通過する移動者に着目し, その移動者の地点 \mathbf{P} を通過する時刻 t と \mathbf{P} から \mathbf{Q}_2 までの所要時間 u のペアの集合に着目する. この集合を t - u 平面上に特定する. この領域は, 式 (5.4.10) および式 (5.4.12) の定義域を満たす領域 E

$$E = \left\{ (t, u) \mid t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u, 0 \leq u \leq \frac{R+z}{v} \right\} \quad (5.4.26)$$

で与えられ, t - u 平面上の平行四辺形に対応する.

平行四辺形の一例を図 5.11 に示した ($a = 0.6R/v$, $z = 0.2R$ の場合). これまでの章では, 所要時間の密度関数 $g(u)$ が区間 $[0, u_{\max}]$ において一意に表現される関数のみを扱った. ところが, ここで扱う例のように, $g(u)$ が区間 $[0, u_{\max}]$ で場合分けをもつ関数の場合, 考慮すべき平行四辺形の形状は場合分けの端点数の増加に伴い増えてしまう. さらに, 各平行四辺形に対して, 時刻によって端点に比例した場合分けを必要とする. ここで扱う $g(u)$ は 3 つの区間で異なる関数型で与えられるため, 対応する通過時刻の密度関数は図中に示す通り, (i) から (vii) の 7 つの区間で場合分けされることになる. そこで, $\psi_{環左a}(t; \mathbf{P})$ に対応する平行四辺形をシステマティックに網羅する方法を以下に示そう.

図 5.11 からわかるように, 平行四辺形の形状は, $t = t_0 - \frac{R+z}{v}$ と $t = t_0 + a$ の間の 6 つの端点 $t_0 - \frac{R-z}{v}$, $t_0 + a - \frac{R+z}{v}$, $t_0 - \frac{2z}{v}$, $t_0 + a - \frac{R-z}{v}$, t_0 , $t_0 + a - \frac{2z}{v}$ がどのような順で出現するかによって変わってくる. これらの出現順序は (a, z) のペアによって合計 12 通り存在し, 対応する 12 通りの平行四辺形に対してそれぞれ $\psi_{環左a}(t; \mathbf{P})$ を計算する必要がある.

図 5.12 に, a - z 平面を 12 通りの各平行四辺形に対応する領域に分割した図を示す. 図 5.12 の a - z 平面上の 1 点が, t - u 平面における一つの平行四辺形に対応する. 図中の領域 (A) から (L) がそれらを表しており, 図 5.11 の平行四辺形は図 5.12 の領域 (D) に対応するものである.

表 5.1 に, (A) から (L) の 12 個の領域における, 平行四辺形の形状を決定する 6 つの端点の出現順序を示す. 表 5.1 では, 最初の端点 $t = t_0 - \frac{R+z}{v}$ と最後の端点 $t = t_0 + a$ も加え, 合計 8 つの端点の番号を, (1) $t = t_0 - \frac{R+z}{v}$, (2) $t = t_0 + a - \frac{R+z}{v}$, (3) $t = t_0 - \frac{R-z}{v}$, (4) $t = t_0 + a - \frac{R-z}{v}$, (5) $t = t_0 - \frac{2z}{v}$, (6) $t = t_0 + a - \frac{2z}{v}$, (7) $t = t_0$, (8) $t = t_0 + a$ と記述してまとめた.

図 5.11 の平行四辺形に対応する通過時刻の密度関数 $\psi_{環左a}(t; \mathbf{P})$ の導出方法を示しておく. ここで, 図 5.11 に示すように, 式 (5.4.19), 式 (5.4.20) および式 (5.4.21) に対応する所要時間の密度関数を便宜上 $g_{a1}(u)$, $g_{a2}(u)$ および $g_{a3}(u)$ と表すことにする (図 5.11 は $0 \leq z < \frac{R}{3}$ の場合である).

式 (5.4.8) において, 式 (5.4.10) の

$$\psi_{環左a}(t; \mathbf{P}|u) = f(t+u) \quad (t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u)$$

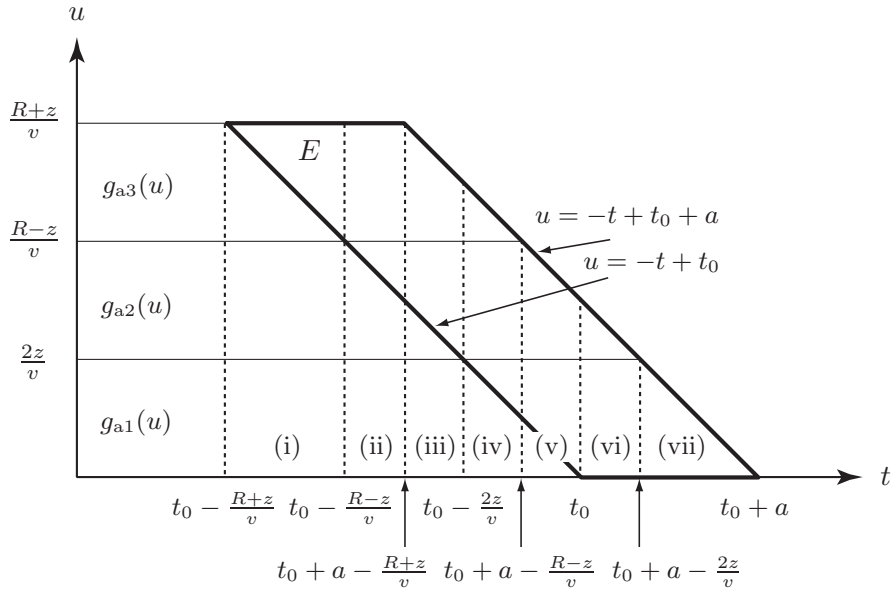


図 5.11 地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 ($a = 0.6R/v$, $z = 0.2R$ の場合)。

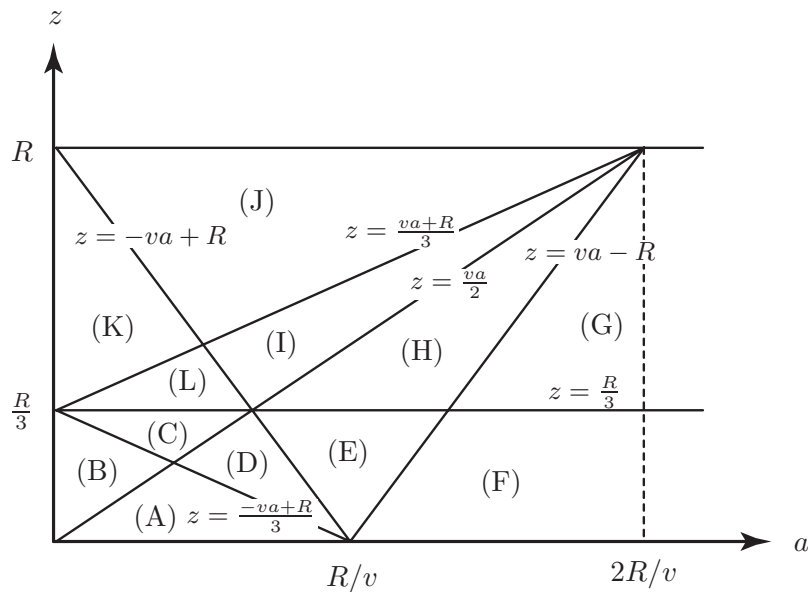


図 5.12 環状路を先に利用する場合の環状路の通過時刻の密度関数を導出するための a - z 平面。

なる関係を用いれば，図 5.11 の平行四辺形に対応する通過時刻の密度関数 $\psi_{環左a}(t; \mathbf{P})$ は以下のように与えられる：

$$(D) \frac{-va + R}{3} \leq z \leq \frac{va}{2} \text{ かつ } z \leq -va + R \text{ のとき}$$

(i) $t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{R-z}{v}$ ならば

$$\psi_{環右a}(t; \mathbf{P}) = \int_{-t+t_0}^{\frac{R+z}{v}} f(t+u)g_{a3}(u)du, \tag{5.4.27}$$

表 5.1 図 5.12 の a - z 平面に対応する端点の出現順序の整理 .

(A)	(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (7) \Rightarrow (6) \Rightarrow (8)
(B)	(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7) \Rightarrow (8)
(C)	(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (5) \Rightarrow (4) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7) \Rightarrow (8)
(D)	(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (5) \Rightarrow (4) \Rightarrow (7) \Rightarrow (6) \Rightarrow (8)
(E)	(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (5) \Rightarrow (2) \Rightarrow (7) \Rightarrow (4) \Rightarrow (6) \Rightarrow (8)
(F)	(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (5) \Rightarrow (7) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (6) \Rightarrow (8)
(G)	(1) \Rightarrow (5) \Rightarrow (3) \Rightarrow (7) \Rightarrow (2) \Rightarrow (6) \Rightarrow (4) \Rightarrow (8)
(H)	(1) \Rightarrow (5) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (7) \Rightarrow (6) \Rightarrow (4) \Rightarrow (8)
(I)	(1) \Rightarrow (5) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7) \Rightarrow (4) \Rightarrow (8)
(J)	(1) \Rightarrow (5) \Rightarrow (2) \Rightarrow (6) \Rightarrow (3) \Rightarrow (7) \Rightarrow (4) \Rightarrow (8)
(K)	(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (7) \Rightarrow (8)
(L)	(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (5) \Rightarrow (3) \Rightarrow (6) \Rightarrow (4) \Rightarrow (7) \Rightarrow (8)

(ii) $t_0 - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{環右}a}(t; \mathbf{P}) = \int_{-t+t_0}^{\frac{R-z}{v}} f(t+u)g_{a2}(u)du + \int_{\frac{R-z}{v}}^{\frac{R+z}{v}} f(t+u)g_{a3}(u)du, \quad (5.4.28)$$

(iii) $t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{環右}a}(t; \mathbf{P}) = \int_{-t+t_0}^{\frac{R-z}{v}} f(t+u)g_{a2}(u)du + \int_{\frac{R-z}{v}}^{-t+t_0+a} f(t+u)g_{a3}(u)du, \quad (5.4.29)$$

(iv) $t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R-z}{v}$ ならば

$$\begin{aligned} \psi_{\text{環右}a}(t; \mathbf{P}) &= \int_{-t+t_0}^{\frac{2z}{v}} f(t+u)g_{a1}(u)du + \int_{\frac{2z}{v}}^{\frac{R-z}{v}} f(t+u)g_{a2}(u)du \\ &\quad + \int_{\frac{R-z}{v}}^{-t+t_0+a} f(t+u)g_{a3}(u)du, \end{aligned} \quad (5.4.30)$$

(v) $t_0 + a - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{\text{環右}a}(t; \mathbf{P}) = \int_{-t+t_0}^{\frac{2z}{v}} f(t+u)g_{a1}(u)du + \int_{\frac{2z}{v}}^{-t+t_0+a} f(t+u)g_{a2}(u)du, \quad (5.4.31)$$

(vi) $t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{環右}a}(t; \mathbf{P}) = \int_0^{\frac{2z}{v}} f(t+u)g_{a1}(u)du + \int_{\frac{2z}{v}}^{-t+t_0+a} f(t+u)g_{a2}(u)du, \quad (5.4.32)$$

(vii) $t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{環右}a}(t; \mathbf{P}) = \int_0^{-t+t_0+a} f(t+u)g_{a1}(u)du. \quad (5.4.33)$$

図 5.12 の領域 (D) 以外の通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{環左}a}(t; \mathbf{P}|u)$ についても，対応する平行四辺形を描き，同様の手順を経ることにより導くことができる．

放射路を先に利用する場合の観測地点から勤務地までの所要時間の密度関数

図 5.2 (b) に示した放射路を先に利用する場合の起・終点ペアの集合に対応する， \mathbf{P} から \mathbf{Q}_2 までの所要時間の密度関数 $g(u)$ の導出法を示す．導出手順は，環状路を先に利用する場合のものと全く同様である．地点 \mathbf{P} からの所要時間 u の密度関数 $g(u)$ を求めるために，まずその累積分布 $G(u)$ を導く．

地点 \mathbf{P} を放射路を先に利用し左回りに通過する移動者のうち，勤務地が \mathbf{P} からの等高線の内部に含まれる割合を特定するために，図 5.2 (b) の起・終点ペアと等高線を重ねて描いたものを図 5.13 に示す．いま，図 5.13 において，勤務地集合が存在する領域 $B_{\text{左}b}$ のうち等高線内部に含まれる領域（図中の太枠で囲った領域）を Λ と表すことにする．所要時間の累積分布 $G(u)$ は Λ を用いて以下のように表される：

$$G(u) = \frac{\int_{\mathbf{Q}_2 \in \Lambda} \int_{\mathbf{Q}_1 \in A_{\text{左}b}} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_1 d\mathbf{Q}_2}{\int_{\mathbf{Q}_2 \in B_{\text{左}b}} \int_{\mathbf{Q}_1 \in A_{\text{左}b}} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_1 d\mathbf{Q}_2} \quad (0 \leq u \leq \frac{2z}{v}). \quad (5.4.34)$$

ここで， $u_{\text{max}} = \frac{2z}{v}$ を利用した．

いま， dz が十分に小さいと考えられる場合は， Λ は以下のように表される：

$$\Lambda = \{(r_2, \theta_2) \mid z \leq r_2 \leq z + dz, 0 \leq \theta_2 \leq \frac{vu}{z}\} \quad (0 \leq u \leq \frac{2z}{v}). \quad (5.4.35)$$

これらをもとに起・終点の座標を用いて式 (5.4.34) を具体的に表現すると以下ようになる：

$$G(u) = \frac{1}{h_{\text{環}b}(z)} \left[\int_{r_2=z}^{z+dz} \int_{\theta_2=0}^{\frac{vu}{z}} \int_{r_1=z}^R \int_{\theta_1=\theta_2-2}^0 \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \right]. \quad (5.4.36)$$

ただし， $h_{\text{環}b}(z)$ は式 (5.4.34) の分母に対応し，以下のように与えられる：

$$h_{\text{環}b}(z) = \int_{r_2=z}^{z+dz} \int_{\theta_2=0}^2 \int_{r_1=z}^R \int_{\theta_1=\theta_2-2}^0 \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2. \quad (5.4.37)$$

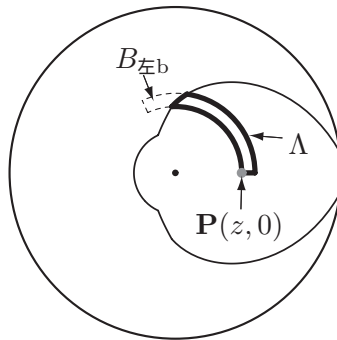


図 5.13 地点 \mathbf{P} を左回りに通過する移動者の起・終点ペアの集合のうち \mathbf{P} からの所要時間が u 以内の割合の特定．

放射路を先に利用する場合の通過時刻の密度関数

続いて、 $\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}|u)$ および $g(u)$ が得られているものとして、式 (5.4.9) の積分を具体的に行う方法を説明する。

いま、地点 \mathbf{P} を放射路を先に利用して左回りに通過する移動者に着目し、その移動者の地点 \mathbf{P} を通過する時刻 t と \mathbf{P} から \mathbf{Q}_2 までの所要時間 u のペアの集合に着目する。この集合はこれまでと同様 $t-u$ 平面上の平行四辺形に対応し、式 (5.4.11) および式 (5.4.34) の定義域を満たす領域 E

$$E = \left\{ (t, u) \mid t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u, 0 \leq u \leq \frac{2z}{v} \right\} \quad (5.4.38)$$

で与えられる。

放射路を先に利用する場合の所要時間の密度関数 $g(u)$ は区間 $u \in [0, \frac{2z}{v}]$ で一意に表される。したがって、平行四辺形の形状は、図 5.14 に示す 2 通りのみとなり、 $a \leq \frac{2z}{v}$ の場合は図 5.14 (a) で与えられ、 $a > \frac{2z}{v}$ の場合は図 5.14 (b) で与えられる。また、 $a-z$ 平面を 2 つの平行四辺形の形状に対応する領域に分割すると、図 5.15 が得られる。

式 (5.4.9) において、式 (5.4.11) の

$$\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}|u) = f(t+u) \quad (t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u)$$

なる関係を用いれば、 $\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P})$ は以下の通りに表される：

(a) $a \leq \frac{2z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}) = \int_{-t+t_0}^{\frac{2z}{v}} f(t+u)g(u)du, \quad (5.4.39)$$

(ii) $t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}) = \int_{-t+t_0}^{-t+t_0+a} f(t+u)g(u)du, \quad (5.4.40)$$

(iii) $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}) = \int_0^{-t+t_0+a} f(t+u)g(u)du. \quad (5.4.41)$$

(b) $a > \frac{2z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}) = \int_{-t+t_0}^{\frac{2z}{v}} f(t+u)g(u)du, \tag{5.4.42}$$

(ii) $t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}) = \int_0^{\frac{2z}{v}} f(t+u)g(u)du, \tag{5.4.43}$$

(iii) $t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}) = \int_0^{-t+t_0+a} f(t+u)g(u)du. \tag{5.4.44}$$

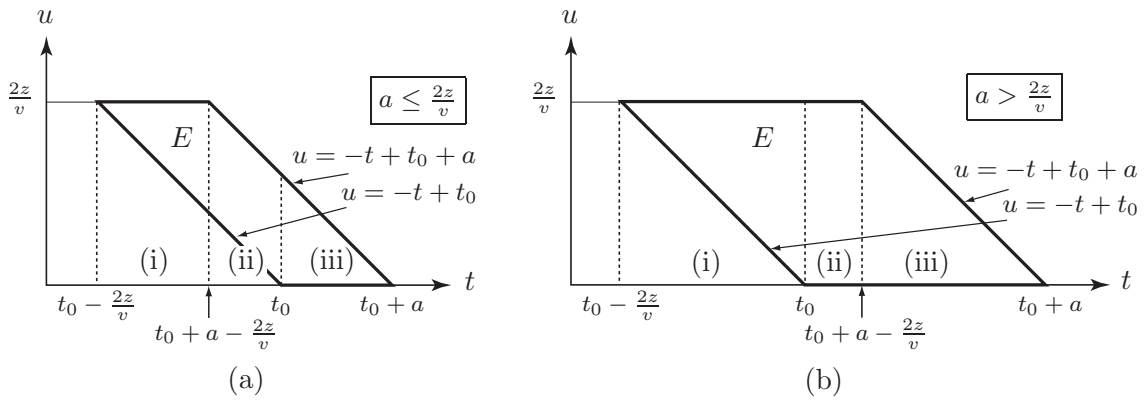


図 5.14 地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 .

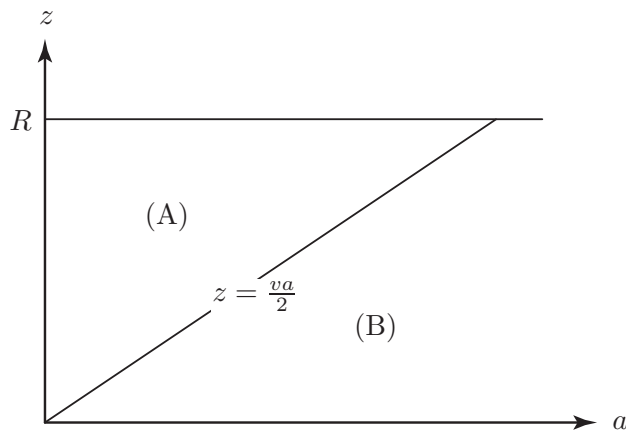


図 5.15 平行四辺形の形状を決定するための a - z 平面 .

5.4.3 一様なトリップ密度と入社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数

移動の起点 Q_1 と終点 Q_2 が円盤上で一様かつ独立に分布する場合の通過密度を導出する．このときのトリップ密度は以下のように表される：

$$\tau(Q_1, Q_2) = \frac{N}{(\pi R^2)^2}. \quad (5.4.45)$$

入社時刻分布としては時間区間 $[t_0, t_0 + a]$ の一様分布を想定する：

$$f(t) = \frac{1}{a} \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + a). \quad (5.4.46)$$

環状路を先に利用する場合の所要時間の累積分布と密度関数

式 (5.4.19), 式 (5.4.20) および式 (5.4.21) と, 式 (5.4.22), 式 (5.4.23) および式 (5.4.24) において一様なトリップ密度を用いて具体的に計算を行うと, 所要時間の累積分布は以下の通りに導かれる：

(a) $0 \leq z < \frac{R}{3}$ のとき

$$G(u) = \begin{cases} \frac{-v^4 u^4 + 4v^3 z u^3 + 24v^2 z^2 u^2}{24z^2(R^2 - z^2)} & (0 \leq u < \frac{2z}{v}), \\ \frac{3v^2 u^2 + 2vzu - 2z^2}{3(R^2 - z^2)} & (\frac{2z}{v} \leq u < \frac{R-z}{v}), \\ \frac{1}{24z^2(R^2 - z^2)} [v^4 u^4 - 4v^3 z u^3 - 6v^2(R^2 - z^2)u^2 \\ + 4v(2R - z)(R + z)^2 u - 3R^4 - 8R^3 z + 18R^2 z^2 - 23z^4] & (\frac{R-z}{v} \leq u \leq \frac{R+z}{v}). \end{cases} \quad (5.4.47)$$

(b) $\frac{R}{3} \leq z < R$ のとき

$$G(u) = \begin{cases} \frac{-v^4 u^4 + 4v^3 z u^3 + 24v^2 z^2 u^2}{24z^2(R^2 - z^2)} & (0 \leq u < \frac{R-z}{v}), \\ \frac{1}{24z^2(R+z)} [-6v^2(R+z)u^2 \\ + 4v(5z^2 + 5Rz + 2R^2)u + 7z^3 + 7Rz^2 - 11R^2 z - 3R^3] & (\frac{R-z}{v} \leq u < \frac{2z}{v}), \\ \frac{1}{24z^2(R^2 - z^2)} [v^4 u^4 - 4v^3 z u^3 - 6v^2(R^2 - z^2)u^2 \\ + 4v(2R - z)(R + z)^2 u - 3R^4 - 8R^3 z + 18R^2 z^2 - 23z^4] & (\frac{2z}{v} \leq u \leq \frac{R+z}{v}). \end{cases} \quad (5.4.48)$$

これらを u について微分すると $g(u)$ は以下の通りに導かれる：

(a) $0 \leq z < \frac{R}{3}$ のとき

$$g(u) = \begin{cases} \frac{-v^4 u^3 + 3v^3 z u^2 + 12v^2 z^2 u}{6z^2(R^2 - z^2)} & (0 \leq u < \frac{2z}{v}), \\ \frac{6v^2 u + 2vz}{3(R^2 - z^2)} & (\frac{2z}{v} \leq u < \frac{R-z}{v}), \\ \frac{v^4 u^3 - 3v^3 z u^2 - 3v^2(R^2 - z^2)u + v(2R - z)(R + z)^2}{6z^2(R^2 - z^2)} & (\frac{R-z}{v} \leq u \leq \frac{R+z}{v}). \end{cases} \quad (5.4.49)$$

(b) $\frac{R}{3} \leq z \leq R$ のとき

$$g(u) = \begin{cases} \frac{-v^4 u^3 + 3v^3 z u^2 + 12v^2 z^2 u}{6z^2(R^2 - z^2)} & (0 \leq u < \frac{R-z}{v}), \\ \frac{-3v^2(R + z)u + v(5z^2 + 5Rz + 2R^2)}{6z^2(R + z)} & (\frac{R-z}{v} \leq u < \frac{2z}{v}), \\ \frac{v^4 u^3 - 3v^3 z u^2 - 3v^2(R^2 - z^2)u + v(2R - z)(R + z)^2}{6z^2(R^2 - z^2)} & (\frac{2z}{v} \leq u \leq \frac{R+z}{v}). \end{cases} \quad (5.4.50)$$

環状路を先に利用する場合の通過時刻の密度関数

これらの結果をもとに，図 5.12 の部分領域に対応する 12 通りの各平行四辺形をもとに，式 (5.4.8) の積分を具体的に実行すれば，通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{環左a}}(t; \mathbf{P})$ を具体的に導くことができる．12 通りすべての $\psi_{\text{環左a}}(t; \mathbf{P})$ を付録 A.1 に掲載した．

放射路を先に利用する場合の所要時間の累積分布と密度関数

式 (5.4.36) において一様なトリップ密度を用いて具体的な計算を行うと，所要時間の累積分布 $G(u)$ は以下の通りに導かれる：

$$G(u) = \frac{-v^2 u^2 + 4vzu}{4z^2} \quad (0 \leq u \leq \frac{2z}{v}). \quad (5.4.51)$$

これを u について微分すると $g(u)$ は以下の通りに導かれる：

$$g(u) = \frac{-v^2 u + 2vz}{2z^2} \quad (0 \leq u \leq \frac{2z}{v}). \quad (5.4.52)$$

放射路を先に利用する場合の通過時刻の密度関数

以上の想定のもとで，式 (5.4.9) の積分を実行すれば $\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P})$ は以下のように導かれる：

(a) $a \leq \frac{2z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}) = \frac{(vt + 2z - vt_0)^2}{4az^2}, \quad (5.4.53)$$

(ii) $t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}) = \frac{v(2vt + 4z - va - 2vt_0)}{4z^2}, \quad (5.4.54)$$

(iii) $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}) = \frac{v(t - t_0 - a)(va + vt_0 - vt - 4z)}{4az^2}. \quad (5.4.55)$$

(b) $a > \frac{2z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}) = \frac{(vt + 2z - vt_0)^2}{4az^2}, \quad (5.4.56)$$

(ii) $t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}) = \frac{1}{a}, \quad (5.4.57)$$

(iii) $t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{環左b}}(t; \mathbf{P}) = \frac{v(t - t_0 - a)(va + vt_0 - vt - 4z)}{4az^2}. \quad (5.4.58)$$

5.5 放射路の通過密度の導出

5.5.1 通過密度の定義

放射路の通過量の時刻に関する密度を導入する．上り方面と下り方面に対応する通過密度をそれぞれ $p_{\text{放上}}(\mathbf{P}, t)$ および $p_{\text{放下}}(\mathbf{P}, t)$ と表す．ここで，地点 \mathbf{P} を放射路に沿って上り方面に通過する移動者の通過時刻の密度関数を $\psi_{\text{放上}}(t; \mathbf{P})$ ，下り方面のそれを $\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P})$ と表すことにすれば，通過密度は通過量と通過時刻の密度関数との積として表される：

$$p_{\text{放上}}(\mathbf{P}, t) = q_{\text{放上}}(\mathbf{P}) \cdot \psi_{\text{放上}}(t; \mathbf{P}), \quad (5.5.1)$$

$$p_{\text{放下}}(\mathbf{P}, t) = q_{\text{放下}}(\mathbf{P}) \cdot \psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P}). \quad (5.5.2)$$

以下に， $\psi_{\text{放上}}(t; \mathbf{P})$ および $\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P})$ の導出方法を示す．

5.5.2 一般のトリップ密度と入社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数

一般のトリップ密度 $\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ と入社時刻分布 $f(t)$ を想定した場合の通過時刻の密度関数の導出方法を説明する．ここでの導出方法も，第3章と同様の手順に従えばよい．

地点 P を放射路に沿って上り方面および下り方面へ向かって横切る移動者の、 P から目的地までの所要時間を u と表し、この移動者の条件付きの通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{放}_{\text{上}}}(t; P|u)$ および $\psi_{\text{放}_{\text{下}}}(t; P|u)$ を導入する。目的の $\psi_{\text{放}_{\text{上}}}(t; P)$ と $\psi_{\text{放}_{\text{下}}}(t; P)$ は、条件付きの密度関数 $\psi_{\text{放}_{\text{上}}}(t; P|u)$ と $\psi_{\text{放}_{\text{下}}}(t; P|u)$ をもとにして、以下の積分によって導出される：

$$\psi_{\text{放}_{\text{上}}}(t; P) = \int_0^{u_{\text{max}}} \psi_{\text{放}_{\text{上}}}(t; P|u)g(u)du, \quad (5.5.3)$$

$$\psi_{\text{放}_{\text{下}}}(t; P) = \int_0^{u_{\text{max}}} \psi_{\text{放}_{\text{下}}}(t; P|u)g(u)du. \quad (5.5.4)$$

ただし、 $g(u)$ は所要時間 u の密度関数を意味し、 u_{max} は u の最大値を意味する。所要時間の密度関数 $g(u)$ は、上りと下りでももちろん異なるから、それぞれに対応する $g(u)$ を導かなければならない。

以下に、 $\psi_{\text{放}_{\text{上}}}(t; P)$ と $\psi_{\text{放}_{\text{下}}}(t; P)$ を導出するために、 $\psi_{\text{放}_{\text{上}}}(t; P|u)$ と $\psi_{\text{放}_{\text{下}}}(t; P|u)$ およびそれらに対応する $g(u)$ の導出方法を説明し、それらを用いて式 (5.5.3) と式 (5.5.4) の積分を具体的に実行する方法を述べる。

条件付きの通過時刻の密度関数

地点 P からの所要時間が u である位置に勤務地をもつ通勤者が時刻 t に出社するためには、地点 P を時刻 $t - u$ に通過しなければならない。したがって、条件付きの通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{放}_{\text{上}}}(t; P|u)$ と $\psi_{\text{放}_{\text{下}}}(t; P|u)$ は、出社時刻分布を時間軸の負の向きに u だけ平行移動した以下の式で与えられる：

$$\psi_{\text{放}_{\text{上}}}(t; P|u) = f(t + u) \quad (t - u \leq t \leq t_0 + a - u), \quad (5.5.5)$$

$$\psi_{\text{放}_{\text{下}}}(t; P|u) = f(t + u) \quad (t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u). \quad (5.5.6)$$

この関係は、もちろん一般のトリップ密度 $\tau(Q_1, Q_2)$ と出社時刻分布 $f(t)$ のもとで成り立つ性質である。

上り方面の観測地点から勤務地までの所要時間の密度関数

図 5.4 (a) に示した上り方面の起・終点ペアの集合に対応する所要時間の密度関数 $g(u)$ の導出法を示す。地点 P からの所要時間 u の密度関数 $g(u)$ を求めるために、まずその累積分布 $G(u)$ を導く。累積分布 $G(u)$ は、地点 P から所要時間 u 以下で到達可能な勤務地の割合を意味する。この割合を特定するためには、地点 P からの所要時間 u の等高線図を描き、地点 P を上り方面に向かって通過する移動者の起・終点ペアの集合のうち、勤務地が等高線の内部に含まれる割合を調べればよい。

地点 P を上り方面に向かって通過する移動者のうち、勤務地が P からの等高線の内部に含まれる割合を特定するために、図 5.4 (a) の起・終点ペアと等高線を重ねて描いた図 5.16 を利用する。以下に、この図を用いて $G(u)$ を導く方法を説明する。

いま、図 5.16 において、勤務地集合が存在する領域 $B_{\text{上}}$ のうち等高線の内部に含まれる領域（図中の太枠で囲った領域）を Λ と表すことにする。このとき、累積分布 $G(u)$ は以下のように表される：

$$G(u) = \frac{\int_{Q_2 \in \Lambda} \int_{Q_1 \in A_{\text{上}}} \tau(Q_1, Q_2) dQ_1 dQ_2}{\int_{Q_2 \in B_{\text{上}}} \int_{Q_1 \in A_{\text{上}}} \tau(Q_1, Q_2) dQ_1 dQ_2} \quad (0 \leq u \leq \frac{R+z}{v}). \quad (5.5.7)$$

ここで、 $u_{\text{max}} = \frac{R+z}{v}$ を利用した。

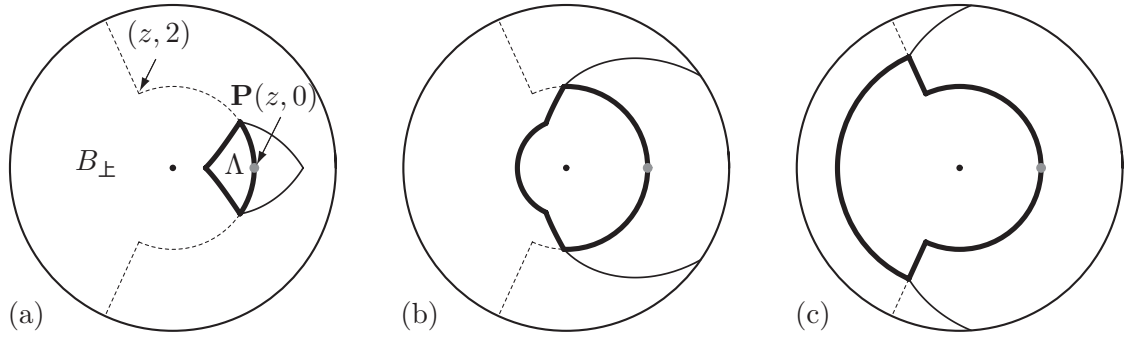


図 5.16 地点 P を上り方面に向かって通過する移動者の起・終点ペアの集合のうち P からの所要時間が u 以内の割合の特定.

領域 Λ の形状には, 図 5.16 に示す通り, 地点 P からの所要時間によって 3 通りの場合が存在する. 形状が変化する所要時間は, 領域 Λ が都市中心に接触する $u = \frac{z}{v}$, および地点 $(z, 2)$ に接触する $u = \frac{2z}{v}$ である. したがって, 所要時間の累積分布は, 図 5.16 の (a) $0 \leq u < \frac{z}{v}$, (b) $\frac{z}{v} \leq u < \frac{2z}{v}$, (c) $\frac{2z}{v} \leq u \leq \frac{R+z}{v}$ の 3 つの場合について求めなければならない. 以下に, 図 5.16 (a), (b), (c) に対応する領域 Λ を式の形で与えよう (ただし簡単のために Λ の上半分 $0 \leq \theta_2 \leq \pi$ の範囲を Λ_1 と表し対称性を利用して記述する). ここで, $P(z, 0)$ からの所要時間が u の等高線上の終点 $Q_2(r_2, \theta_2)$ 集合は, 角差が 2rad 以下の場合には $vu = (z - r_2) + r_2\theta_2$ を満たし, 角差が 2rad 以上の場合には $vu = z + r_2$ を満たすから, Λ_1 は以下のように記述される:

$$\Lambda_1 = \left\{ (r_2, \theta_2) \mid \frac{vu-z}{\theta_2-1} \leq r_2 \leq z, 0 \leq \theta_2 \leq \frac{vu}{z} \right\} \quad (0 \leq u < \frac{z}{v}), \quad (5.5.8)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = & \left\{ (r_2, \theta_2) \mid 0 \leq r_2 \leq z, 0 \leq \theta_2 \leq \frac{vu}{z} \right\} \\ & \cup \left\{ (r_2, \theta_2) \mid 0 \leq r_2 \leq \frac{vu-z}{\theta_2-1}, \frac{vu}{z} \leq \theta_2 \leq 2 \right\} \\ & \cup \left\{ (r_2, \theta_2) \mid 0 \leq r_2 \leq vu - z, 2 \leq \theta_2 \leq \pi \right\} \end{aligned} \quad (\frac{z}{v} \leq u < \frac{2z}{v}), \quad (5.5.9)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = & \left\{ (r_2, \theta_2) \mid 0 \leq r_2 \leq z, 0 \leq \theta_2 \leq 2 \right\} \\ & \cup \left\{ (r_2, \theta_2) \mid 0 \leq r_2 \leq vu - z, 2 \leq \theta_2 \leq \pi \right\} \end{aligned} \quad (\frac{2z}{v} \leq u < \frac{R+z}{v}). \quad (5.5.10)$$

これらをもとに起・終点の座標を用いて式 (5.5.7) を具体的に表現すると以下ようになる:

(i) $0 \leq u < \frac{z}{v}$ ならば

$$G(u) = \frac{2}{h_{\text{放}}(z)} \left[\int_{r_2 = \frac{vu-z}{\theta_2-1}}^z \int_{\theta_2=0}^{\frac{vu}{z}} \int_{r_1=z}^R \int_{\theta_1=0}^{\text{d}\varphi} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \right], \quad (5.5.11)$$

(ii) $\frac{z}{v} \leq u < \frac{2z}{v}$ ならば

$$\begin{aligned} G(u) = & \frac{2}{h_{\text{放}}(z)} \left[\int_{r_2=0}^z \int_{\theta_2=0}^{\frac{vu}{z}} \int_{r_1=z}^R \int_{\theta_1=0}^{\text{d}\varphi} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \right. \\ & + \int_{r_2=0}^{\frac{vu-z}{\theta_2-1}} \int_{\theta_2=\frac{vu}{z}}^2 \int_{r_1=z}^R \int_{\theta_1=0}^{\text{d}\varphi} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \\ & \left. + \int_{r_2=0}^{vu-z} \int_{\theta_2=2}^{\pi} \int_{r_1=z}^R \int_{\theta_1=0}^{\text{d}\varphi} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \right], \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

(iii) $\frac{2z}{v} \leq u < \frac{R+z}{v}$ ならば

$$G(u) = \frac{2}{h_{\text{放}}(z)} \left[\int_{r_2=0}^z \int_{\theta_2=0}^2 \int_{r_1=z}^R \int_{\theta_1=0}^{d\varphi} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \right. \\ \left. + \int_{r_2=0}^{vu-z} \int_{\theta_2=2}^{\pi} \int_{r_1=z}^R \int_{\theta_1=0}^{d\varphi} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \right]. \quad (5.5.13)$$

ただし, $h_{\text{放}}(z)$ は式 (5.5.7) の分母に対応し, 以下のように与えられる:

$$h_{\text{放}}(z) = \int_{r_2=0}^z \int_{\theta_2=-2}^2 \int_{r_1=z}^R \int_{\theta_1=0}^{d\varphi} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \\ + \int_{r_2=0}^R \int_{\theta_2=2}^{2\pi-2} \int_{r_1=z}^R \int_{\theta_1=0}^{d\varphi} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2. \quad (5.5.14)$$

この式を具体的なトリップ密度 $\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ のもとで計算し, それを u に関して微分すれば目的の $g(u)$ を得ることができる (もちろん $G(u)$ が u の関数として陽に得られた場合). 以上で, 図 5.4 (a) に対応する $g(u)$ の導出方法が示された.

上り方面の通過時刻の密度関数

以上で, 通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{放}}(t; \mathbf{P})$ を計算するための準備が整った. 以下に, $\psi_{\text{放}}(t; \mathbf{P}|u)$ および $g(u)$ が得られているものとして, 式 (5.5.3) の積分を具体的に実行する方法を説明する.

いま, 地点 \mathbf{P} を上り方面に向かって通過する移動者に着目し, その移動者の地点 \mathbf{P} を通過する時刻 t と \mathbf{P} から \mathbf{Q}_2 までの所要時間 u のペアの集合に着目する. この集合は, 式 (5.5.5) および式 (5.5.7) の定義域を満たす領域 E

$$E = \left\{ (t, u) \mid t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u, 0 \leq u \leq \frac{R+z}{v} \right\} \quad (5.5.15)$$

で与えられ, $t-u$ 平面上の平行四辺形に対応する.

平行四辺形の一例を図 5.17 に示した ($a = 1.2R/v$, $z = 0.4R$ の場合). 所要時間の密度関数が 3 つの区間で異なる関数で与えられるため, 対応する通過時刻の密度関数は図中に示す通り, (i) から (vii) の 7 つの区間で場合分けされることになる.

場合分けの端点がどのような順で出現するかによって平行四辺形の形状が変わってくる. 出現順序を考慮すべき端点は, $t_0 - \frac{2z}{v}$, $t_0 - \frac{z}{v}$, $t_0 + a - \frac{R+z}{v}$, t_0 , $t_0 + a - \frac{2z}{v}$, $t_0 + a - \frac{z}{v}$ の 6 つである. これらの出現順序は (a, z) のペアによって合計 9 通り存在し, 対応する 9 通りの平行四辺形に対してそれぞれ $\psi_{\text{放}}(t; \mathbf{P})$ を計算する必要がある.

図 5.18 に $a-z$ 平面を 9 通りの各平行四辺形に対応する領域に分割した図を示す. 図中の領域 (A) から (I) がそれらを表しており, 図 5.17 の平行四辺形は図 5.18 の領域 (H) に対応するものである.

表 5.2 に, (A) から (I) の 9 個の領域における, 平行四辺形の形状を決定する 6 つの端点の出現順序を示す. 表 5.2 では, 最初の端点 $t = t_0 - \frac{R+z}{v}$ と最後の端点 $t = t_0 + a$ も加え, 合計 8 つの端点の番号を, (1) $t = t_0 - \frac{R+z}{v}$, (2) $t = t_0 + a - \frac{R+z}{v}$, (3) $t = t_0 - \frac{2z}{v}$, (4) $t = t_0 + a - \frac{2z}{v}$, (5) $t = t_0 - \frac{z}{v}$, (6) $t = t_0 + a - \frac{z}{v}$, (7) $t = t_0$, (8) $t = t_0 + a$ と記述してまとめた.

図 5.17 に対応する通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{放}}(t; \mathbf{P})$ の導出方法を示しておく. ここで, 便宜上図 5.17 に示すように, 式 (5.5.11), 式 (5.5.12) および式 (5.5.13) に対応する所要時間の密度関数を $g_{a1}(u)$,

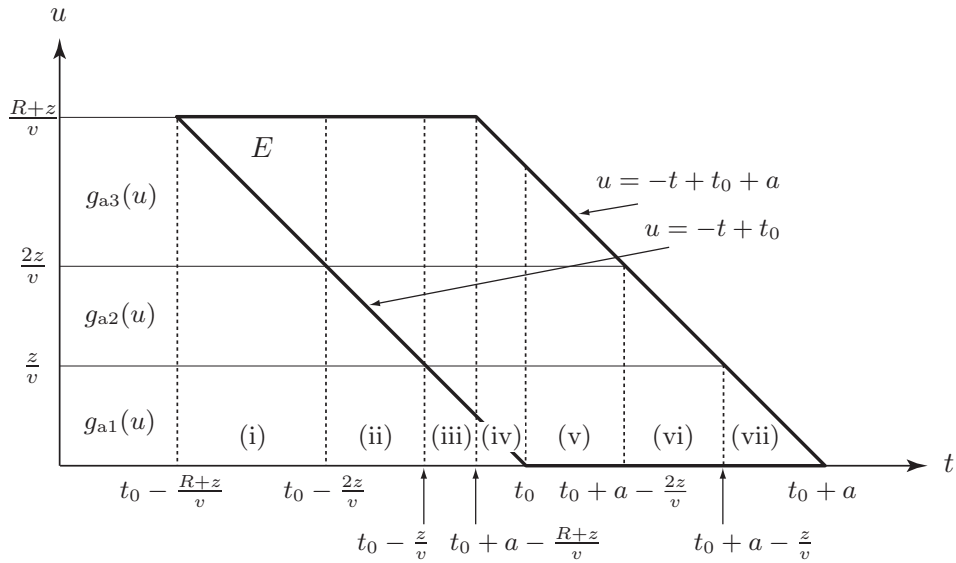


図 5.17 地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 ($a = 1.2R/v$, $z = 0.4R$ の場合) .

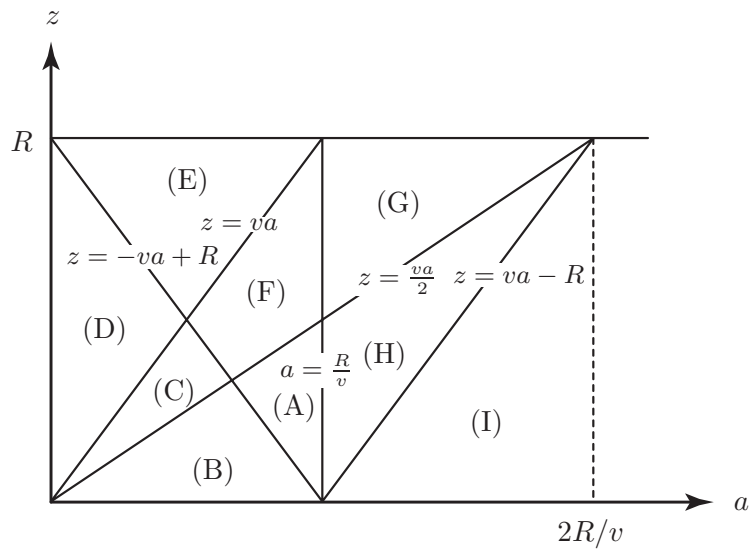


図 5.18 上り方面の放射路の通過時刻の密度関数を導出するための a - z 平面 .

$g_{a2}(u)$ および $g_{a3}(u)$ と表すことにする . 図 5.17 に対応する通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{放}}(t; \mathbf{P})$ は以下のように与えられる :

(H) $va - R \leq z \leq \frac{va}{2}$ かつ $\frac{R}{v} \leq a$ のとき

(i) $t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{放}}(t; \mathbf{P}) = \int_{-t+t_0}^{\frac{R+z}{v}} f(t+u)g_{a3}(u)du, \tag{5.5.16}$$

表 5.2 図 5.18 の a - z 平面に対応する端点の出現順序の整理 .

(A)	(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (5) \Rightarrow (7) \Rightarrow (4) \Rightarrow (6) \Rightarrow (8)
(B)	(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (5) \Rightarrow (7) \Rightarrow (4) \Rightarrow (6) \Rightarrow (8)
(C)	(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (5) \Rightarrow (4) \Rightarrow (7) \Rightarrow (6) \Rightarrow (8)
(D)	(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7) \Rightarrow (8)
(E)	(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7) \Rightarrow (8)
(F)	(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (5) \Rightarrow (4) \Rightarrow (7) \Rightarrow (6) \Rightarrow (8)
(G)	(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (5) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (7) \Rightarrow (6) \Rightarrow (8)
(H)	(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (5) \Rightarrow (2) \Rightarrow (7) \Rightarrow (4) \Rightarrow (6) \Rightarrow (8)
(I)	(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (5) \Rightarrow (7) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (6) \Rightarrow (8)

(ii) $t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 - \frac{z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{放上}}(t; \mathbf{P}) = \int_{-t+t_0}^{\frac{2z}{v}} f(t+u)g_{a2}(u)du + \int_{\frac{2z}{v}}^{\frac{R+z}{v}} f(t+u)g_{a3}(u)du, \quad (5.5.17)$$

(iii) $t_0 - \frac{z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}$ ならば

$$\begin{aligned} \psi_{\text{放上}}(t; \mathbf{P}) &= \int_{-t+t_0}^{\frac{z}{v}} f(t+u)g_{a1}(u)du + \int_{\frac{z}{v}}^{\frac{2z}{v}} f(t+u)g_{a2}(u)du \\ &\quad + \int_{\frac{2z}{v}}^{\frac{R+z}{v}} f(t+u)g_{a3}(u)du, \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

(iv) $t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\begin{aligned} \psi_{\text{放上}}(t; \mathbf{P}) &= \int_{-t+t_0}^{\frac{z}{v}} f(t+u)g_{a1}(u)du + \int_{\frac{z}{v}}^{\frac{2z}{v}} f(t+u)g_{a2}(u)du \\ &\quad + \int_{\frac{2z}{v}}^{-t+t_0+a} f(t+u)g_{a3}(u)du, \end{aligned} \quad (5.5.19)$$

(v) $t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}$ ならば

$$\begin{aligned} \psi_{\text{放上}}(t; \mathbf{P}) &= \int_0^{\frac{z}{v}} f(t+u)g_{a1}(u)du + \int_{\frac{z}{v}}^{\frac{2z}{v}} f(t+u)g_{a2}(u)du \\ &\quad + \int_{\frac{2z}{v}}^{-t+t_0+a} f(t+u)g_{a3}(u)du, \end{aligned} \quad (5.5.20)$$

(vi) $t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{放上}}(t; \mathbf{P}) = \int_0^{\frac{z}{v}} f(t+u)g_{a1}(u)du + \int_{\frac{z}{v}}^{-t+t_0+a} f(t+u)g_{a2}(u)du, \quad (5.5.21)$$

(vii) $t_0 + a - \frac{z}{v} \leq t < t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{放上}}(t; \mathbf{P}) = \int_0^{-t+t_0+a} f(t+u)g_{a1}(u)du. \quad (5.5.22)$$

下り方面の観測地点から勤務地までの所要時間の密度関数

図 5.4 (b) に示した下り方面の起・終点ペアの集合に対応する, \mathbf{P} から \mathbf{Q}_2 までの所要時間の密度関数 $g(u)$ の導出法を示す. 地点 \mathbf{P} からの所要時間 u の密度関数 $g(u)$ を求めるために, まずその累積分布 $G(u)$ を導く.

地点 \mathbf{P} を下り方面に向かって通過する移動者のうち, 勤務地が \mathbf{P} からの等高線の内部に含まれる割合を特定するために, 図 5.4 (b) の起・終点ペアと等高線を重ねて描いたものを図 5.19 に示す. いま, 図 5.19 において, 勤務地集合が存在する領域 $B_{\text{下}}$ のうち等高線内部に含まれる領域(図中の太枠で囲った領域)を Λ と表すことにする. 所要時間の累積分布 $G(u)$ は Λ を用いて以下のように表される:

$$G(u) = \frac{\int_{\mathbf{Q}_2 \in \Lambda} \int_{\mathbf{Q}_1 \in A_{\text{下}}} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_1 d\mathbf{Q}_2}{\int_{\mathbf{Q}_2 \in B_{\text{下}}} \int_{\mathbf{Q}_1 \in A_{\text{下}}} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_1 d\mathbf{Q}_2} \quad (0 \leq u \leq \frac{R-z}{v}). \quad (5.5.23)$$

ここで, $u_{\text{max}} = \frac{R-z}{v}$ を利用した.

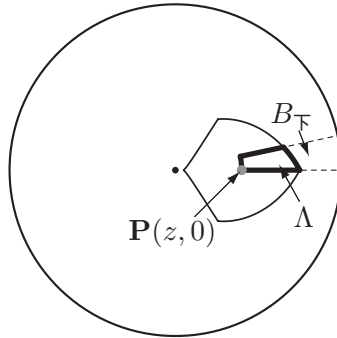


図 5.19 地点 \mathbf{P} を下り方面に通過する移動者の起・終点ペアの集合のうち \mathbf{P} からの所要時間が u 以内の割合の特定.

いま, $d\varphi$ が十分に小さいと考えられる場合は, Λ は以下のように表される:

$$\Lambda = \{(r_2, \theta_2) \mid z \leq r_2 \leq z + vu, 0 \leq \theta_2 \leq d\varphi\} \quad (0 \leq u \leq \frac{R-z}{v}). \quad (5.5.24)$$

これらをもとに起・終点の座標を用いて式 (5.5.23) を具体的に表現すると以下ようになる:

$$G(u) = \frac{1}{h_{\text{放下}}(z)} \left[\int_{r_2=z}^{z+vu} \int_{\theta_2=0}^{d\varphi} \int_{r_1=0}^z \int_{\theta_1=-2}^2 \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \right. \\ \left. + \int_{r_2=z}^{z+vu} \int_{\theta_2=0}^{d\varphi} \int_{r_1=0}^R \int_{\theta_1=2}^{2\pi-2} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \right]. \quad (5.5.25)$$

ただし, $h_{\text{放下}}(z)$ は式 (5.5.23) の分母に対応し, 以下のように与えられる:

$$\begin{aligned}
h_{\text{放下}}(z) &= \int_{r_2=z}^R \int_{\theta_2=0}^{d\varphi} \int_{r_1=0}^z \int_{\theta_1=-2}^2 \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \\
&+ \int_{r_2=z}^R \int_{\theta_2=0}^{d\varphi} \int_{r_1=0}^R \int_{\theta_1=2}^{2\pi-2} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) r_1 r_2 d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2.
\end{aligned} \quad (5.5.26)$$

この式を具体的なトリップ密度 $\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ のもとで計算し、それを u に関して微分すれば目的の $g(u)$ を得ることができる（もちろん $G(u)$ が u の関数として陽に得られた場合）。以上で、図 5.4 (b) に対応する $g(u)$ の導出方法が示された。

下り方面の通過時刻の密度関数

以上で、通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P})$ を計算するための準備が整った。以下に、 $\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P})$ および $g(u)$ が得られているものとして、式 (5.5.4) の積分を具体的に実行する方法を説明する。

いま、地点 \mathbf{P} を下り方面に向かって通過する移動者に着目し、その移動者の地点 \mathbf{P} を通過する時刻 t と \mathbf{P} から \mathbf{Q}_2 までの所要時間 u のペアの集合に着目する。この集合は、式 (5.5.6) および式 (5.5.23) の定義域を満たす領域 E

$$E = \left\{ (t, u) \mid t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u, 0 \leq u \leq \frac{R-z}{v} \right\} \quad (5.5.27)$$

で与えられ、 t - u 平面上の平行四辺形に対応する。

下り方面の所要時間の密度関数 $g(u)$ は区間 $[0, \frac{R-z}{v}]$ で一意に表される。したがって、平行四辺形の形状は、図 5.20 に示す 2 通りのみとなり、 $a \leq \frac{R-z}{v}$ の場合は図 5.20 (a) で与えられ、 $a > \frac{R-z}{v}$ の場合は図 5.20 (b) で与えられる。また、 a - z 平面を 2 つの平行四辺形の形状に対応する領域に分割すると、図 5.21 が得られる。

式 (5.5.4) において、式 (5.5.6) の

$$\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P} | u) = f(t+u) \quad (t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u)$$

なる関係を用いれば、 $\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P})$ は以下の通りに表される：

(a) $a \leq \frac{R-z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R-z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P}) = \int_{-t+t_0}^{\frac{R-z}{v}} f(t+u)g(u)du, \quad (5.5.28)$$

(ii) $t_0 + a - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P}) = \int_{-t+t_0}^{-t+t_0+a} f(t+u)g(u)du, \quad (5.5.29)$$

(iii) $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P}) = \int_0^{-t+t_0+a} f(t+u)g(u)du. \quad (5.5.30)$$

(b) $a > \frac{R-z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P}) = \int_{-t+t_0}^{\frac{R-z}{v}} f(t+u)g(u)du, \tag{5.5.31}$$

(ii) $t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{R-z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P}) = \int_0^{\frac{R-z}{v}} f(t+u)g(u)du, \tag{5.5.32}$$

(iii) $t_0 + a - \frac{R-z}{v} \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P}) = \int_0^{-t+t_0+a} f(t+u)g(u)du. \tag{5.5.33}$$

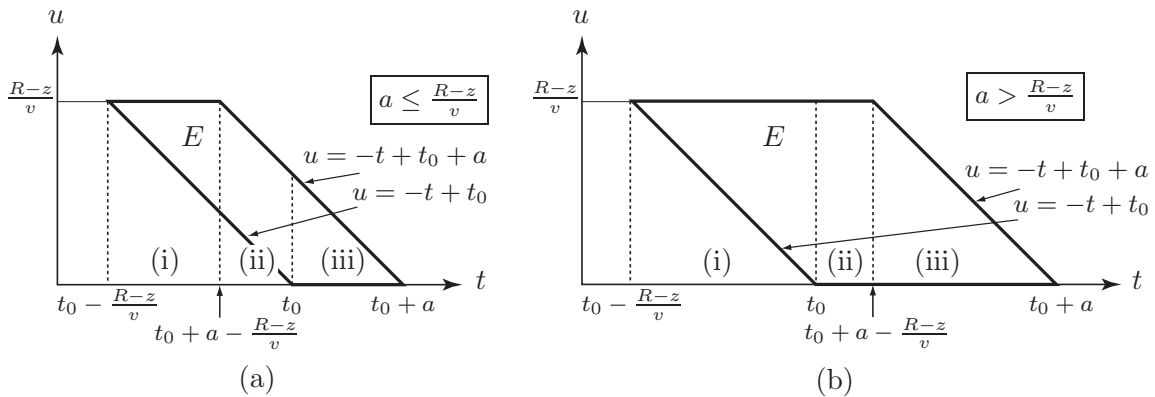


図 5.20 地点 \mathbf{P} を通過する時刻 t と \mathbf{P} から \mathbf{Q}_2 までの所要時間 u の集合の図示 .

5.5.3 一様なトリップ密度と出社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数

移動の起点 \mathbf{Q}_1 と終点 \mathbf{Q}_2 が円盤上で一様かつ独立に分布する場合の通過量を導出する . このときのトリップ密度は以下のように表される :

$$\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) = \frac{N}{(\pi R^2)^2}. \tag{5.5.34}$$

出社時刻分布としては時間区間 $[t_0, t_0 + a]$ の一様分布を想定する :

$$f(t) = \frac{1}{a} \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + a). \tag{5.5.35}$$

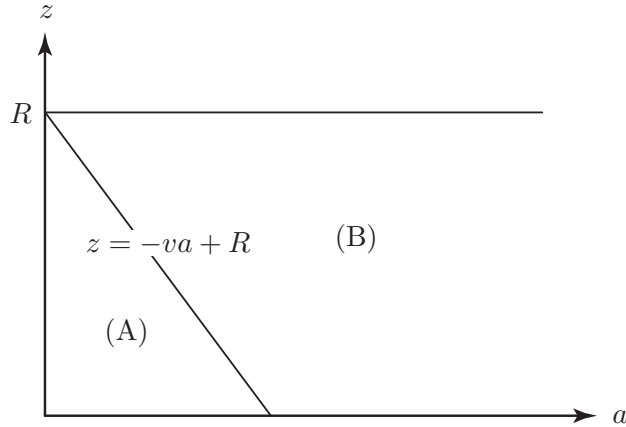


図 5.21 平行四辺形の形状を決定するための a - z 平面 .

上り方面の所要時間の累積分布と密度関数

式 (5.5.11), 式 (5.5.12) および式 (5.5.13) において具体的な計算を行うと, 所要時間の累積分布は以下の通りに導かれる :

$$G(u) = \begin{cases} \frac{v^2 u^2}{2z^2 + (\pi - 2)R^2} & (0 \leq u < \frac{z}{v}), \\ \frac{(\pi - 3)v^2 u^2 + (8 - 2\pi)vzu - (4 - \pi)z^2}{2z^2 + (\pi - 2)R^2} & (\frac{z}{v} \leq u < \frac{2z}{v}), \\ \frac{(\pi - 2)v^2 u^2 - (2\pi - 4)vzu + \pi z^2}{2z^2 + (\pi - 2)R^2} & (\frac{2z}{v} \leq u \leq \frac{R+z}{v}). \end{cases} \quad (5.5.36)$$

これらを u について微分すると $g(u)$ は以下の通りに導かれる :

$$g(u) = \begin{cases} \frac{2v^2 u}{2z^2 + (\pi - 2)R^2} & (0 \leq u < \frac{z}{v}), \\ \frac{(2\pi - 6)v^2 u + (8 - 2\pi)vz}{2z^2 + (\pi - 2)R^2} & (\frac{z}{v} \leq u < \frac{2z}{v}), \\ \frac{(2\pi - 4)v^2 u - (2\pi - 4)vz}{2z^2 + (\pi - 2)R^2} & (\frac{2z}{v} \leq u \leq \frac{R+z}{v}). \end{cases} \quad (5.5.37)$$

上り方面の通過時刻の密度関数

これらの結果をもとに, 図 5.18 の部分領域に対応する 9 通りの各平行四辺形をもとに, 式 (5.5.3) の積分を具体的に実行すれば, 通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{放}}(t; \mathbf{P})$ を具体的に導くことができる. 9 通りの $\psi_{\text{放}}(t; \mathbf{P})$ を付録 A.2 に掲載した .

下り方面の所要時間の累積分布と密度関数

式 (5.5.23) において具体的な計算を行うと, 所要時間の累積分布は以下の通りに導かれる :

$$G(u) = \frac{v^2 u^2 + 2vzu}{R^2 - z^2} \quad (0 \leq u \leq \frac{R-z}{v}). \quad (5.5.38)$$

これを u について微分すると $g(u)$ は以下の通りに導かれる：

$$g(u) = \frac{2v(vu + z)}{R^2 - z^2} \quad (0 \leq u \leq \frac{R-z}{v}). \quad (5.5.39)$$

下り方面の通過時刻の密度関数

以上の想定のもとで，式 (5.5.4) の積分を実行すれば $\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P})$ は以下のように導かれる：

(a) $a \leq \frac{R-z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R-z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P}) = \frac{R^2 - (vt - vt_0 - z)^2}{a(R^2 - z^2)}, \quad (5.5.40)$$

(ii) $t_0 + a - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P}) = \frac{v(2vt_0 - 2vt + 2z + va)}{R^2 - z^2}, \quad (5.5.41)$$

(iii) $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P}) = \frac{v(t - t_0 - a)(vt - vt_0 - va - 2z)}{a(R^2 - z^2)}. \quad (5.5.42)$$

(b) $a > \frac{R-z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P}) = \frac{R^2 - (vt - vt_0 - z)^2}{a(R^2 - z^2)}, \quad (5.5.43)$$

(ii) $t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{R-z}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P}) = \frac{1}{a}, \quad (5.5.44)$$

(iii) $t_0 + a - \frac{R-z}{v} \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{放下}}(t; \mathbf{P}) = \frac{v(t - t_0 - a)(vt - vt_0 - va - 2z)}{a(R^2 - z^2)}. \quad (5.5.45)$$

5.6 環状路と放射路の通過密度の数値例

本節では、一様なトリップ密度に基づく環状路と放射路の通過密度の数値例を示す。入社時刻分布としては、一様分布と一斉出社のものを採用する。まず、第 5.6.1 小節で通過密度の空間的分布を扱い、次に、第 5.6.2 小節で通過密度の時間的分布を扱う。

各パラメータの数値例として、本節を通じて以下のものを採用する。最大距離 $2R$ の所要時間を $2R/v = 2$ と定め、最も早く移動を開始する（家を出る）通勤者の移動開始時刻が $t = 0$ となるように $t_0 = 2$ とする。また、都市の半径を $R = 1$ 、総トリップ数を $N = 1$ とする。

5.6.1 通過密度の空間的分布

環状路の通過密度 $p_{\text{環}}(\mathbf{P}, t)$ 、放射路の上り方面の通過密度 $p_{\text{放上}}(\mathbf{P}, t)$ 、放射路の下り方面の通過密度 $p_{\text{放下}}(\mathbf{P}, t)$ 、および環状路と放射路の合計の通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の空間的分布の数値例を示す。ここで、放射路の上り方面と下り方面の通過密度は著しく異なるため、それぞれについて別々に示すこととした。各グラフにおいて、すべての通勤者が $t = 2$ に一斉に出社する場合と、時間区間 $[2, 3]$ に一斉に出社する場合の数値例を示す。移動が観測される時間区間は、一斉出社の場合には $t \in [0, 2]$ となり、一様出社の場合には $t \in [0, 3]$ となる。以下にそれぞれの場合の考察を与える。

環状路の通過密度

図 5.22 に、一斉出社に対応する、環状路の通過密度 $p_{\text{環}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図を、図 5.23 にその断面図を示した。大局的な構造として、入社時刻に近づくほど大きな交通が観測される様子が見て取れる。最も混雑する環状路の位置は、時刻によって大きな違いが見られることがわかる。最大値は $t = 1.6$ における都市中心と都市境界の中間点よりやや外側にみられる。これは、総通過量が最大値をとる位置とほぼ同じ値である。

図 5.24 に、一様出社に対応する、環状路の通過密度 $p_{\text{環}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図を、図 5.25 にその断面図を示した。最も早い入社時刻 $t_0 = 2$ 付近で、大きなピークが観測される様子が見て取れる。最も混雑する環状路の位置は、時刻の経過とともに中心部に近づいていくことがわかる。この場合も、ピーク時刻 $t = 2.0$ 付近の最大値は、都市中心と都市境界の中間点よりやや外側にみられる。

放射路の上り方面の通過密度

図 5.26 に、一斉出社に対応する、放射路の上り方面の通過密度 $p_{\text{放上}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図を、図 5.27 にその断面図を示した。移動は郊外から立ち上がり次第に大きくなり、 $t = 1.0$ 付近でピークを迎える様子が見て取れる。

図 5.28 に、一様出社に対応する、放射路の上り方面の通過密度 $p_{\text{放上}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図を、図 5.29 にその断面図を示した。この場合のピークは、 $t = 1.6$ 付近で観測され、最も早い入社時刻 $t_0 = 2$ よりも小さな値となっている。

放射路の下り方面の通過密度

図 5.30 に、一斉出社に対応する、放射路の下り方面の通過密度 $p_{\text{放下}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図を、図 5.31 にその断面図を示した。放射路の下り方面の通過密度は、(1) 移動の立ち上がりを中心から起こる点、およ

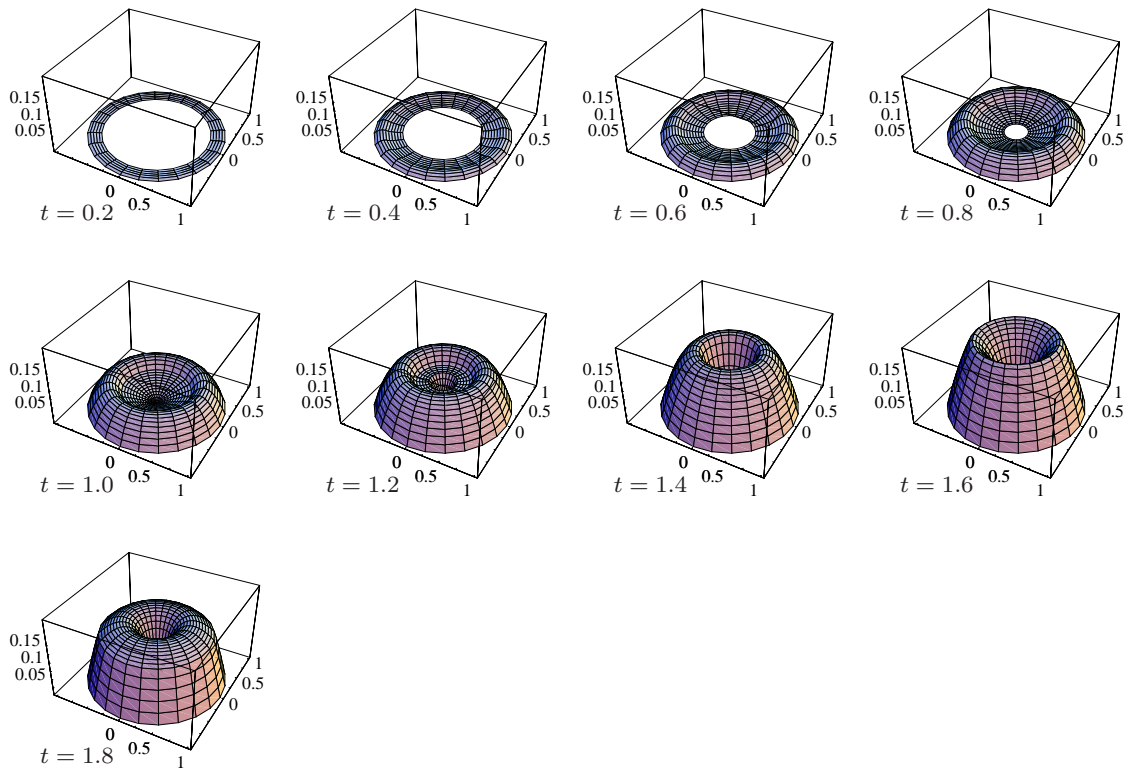


図 5.22 環状路の通過密度 $p_{\text{環}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合)。

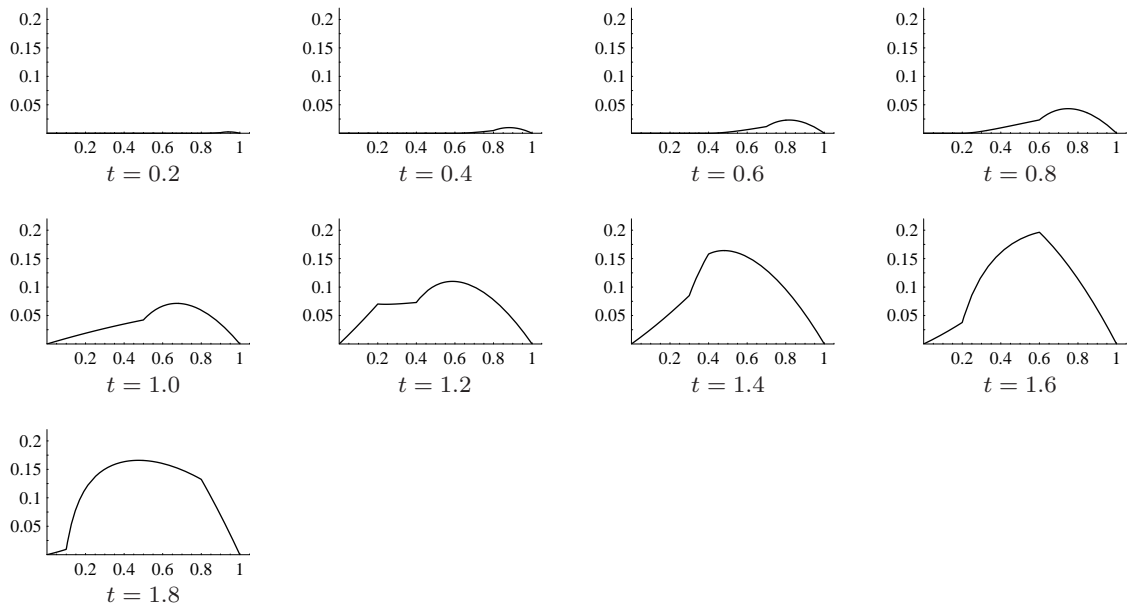


図 5.23 環状路の通過密度 $p_{\text{環}}(\mathbf{P}, t)$ の断面図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合)。

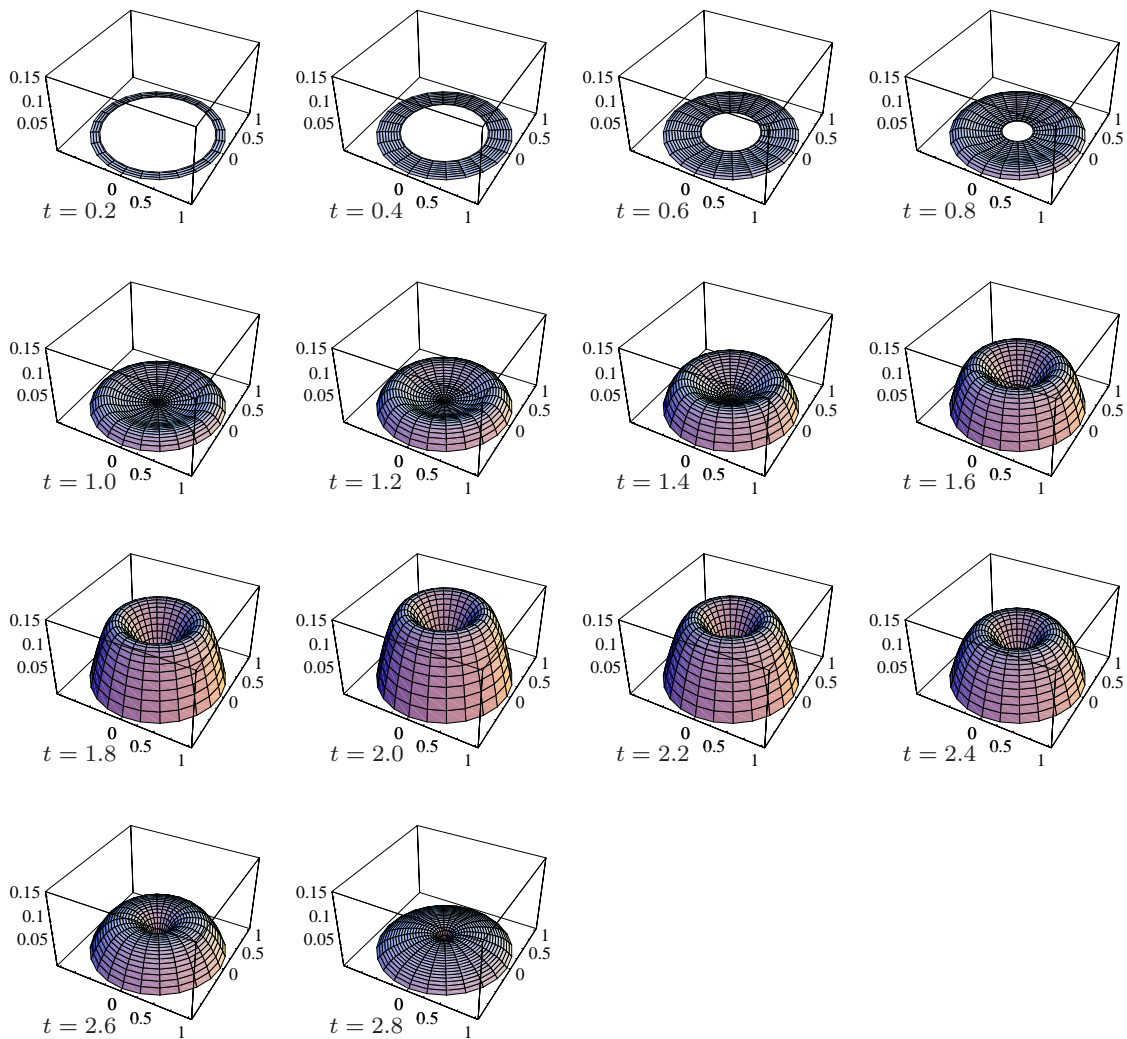


図 5.24 環状路の通過密度 $p_{\text{環}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合)。

び (2) 移動開始時刻が上り方面の場合より R/v だけ遅れて起こる点，で大きく異なっている．このことは，図 2.13 (第 2 章，22 ページ) に示した，移動経路に理由がある．すなわち，郊外方向への移動は，経路 I については環状路の後に，経路 II については中心へ一端出た後に行われるのである．下り方面の混雑ピークは，上り方面の場合の混雑ピークよりもあとから出現するのは，この移動パターンに起因するものと考えられる．

このように，放射路に沿って全時間を通じて通過する交通量は，上り方面と下り方面で同一であるのに対し，両者の交通量の時空間分布が大きく異なる点は，交通量分布を時刻に依存する形で導いて初めて把握できるものであり，本研究から得られた有益な知見のひとつである．

図 5.32 に，一様出社に対応する，放射路の下り方面の通過密度 $p_{\text{放下}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図を，図 5.33 にその断面図を示した．この場合のピークは，最も早い出社時刻 $t_0 = 2$ 付近で観測される様子が見取れる．

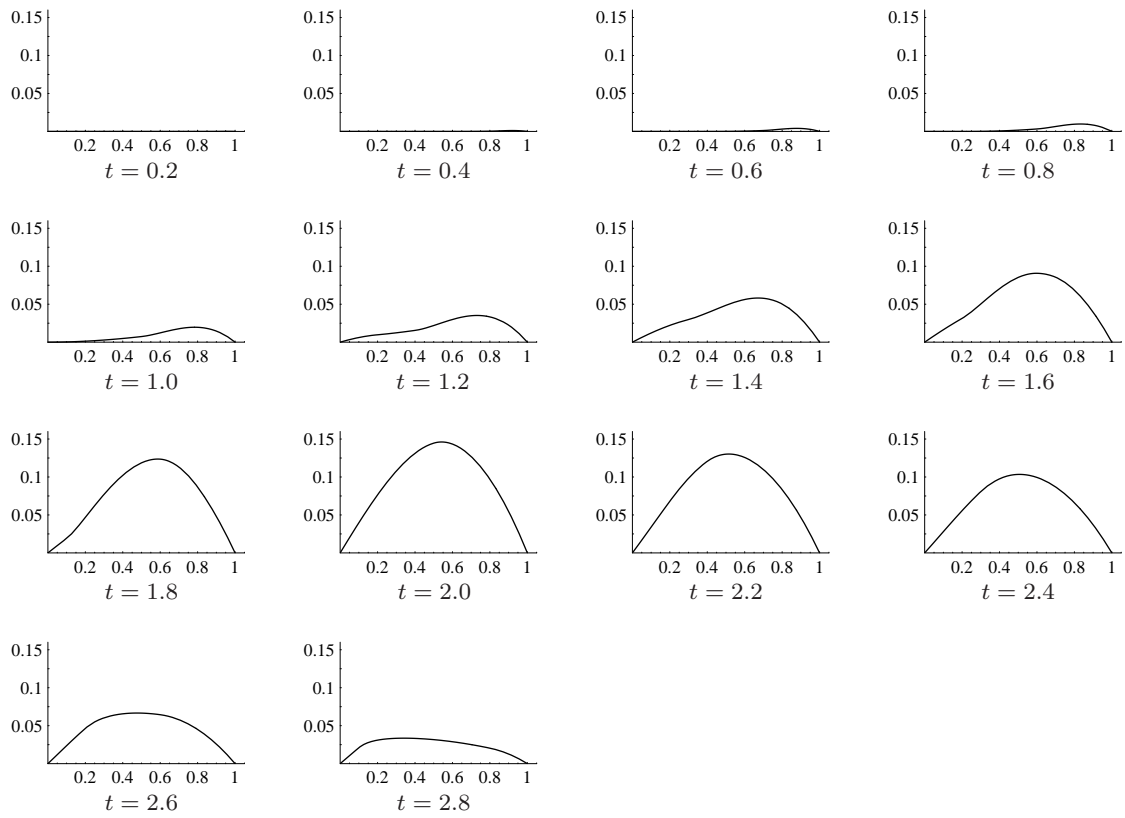


図 5.25 環状路の通過密度 $p_{\text{環}}(\mathbf{P}, t)$ の断面図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合)。

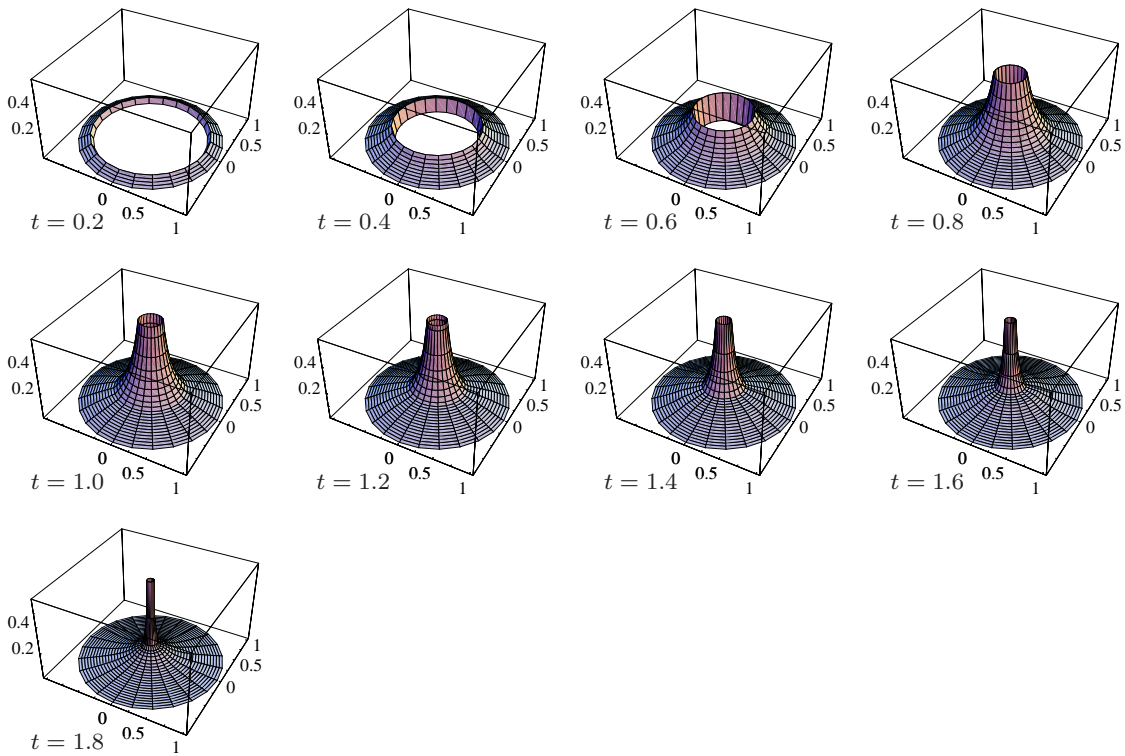


図 5.26 放射路の上り方面の通過密度 $p_{\text{放上}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合)。

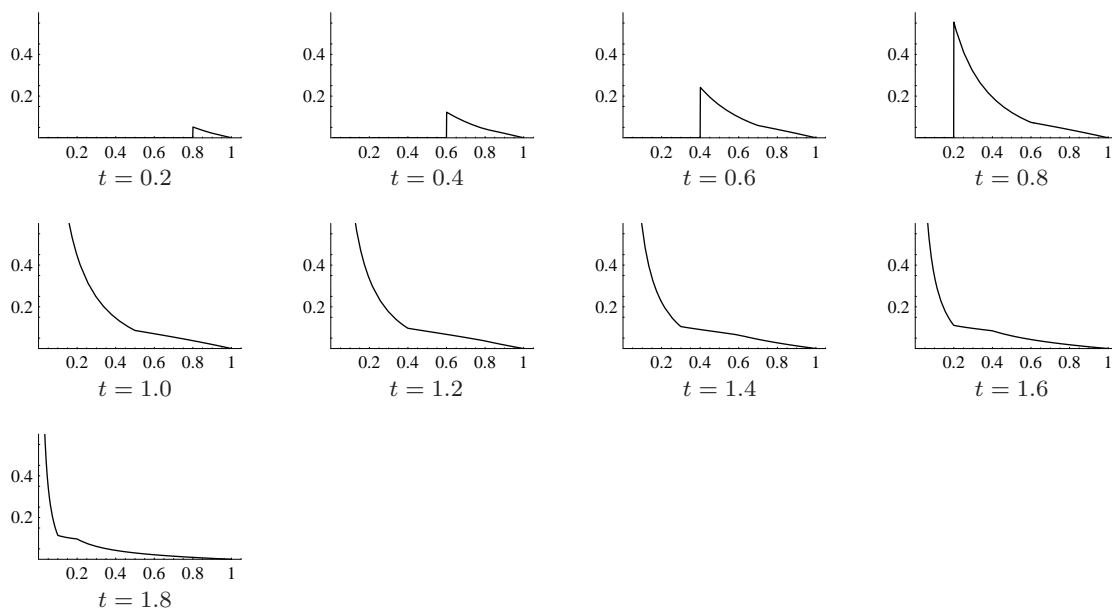


図 5.27 放射路の上り方面の通過密度 $p_{放上}(\mathbf{P}, t)$ の断面図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合).

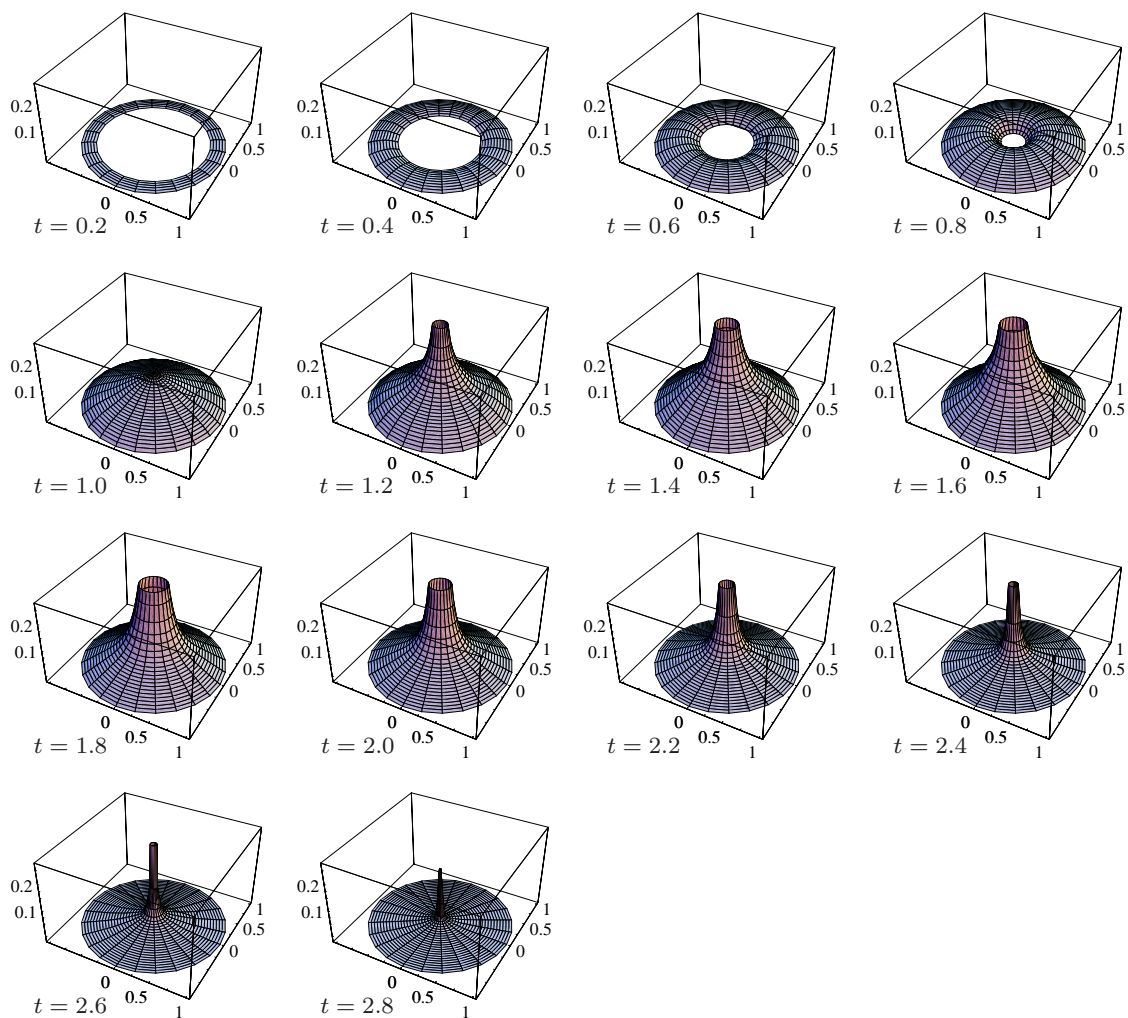


図 5.28 放射路の上り方面の通過密度 $p_{放上}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).

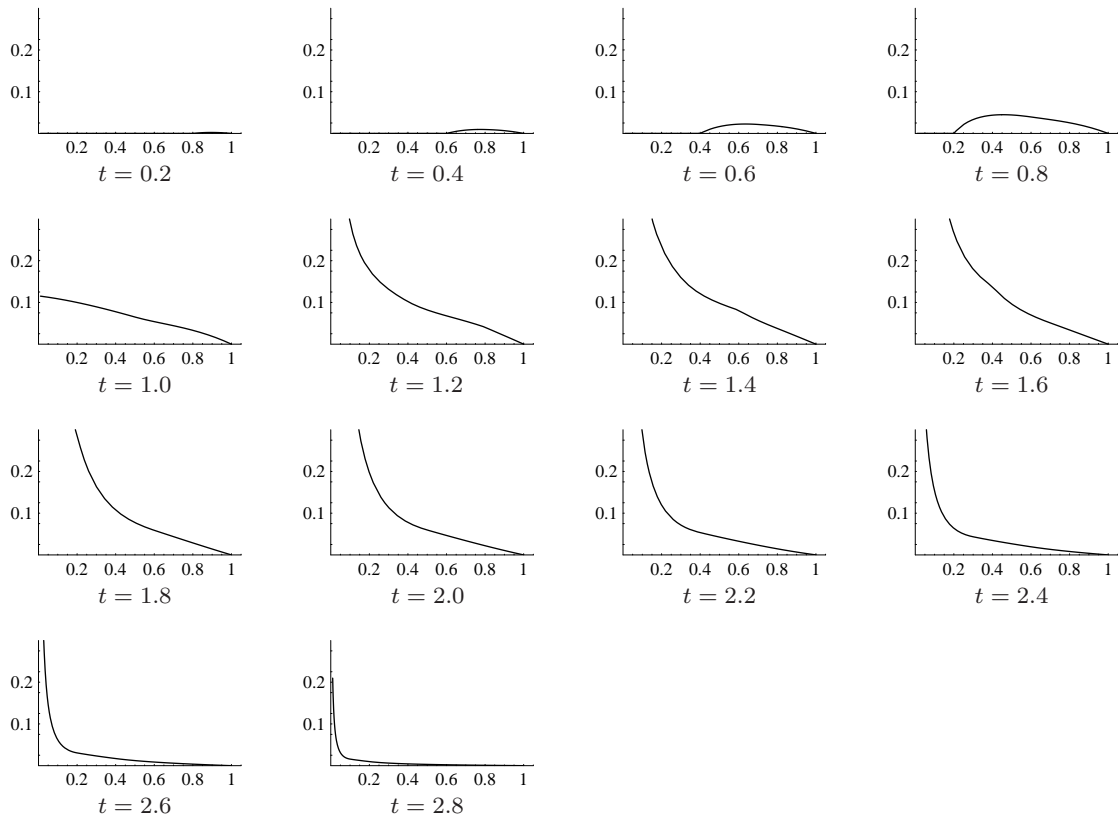


図 5.29 放射路の上り方面の通過密度 $p_{放上}(\mathbf{P}, t)$ の断面図 (時間区間 $[2, 3]$ の一斉出社の場合).

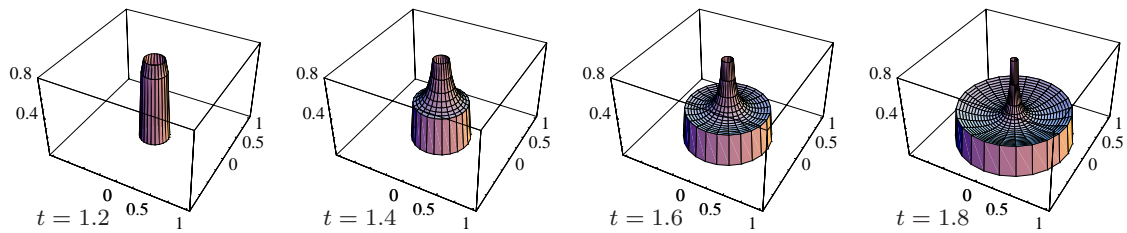


図 5.30 放射路の下り方面の通過密度 $p_{放下}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合).

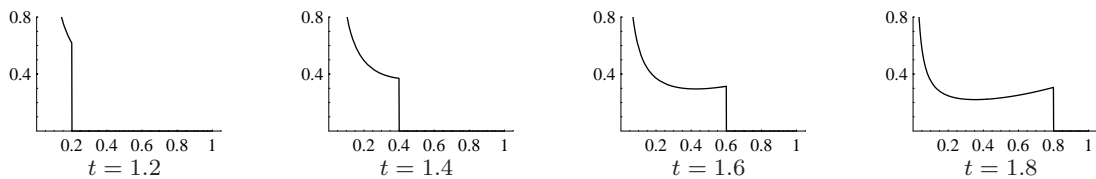


図 5.31 放射路の下り方面の通過密度 $p_{放下}(\mathbf{P}, t)$ の断面図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合).

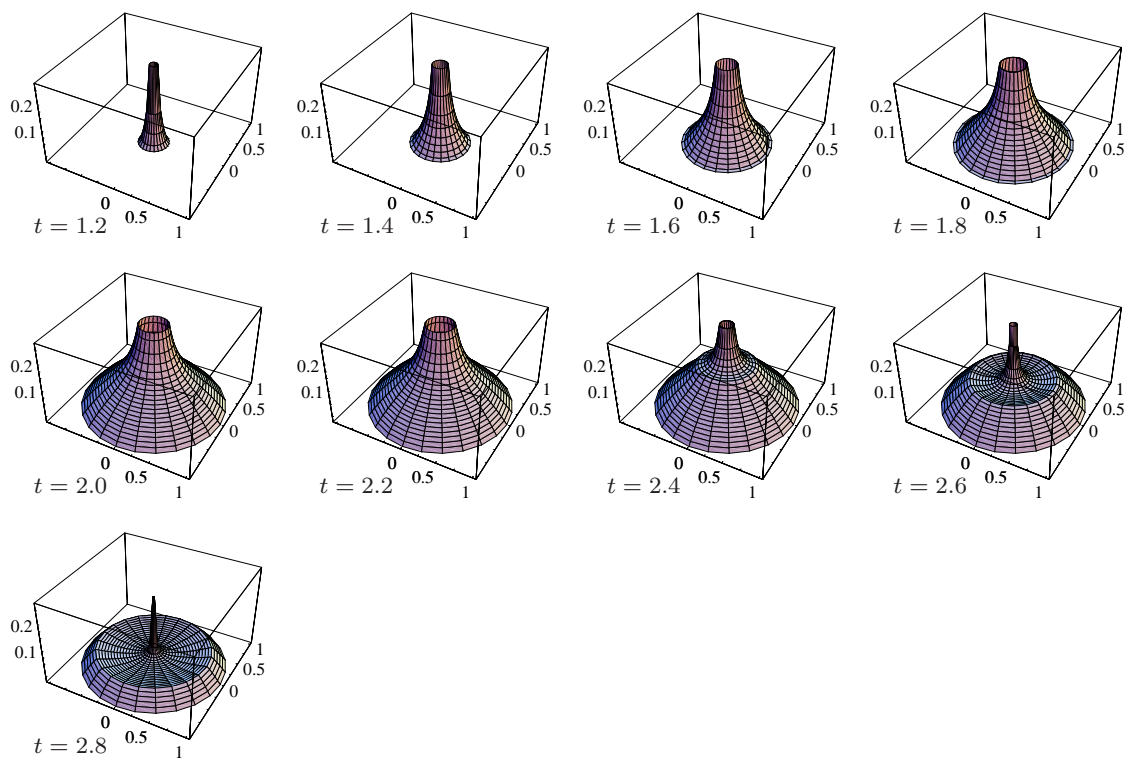


図 5.32 放射路の下り方面の通過密度 $p_{\text{放下}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合)。

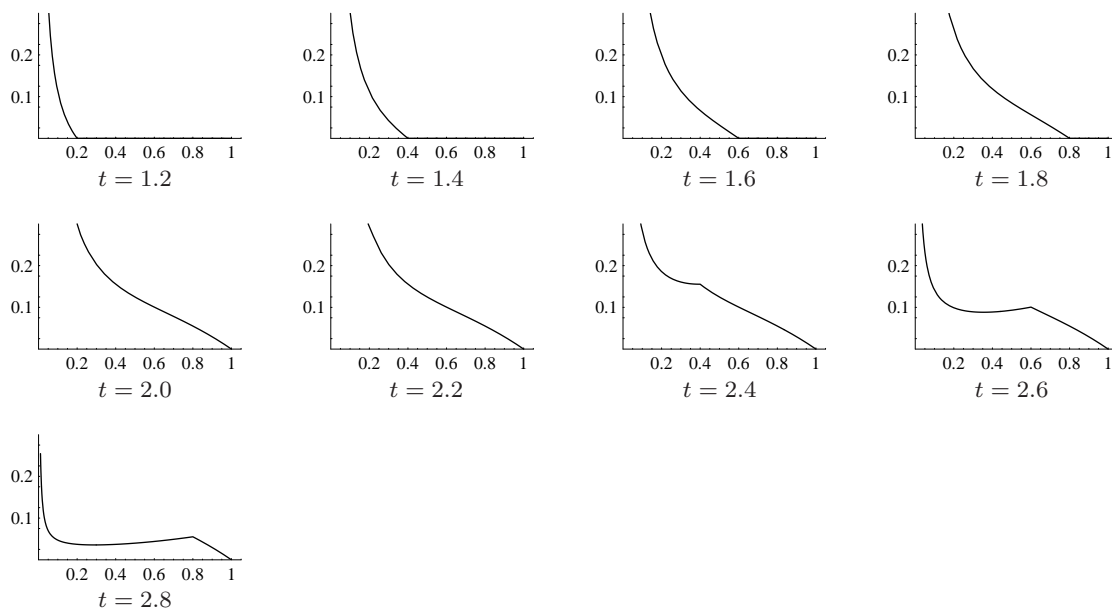


図 5.33 放射路の下り方面の通過密度 $p_{\text{放下}}(\mathbf{P}, t)$ の断面図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合)。

環状路と放射路の合計の通過密度

図 5.34 に、一斉出社に対応する、環状路と放射路の合計の通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図を、図 5.35 にその断面図を示した。大局的には、中心付近ほど混雑する様子が見て取れる。グラフが不連続になるのは、下り方面の不連続な通過密度が、時刻 $t = 1.0$ において都心から観測されるためである。ピークの時刻は、地点によって異なるものの、全体的な傾向として出社時刻 $t_0 = 2$ に近づくほど混雑する様子が把握できる。

図 5.36 に、一様出社に対応する、環状路と放射路の合計の通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図を、図 5.37 にその断面図を示した。この場合のピークは、最も早い出社時刻 $t_0 = 2$ 付近で観測されることがわかる。また、通過密度は、中心から $z = 0.4$ 付近までは、中心に近づくにつれほぼ線形的に増大するのに対し、 $z = 0.4$ 付近よりも都心へ向かうと急速に交通混雑が激しくなる様子が見て取れる。

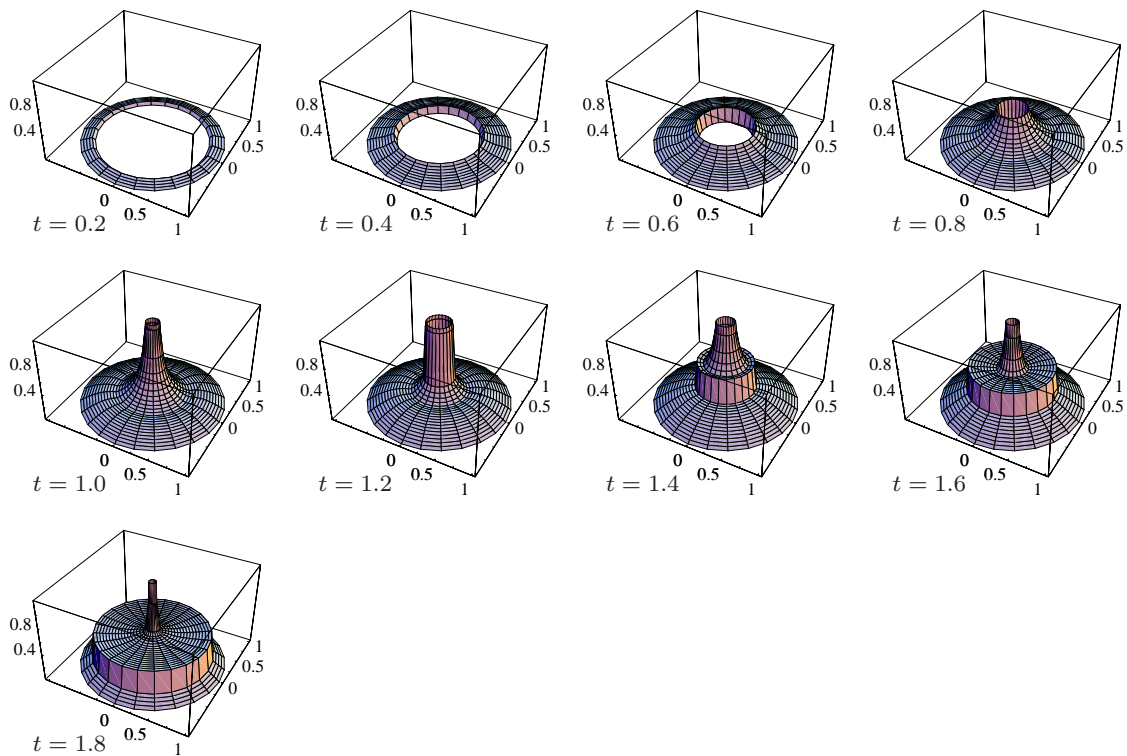


図 5.34 環状路と放射路の合計の通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合)。

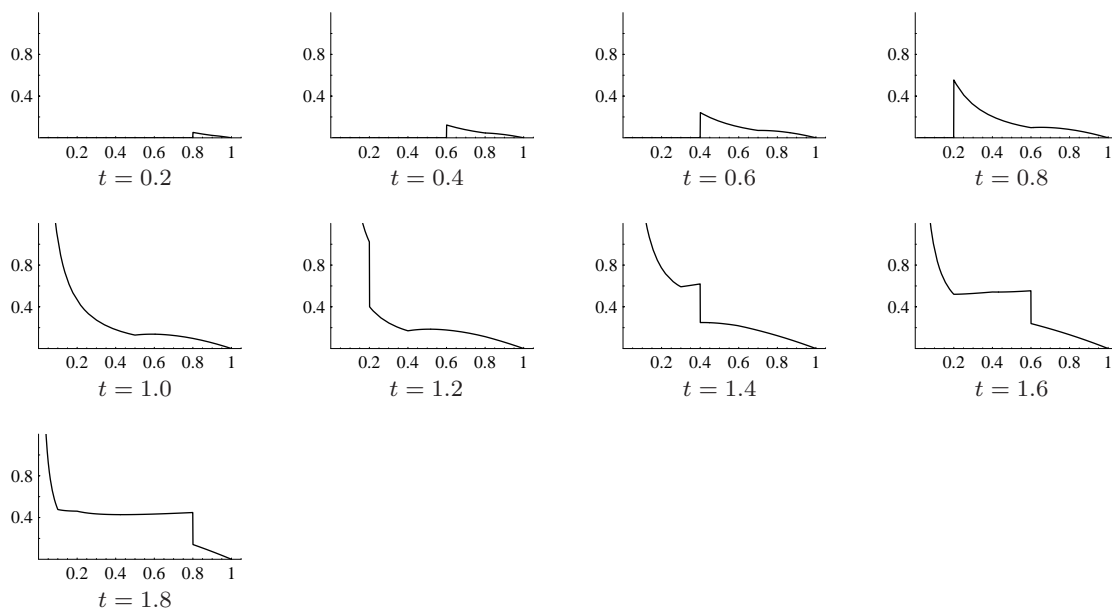


図 5.35 環状路と放射路の合計の通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の断面図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合).

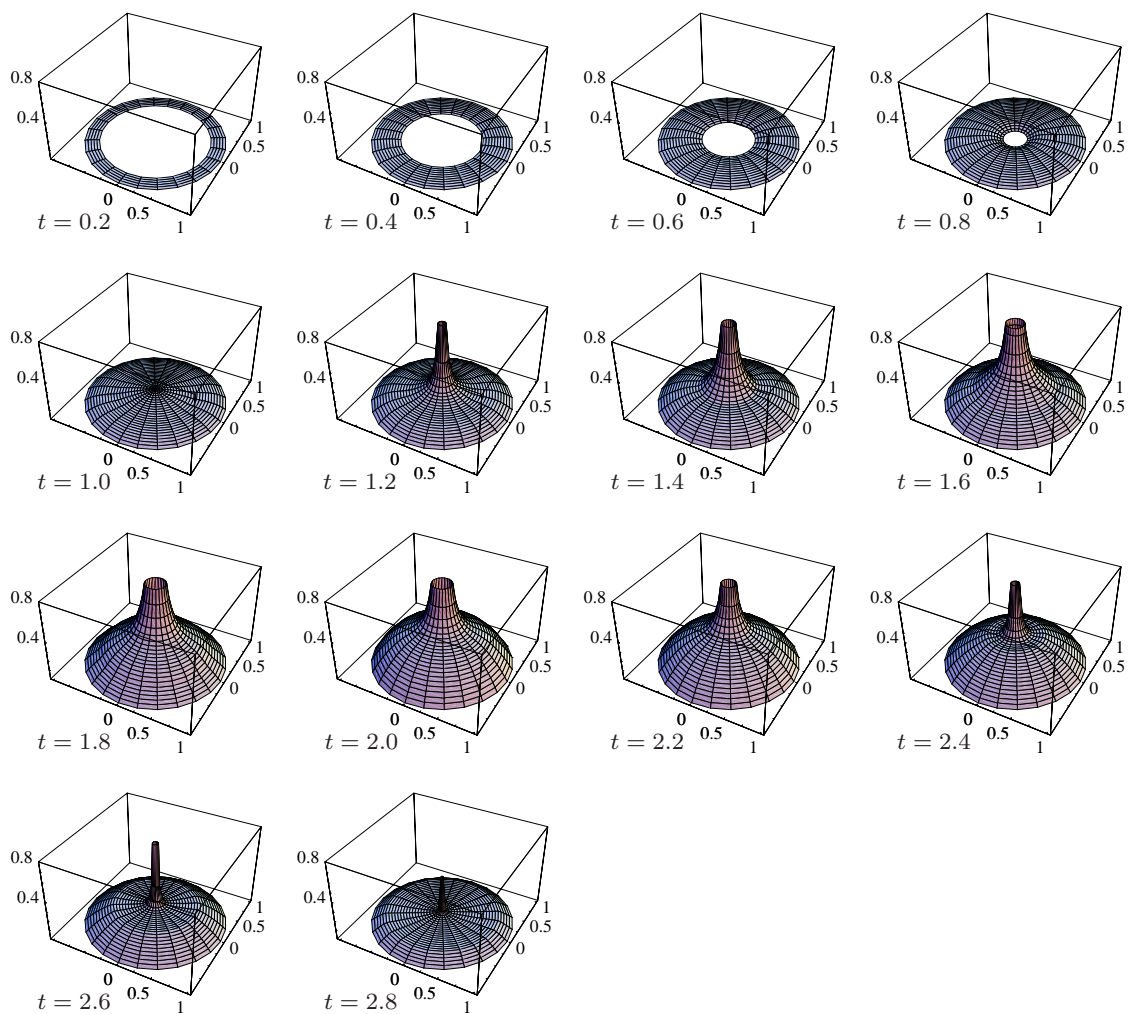


図 5.36 環状路と放射路の合計の通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).

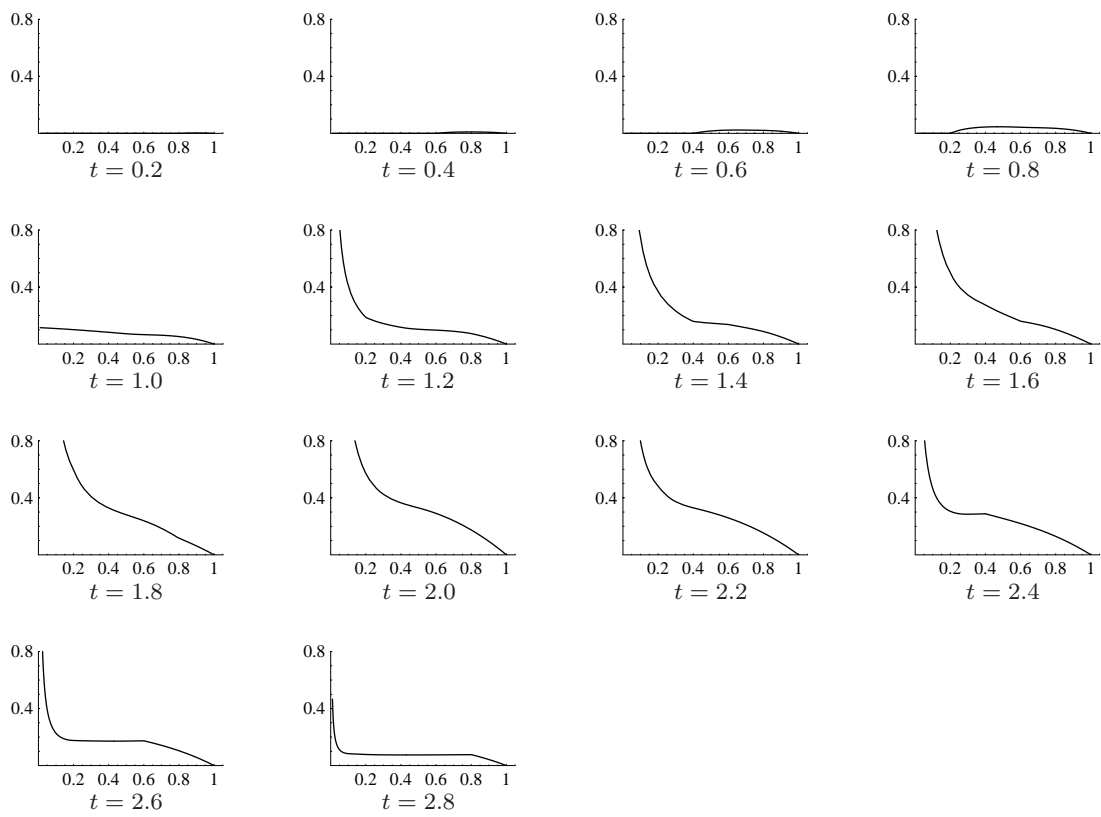


図 5.37 環状路と放射路の合計の通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の断面図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合) .

5.6.2 通過密度の時間的分布

図 5.38 に環状路の通過密度 $p_{\text{環}}(\mathbf{P}, t)$ の、図 5.39 と図 5.40 にそれぞれ放射路の上り方面と下り方面の通過密度 $p_{\text{放上}}(\mathbf{P}, t)$ と $p_{\text{放下}}(\mathbf{P}, t)$ の、および図 5.41 に環状路と放射路の合計の通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の、時間的分布を示す。それぞれの図において、4つの地点における通過密度の時間的变化を描いている。4つの観測地点として、中心からの距離を $z = 0.2, z = 0.4, z = 0.6, z = 0.8$ として与えた。さらに、各地点におけるグラフにおいて、出社時刻分布として、一斉出社および $a = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ の一様出社の、合計 5 パターンを示している。以下にそれぞれの考察を与える。

環状路の通過密度

一斉出社に対応する環状路の通過密度 $p_{\text{環}}(\mathbf{P}, t)$ は、4地点すべてにおいて、最も早い出社時刻 $t_0 = 2$ の付近にピークをもつ様子が見て取れる。これに対し一斉出社の場合には、 $z = 0.2$ と $z = 0.4$ の場合には出社時刻 $t_0 = 2$ でピークが現れるのに対し、 $z = 0.6$ と $z = 0.8$ の場合には、出社時刻より少し前にピークをもつことがわかった。

放射路の上り方面の通過密度

放射路の上り方面の通過密度 $p_{\text{放上}}(\mathbf{P}, t)$ は、どの地点のグラフも早い時刻にピークが現れる様子が見て取れる。特に、一斉出社の場合は、移動が立ち上がる時刻の通過密度が最も大きな値をとることがわかる。

放射路の下り方面の通過密度

放射路の下り方面の通過密度 $p_{\text{放下}}(\mathbf{P}, t)$ は、移動の立ち上がり時刻が遅い分、交通が集中する傾向にあることがわかる。総量で比較すると上りと下りはどちらも同じであるのに対し、移動が観測される時間区間は上りの場合は $t \in [0, 3]$ であり、下りの場合は $t \in [1, 3]$ である。したがって、短時間に同じ輸送量を受けもつ必要がある下り方面の場合には、上り方面よりも混雑が観測されるのである。特に、最大交通量で比較すると、下りの方が上りよりもかなり大きな値をとることが読み取れる。現実の大都市圏の通勤交通では、都心に目的地が集中するため、実際には上り方面の方が圧倒的に混雑するが、放射・環状パターンの幾何学的な性質としては、下り方面の方が混雑の潜在性が高いのである。この点は、放射・環状網のもつ重要な特性として、広く認識されるべきものであろう。

環状路と放射路の合計の通過密度

環状路と放射路の合計の通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ は、中心付近ではかなり大きな値をとることがわかる。ピークを迎える時刻については、全体的には最も早く出社する時刻 $t_0 = 2$ で観測されるが、一斉出社や短時間に集中して一様に出社する場合には、これよりも前に観測されるケースが存在する様子が見て取れる。

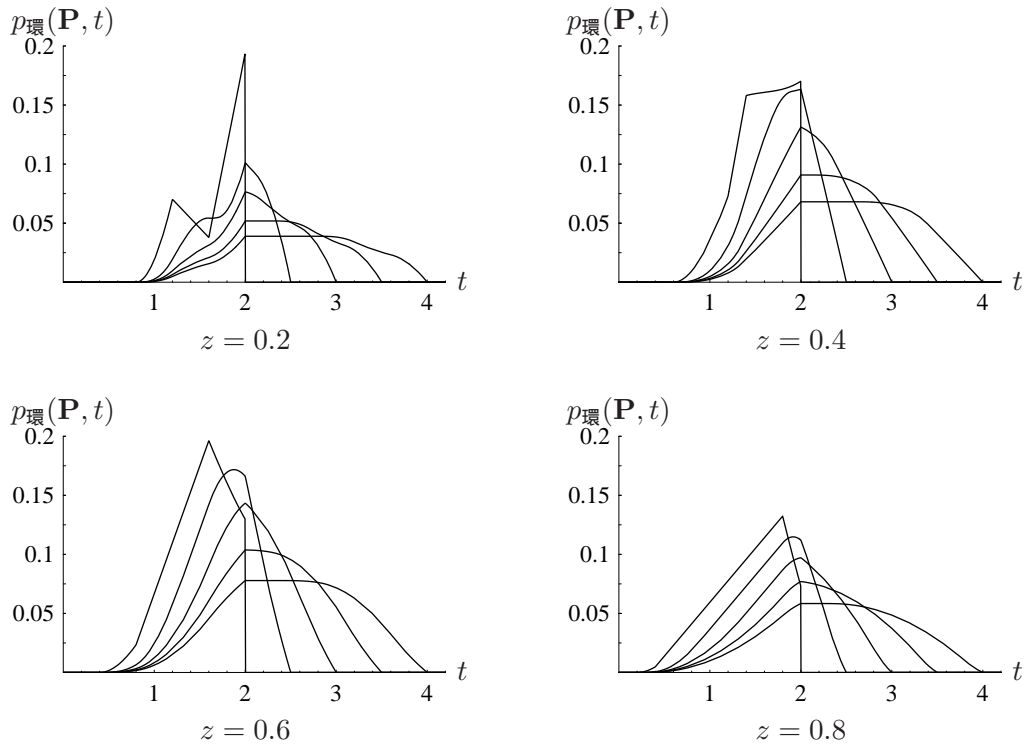


図 5.38 環状路の通過密度 $p_{\text{環}}(\mathbf{P}, t)$ の時間的分布 .

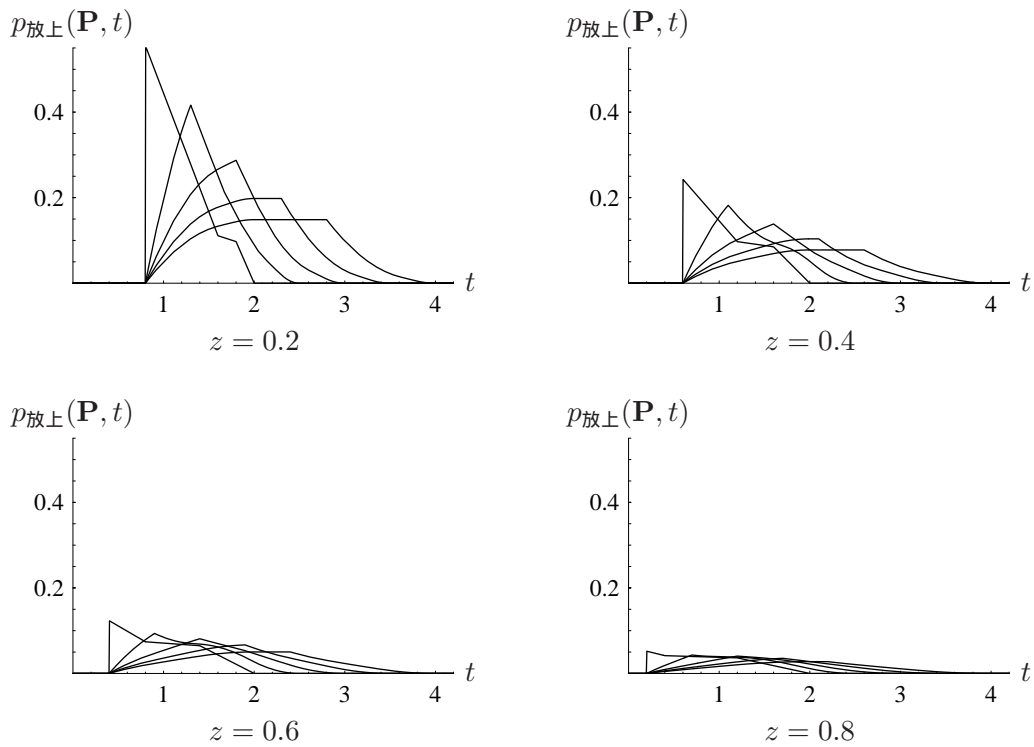


図 5.39 放射路の上り方面の通過密度 $p_{\text{放上}}(\mathbf{P}, t)$ の時間的分布 .

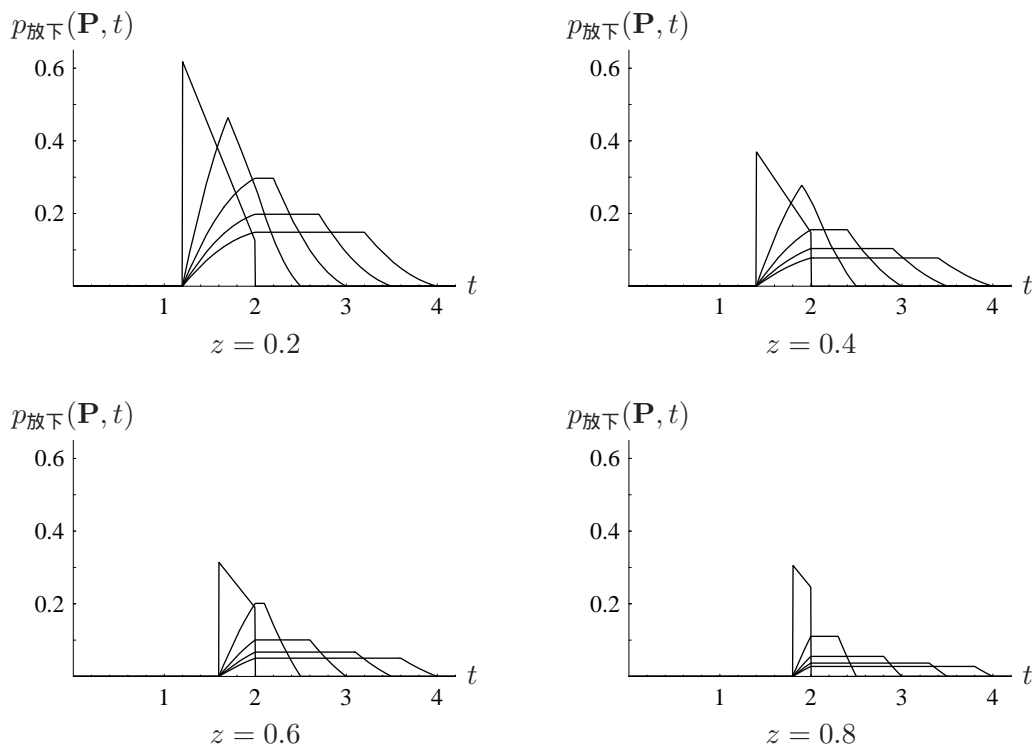


図 5.40 放射路の下り方面の通過密度 $p_{\text{放下}}(\mathbf{P}, t)$ の時間的分布 .

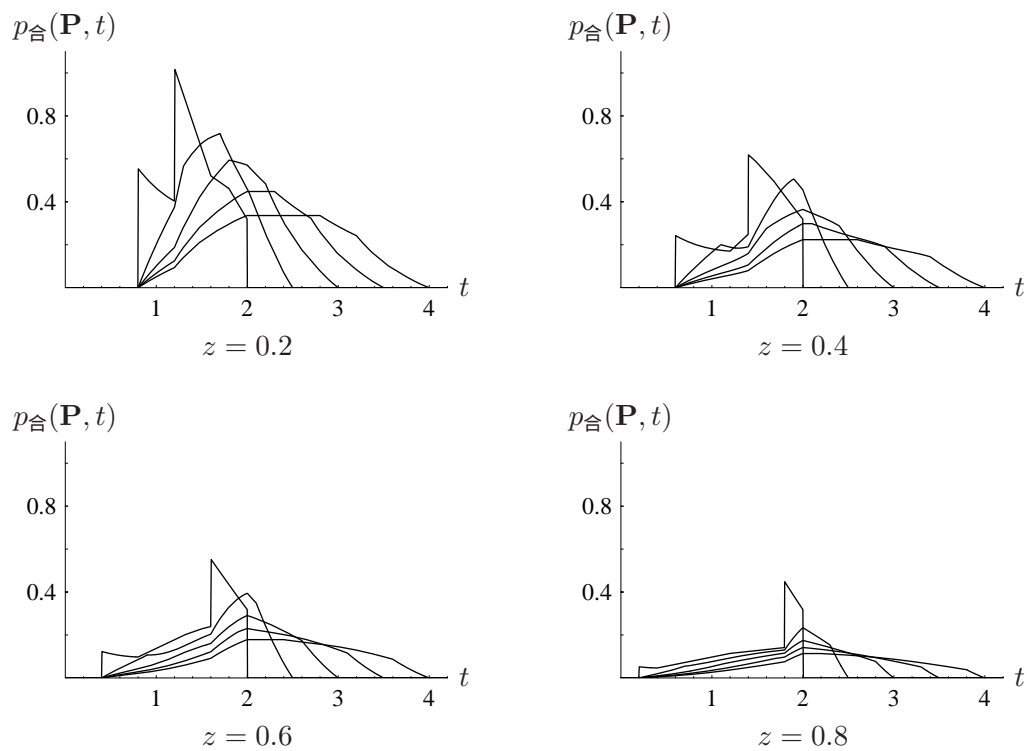


図 5.41 環状路と放射路の合計の通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の時間的分布 .

5.7 モデルの拡張

5.7.1 Clark 型の起・終点分布に基づく通過量

ここでは、起点の密度と終点の密度が都市中心からの距離に関して、ともに指数関数的に減少する Clark の式を採用した場合について、環状路と放射路の通過量を導出する。起点と終点の密度を $\lambda(r_1, \theta_1)$ および $\mu(r_2, \theta_2)$ と記述すると、Clark 型分布に対応する $\lambda(r_1, \theta_1)$ および $\mu(r_2, \theta_2)$ は

$$\lambda(r_1, \theta_1) = \alpha e^{-\beta r_1}, \quad (5.7.1)$$

$$\mu(r_2, \theta_2) = \alpha e^{-\beta r_2} \quad (5.7.2)$$

と表される。ここで、 β は距離の増大による密度の減少度合いを表すパラメータを、 α は比例定数を意味する。ここでは、距離減衰パラメータ β の値は、起点と終点の密度で同一のものを採用する。半径 R の円盤領域での積分値が 1 となるように定数 α を定めると、起点 $\lambda(r_1, \theta_1)$ と終点 $\mu(r_2, \theta_2)$ の密度は以下のように与えられる：

$$\lambda(r_1, \theta_1) = \frac{\beta^2 e^{\beta R}}{2\pi(e^{\beta R} - \beta R - 1)} e^{-\beta r_1}, \quad (5.7.3)$$

$$\mu(r_2, \theta_2) = \frac{\beta^2 e^{\beta R}}{2\pi(e^{\beta R} - \beta R - 1)} e^{-\beta r_2}. \quad (5.7.4)$$

ここでは、起・終点が独立に同一の Clark 型分布に従うものとする。このときのトリップ密度は

$$\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) = N \cdot \lambda(r_1, \theta_1) \cdot \mu(r_2, \theta_2) \quad (5.7.5)$$

なる形に記述することができる。

これをもとに、環状路と放射路の通過量 $q_{\text{環}}(\mathbf{P})$ と $q_{\text{放}}(\mathbf{P})$ を導出しよう。環状路の場合には、式 (5.2.10) と式 (5.2.11) において式 (5.7.5) のトリップ密度を代入して計算すればよい。同様に、放射路の場合には、式 (5.2.26) と式 (5.2.27) において式 (5.7.5) のトリップ密度を代入して計算すればよい。これらの計算を具体的に実行すると、式 (5.7.5) のトリップ密度に対応する $q_{\text{環}}(\mathbf{P})$ と $q_{\text{放}}(\mathbf{P})$ は以下の通りに導かれる：

$$q_{\text{環}}(\mathbf{P}) = \frac{2N\beta^2 e^{\beta(R-2z)} z \{e^{\beta R}(1 + \beta z) - e^{\beta z}(1 + \beta R)\}}{\pi^2(1 + \beta R - e^{\beta R})^2}, \quad (5.7.6)$$

$$q_{\text{放}}(\mathbf{P}) = \frac{N \{e^{(R-z)\beta}(1 + \beta z) - \beta R - 1\} \{\pi e^{\beta R} - (\pi - 2)(1 + \beta R) - 2e^{(R-z)\beta}(1 + \beta z)\}}{\pi^2 z(1 + \beta R - e^{\beta R})^2}. \quad (5.7.7)$$

このように、Clark 型分布のもとで環状路と放射路の通過量を厳密に導くことができた。ここで、 $\beta \rightarrow 0$ とすると、一様なトリップ密度に対応する通過量に帰着することが示される。なお、起点と終点の密度で距離減衰パラメータ β の値が異なる場合にも、(式の形はやや複雑であるものの) 通過量を厳密に導出することができる。以下に式 (5.7.6) と式 (5.7.7) の数値例を示す。

5.7.2 通過量の数値例

ここでは、環状路と放射路と両者の合計の通過量の数値例を示す。図 5.42 に、以降の図で想定する Clark 型の起点の密度の断面図を示した(終点の密度も同一のものを採用する)。この図では、都市半径

を $R = 1$ とし、距離減衰のパラメータ β を $\beta = 1$ から $\beta = 5$ まで 1 刻みで変化させた 5 つの分布を描いている。

環状路の通過量の数値例

図 5.43 に環状路の通過量の数値例を示した。図 5.43 (a) は $\beta = 3$ に対応する立体図を、図 5.43 (b) は図 5.42 の 5 つの分布に対応する断面図に加え、一様分布に対応する断面図を描いている。

図 5.43 から、距離減衰のパラメータ β の値が大きくなるに従って、(1) 混雑する環状路が都心方向にシフトし、(2) 最も混雑する環状路付近への集中度が高くなっていく様子が見て取れる。

放射路の通過量の数値例

図 5.44 に放射路の通過量の数値例を示した。図 5.44 (a) は $\beta = 3$ に対応する立体図を、図 5.44 (b) は図 5.42 の 5 つの分布に対応する断面図に加え、一様分布に対応する断面図を描いている。

距離減衰パラメータ β の増大に伴い、郊外での通過量が大きく減少する様子が見て取れる。

環状路と放射路の合計の通過量の数値例

図 5.45 に環状路と放射路の合計の通過量の数値例を示した。図 5.45 (a) は $\beta = 3$ に対応する立体図を、図 5.45 (b) は図 5.42 の 5 つの分布に対応する断面図に加え、一様分布に対応する断面図を描いている。

距離減衰パラメータ β が増大に伴い、都心における集中度が極めて大きくなることわかる。

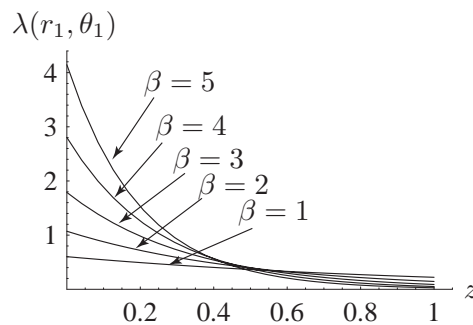


図 5.42 Clark 型の起・終点分布。

5.7.3 無限領域の都市を想定した場合

ここでは、モデルを簡略化し、無限領域における Clark 型分布を想定した場合の通過量を導出する。無限領域を想定することで、都市サイズを表すパラメータが不要となるためしばしば利用される (Pearce, 1981; Vaughan, 1987; 栗田, 2004)。この場合の Clark 型の起・終点分布は以下のように与えられる：

$$\lambda(r_1, \theta_1) = \frac{\beta^2}{2\pi} e^{-\beta r_1}, \quad (5.7.8)$$

$$\mu(r_2, \theta_2) = \frac{\beta^2}{2\pi} e^{-\beta r_2}. \quad (5.7.9)$$

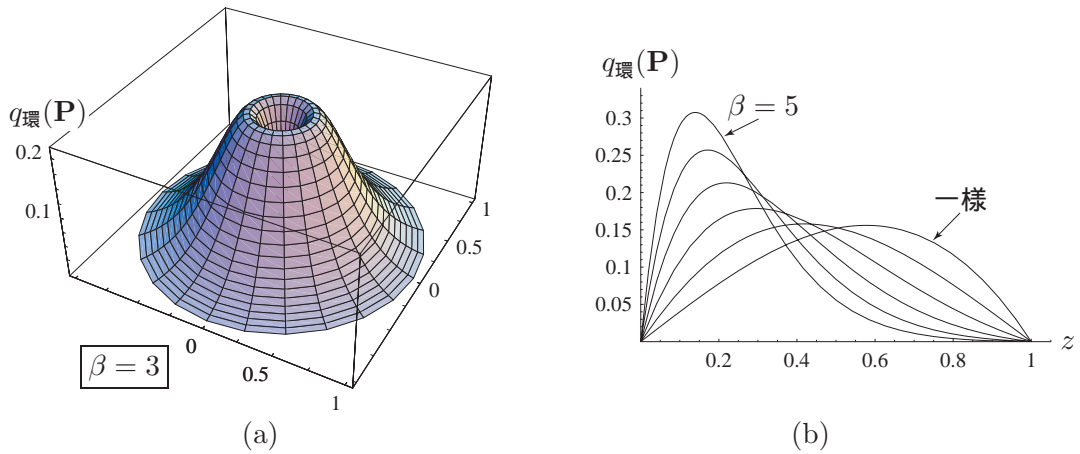


図 5.43 環状路の通過量の概形：(a) 立体図；(b) 断面図．

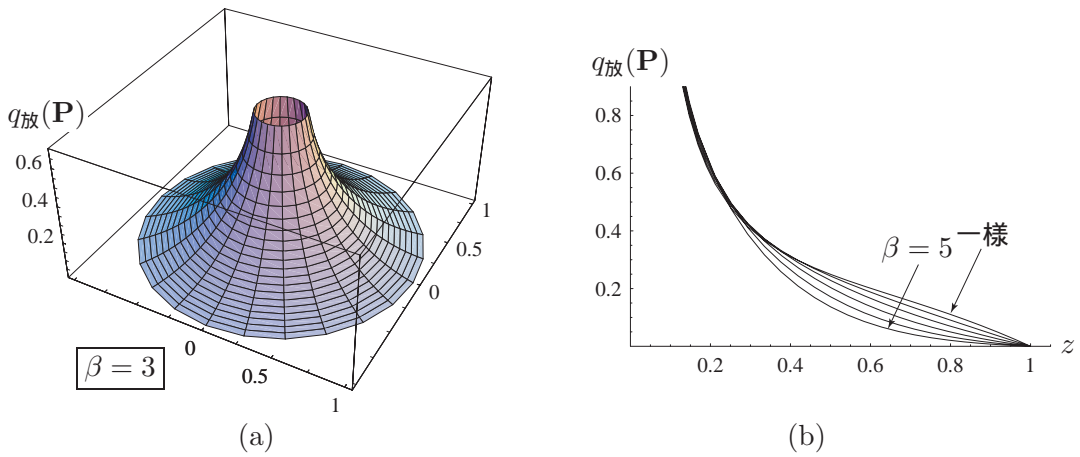


図 5.44 放射路と通過量の概形：(a) 立体図；(b) 断面図．

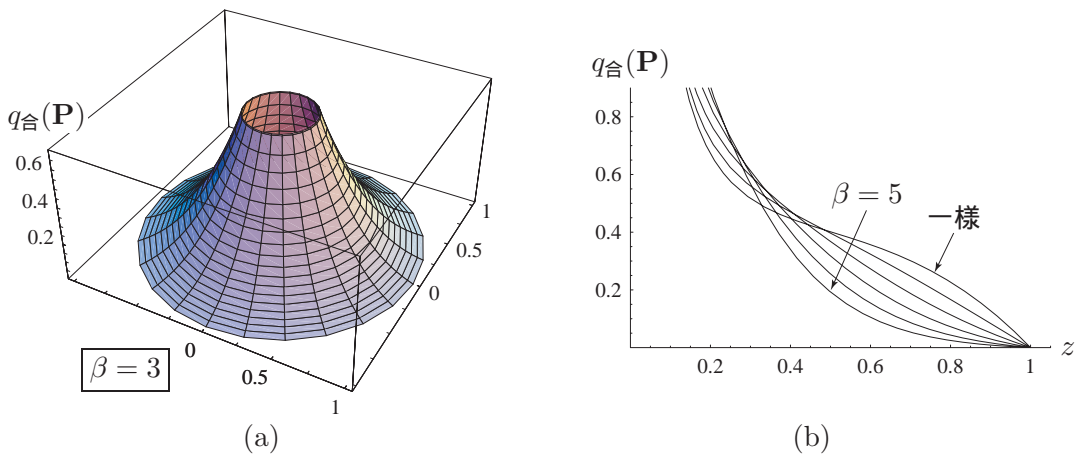


図 5.45 環状路と放射路の合計の通過量の概形：(a) 立体図；(b) 断面図．

この起・終点分布をもとにすると、環状路と放射路の通過量 $q_{環}(\mathbf{P})$ と $q_{放}(\mathbf{P})$ は以下のように導かれる：

$$q_{環}(\mathbf{P}) = \frac{2N\beta^2 e^{-2\beta z} z(1 + \beta z)}{\pi^2}, \quad (5.7.10)$$

$$q_{放}(\mathbf{P}) = \frac{Ne^{-2\beta z}(\pi e^{\beta z} - 2\beta z - 2)(1 + \beta z)}{\pi^2 z}. \quad (5.7.11)$$

このように、無限領域における Clark 型分布に対応する通過量は非常に簡潔に表現できることが分かった。

ここで、環状路の通過量が最大値を取る都市中心からの距離 z^* を求めてみよう。 $q_{環}(\mathbf{P})$ を z について偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial z} q_{環}(\mathbf{P}) = \frac{2N\beta^2 e^{-2\beta z} (1 + \sqrt{2}\beta z)(1 - \sqrt{2}\beta z)}{\pi^2} \quad (5.7.12)$$

を得るから、通過量 $q_{環}(\mathbf{P})$ が最大値を取る中心からの距離 z^* は以下のように極めて簡潔に求められる：

$$z^* = \frac{1}{\sqrt{2}\beta} \quad (\approx 0.707\beta^{-1}). \quad (5.7.13)$$

この結果は、 β の値の増大に伴って、最も混雑する環状路が都心付近に近づく構造を明示している。

5.8 第5章のまとめ

本章では、一様なトリップ密度と一様な到着時刻分布のもとでの環状路と放射路の通過密度を厳密に導いた。その結果、数多くの場合分けを要するものの、通過密度は比較的簡便に表現できることを示した。以下に、本研究から得られた知見をまとめ、今後の課題を述べる。

混雑する環状路の半径は時刻によってかなり変化すること、一様なトリップ密度の場合、ピーク時に最も混雑する環状路は都市中心と都市境界の中間点付近に表れることを示した。

放射路の場合には、総通過量は上り方面と下り方面とで同一であるのに対し、通過密度には大きな違いが見られることが判明した。下り方面の交通は上り方面よりもあとから観測されることから時間的に集中する。そのため同じ総量を短時間で輸送する必要のある下り方面の移動は、上り方面の移動よりもピーク時の混雑がかなり大きくなることを示した。ネットワークの性質としては、下り方面の方が渋滞の潜在性が高いという構造は、広く認識されるべき重要な性質であると思われる。

本研究では、一般のトリップ密度のもとでの定式化を行ってはいないものの、移動の起・終点は独立に分布する場合のみを扱った。もちろん現実には、移動の出発点と目的点は独立に分布する訳ではなく、両者の距離の増大に伴って移動量が減衰するのが常である。このような状況をモデル化する空間相互作用を明示的にモデルに組み込んだ分析は今後行うべき重要な課題である。特に、放射・環状パターンは（多くの場合）比較的広域な道路網や鉄道網のパターンにみられるものであり、本論文で示した結果が、距離減衰を考慮した状況でどの程度妥当なものかを、検討する必要がある。

第6章 直交距離に基づく矩形都市における時空間通過量

6.1 はじめに

本章では、矩形領域で与えられた都市において直交距離による移動を想定し、通過量モデルを構成する。格子状の交通網は、放射・環状パターンと並ぶ代表的な交通網パターンである。放射・環状パターンが比較的マクロなスケールで観察されるのに対し、格子状網はミクロな街路網からマクロな道路網まで幅広く用いられている交通網パターンである。どちらも、任意の地点から4つの向きへの移動が可能であるが、放射・環状網は中心という特別な点が存在するのに対し、格子状網は均質 (homogeneous) な交通網である点が大きな違いである。そのため、格子状網では、放射・環状網ほどの都心における交通集中が見られず、交通量を分散させる効果があることが示される。数学的には、放射・環状網に比べて回転対称性に劣る格子状網では、通過量の時空間分布を導く作業は困難なものとなる。

6.2 通過量の導出

Vaughan (1987) は、格子状道路網を有する正方形領域に一様独立に分布する起・終点を想定した場合の、通過量を導いている。本節で、Vaughan (1987) のモデルをもとに矩形領域における通過量を導き、その時刻に関する密度を次節で厳密に導出する。

6.2.1 一般のトリップ密度のもとでの通過量

第2章で導入した、東向きの通過量 $q_{\text{東}}(\mathbf{P})$ の定義を振り返っておく。都市を図 6.1 に示すような、 $[0, l_1] \times [0, l_2]$ の矩形領域で与える。地点 \mathbf{P} における東向きの通過量 $q_{\text{東}}(\mathbf{P})$ を、移動方向に垂直な軸 (東向きの場合は南北方向の軸) の単位長さ当りを横切るトリップ数として定義する。この定義から、図 6.1 に示すような、地点 x の y_a から y_b の範囲に設けられた線分を、東向きに通過するトリップ数 $n_{\text{東}}$ は以下のように与えられる (第 2.5.4 小節, 23 ページ):

$$n_{\text{東}} = \int_{y_a}^{y_b} q_{\text{東}}(\mathbf{P}) dy. \quad (6.2.1)$$

その他の3つの向きに対応する通過量 $q_{\text{西}}(\mathbf{P})$, $q_{\text{南}}(\mathbf{P})$ および $q_{\text{北}}(\mathbf{P})$ についても同様に定義する。以下に、東向きの通過量の導出方法を述べる。

図 6.2 に示すように、観測地点 \mathbf{P} の座標を $\mathbf{P}(x, y)$ と表し、移動の起点と終点の座標をそれぞれ $\mathbf{Q}_1(x_1, y_1)$ および $\mathbf{Q}_2(x_2, y_2)$ と表す。いま、地点 \mathbf{P} に設けられた微小幅 dy の線分 L に着目する。線分 L を東向きに通過するための領域の組み合わせには、図 6.2 (a) の L を通過したの後に方向転換を行う場合と、図 6.2 (b) の L を通過する前に方向転換を行う場合とが存在する (起点集合を斜線の領域で

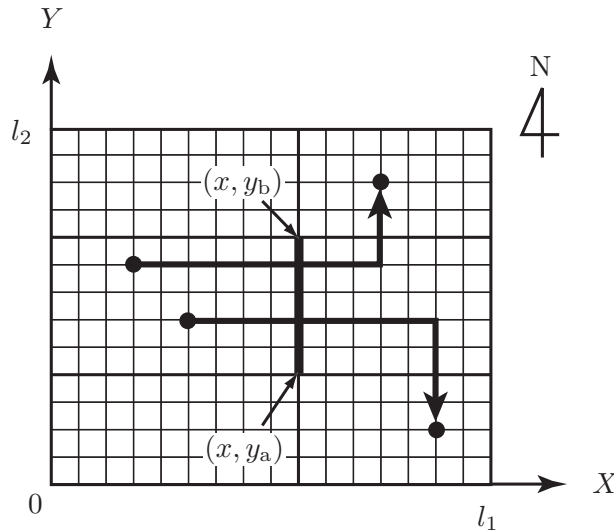


図 6.1 格子上交通網を有する矩形都市における通過量の定義.

終点集合をグレーの領域で示している). ここで, 第 2.2.4 小節で説明したように, 起・終点間の経路選択ルールは, 方向転換を一回のみ行う 2 つの最短経路が等しい確率で選択されるものとする. したがって, 図 6.2 に示す起・終点ペアの集合のうちの半分が, 実際に L を通過することになるのである.

図 6.2 (a) に斜線部で示した起点集合を $A_{\text{東a}}$, グレー部分で示した終点集合を $B_{\text{東a}}$ と表せば, これらは以下のように与えられる:

$$A_{\text{東a}} = \{(x_1, y_1) \mid 0 \leq x_1 \leq x, y \leq y_1 \leq y + dy\}, \quad (6.2.2)$$

$$B_{\text{東a}} = \{(x_2, y_2) \mid x \leq x_2 \leq l_1, 0 \leq y_2 \leq l_2\}. \quad (6.2.3)$$

同様にして, 図 6.2 (b) に斜線部で示した起点集合を $A_{\text{東b}}$, グレー部分で示した終点集合を $B_{\text{東b}}$ と表せば, これらは以下のように与えられる:

$$A_{\text{東b}} = \{(x_1, y_1) \mid 0 \leq x_1 \leq x, 0 \leq y_1 \leq l_2\}, \quad (6.2.4)$$

$$B_{\text{東b}} = \{(x_2, y_2) \mid x \leq x_2 \leq l_1, y \leq y_2 \leq y + dy\}. \quad (6.2.5)$$

ここで, 図 6.2 (a) の移動パターンに対応する東向き通過量を $q_{\text{東a}}(\mathbf{P})$, 図 6.2 (b) の移動パターンに対応する東向き通過量を $q_{\text{東b}}(\mathbf{P})$ と表すことにする:

$$q_{\text{東}}(\mathbf{P}) = q_{\text{東a}}(\mathbf{P}) + q_{\text{東b}}(\mathbf{P}). \quad (6.2.6)$$

いま, 図 6.2 (a) の移動パターンで線分 L を通過するトリップ数は, $q_{\text{東a}}(\mathbf{P})$ の定義より $q_{\text{東a}}(\mathbf{P})dy$ となる. 同様にして, 図 6.2 (b) の移動パターンで線分 L を通過するトリップ数は, $q_{\text{東b}}(\mathbf{P})$ の定義より $q_{\text{東b}}(\mathbf{P})dy$ となる. ここで, 起・終点間の経路選択ルールより, 図 6.2 (a) の場合は, $A_{\text{東a}}$ と $B_{\text{東a}}$ の起・終点ペアの集合の半分が線分 L を通過し, 図 6.2 (b) の場合は, $A_{\text{東b}}$ と $B_{\text{東b}}$ の起・終点ペアの集合の半分が線分 L を通過することになる.

以上より, $q_{\text{東a}}(\mathbf{P})dy$ および $q_{\text{東b}}(\mathbf{P})dy$ は起点集合と終点集合を用いて以下のように表される:

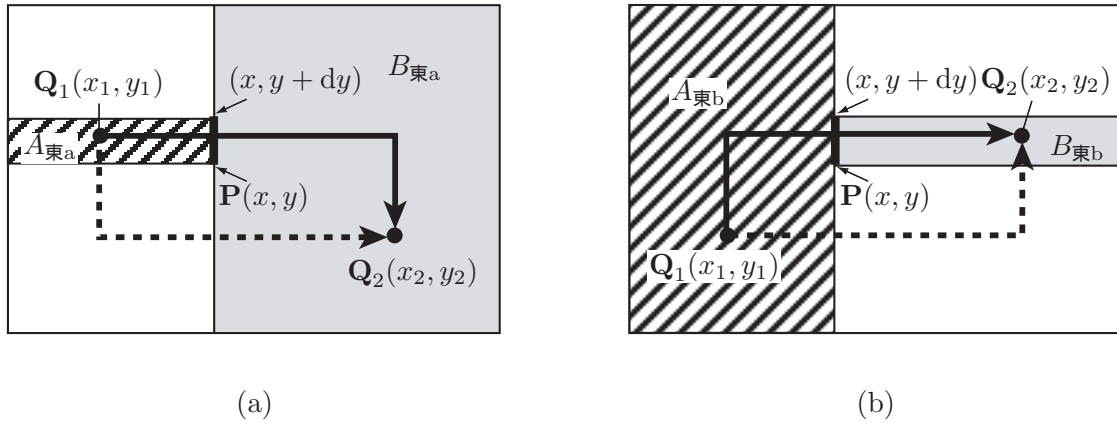


図 6.2 地点 P 近傍の線分 L を東向きに通過するための起・終点の領域の組み合わせ：(a) L を通過した後に方向転換を行う場合；(b) L を通過する前に方向転換を行う場合。

$$q_{\text{東a}}(\mathbf{P})dy = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{Q}_1 \in A_{\text{東a}}} \int_{\mathbf{Q}_2 \in B_{\text{東a}}} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_2 d\mathbf{Q}_1, \quad (6.2.7)$$

$$q_{\text{東b}}(\mathbf{P})dy = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{Q}_1 \in A_{\text{東b}}} \int_{\mathbf{Q}_2 \in B_{\text{東b}}} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_2 d\mathbf{Q}_1. \quad (6.2.8)$$

これらを起点と終点の座標を用いて明示的に記述すると以下の通りとなる：

$$q_{\text{東a}}(\mathbf{P})dy = \frac{1}{2} \int_{x_1=0}^x \int_{y_1=y}^{y+dy} \int_{x_2=x}^{l_1} \int_{y_2=0}^{l_2} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) dy_2 dx_2 dy_1 dx_1, \quad (6.2.9)$$

$$q_{\text{東b}}(\mathbf{P})dy = \frac{1}{2} \int_{x_1=0}^x \int_{y_1=0}^{l_2} \int_{x_2=x}^{l_1} \int_{y_2=y}^{y+dy} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) dy_2 dx_2 dy_1 dx_1. \quad (6.2.10)$$

6.2.2 一様なトリップ密度のもとでの通過量

移動の起点 \mathbf{Q}_1 と終点 \mathbf{Q}_2 が矩形領域で一様かつ独立に分布する場合の通過量を導出する．このときのトリップ密度は以下のように表される：

$$\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) = \frac{N}{(l_1 l_2)^2}. \quad (6.2.11)$$

式 (6.2.9) と式 (6.2.10) の積分を具体的に実行し，両辺を dy で除すと， $q_{\text{東a}}(\mathbf{P})$ と $q_{\text{東b}}(\mathbf{P})$ は以下のように導かれる：

$$q_{\text{東a}}(\mathbf{P}) = \frac{Nx(l_1 - x)l_2}{2(l_1 l_2)^2}, \quad (6.2.12)$$

$$q_{\text{東b}}(\mathbf{P}) = \frac{Nx(l_1 - x)l_2}{2(l_1 l_2)^2}. \quad (6.2.13)$$

したがって， $q_{\text{東}}(\mathbf{P}) = q_{\text{東a}}(\mathbf{P}) + q_{\text{東b}}(\mathbf{P})$ は以下の通りに導かれる：

$$q_{\text{東}}(\mathbf{P}) = \frac{Nx(l_1 - x)l_2}{(l_1 l_2)^2}. \quad (6.2.14)$$

西向き，南向きおよび北向きの通過量 $q_{\text{西}}(\mathbf{P})$ ， $q_{\text{南}}(\mathbf{P})$ および $q_{\text{北}}(\mathbf{P})$ についても， $q_{\text{東}}(\mathbf{P})$ をもとに対称性を利用すれば以下のように導かれる：

$$q_{西}(\mathbf{P}) = \frac{Nx(l_1 - x)l_2}{(l_1l_2)^2}, \quad (6.2.15)$$

$$q_{南}(\mathbf{P}) = \frac{Ny(l_2 - y)l_1}{(l_1l_2)^2}, \quad (6.2.16)$$

$$q_{北}(\mathbf{P}) = \frac{Ny(l_2 - y)l_1}{(l_1l_2)^2}. \quad (6.2.17)$$

このように、一様独立なトリップ密度を想定した場合、 $q_{東}(\mathbf{P})$ と $q_{西}(\mathbf{P})$ は x に関する 2 次関数、 $q_{南}(\mathbf{P})$ と $q_{北}(\mathbf{P})$ は y に関する 2 次関数として導かれるのである。

図 6.3 に、一辺 1 の正方形における通過量の立体図を示した ($N = 1$)。図 6.3 (a) は東向きと西向きの合計 $q_{東}(\mathbf{P}) + q_{西}(\mathbf{P})$ を、図 6.3 (b) は南向きと北向きの合計 $q_{南}(\mathbf{P}) + q_{北}(\mathbf{P})$ を、図 6.3 (c) はすべての向きの合計 $q_{合}(\mathbf{P})$ のグラフを示している。

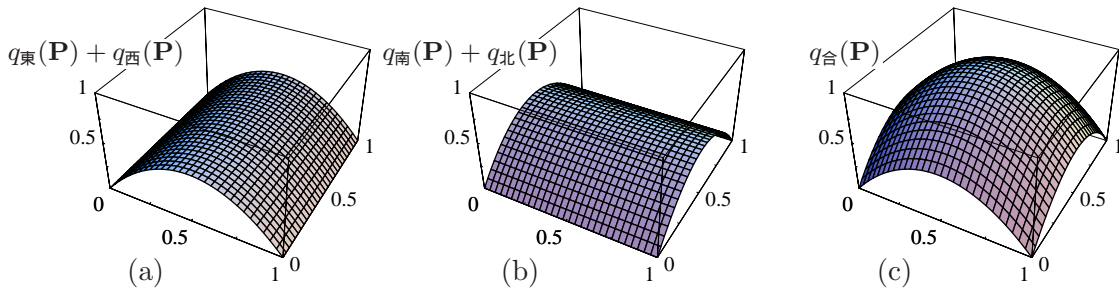


図 6.3 通過量の立体図：(a) 東向きと西向きの合計；(b) 南向きと北向きの合計；(c) すべての向きの合計。

6.3 通過密度の導出

6.3.1 通過密度の定義

図 6.2 (a) の移動に対応する通過時刻の密度関数を $\psi_{東a}(t; \mathbf{P})$ ，図 6.2 (b) の移動に対応する通過時刻の密度関数を $\psi_{東b}(t; \mathbf{P})$ と表すことにする。このとき、東向きの通過密度 $p_{東}(\mathbf{P}, t)$ を以下のように導入する：

$$p_{東}(\mathbf{P}, t) = q_{東a}(\mathbf{P}) \cdot \psi_{東a}(t; \mathbf{P}) + q_{東b}(\mathbf{P}) \cdot \psi_{東b}(t; \mathbf{P}). \quad (6.3.1)$$

西向き、南向きおよび北向きの通過密度 $p_{西}(\mathbf{P}, t)$ 、 $p_{南}(\mathbf{P}, t)$ および $p_{北}(\mathbf{P}, t)$ についても、図 6.2 に示した 2 通りの起・終点の領域の組み合わせに対応する通過密度を導入し、東向きの場合と同様に以下のように定義する：

$$p_{西}(\mathbf{P}, t) = q_{西a}(\mathbf{P}) \cdot \psi_{西a}(t; \mathbf{P}) + q_{西b}(\mathbf{P}) \cdot \psi_{西b}(t; \mathbf{P}), \quad (6.3.2)$$

$$p_{南}(\mathbf{P}, t) = q_{南a}(\mathbf{P}) \cdot \psi_{南a}(t; \mathbf{P}) + q_{南b}(\mathbf{P}) \cdot \psi_{南b}(t; \mathbf{P}), \quad (6.3.3)$$

$$p_{北}(\mathbf{P}, t) = q_{北a}(\mathbf{P}) \cdot \psi_{北a}(t; \mathbf{P}) + q_{北b}(\mathbf{P}) \cdot \psi_{北b}(t; \mathbf{P}). \quad (6.3.4)$$

これらはすべて、以下に示す東向きの通過密度 $p_{東}(\mathbf{P}, t)$ と同様の手順で導くことができる。なお、一様分布などの特殊なトリップ密度を想定する場合には、対称性を利用することで、東向きの通過密度からその他の向きの通過密度を直接導くことができる。以下に、東向きの通過密度 $p_{東}(\mathbf{P}, t)$ を導くために、 $\psi_{東a}(t; \mathbf{P})$ および $\psi_{東b}(t; \mathbf{P})$ の導出方法を示す。

6.3.2 一般のトリップ密度と入社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数

一般のトリップ密度 $\tau(Q_1, Q_2)$ と入社時刻分布 $f(t)$ を想定した場合の、通過時刻の密度関数の導出方法を説明する．ここでの導出手順も、第3章で示した手順とほぼ同様である．

図 6.2 (a) と図 6.2 (b) において、地点 P を東向きに横切る移動者の、 P から目的地 Q_2 までの所要時間を u と表し、この移動者の条件付きの通過時刻の密度関数を $\psi_{東a}(t; P|u)$ および $\psi_{東b}(t; P|u)$ と表す．目的の $\psi_{東a}(t; P)$ と $\psi_{東b}(t; P)$ を、条件付きの密度関数 $\psi_{東a}(t; P|u)$ と $\psi_{東b}(t; P|u)$ をもとにして、以下の積分によって導出する：

$$\psi_{東a}(t; P) = \int_0^{u_{max}} \psi_{東a}(t; P|u)g(u)du, \quad (6.3.5)$$

$$\psi_{東b}(t; P) = \int_0^{u_{max}} \psi_{東b}(t; P|u)g(u)du. \quad (6.3.6)$$

ただし、 $g(u)$ は所要時間 u の密度関数を意味し、 u_{max} は u の最大値を意味する．

条件付きの通過時刻の密度関数

地点 P からの所要時間が u である位置に勤務地をもつ通勤者が時刻 t に出社するためには、地点 P を時刻 $t - u$ に通過しなければならない．したがって、条件付きの通過時刻の密度関数 $\psi_{東a}(t; P|u)$ と $\psi_{東b}(t; P|u)$ は、入社時刻分布を時間軸の負の向きに u だけ平行移動した以下の式で与えられる：

$$\psi_{東a}(t; P|u) = f(t + u) \quad (t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u), \quad (6.3.7)$$

$$\psi_{東b}(t; P|u) = f(t + u) \quad (t_0 - u \leq t \leq t_0 + a - u). \quad (6.3.8)$$

この関係は、もちろん一般のトリップ密度 $\tau(Q_1, Q_2)$ と入社時刻分布 $f(t)$ のもとで成り立つ性質である．

通過後に方向転換を行う場合の観測地点から勤務地までの所要時間の密度関数

図 6.2 (a) に示した、地点 P を通過した後に方向転換を行う場合の起・終点ペアの集合に対応する、 P から Q_2 までの所要時間 u の密度関数 $g(u)$ の導出法を示す．地点 P からの所要時間 u の密度関数 $g(u)$ を求めるために、まずその累積分布 $G(u)$ を導く*1．累積分布 $G(u)$ は、地点 P から所要時間 u 以下で到達可能な勤務地の割合を意味する．この割合を特定するためには、地点 P からの所要時間 u の等高線図を描き、地点 P を図 6.2 (a) のように通過する起・終点ペアの集合のうち、終点が等高線の内部に含まれる割合を調べればよい．

図 6.4 に、地点 P からの所要時間の等高線を示した．よく知られているように、直交距離の等高線図は図 6.4 のようなダイヤ型（直交座標軸から 45 度傾いた正方形）になる（Newell, 1980; Puu, 2003）．

図 6.5 に示すように、終点の領域 $B_{東a}$ のうち、 P からの所要時間 u の等高線の内部に含まれる領域（図中の太枠で囲った領域）を Λ と表すことにする．このとき、図 6.2 (a) の移動を行い P からの所要時間が u 以下であるトリップ数は、起点集合 $A_{東a}$ から終点集合 Λ へのトリップ数の半分である．したがって、地点 P からの所要時間の累積分布 $G(u)$ は以下のように表される：

*1 起・終点が一様に分布する場合には、栗田 (2004) による距離分布公式を応用して直接 $g(u)$ を導くことができる．

$$G(u) = \frac{\frac{1}{2} \int_{Q_1 \in A_{\text{東}a}} \int_{Q_2 \in \Lambda} \tau(Q_1, Q_2) dQ_2 dQ_1}{\frac{1}{2} \int_{Q_1 \in A_{\text{東}a}} \int_{Q_2 \in B_{\text{東}a}} \tau(Q_1, Q_2) dQ_2 dQ_1} \quad (0 \leq u \leq u_{\text{max}}). \quad (6.3.9)$$

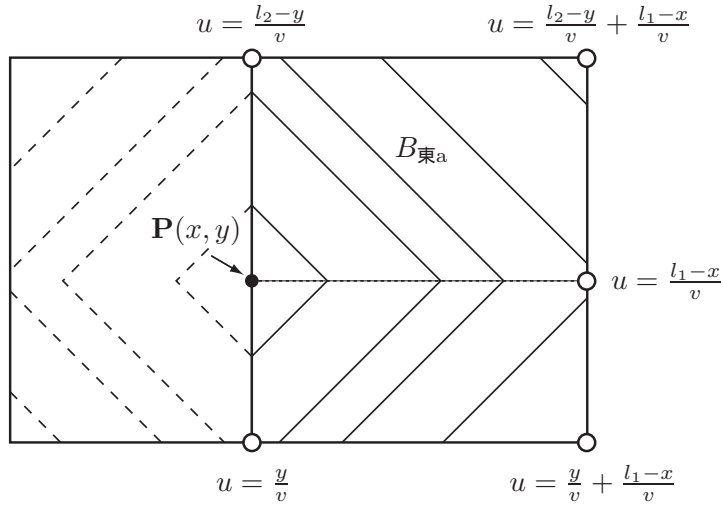


図 6.4 地点 P からの所要時間の等高線.

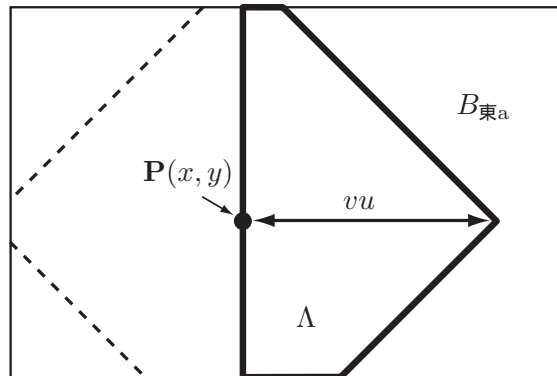


図 6.5 地点 P からの所要時間が u 以内の割合の特定.

領域 Λ の形状には，等高線が図 6.4 の白丸で示した 5 つの点にぶつかる所要時間を境に変化するため，合計 5 種類が存在する．図 6.4 の例では，白丸で示した 5 つの点は， $u = \frac{y}{v}$ ， $u = \frac{l_2-y}{v}$ ， $u = \frac{l_1-x}{v}$ ， $u = \frac{y}{v} + \frac{l_1-x}{v}$ ， $u = \frac{l_2-y}{v} + \frac{l_1-x}{v}$ の順に出現する．これら 5 つの端点の出現順序は，地点 $P(x, y)$ の位置に依存して決まる．端点の出現順序が異なれば，対応する P から Q_2 までの所要時間の密度関数 $g(u)$ ，ひいては通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{東}a}(t; P)$ が異なるため，起こり得る端点の出現順序をすべて網羅しなければならない．

図 6.6 に，端点の出現順序によって矩形を分割した図を示す．図 6.6 (a) は $l_2 \leq l_1$ の場合を示しており，図 6.6 (b) は $l_1 \leq l_2$ の場合を示している．対称性から $0 \leq y \leq l_2/2$ の部分のみを考慮すればよく，端点の出現順序は (A) から (E) の 5 パターンに分類される．P が (A) から (E) のどの領域に存在するかによって，5 通りの $g(u)$ が存在するのである（それぞれはさらに u の範囲によって 5 通りの場合をもつ）．図 6.6 (b) から理解されるように， $l_1 \leq l_2$ は図 6.6 (a) の $l_2 \leq l_1$ の場合から出現順序を網羅することができる．したがって，図 6.6 (a) の場合の領域分割さえ用意しておけばよい．

表 6.1 図 6.6 に対応する端点の出現順序の整理 .

(A)	(1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (5)
(B)	(1) ⇒ (3) ⇒ (2) ⇒ (4) ⇒ (5)
(C)	(1) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (2) ⇒ (5)
(D)	(3) ⇒ (1) ⇒ (4) ⇒ (2) ⇒ (5)
(E)	(3) ⇒ (1) ⇒ (2) ⇒ (4) ⇒ (5)

表 6.1 に , 図 6.6 (a) の (A) から (E) の各領域における 5 つの端点 : (1) $u = \frac{y}{v}$, (2) $u = \frac{l_2-y}{v}$, (3) $u = \frac{l_1-x}{v}$, (4) $u = \frac{y}{v} + \frac{l_1-x}{v}$, (5) $u = \frac{l_2-y}{v} + \frac{l_1-x}{v}$ の出現順序を整理した .

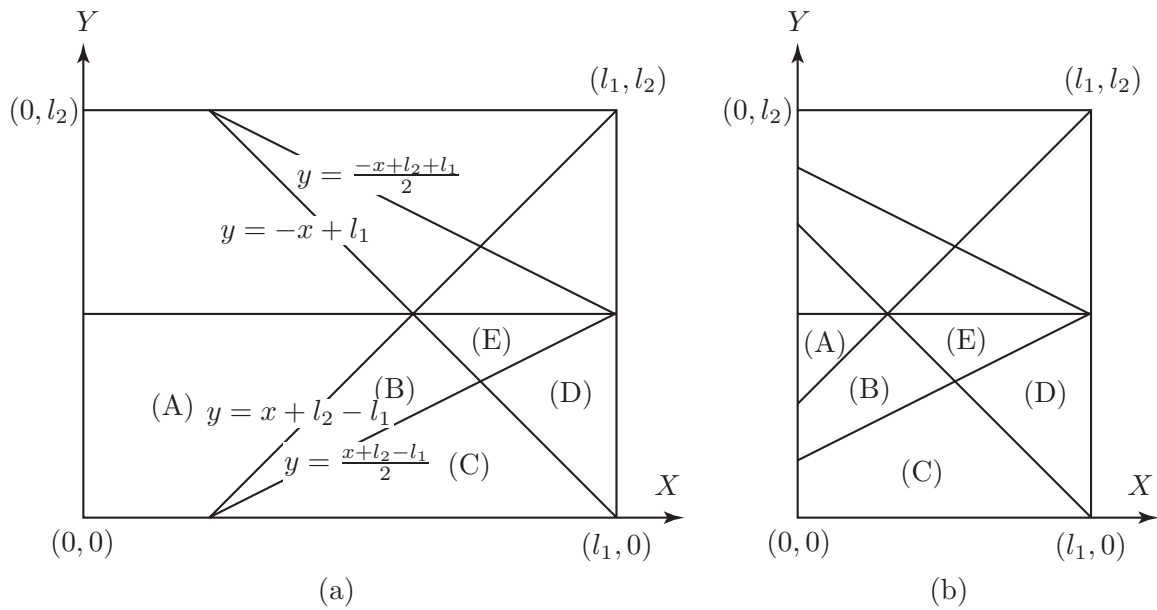


図 6.6 端点への衝突の順番に応じた矩形の領域分割 : (a) $l_2 \leq l_1$ の場合 ; (b) $l_1 \leq l_2$ の場合 .

通過後に方向転換を行う場合の通過時刻の密度関数

以上で , 通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{東a}}(t; \mathbf{P})$ を計算するための準備が整った . $\psi_{\text{東a}}(t; \mathbf{P}|u)$ および $g(u)$ を所与とし , 式 (6.3.5) の積分を具体的に実行するには , これまでと全く同様に , $t-u$ 平面上の平行四辺形を用いればよい .

しかしながら , ここでの $g(u)$ は , x と y の 2 つの変数を含むため , 第 3 章および第 5 章で扱った , $a-z$ 平面上に対応するものは , 3 次元空間で与えられる $a-x-y$ 空間になってしまう . したがって , (a, x, y) で定められる平行四辺形の形状をすべて網羅する作業は , $a-x-y$ 空間を各平行四辺形に対応する部分領域に分割する作業に相当し , 極めて煩雑な場合分けを要する .

通過前に方向転換を行う場合の観測地点から勤務地までの所要時間の密度関数

図 6.2 (b) に示した , 地点 \mathbf{P} を通過する前に方向転換を行う場合の起・終点ペアの集合に対応する , \mathbf{P} から \mathbf{Q}_2 までの所要時間の密度関数 $g(u)$ の導出法を示す . 地点 \mathbf{P} からの所要時間 u の密度関数 $g(u)$

を求めるために、まずその累積分布 $G(u)$ を導く。

図 6.7 は、終点の領域 $B_{\text{東b}}$ のうち P からの所要時間 u の等高線内部に含まれる領域 Λ (図中の太枠で囲った領域) を示している。このとき、図 6.2 (b) の移動を行い P からの所要時間が u 以下であるトリップ数は、起点集合 $A_{\text{東b}}$ から終点集合 Λ へのトリップ数の半分である。したがって、地点 P からの所要時間の累積分布 $G(u)$ は以下のように表される：

$$G(u) = \frac{\frac{1}{2} \int_{A_{\text{東b}}} \int_{\Lambda} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_2 d\mathbf{Q}_1}{\frac{1}{2} \int_{A_{\text{東b}}} \int_{B_{\text{東b}}} \tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) d\mathbf{Q}_2 d\mathbf{Q}_1} \quad (0 \leq u \leq u_{\text{max}}). \quad (6.3.10)$$

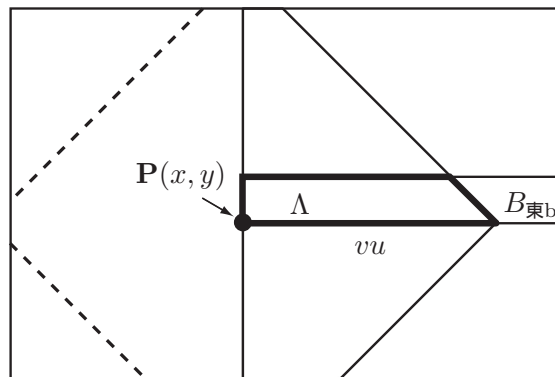


図 6.7 地点 P からの所要時間が u 以内の割合の特定.

通過前に方向転換を行う場合の通過時刻の密度関数

以上で、通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{東b}}(t; \mathbf{P})$ を計算するための準備が整った。 $\psi_{\text{東b}}(t; \mathbf{P}|u)$ および $g(u)$ を所与とし、式 (6.3.5) の積分を具体的に行うには、これまでと全く同様に、 $t-u$ 平面上の平行四辺形を用いればよい。

6.3.3 一様なトリップ密度と入社時刻分布のもとでの通過時刻の密度関数

移動の起点 \mathbf{Q}_1 と終点 \mathbf{Q}_2 が矩形領域で一様かつ独立に分布する場合の通過密度を導出する。このときのトリップ密度は以下のように表される：

$$\tau(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) = \frac{N}{(l_1 l_2)^2}. \quad (6.3.11)$$

入社時刻分布としては時間区間 $[t_0, t_0 + a]$ の一様分布を想定する：

$$f(t) = \frac{1}{a} \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + a). \quad (6.3.12)$$

通過後に方向転換を行う場合の観測地点から勤務地までの所要時間の密度関数

一様独立なトリップ密度を想定した場合、(累積分布 $G(u)$ を求めることなく) 所要時間の密度関数 $g(u)$ を直接求める簡便な方法が存在する。これは、栗田 (2004) による「距離分布公式」を応用する方法であり、以下ではこの方法を利用して、所要時間の密度関数を直接求める方法を説明する。

栗田は、直交距離が定義された正方形領域^{*2}において、領域内の固定点から領域内に一様に分布する点までの、移動距離の密度関数を導くための簡便な公式を示している（栗田, 2004, 66 ページ）. 本研究では、移動の速さを一定値 v で与えているため、この公式をほぼそのまま利用することができる. 以下に、(本稿の枠組みで再構成した) 栗田の方法を紹介しつつ、所要時間の密度関数の導出方法を示す.

いま、図 6.8 に示すように、地点 P からの所要時間 u の等高線と領域 $B_{\text{東b}}$ との共通部分の長さを u の関数として $L(u)$ と表す. ここで、図 6.8 のグレーの領域で示された、地点 P からの所要時間が $[u, u + \Delta u]$ となる割合に着目する. この割合は、所要時間の密度関数の定義より $g(u)\Delta u$ で与えられる. ここで、一様な起・終点分布の仮定より、

$$g(u)\Delta u = \frac{\text{地点 } P \text{ からの所要時間が } [u, u + \Delta u] \text{ の領域の面積}}{B_{\text{東b}} \text{ の面積}} \quad (6.3.13)$$

なる関係が成立する. これを具体的に記述すると

$$g(u)\Delta u = \left\{ L(u) \times \frac{v\Delta u}{\sqrt{2}} + o(\Delta u) \right\} \times \frac{1}{(l_1 - x)l_2} \quad (6.3.14)$$

となる. ここで、 $o(\Delta u)$ はランダウの記号であり

$$\lim_{\Delta u \rightarrow +0} \frac{o(\Delta u)}{\Delta u} = 0 \quad (6.3.15)$$

を意味している. 式 (6.3.14) の両辺を Δu で除し、 $\Delta u \rightarrow 0$ なる極限操作を施せば以下の式に帰着する:

$$g(u) = \frac{vL(u)}{\sqrt{2}(l_1 - x)l_2}. \quad (6.3.16)$$

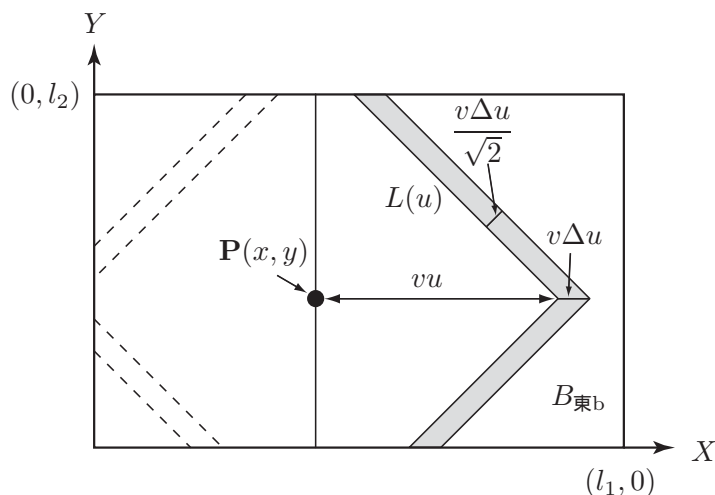


図 6.8 地点 P からの所要時間が $[u, u + \Delta u]$ 以内の割合の特定.

このように、栗田の公式を利用することで、等高線と領域 $B_{\text{東b}}$ との共通部分の長さ $L(u)$ さえ用意しておけば、目的の $g(u)$ が直ちに得られるわけである. 式 (6.3.16) を用いて、 P が図 6.6 の (A) ~ (E)

^{*2} 栗田の公式は文字通りの 2 次元図形でなくとも、直交距離が定義された空間であれば適用可能である. 実際、栗田 (2004) では、2 つの線分の直積空間において直交距離が定義された場合が扱われている.

の各領域に含まれる場合の，地点 P からの目的地 Q_2 までの所要時間 u の密度関数 $g(u)$ を具体的に計算すると以下のように導かれる：

(a) $x + l_2 - l_1 \leq y \leq \frac{l_2}{2}$ のとき

$$g(u) = \begin{cases} \frac{2v^2u}{(l_1 - x)l_2} & (0 \leq u < \frac{y}{v}), \\ \frac{v(vu + y)}{(l_1 - x)l_2} & (\frac{y}{v} \leq u < \frac{l_2 - y}{v}), \\ \frac{v}{l_1 - x} & (\frac{l_2 - y}{v} \leq u < \frac{l_1 - x}{v}), \\ \frac{v(-2vu - 2x + 2l_1 + l_2)}{(l_1 - x)l_2} & (\frac{l_1 - x}{v} \leq u < \frac{l_1 - x + y}{v}), \\ \frac{v(-vu - x - y + l_1 + l_2)}{(l_1 - x)l_2} & (\frac{l_1 - x + y}{v} \leq u \leq \frac{l_1 - x + l_2 - y}{v}). \end{cases} \quad (6.3.17)$$

(b) $\frac{x + l_2 - l_1}{2} \leq y \leq x + l_2 - l_1$ かつ $y \leq -x + l_1$ のとき

$$g(u) = \begin{cases} \frac{2v^2u}{(l_1 - x)l_2} & (0 \leq u < \frac{y}{v}), \\ \frac{v(vu + y)}{(l_1 - x)l_2} & (\frac{y}{v} \leq u < \frac{l_1 - x}{v}), \\ \frac{v(-vu - 2x + y + 2l_1)}{(l_1 - x)l_2} & (\frac{l_1 - x}{v} \leq u < \frac{l_2 - y}{v}), \\ \frac{v(-2vu - 2x + 2l_1 + l_2)}{(l_1 - x)l_2} & (\frac{l_2 - y}{v} \leq u < \frac{l_1 - x + y}{v}), \\ \frac{v(-vu - x - y + l_1 + l_2)}{(l_1 - x)l_2} & (\frac{l_1 - x + y}{v} \leq u \leq \frac{l_1 - x + l_2 - y}{v}). \end{cases} \quad (6.3.18)$$

(c) $y \leq \frac{x + l_2 - l_1}{2}$ かつ $y \leq -x + l_1$ のとき

$$g(u) = \begin{cases} \frac{2v^2u}{(l_1 - x)l_2} & (0 \leq u < \frac{y}{v}), \\ \frac{v(vu + y)}{(l_1 - x)l_2} & (\frac{y}{v} \leq u < \frac{l_1 - x}{v}), \\ \frac{v(-vu - 2x + y + 2l_1)}{(l_1 - x)l_2} & (\frac{l_1 - x}{v} \leq u < \frac{l_1 - x + y}{v}), \\ \frac{v}{l_2} & (\frac{l_1 - x + y}{v} \leq u < \frac{l_2 - y}{v}), \\ \frac{v(-vu - x - y + l_1 + l_2)}{(l_1 - x)l_2} & (\frac{l_2 - y}{v} \leq u \leq \frac{l_1 - x + l_2 - y}{v}). \end{cases} \quad (6.3.19)$$

(d) $-x + l_1 \leq y \leq \frac{x+l_2-l_1}{2}$ のとき

$$g(u) = \begin{cases} \frac{2v^2u}{(l_1-x)l_2} & (0 \leq u < \frac{l_1-x}{v}), \\ \frac{2v}{l_2} & (\frac{l_1-x}{v} \leq u < \frac{y}{v}), \\ \frac{v(-vu-2x+y+2l_1)}{(l_1-x)l_2} & (\frac{y}{v} \leq u < \frac{l_1-x+y}{v}), \\ \frac{v}{l_2} & (\frac{l_1-x+y}{v} \leq u < \frac{l_2-y}{v}), \\ \frac{v(-vu-x-y+l_1+l_2)}{(l_1-x)l_2} & (\frac{l_2-y}{v} \leq u \leq \frac{l_1-x+l_2-y}{v}). \end{cases} \quad (6.3.20)$$

(e) $-x + l_1 \leq y \leq \frac{l_2}{2}$ かつ $\frac{x+l_2-l_1}{2} \leq y$ のとき

$$g(u) = \begin{cases} \frac{2v^2u}{(l_1-x)l_2} & (0 \leq u < \frac{l_1-x}{v}), \\ \frac{2v}{l_2} & (\frac{l_1-x}{v} \leq u < \frac{y}{v}), \\ \frac{v(-vu-2x+y+2l_1)}{(l_1-x)l_2} & (\frac{y}{v} \leq u < \frac{l_2-y}{v}), \\ \frac{v(-2vu-2x+2l_1+l_2)}{(l_1-x)l_2} & (\frac{l_2-y}{v} \leq u < \frac{l_1-x+y}{v}), \\ \frac{v(-vu-x-y+l_1+l_2)}{(l_1-x)l_2} & (\frac{l_1-x+y}{v} \leq u \leq \frac{l_1-x+l_2-y}{v}). \end{cases} \quad (6.3.21)$$

通過後に方向転換を行う場合の通過時刻の密度関数

すでに説明したように、 $g(u)$ が x と y の 2 つの変数を含むため、 $\psi_{\text{東a}}(t; \mathbf{P})$ を網羅する作業は、 $a-x-y$ 空間を、各 $\psi_{\text{東a}}(t; \mathbf{P})$ に対応する部分領域に分割する作業に相当し、極めて煩雑な場合分けを要する。ここでは、それらをすべて網羅することは困難なので、式の形での例示は行わず、第 6.4 節で数値例を示すにとどめる。

通過前に方向転換を行う場合の観測地点から勤務地までの所要時間の密度関数

図 6.2 (b) の移動パターンに対応する所要時間の密度関数は以下のように導かれる：

$$g(u) = \frac{v}{l_1-x} \quad (0 \leq u \leq \frac{l_1-x}{v}). \quad (6.3.22)$$

通過前に方向転換を行う場合の通過時刻の密度関数

以上の想定のもとで、式 (6.3.6) の積分を実行すれば $\psi_{\text{東b}}(t; \mathbf{P})$ は以下のように導かれる：

(a) $a \leq \frac{l_1-x}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l_1 - x}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l_1 - x}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{東b}}(t; \mathbf{P}) = \frac{v(t - t_0) + l_1 - x}{a(l_1 - x)}, \quad (6.3.23)$$

(ii) $t_0 + a - \frac{l_1 - x}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{\text{東b}}(t; \mathbf{P}) = \frac{v}{l_1 - x}, \quad (6.3.24)$$

(iii) $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{東b}}(t; \mathbf{P}) = \frac{v(a + t_0 - t)}{a(l_1 - x)}. \quad (6.3.25)$$

(b) $a > \frac{l_1 - x}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l_1 - x}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{\text{東b}}(t; \mathbf{P}) = \frac{v(t - t_0) + l_1 - x}{a(l_1 - x)}, \quad (6.3.26)$$

(ii) $t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{l_1 - x}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{東b}}(t; \mathbf{P}) = \frac{1}{a}, \quad (6.3.27)$$

(iii) $t_0 + a - \frac{l_1 - x}{v} \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{\text{東b}}(t; \mathbf{P}) = \frac{v(a + t_0 - t)}{a(l_1 - x)}. \quad (6.3.28)$$

6.4 通過密度の数値例

本節では、正方形領域における一様なトリップ密度に基づく通過密度の数値例を示す。出社時刻分布としては、一様分布と一斉出社のものを採用する。まず、第 6.4.1 小節で通過密度の空間的分布を扱い、次に、第 6.4.2 小節で通過密度の時間的分布を扱う。

各パラメータの数値例として、本節を通じて以下のものを採用する。最大距離 $2l$ の所要時間を $2l/v = 2$ と定め、最も早く移動を開始する（家を出る）通勤者の移動開始時刻が $t = 0$ となるように $t_0 = 2$ とする。また、正方形の一辺の長さを $l = 1$ 、総トリップ数を $N = 1$ とする。

6.4.1 通過密度の空間的分布

図 6.9 と図 6.10 に東向きの通過密度 $p_{\text{東}}(\mathbf{P}, t)$ の概形を、図 6.11 と図 6.12 に合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の概形を示した。図 6.9 と図 6.11 は、すべての通勤者が $t = 2$ に一斉に出社する場合に対応し、図 6.10 と図 6.12 は、時間区間 $[2, 3]$ に一様に出社する場合に対応する。移動が観測される時刻は、図 6.9 と図 6.11 では $t \in [0, 2]$ となり、図 6.10 と図 6.12 では $t \in [0, 3]$ となる。以下にそれぞれの考察を与える。

東向きの通過密度

図 6.9 より，移動は正方形の頂点から観測されることがわかる．これは，最大の所要時間の移動が，正方形の対角線の端点間の移動であることによる．図 6.9 で時刻 $t = 1.0$ から観測される不連続な波は，図 6.2 (b) の移動に対応する通過密度 $p_{\text{東b}}(\mathbf{P}, t)$ によってもたらされるものである． $p_{\text{東b}}(\mathbf{P}, t)$ は，区間 $t \in [1, 2]$ に集中して観測されるため，(通過量では図 6.2 (a) の場合と等しいが) 混雑に大きく寄与するのである．

図 6.10 の一様出社の場合を眺めると，ピークは $t_0 = 2$ 付近で観測されることがわかる．

合計の通過密度

図 6.11 より，大まかな傾向として，出社時刻 $t_0 = 2$ に近いほど大きな交通量が観測される様子が見て取れる．図 6.12 では，ピークは $t_0 = 2$ 付近で観測され，全体的な交通量は図 6.11 のものと比較して半分程度になっている様子が見て取れる．

どちらのグラフからも中心部における集中度は，それほど大きくない．

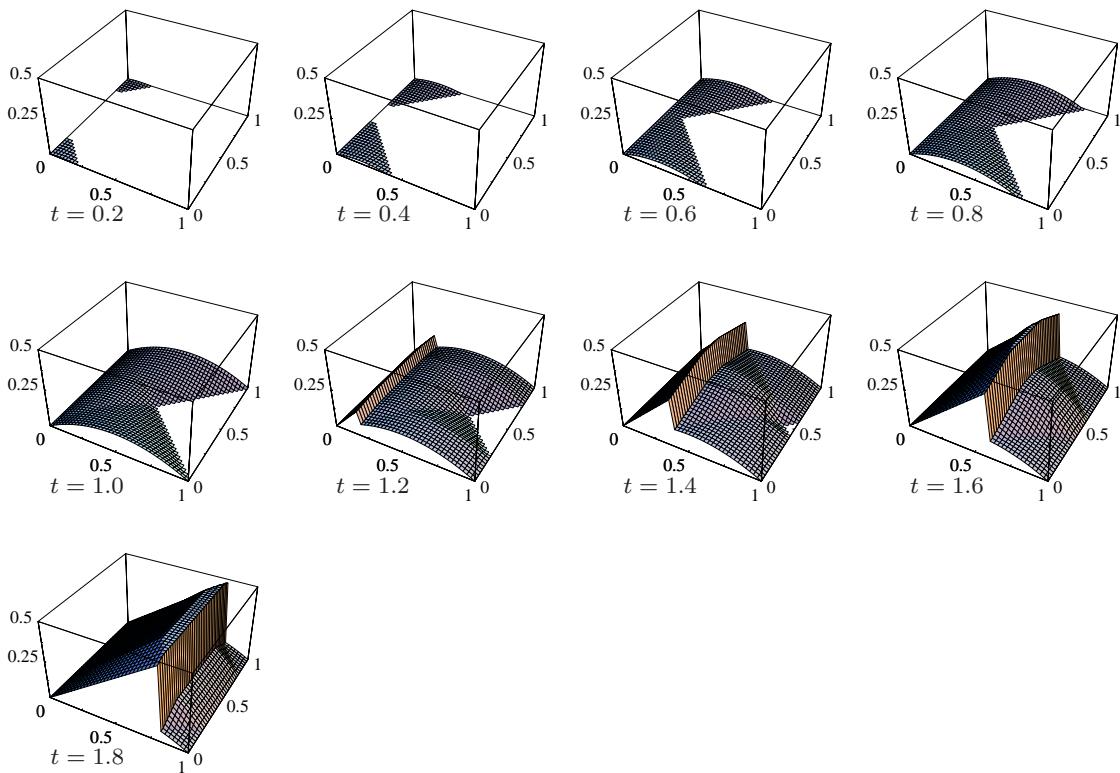


図 6.9 東向きの通過密度 $p_{\text{東}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合)．

6.4.2 通過密度の時間的分布

図 6.14 と図 6.15 は，図 6.13 に示す 4 つの観測地点における，東向きの通過密度 $p_{\text{東}}(\mathbf{P}, t)$ と合計の通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の時間的分布を示している．各地点における出社時刻分布として，一斉出社および $a = 0.5$, $a = 1.0$, $a = 1.5$, $a = 2.0$ の一様出社の，合計 5 パターンを示している．以下にそれぞれの考

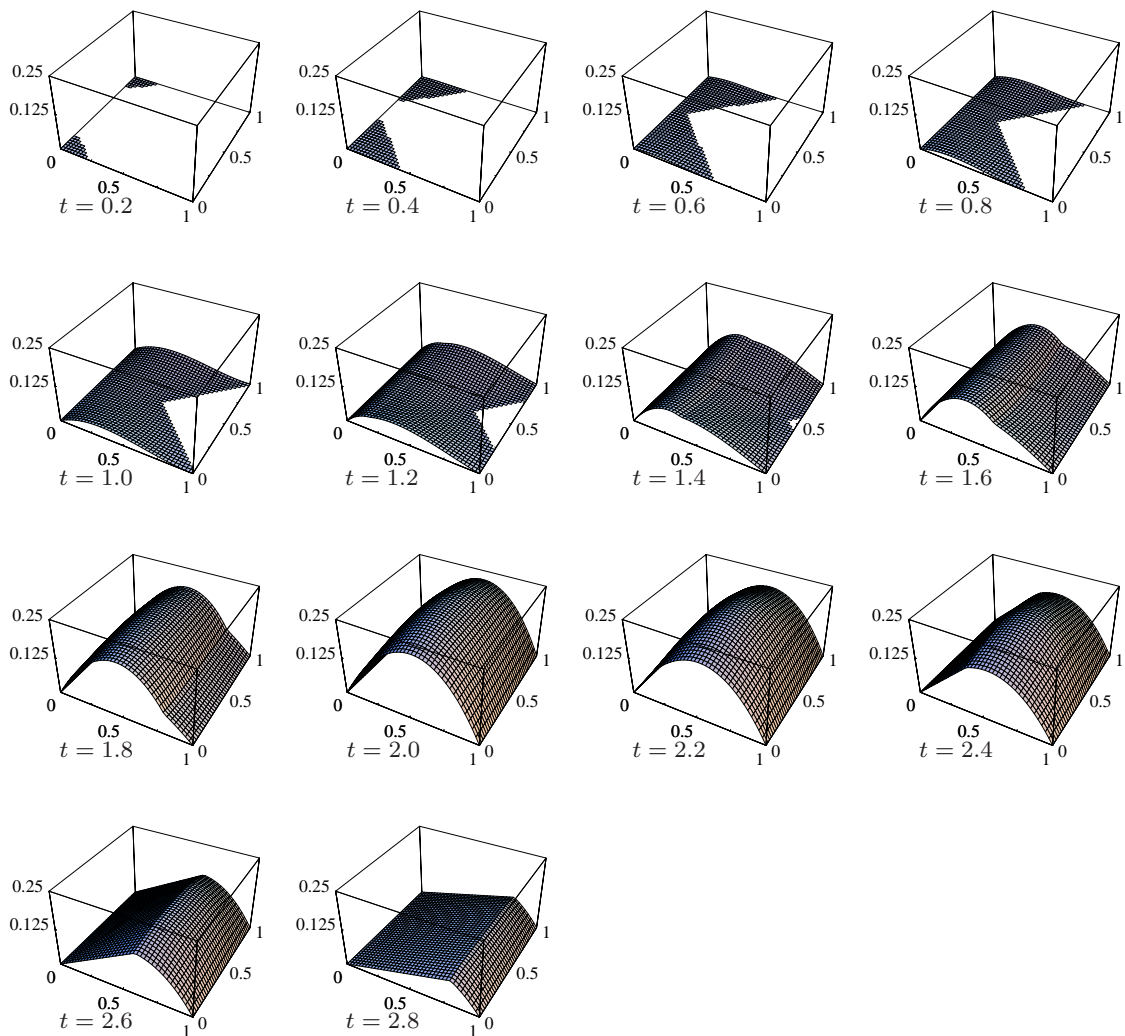


図 6.10 東向き通過密度 $p_{\text{東}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合)。

察を与える。

東向き通過密度

図 6.14 より, x 座標の値が同じもの ($(x, y) = (0.5, 0.5)$ と $(x, y) = (0.5, 0.25)$ および $(x, y) = (0.75, 0.25)$ と $(x, y) = (0.75, 0)$) については, 大きな差は読み取れない。これは, もとの東向き通過量が (y に依存しない) x のみの関数であったことによる。ピークの時刻は, 一斉出社の場合には $t_0 = 2$ より少し前で観測されることがわかる。それに対し, 一様出社の場合には, 出社が始まる $t_0 = 2$ にピークをもつことがわかる。

合計の通過密度

図 6.15 より, 合計の通過密度は郊外ほど小さくなる様子が見て取れる。ピークの時刻は, 東向きの場合と同様に, 一斉出社の場合は $t_0 = 2$ より少し前で観測され, 一様出社の場合には出社が始まる $t_0 = 2$ に観測されることがわかる。

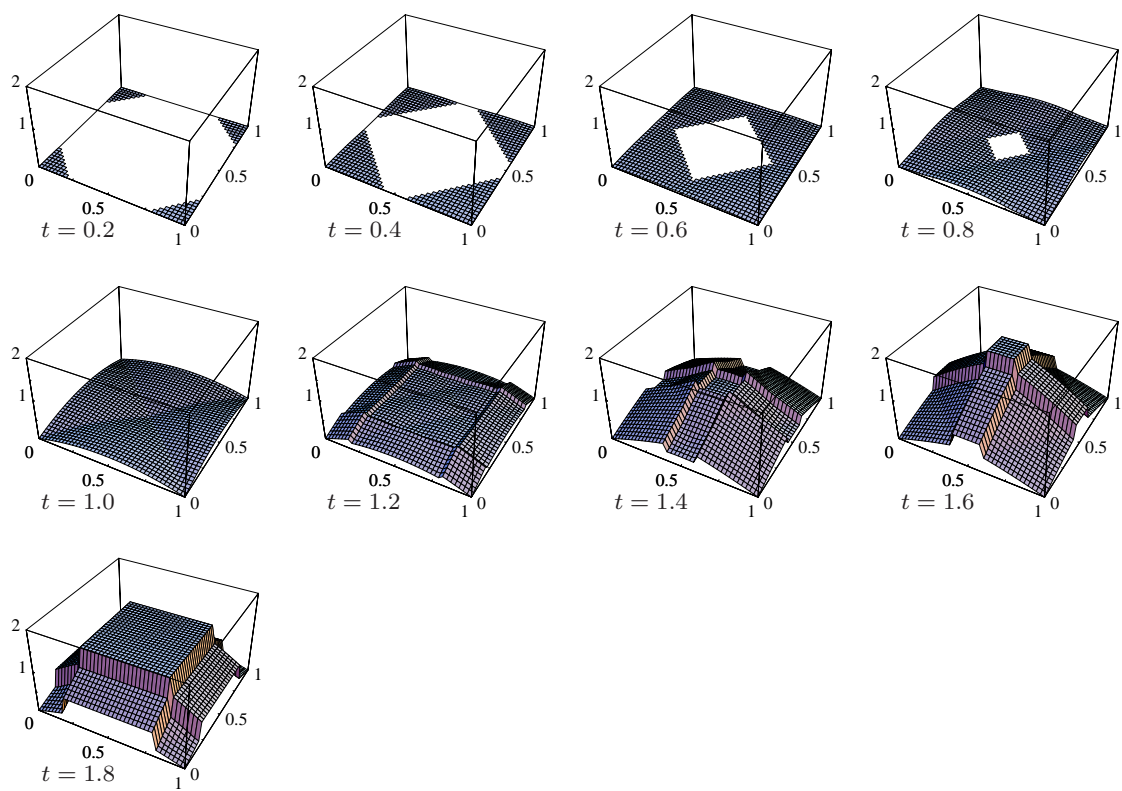


図 6.11 東西南北合計の通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 ($t_0 = 2$ の一斉出社の場合).

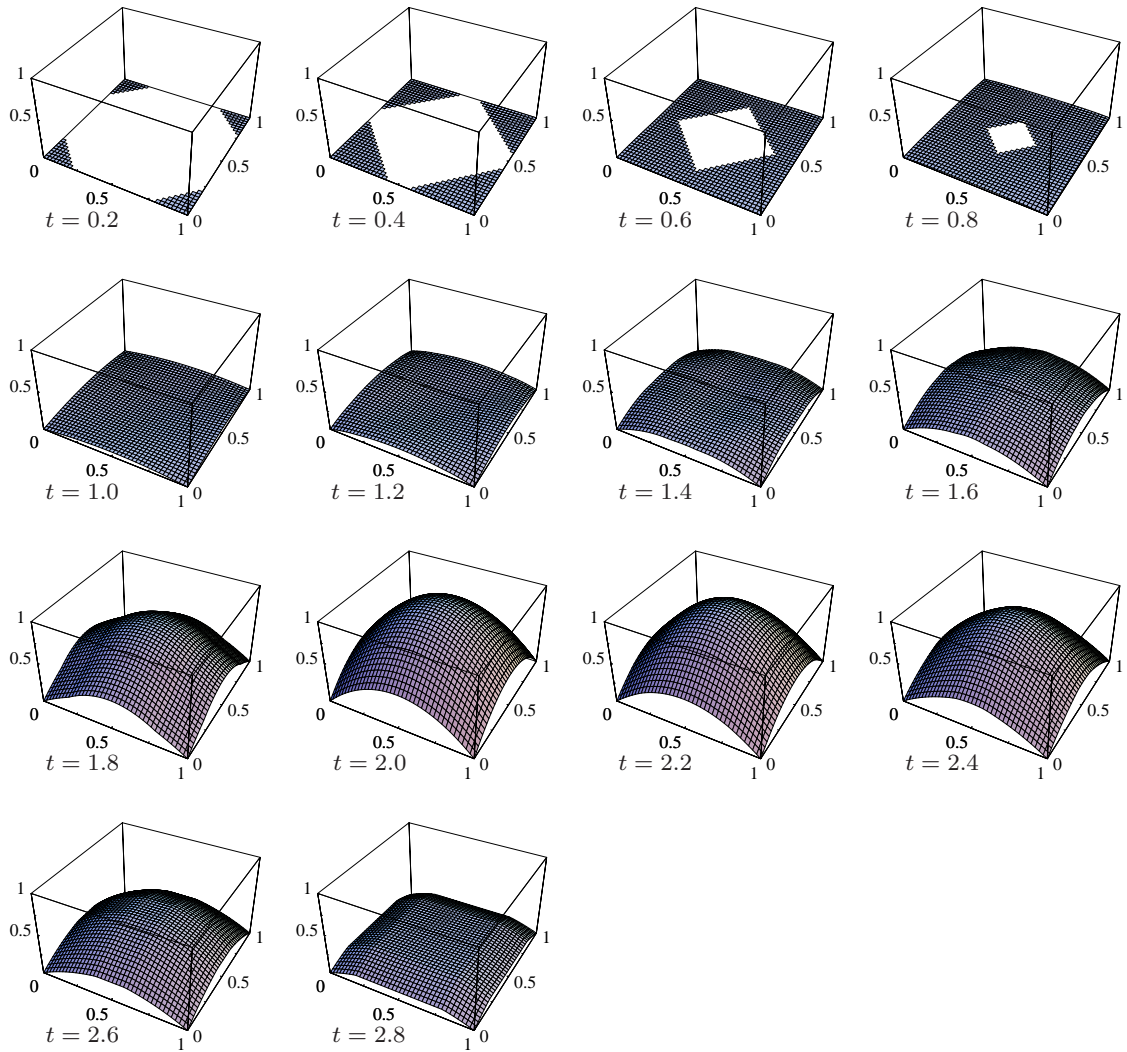


図 6.12 東西南北合計の通過密度 $p_{\text{合}}(\mathbf{P}, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合) .

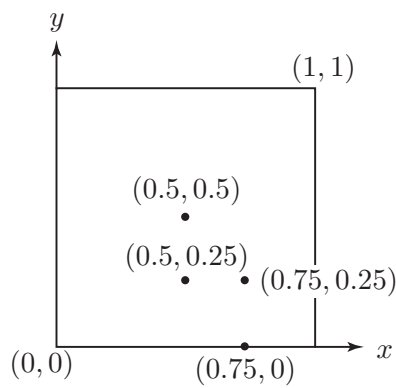


図 6.13 図 6.14 と図 6.15 に用いた 4 つの観測地点 .

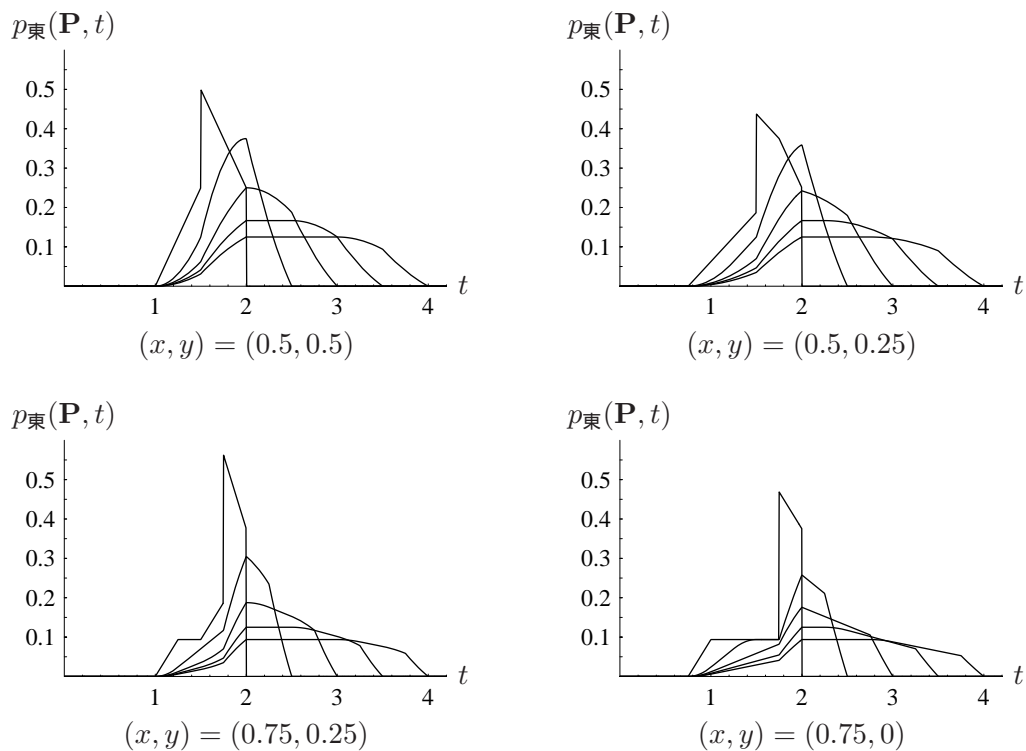


図 6.14 東向き通過密度 $p_{\text{東}}(\mathbf{P}, t)$ の時間的分布 .

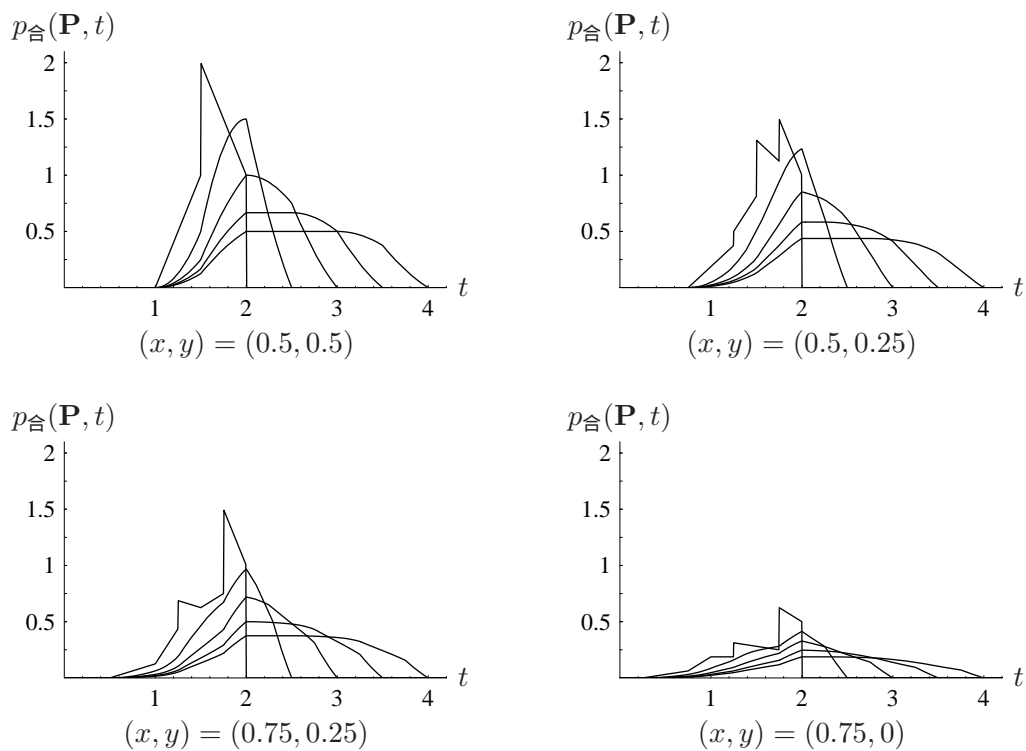


図 6.15 合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の時間的分布 .

6.5 第6章のまとめ

本章では、矩形領域における直交距離に基づく通過密度を導出した。円盤と比較して回転対称性に劣る矩形領域では、通過密度を解析的に導く作業は、数多くの場合分けのため極めて煩雑であることを示した。任意の2地点間に方向転換を一回のみ行う移動経路が2つ存在するという性質は、交通網が矩形の辺に平行でない場合や、矩形以外の都市形状のもとでは成立しない。その意味で、格子状交通網を想定した都市における通過量を解析的に追求することは、移動距離の分析を行う場合に比べて格段に難しくなってしまうことが明らかになった。以下に、今後の課題を述べる。

今回の分析では、最も単純に矩形の辺に平行に交通網が存在する状況を想定した。Newell (1980) は、高速輸送機関が存在する都市において、格子状の街路網を高速輸送網の敷設方向に対してどのような向きに設定すると、地域の移動効率がどのように変化するか、という問題を解析的に追いかけている。この問題を通過量の観点から分析するにも意味があるものと思われる。

都市領域の形状に関する一般化を目指す場合、今回の方法を用いて通過密度を導くことは現実的ではないように思われる。もっと複雑な都市形状のもとで、解析的なアプローチを行っても、その場合分けの多さのため操作性の高いモデルは望めそうもない。それよりも、都市形状と格子の覆う方向が与えられたもとで、通過密度をシステムティックに計算するための統一的な方法論を開発し、計算機による効率的な解法を追求することが重要であろう。

第7章 ネットワーク空間における時空間通過量

7.1 はじめに

本章では，居住地と勤務地の分布がリンク上で連続的に与えられたネットワーク空間を想定し，時空間通過量モデルを構成する．従来のネットワークモデルは，移動の起・終点をノードに集約したものがほとんどであったが，この仮定を一般化し，リンク上で連続的に分布する起・終点を前提としたモデル群もいくつか提案されている．それらの多くは，施設配置モデルや空間統計学的手法の開発に関する研究であり，交通量分布に関するモデルは田村・腰塚 (2000) の，総通過量を扱った唯一のものに留まっている．

本章では，第3章の線分領域のモデルを基礎として，田村・腰塚 (2000) の時刻に関する密度を解析的に導出する方法を提案し，いくつかの数値例を示す．本モデルは，連続平面における解析的な操作性の高さと，交通網の再現性の良さとを兼ね備えた新たな交通流モデルとして位置付けられる．

7.2 モデルの仮定

図 7.1 に示すように，起・終点が連続的に分布するネットワーク空間を想定し，以下を仮定する：

- (1) 起・終点はネットワーク上で連続的に一様かつ独立に分布する；
- (2) 移動は起・終点間の最短経路が選択される．

本章ではモデルの構造を明確にするために，上記のように一様なトリップ密度のもとでの定式化を行うが，(これまでの章と同様に) 任意のトリップ密度のもとでの定式化ももちろん可能である．

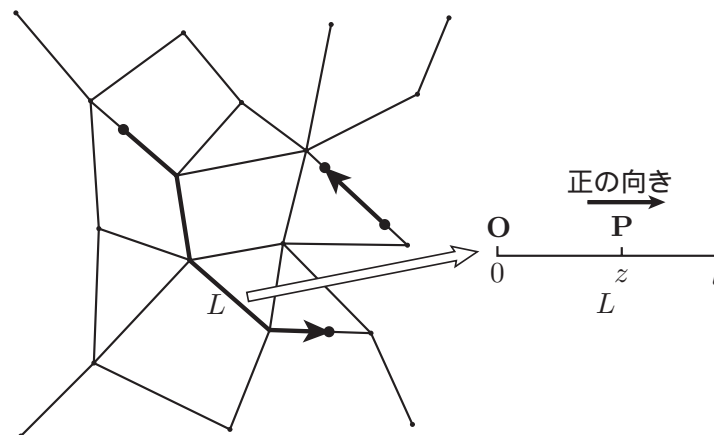


図 7.1 起・終点が連続的に分布するネットワーク空間。

いま、ネットワーク上の任意の地点 P を以下のように指定する．図 7.1 に示すように、ネットワークの一つのリンク L に着目する．リンク L の一方の端点に原点 O を設定し、 P の座標を z と表す．全く同様にして、ネットワーク上の起点 Q_1 の座標を x_1 と表し、終点 Q_2 の座標を x_2 と表す．いま、ネットワークのすべてのリンクを一行に並べたときの長さをネットワークの総長とよび l_T と表す．このとき、ネットワーク空間のあらゆる 2 地点間のトリップ集合は、図 7.2 (b) に示す x_1 - x_2 平面上の一辺 l_T の正方形に対応する．ここで、同一リンク上のトリップ集合は図 7.2 (b) のグレーの正方形領域に対応し、異なるリンク間のトリップ集合は図 7.2 (b) の矩形領域に対応する．

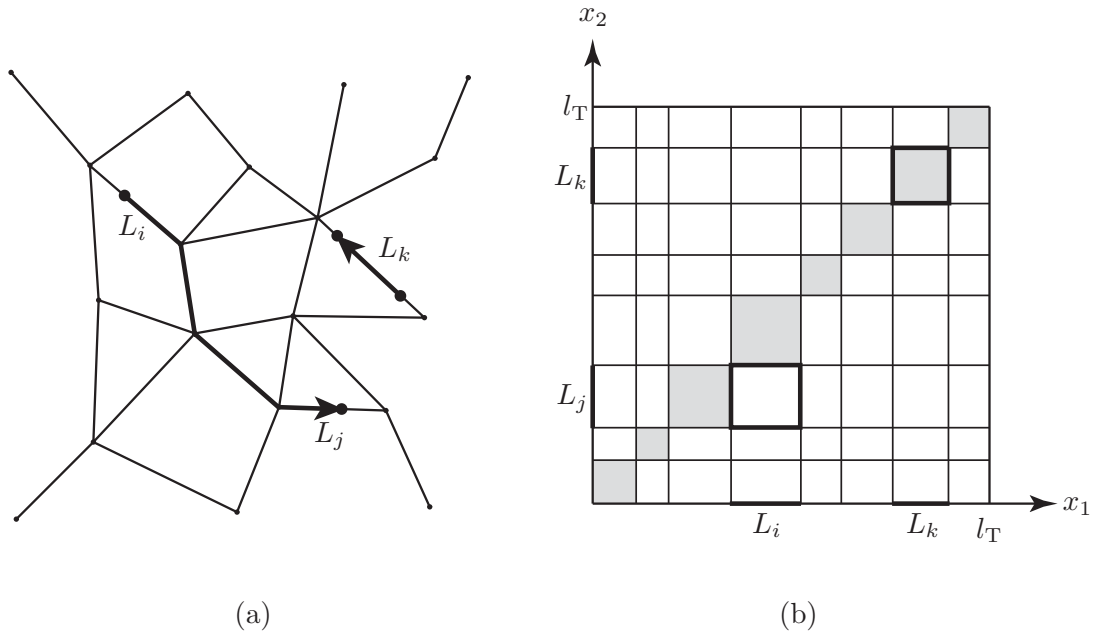


図 7.2 (a) 起・終点が連続的に分布する総長 l_T のネットワーク空間と (b) 起・終点の直積空間.

ここで、モデルの仮定 (i) の起・終点の一樣分布に関して、説明を加えておく．ネットワーク上での起・終点の一樣分布に関する仮定 (i) は、図 7.2 (b) の一辺 l_T の正方形上のいたるところで、高さが一定のトリップ密度（具体的には N/l_T^2 ）が分布している状況に対応する．このとき、起点 Q_1 の集合 A から終点 Q_2 の集合 B へのトリップ数 n は以下のように与えられる：

$$n = \frac{N}{l_T^2} \int_{Q_1 \in A} \int_{Q_2 \in B} dQ_1 dQ_2. \quad (7.2.1)$$

ただし、 N は総トリップ数を意味する．ここで、式 (7.2.1) の右辺の 2 重積分の部分は、図 7.2 (b) の部分領域の面積に対応することに注意されたい．

本章では、任意のリンク対の移動（図 7.2 (b) の各正方形と矩形の表す移動）に対応する通過量と通過密度を準備しておき、すべてのリンク対に関して足し上げることで、ネットワークのあらゆる 2 地点間の移動に対応する通過量と通過密度を導出する．したがって、仮定 (i) のもとでの通過量と通過密度の導出方法を準備しておけば、図 7.2 (b) の各正方形と矩形の上で、異なる高さの一樣なトリップ密度が分布する場合の通過量と通過密度を直ちに導くことができる．この想定は、リンク対の「OD 表」に相当するものであり、幅広いトリップ密度に対応するモデルを構成することができるのである．

7.3 通過量の導出

連続的な起・終点分布を想定したネットワーク上の総通過量の研究は、田村・腰塚 (2000) で扱われている。ここでは、田村・腰塚 (2000) の方法に基づいて、通過量の導出方法を示す。

ネットワーク上の任意の地点における通過量を導くためには、あらゆる 2 地点間の移動経路を特定する必要がある。田村らはネットワーク上の 2 地点間の移動経路を、

- (i) 起点と終点が共に同一リンク上に存在する場合；
- (ii) 起点と終点異なるリンク間に存在する場合

についてすべてのパターンを整理し、(i), (ii) の移動に対応する通過量の導出方法を準備している。この通過量は、(i) または (ii) の移動にのみ着目したときに、起・終点が存在するリンクと、起・終点間の移動の途中経路に含まれるリンクにどのように移動が振り撒かれるかを記述するものである。

そして、(i) の場合にはすべてのリンクについて、(ii) の場合についてはすべてのリンクペアについて、通過量を導きすべてを足し上げることで、ネットワーク上のあらゆる 2 地点間の移動に対応する通過量を導出している。以下に、田村・腰塚 (2000) の方法を紹介する。

7.3.1 2つの基本ケース

同一リンク上の移動 (i) も異なるリンク間の移動 (ii) も、リンクを適切に分割してできるサブリンク間の移動に着目すると、図 7.3 に示す 2 つの基本ケースに帰着することが示されている (田村・腰塚, 2000)。

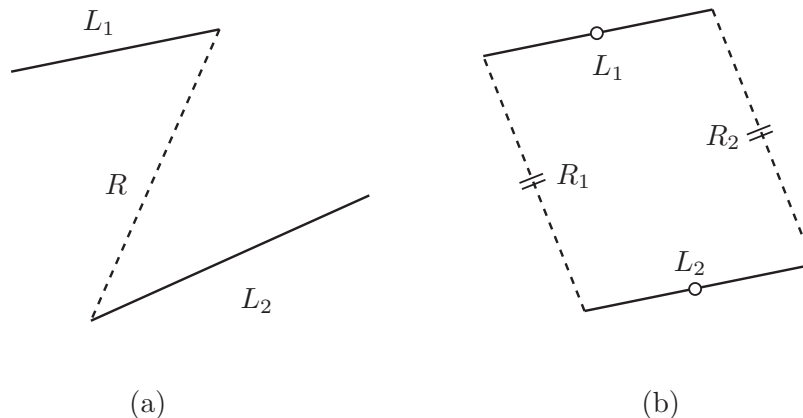


図 7.3 2つの基本ケース：(a) ケース I；(b) ケース II.

ケース I は図 7.3 (a) に示すように、サブリンク L_1 からサブリンク L_2 へのすべての移動が、ただ 1 つの途中経路 R を利用する場合である。ケース II は図 7.3 (b) に示すように、サブリンク L_1 と L_2 の長さが共に等しく、サブリンク間の 2 つの経路 R_1 と R_2 の長さも共に等しい場合である。これらの基本ケースに対応する通過量をうまく組み合わせることにより、(i), (ii) の移動に対応する通過量を導くことができるのである。したがって、ケース I とケース II の通過量の時刻に関する密度さえ用意しておけば、ネットワーク上のあらゆる 2 地点間の移動に対応する通過密度を導くことがわかる。そのための準備として、以下ではまず、ケース I とケース II における通過量を導出する。

ケースIの場合

サブリンク L_1 とサブリンク L_2 および経路 R の長さを、それぞれ l_1 , l_2 および r で与える。図 7.4 は、観測地点 P がそれぞれ、(a) リンク L_1 , (b) 経路 R および (c) リンク L_2 上に存在する場合を表している。

いま、 L_1 , L_2 および R 上に以下のように座標を設定する。 L_1 上に原点を R と接続していない端点にとり、 R 上に原点を L_1 と接続している端点にとり、 L_2 上に原点を R と接続している端点にとる。さらに、観測地点 P の座標を z とする。

ここで、 L_1 から L_2 への移動が地点 P を通過するために、起点と終点が満たすべき領域は図 7.4 の太線で示した部分に対応する。これらをそれぞれ A および B と表すと、 A と B は以下のように表される：

(a) $P \in L_1$ のとき

$$A = \{x_1 \mid 0 \leq x_1 \leq z\}, \quad (7.3.1)$$

$$B = \{x_2 \mid 0 \leq x_2 \leq l_2\}. \quad (7.3.2)$$

(b) $P \in R$ のとき

$$A = \{x_1 \mid 0 \leq x_1 \leq l_1\}, \quad (7.3.3)$$

$$B = \{x_2 \mid 0 \leq x_2 \leq l_2\}. \quad (7.3.4)$$

(c) $P \in L_2$ のとき

$$A = \{x_1 \mid 0 \leq x_1 \leq l_1\}, \quad (7.3.5)$$

$$B = \{x_2 \mid z \leq x_2 \leq l_2\}. \quad (7.3.6)$$

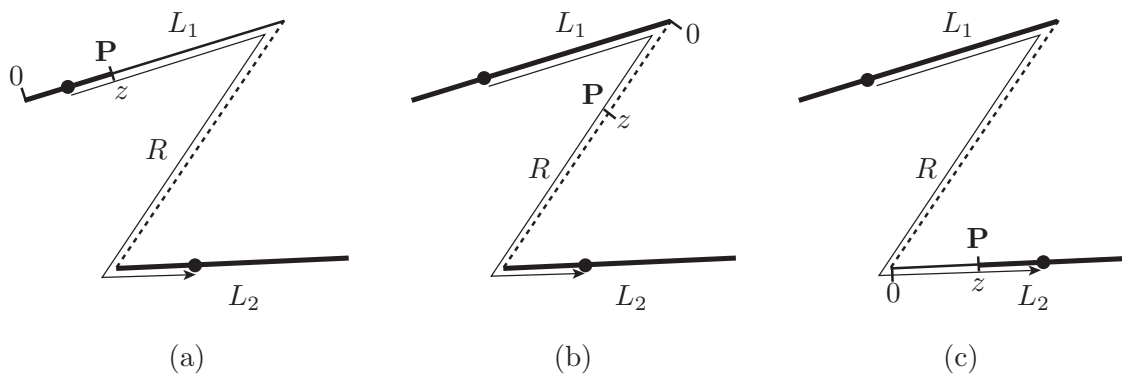


図 7.4 ケースIの各地点における通過量の導出：(a) $P \in L_1$ のとき；(b) $P \in R$ のとき；(c) $P \in L_2$ のとき。

このとき、地点 P を通過するための起・終点ペアの集合は、図 7.5 の直積空間 x_1 - x_2 上のグレーで示した部分に対応する。

ここで、ケースIの通過量を $q_{cl}(z, t)$ と表せば、 $q_{cl}(z, t)$ は以下のように導かれる：

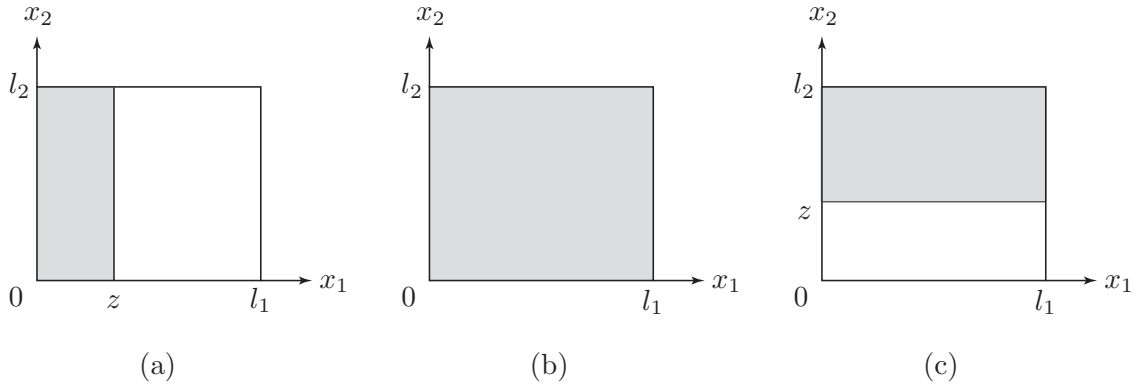


図 7.5 図 7.4 の各グラフに対応する直積空間：(a) $\mathbf{P} \in L_1$ のとき；(b) $\mathbf{P} \in R$ のとき；(c) $\mathbf{P} \in L_2$ のとき．

(a) $\mathbf{P} \in L_1$ のとき

$$q_{cI}(z, t) = \frac{N}{l_T^2} l_2 z \quad (0 \leq z \leq l_1), \tag{7.3.7}$$

(b) $\mathbf{P} \in R$ のとき

$$q_{cI}(z, t) = \frac{N}{l_T^2} l_1 l_2 \quad (0 \leq z \leq r), \tag{7.3.8}$$

(c) $\mathbf{P} \in L_2$ のとき

$$q_{cI}(z, t) = \frac{N}{l_T^2} l_1 (l_2 - z) \quad (0 \leq z \leq l_2). \tag{7.3.9}$$

図 7.6 にケース I の通過量の概形を示した．ケース I の通過量 $q_{cI}(z, t)$ は，起点側リンク L_1 と終点側リンク L_2 上で線形関数となり，途中経路 R では一定値となる．

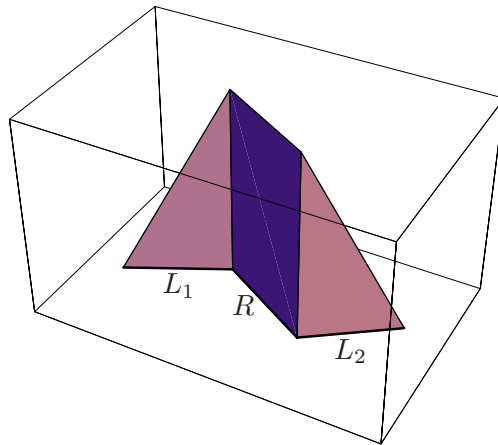


図 7.6 ケース I の通過量の立体図．

ケース II の場合

ケース II は，図 7.3 (b) に示すように，サブリンク L_1 と L_2 の長さ，途中経路 R_1 と R_2 の長さがそれぞれ等しくなる場合である．そこで，サブリンク L_1 と L_2 の長さを l で与え，途中経路 R_1 と R_2

の長さを r で与える．ここで，ケース II には， R_1 を用いる移動と R_2 を用いる移動が存在することに注意されたい．対称性を利用することにより，どちらか一方の経路を用いる場合の通過量を用意しておけば，もう一方の通過量は直ちに得られる．そこで以下では，図 7.7，図 7.8 および図 7.9 に示すように，経路 R_2 を用いる移動に対応する通過量を， $\mathbf{P} \in L_1$ ， $\mathbf{P} \in R_2$ および $\mathbf{P} \in L_2$ のそれぞれについて導くことにする．

初めに， $\mathbf{P} \in L_1$ の場合の通過量を導く． L_1 上に図 7.7 (a) に示すように原点を定め，観測地点 \mathbf{P} の座標を z と表す ($z \in [0, l]$)．まず，地点 \mathbf{P} を正の向きに (R_2 を利用する向きに) 通過するための，起点と終点が満たすべき領域 A と B を特定しよう．ここで，閉路で与えられるケース II では，(ケース I の場合とは異なり) 起点の集合 A は終点の座標 x_2 に依存することに注意されたい (B を x_1 に依存する形で記述することももちろん可能)．まず，図 7.7 (a) に太線で示すように， R_2 が用いられるためには， x_2 が $l - z$ から l の間に存在することが必要であることがわかる (そうでなければ L_1 側にどのように起点を選ぼうとも R_1 を利用した方が移動距離が小さくなる)．続いて，この範囲にある固定された終点 $\mathbf{Q}_2 = x_2$ への移動を考える．このとき， z を R_2 を利用する向きに通過するためには，図 7.7 (a) に太線で示すように， x_1 が $l - x_2$ から z の間に存在しなければならない．以上をまとめると

$$A = \{x_1 \mid l - x_2 \leq x_1 \leq z\}, \quad (7.3.10)$$

$$B = \{x_2 \mid l - z \leq x_2 \leq l\} \quad (7.3.11)$$

を得る．これらの集合は，図 7.7 (b) に示す直積空間 x_1 - x_2 平面上のグレーで示した部分に対応する．いま，経路 R_2 を利用する場合の通過量を $q_{cII2}(z, t)$ と表す．これまでの議論より， $\mathbf{P} \in L_1$ の場合には，通過量 $q_{cII2}(z, t)$ は， z の 2 次関数として以下のように導かれる：

$$q_{cII2}(z, t) = \frac{N}{l_T^2} \cdot \frac{z^2}{2} \quad (0 \leq z \leq l). \quad (7.3.12)$$

ここで，対称性から， $q_{cII2}(z, t)$ において z を $l - z$ で置き換えれば， $\mathbf{P} \in L_1$ のときの R_1 を利用する場合の通過量が得られる．以上より，両者の合計の通過量 $q_{cII\text{合}}(z, t)$ は以下のように与えられる：

$$q_{cII\text{合}}(z, t) = \frac{N}{l_T^2} \cdot \frac{2z^2 - 2lz + l^2}{2} \quad (0 \leq z \leq l). \quad (7.3.13)$$

合計の通過量 $q_{cII\text{合}}(z, t)$ は，サブリンクの中心 $z = l/2$ で最小値を取る 2 次関数となる．

次に， $\mathbf{P} \in R_2$ の場合の通過量を導く (R_1 を利用する場合も結果は同じ)． R_2 上に図 7.8 (a) に示すように原点を定め，観測地点 \mathbf{P} の座標を z と表す ($z \in [0, r]$)．先ほどの $\mathbf{P} \in L_1$ の場合と同様に考えると，経路 R_2 上の地点 \mathbf{P} を通過するための起点と終点が満たすべき領域 A と B は，図 7.8 (a) の太線で示す部分で与えられ，それらはそれぞれ以下のように表される：

$$A = \{x_1 \mid l - x_2 \leq x_1 \leq l\}, \quad (7.3.14)$$

$$B = \{x_2 \mid 0 \leq x_2 \leq l\}. \quad (7.3.15)$$

このときの起・終点ペアの集合は，図 7.8 (b) の直積空間 x_1 - x_2 上の，グレーで示した部分に対応する．これより，経路 R_2 上の通過量 $q_{cII2}(z, t)$ は以下のように導かれる：

$$q_{cII2}(z, t) = \frac{N}{l_T^2} \cdot \frac{l^2}{2} \quad (0 \leq z \leq r). \quad (7.3.16)$$

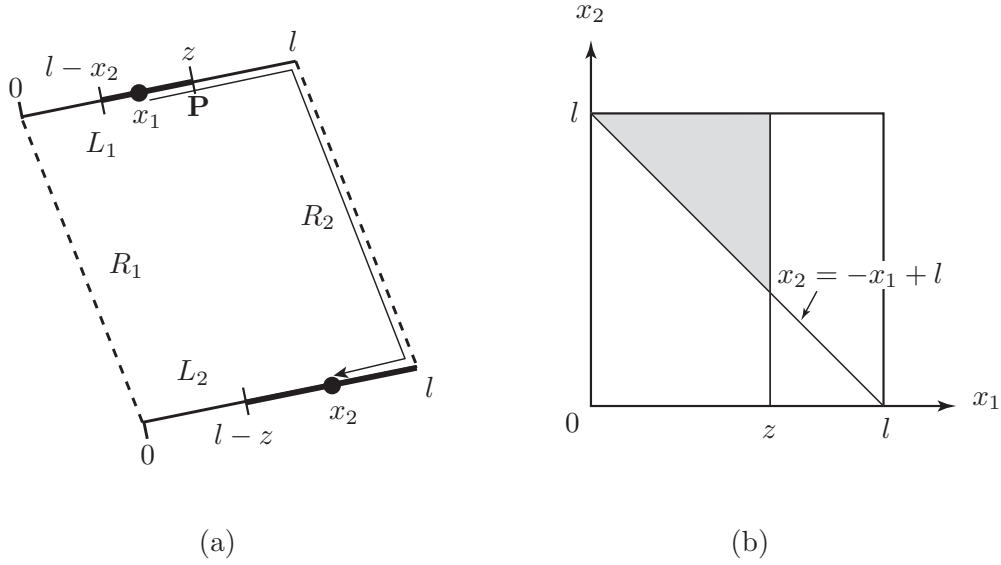


図 7.7 ケース II の $P \in L_1$ の場合の通過量の導出 : (a) 起・終点ペアの集合 ; (b) 直積空間における図示 .

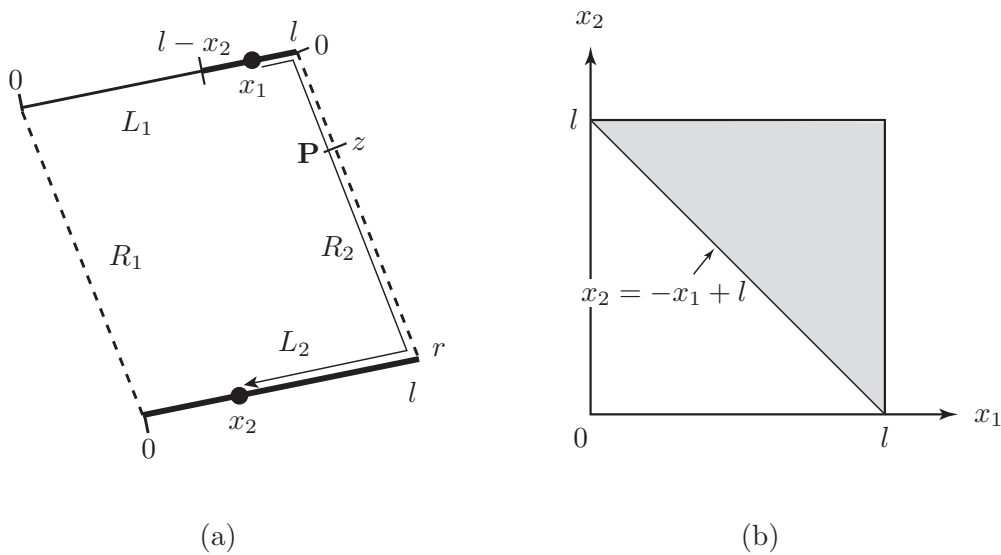


図 7.8 ケース II の $P \in R_2$ の場合の通過量の導出 : (a) 起・終点ペアの集合 ; (b) 直積空間における図示 .

最後に、 $P \in L_2$ の場合の通過量を導く。リンク L_2 上に図 7.9 (a) に示すように原点を定め、観測地点 P の座標を z と表す ($z \in [0, l]$)。経路 R_2 上の地点 P を通過するための起点と終点が満たすべき領域 A と B は、図 7.9 (a) の太線で示す部分で与えられ、それらはそれぞれ以下のように表される：

$$A = \{x_1 \mid l - x_2 \leq x_1 \leq l\}, \tag{7.3.17}$$

$$B = \{x_2 \mid 0 \leq x_2 \leq z\}. \tag{7.3.18}$$

このときの起・終点ペアの集合は、図 7.9 (b) の直積空間 x_1-x_2 上の、グレーで示した部分に対応する。これより、 R_2 を利用する場合の L_2 上の通過量 $q_{cII2}(z, t)$ は z の 2 次関数として以下のように導かれる：

$$q_{cII2}(z, t) = \frac{N}{l_T^2} \cdot \frac{z^2}{2} \quad (0 \leq z \leq l). \tag{7.3.19}$$

ここで、対称性から、 $q_{cII2}(z, t)$ において z を $l - z$ で置き換えれば、 $P \in L_2$ のときの R_1 を利用する場合の通過量が得られる。以上より、両者の合計の通過量 $q_{cII合}(z, t)$ は以下のように与えられる：

$$q_{cII合}(z, t) = \frac{N}{l_T^2} \cdot \frac{2z^2 - 2lz + l^2}{2} \quad (0 \leq z \leq l). \tag{7.3.20}$$

これより、ケース II の通過量は起点側のサブリンク L_1 と終点側のサブリンク L_2 で等しくなることが確かめられた（通過密度に関してはこの関係は成立しない）。

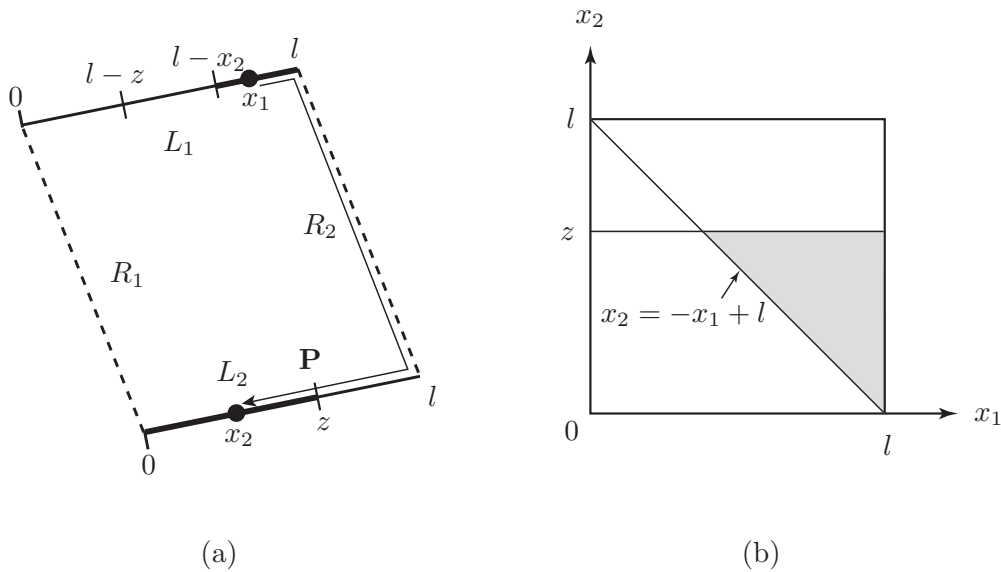


図 7.9 ケース II の $P \in L_2$ の場合の通過量の導出：(a) 起・終点ペアの集合；(b) 直積空間における図示。

図 7.10 にケース II の通過量の概形を示した。図 7.10 (a) は、経路 R_2 を用いる移動のみに着目した通過量 $q_{cII2}(z, t)$ を、図 7.10 (b) は、経路 R_1 と経路 R_2 を用いる移動に対応する通過量 $q_{cII合}(z, t)$ を示した。

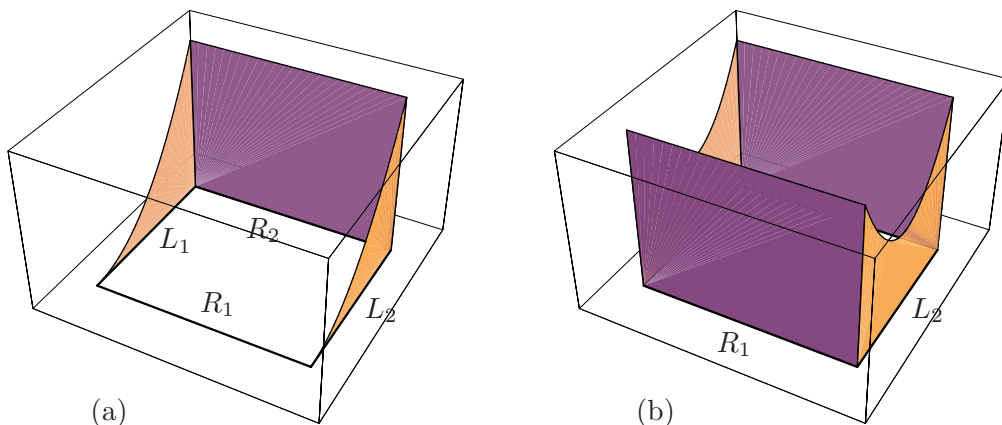


図 7.10 ケース II の通過量の立体図：(a) R_2 のみ；(b) R_1 と R_2 の両方。

7.3.2 衝突点とその性質

以上で、ケース I とケース II の通過量が導かれた。本小節では、同一リンク上の移動と異なるリンク間の移動を、ケース I とケース II の組み合わせとして構成する際に重要になる「衝突点」の概念とその基礎的性質について説明する。なお、「衝突点」は、奥貫・岡部 (1996) で用いられた用語であり、田村・腰塚 (2000) では、「対心点」という用語が使われている。

図 7.11 (a) に示すような 1 つの閉路を考える。閉路上の固定点 v からの 2 つの経路に沿った移動を考えたときに、両者の移動距離が等しくなるような (固定点以外の) 点 v' を衝突点と定義する。このときもちろん、点 v' の衝突点は点 v となる。この定義から、衝突点に関して以下の性質が成立することがわかる。

【性質 1】閉路上の固定点から、閉路上の他の点への移動を考えるとき、目的点が衝突点のどちら側にあるかで移動経路が決まる (図 7.11 (a) の状況)。

【性質 2】同一閉路上に 2 組の衝突点对が存在するとき (図 7.11 (b) の状況)、衝突点を両端点にもつ 4 つの曲線のうち、向かい合う 2 つの曲線の長さが等しくなる。

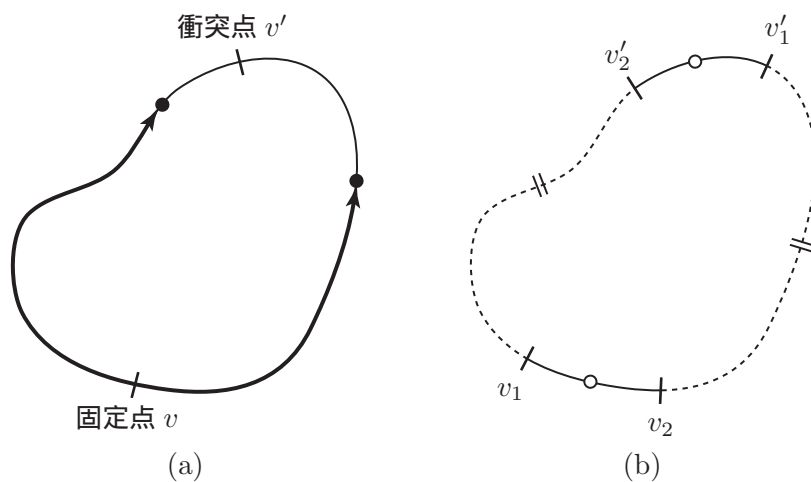


図 7.11 衝突点の基礎的性質：(a) 性質 1 の説明；(b) 性質 2 の説明。

以降では、衝突点のこれらの性質を利用して、同一リンク上の移動と異なるリンク間の移動が、ケース I とケース II の組み合わせとして表現できることを示す (それぞれ第 7.3.3 小節と第 7.3.4 小節)。

7.3.3 起・終点が同一リンク上にある場合の通過量

図 7.12 に示すように、起・終点が共に同一リンク L 上に存在する場合の移動を、ケース I とケース II へ分割する。リンク L の両端のノードを v_1 および v_2 と表す。いま、図 7.12 のようにノード v_1 と v_2 との間の最短経路 R を考える。このとき、最短経路 R がリンク L に一致する場合 ($r = l$ の場合) と、図 7.12 の例のように一致しない場合 ($r < l$ の場合) が存在する。

一致する場合は、起・終点間の移動はリンク L 上で完結することになり、 L 上で観測される通過量は第 3 章の線分モデルの結果そのものである。

次に一致しない場合について考える。このとき、図 7.12 に示すように、ノード v_1 の衝突点 v'_1 と、

表 7.1 起・終点が同一リンクにある場合の基本ケースへの分割 .

	$\overline{v_1 v'_2}$	$\overline{v'_2 v'_1}$	$\overline{v'_1 v_2}$
$\overline{v_1 v'_2}$	ケース I	ケース I	ケース II
$\overline{v'_2 v'_1}$	ケース I	ケース I	ケース I
$\overline{v'_1 v_2}$	ケース II	ケース I	ケース I

ノード v_2 の衝突点 v'_2 とが共にリンク L に存在することになる . 2 つの衝突点によって , リンク L を $\overline{v_1 v'_2}$ と $\overline{v'_2 v'_1}$ と $\overline{v'_1 v_2}$ の 3 つのサブリンクに分割し , 3×3 のサブリンク間移動に着目する . このとき , $\overline{v_1 v'_2}$ と $\overline{v'_1 v_2}$ の間の移動は , 【性質 2】からパターン II になることがわかる . それ以外の移動はパターン I になることから , サブリンク間の移動は表 7.1 のようにまとめられる .

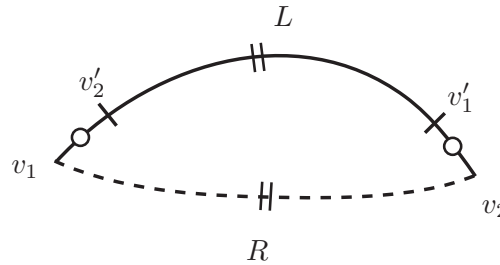


図 7.12 起・終点が同一リンク L にある場合に他の経路 R を用いる場合 .

7.3.4 起・終点が異なるリンクにある場合の通過量

次に起・終点が異なるリンク間に存在する場合の移動を , ケース I とケース II へ分割する . 図 7.13 に示すように , 2 つのリンクを取り出し , 起点側のリンクを L_1 , 終点側のリンクを L_2 と表す . また , リンク L_1 の両端のノードを v_1 と v_2 , リンク L_2 の両端のノードを v_3 と v_4 と表す .

ここで , L_1 と L_2 の両端のノード間の 4 つの最短経路に着目する (図 7.13 の点線で示した経路) . このとき , L_1 の 1 つのノードと L_2 の 1 つのノードとの最短経路のうち , L_1 と L_2 の他のノードを経由しない最短経路を考え , これらを R_1, R_2, R_3 および R_4 と表す . すなわち ,

$$R_1 = \{v_1 \text{ と } v_3 \text{ を結ぶ } v_2 \text{ と } v_4 \text{ を経由しない最短経路} \}, \tag{7.3.21}$$

$$R_2 = \{v_1 \text{ と } v_4 \text{ を結ぶ } v_2 \text{ と } v_3 \text{ を経由しない最短経路} \}, \tag{7.3.22}$$

$$R_3 = \{v_2 \text{ と } v_3 \text{ を結ぶ } v_1 \text{ と } v_4 \text{ を経由しない最短経路} \}, \tag{7.3.23}$$

$$R_4 = \{v_2 \text{ と } v_4 \text{ を結ぶ } v_1 \text{ と } v_3 \text{ を経由しない最短経路} \}. \tag{7.3.24}$$

L_1 から L_2 へのあらゆる移動を考えたとき , 最短経路 R_1, R_2, R_3 および R_4 が実際にどのように用いられるかによって , リンク間の移動パターンを分類することができる .

表 7.2 に , リンクペア間の移動に用いられる 4 つの最短経路のすべての組み合わせを示した . 最短経路の組み合わせには全部で 15 通りが存在する . 移動形態のみに着目すると表 7.2 に示す通り 5 つのパターンに分類することができる . なお , パターン 2 とパターン 3 は共に 2 つの最短経路が利用される場合であるが , 2 つの経路に共通するノードが存在する場合がパターン 2 であり , そうでない場合がパ

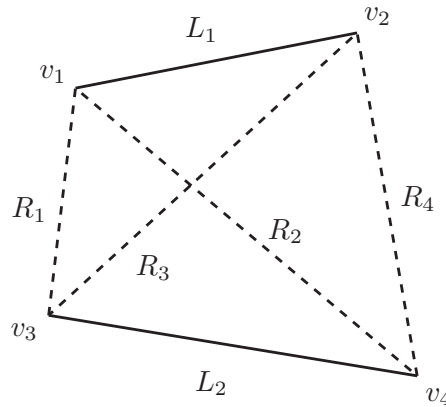


図 7.13 リンクペア間の 4 通りの移動経路.

表 7.2 リンクペア間の移動に用いられる 4 つの最短経路の組み合わせ .

パターン 1	パターン 2	パターン 3	パターン 4	パターン 5
$\{R_1\}$	$\{R_1, R_2\}$	$\{R_1, R_4\}$	$\{R_1, R_2, R_3\}$	$\{R_1, R_2, R_3, R_4\}$
$\{R_2\}$	$\{R_3, R_4\}$	$\{R_2, R_3\}$	$\{R_2, R_3, R_4\}$	
$\{R_3\}$	$\{R_1, R_3\}$		$\{R_1, R_2, R_4\}$	
$\{R_4\}$	$\{R_2, R_4\}$		$\{R_1, R_3, R_4\}$	

表 7.3 パターン 1 から 5 におけるリンク L_1 と L_2 に出現する衝突点数の合計 .

パターン 1	パターン 2	パターン 3	パターン 4	パターン 5
0 点	1 点	2 点	3 点	4 点

ターン 3 である . また , これら 5 つのパターンは , リンク L_1 と L_2 上に出現する衝突点数の数でも特徴付けられ , パターン 1 からパターン 5 の衝突点数の合計は表 7.3 のようになる . 以下に , 5 つのパターンの移動形態をまとめる .

パターン 1 の基本ケースへの分割

パターン 1 は , 図 7.14 に示すように , 4 つの最短経路のうちただ一つのみが用いられる場合である . パターン 1 はケース I そのものであることがわかる .

パターン 2 の基本ケースへの分割

パターン 2 は , 図 7.15 に示すように , 2 つの最短経路が用いられ , かつ閉路が三角形で与えられる場合である . 図 7.15 の例は , 経路 R_1 と R_2 が用いられる場合であり , このとき v_1 の閉路 $\overline{v_1 v_3 v_4 v_1}$ に関する衝突点 v'_1 が L_2 に出現することになる . いま , リンク L_2 を衝突点 v'_1 を境に , 2 つのサブリンク $\overline{v_3 v'_1}$ と $\overline{v'_1 v_4}$ に分割する . このとき , 衝突点の【性質 1】から , 起点リンク L_1 から 2 つのサブリンクへの移動は , 表 7.4 に示すように , 共にケース I となることがわかる .

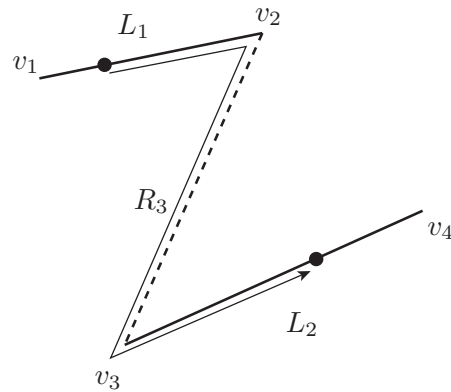


図 7.14 パターン 1 の例.

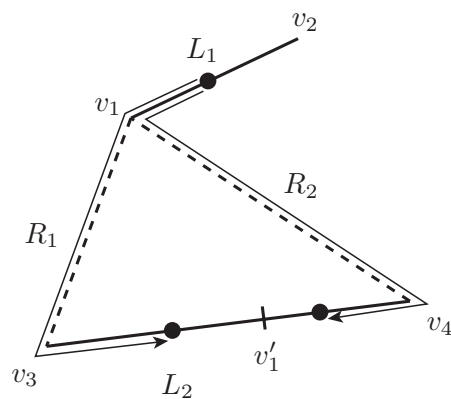


図 7.15 パターン 2 の例.

表 7.4 パターン 2 の基本ケースへの分割 (図 7.15 の場合).

	$\overline{v_3 v'_1}$	$\overline{v'_1 v_4}$
L_1	ケース I	ケース I

パターン 3 の基本ケースへの分割

パターン 3 は、図 7.16 に示すように、2 つの移動経路が用いられ、かつ閉路が四角形で与えられる場合である。パターン 3 には、図 7.16 (a) のように衝突点が片方のリンクに 2 つ出現するタイプと、図 7.16 (b) のように L_1 と L_2 に 1 つずつ出現するタイプの 2 通りが存在する。

ここで一般性を失うことなく、 $l_1 < l_2$ を想定する。いま、 $v'_1 \in L_2$ の条件は $l_1 + r_4 < r_1 + l_2$ であり、 $v'_2 \in L_2$ の条件は $l_1 + r_1 < r_4 + l_2$ である。この 2 つの条件が満たされたとき、図 7.16 (a) のタイプが実現される。図 7.16 (b) は $v'_1 \in L_2$ のみが生じた場合であり、この場合には $v'_3 \in L_1$ となることがわかる。同様に、 $v'_2 \in L_2$ のみが生じた場合には、 $v'_4 \in L_1$ となる。分割されたサブリンク間の移動パターンは、表 7.5 および表 7.6 のようになる。 $l_1 < l_2$ の場合にも、対称性を利用して考えることで直ちに対応できるのは言うまでもない。

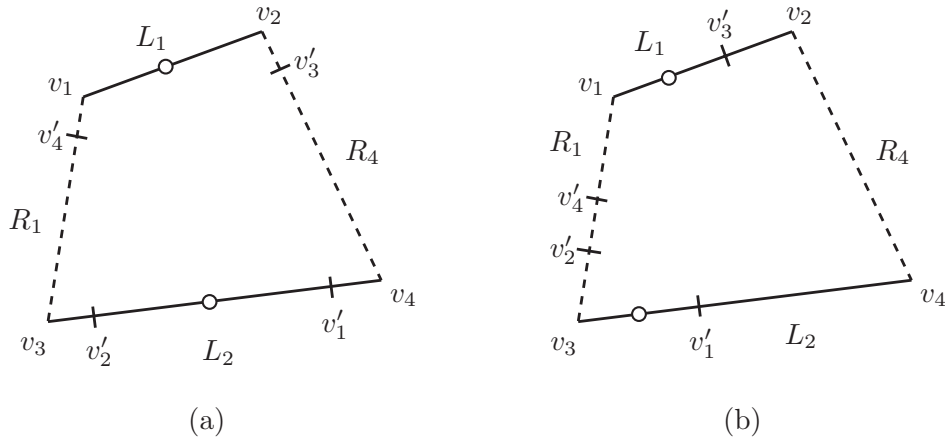


図 7.16 パターン 3 の例 ($l_1 < l_2$ の場合) .

表 7.5 パターン 3 の基本ケースへの分割 (図 7.16 (a) の場合) .

	$\overline{v_3 v'_2}$	$\overline{v'_2 v'_1}$	$\overline{v'_1 v_4}$
L_1	ケース I	ケース II	ケース I

表 7.6 パターン 3 の基本ケースへの分割 (図 7.16 (b) の場合) .

	$\overline{v_3 v'_1}$	$\overline{v'_1 v_4}$
$\overline{v_1 v'_3}$	ケース II	ケース I
$\overline{v'_3 v_2}$	ケース I	ケース I

パターン 4 の基本ケースへの分割

パターン 4 は、図 7.17 に示すように、3 つの移動経路が用いられる場合である。このとき、 L_1 と L_2 上に合計 3 通りの衝突点が出る。図 7.17 の例から明らかなように、2 つの三角形の閉路に関する衝突点 $v'_1 \in L_2$ および $v'_4 \in L_1$ が直ちに得られる。次に 3 つ目の衝突点が出ることを示す。

まず、 v'_1 と v'_4 が閉路 $\overline{v_1 v_2 v_4 v_3 v_1}$ に関する衝突点同士の関係になっていることを示す。いま、閉路 $\overline{v_1 v_3 v_4 v_1}$ に着目すると $|\overline{v'_4 v_1 v_3 v'_1}| = |\overline{v'_4 v_1 v_4 v'_1}|$ が得られ、閉路 $\overline{v_4 v_1 v_2 v_4}$ に着目すると $|\overline{v'_4 v_1 v_4 v'_1}| = |\overline{v'_4 v_2 v_4 v'_1}|$ が得られる。したがって、 $|\overline{v'_4 v_1 v_3 v'_1}| = |\overline{v'_4 v_2 v_4 v'_1}|$ が成り立つ (ただし $|\cdot|$ は経路の長さを意味する)。このことから、 v'_1 と v'_4 は閉路 $\overline{v_1 v_2 v_4 v_3 v_1}$ に関する衝突点同士であることが示された。

次に、 $\overline{v'_4 v_2}$ から $\overline{v_3 v'_1}$ への移動を考える。この移動が、 R_2 を利用することはあり得ない (このことは $\overline{v'_4 v_2}$ から v_1 を経由して $\overline{v_3 v'_1}$ に至る場合と v_2 を経由して $\overline{v_3 v'_1}$ に至る場合とを考えれば直ちに理解される)。このことから、 $v'_2 \in L_2$ か $v'_3 \in L_1$ のどちらかが必ず起こることがわかる (図 7.17 は $v'_2 \in L_2$ の例)。図 7.17 から明らかなように、 $l_1 + r_1 < r_4 + l_2$ のときは $v'_2 \in L_2$ となり、そうでないときは $v'_3 \in L_1$ となる。以上より、パターン 4 には合計 3 つの衝突点が出る事が確かめられた。分割されたサブリンク間の移動パターンは、表 7.7 のようになる。

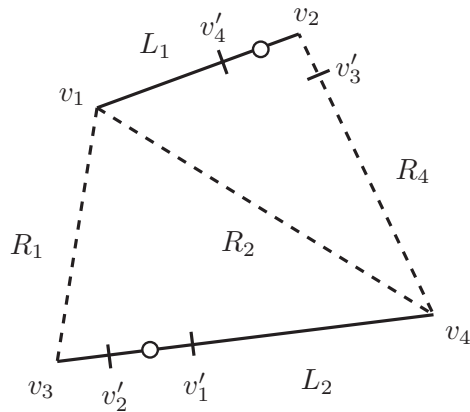


図 7.17 パターン 4 の例.

表 7.7 パターン 4 の基本ケースへの分割 (図 7.17 の場合).

	$\overline{v_3 v'_2}$	$\overline{v'_2 v'_1}$	$\overline{v'_1 v_4}$
$\overline{v_1 v'_4}$	ケース I	ケース I	ケース I
$\overline{v'_4 v_2}$	ケース I	ケース II	ケース I

パターン 5 の基本ケースへの分割

パターン 5 は、図 7.18 に示すように、4 つの移動経路すべてが用いられる場合である。この場合には、合計 4 個の衝突点が登場する。分割されたサブリンク間の移動パターンは、表 7.8 のようになる。

図 7.18 の例は、 v_1 に近い L_1 上の衝突点は v'_3 であり、 v_3 に近い L_2 上の衝突点は v'_1 である場合である。パターン 5 には、これとは逆に、 v_1 に近い L_1 上の衝突点が v'_4 であり、 v_3 に近い L_2 上の衝突点が v'_2 である例が存在する。

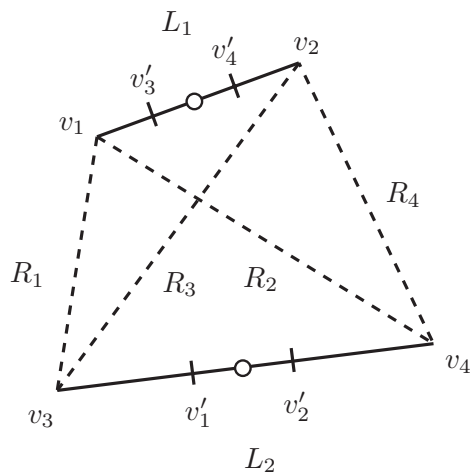


図 7.18 パターン 5 の例.

表 7.8 パターン 5 の基本ケースへの分割 (図 7.18 の場合) .

	$\overline{v_3 v'_1}$	$\overline{v'_1 v'_2}$	$\overline{v'_2 v_4}$
$\overline{v_1 v'_3}$	ケース I	ケース I	ケース I
$\overline{v'_3 v'_4}$	ケース I	ケース II	ケース I
$\overline{v'_4 v_2}$	ケース I	ケース I	ケース I

7.3.5 合計の通過量

第 7.3.3 小節と第 7.3.4 小節で、同一リンク上の移動も異なるリンク間の移動もケース I とケース II の組み合わせとして表現できることを示した。第 7.3.1 小節で導いたケース I とケース II の通過量をうまく組み合わせることで、同一リンク上の移動と異なるリンク間の移動に対応する通過量を導くことができる。以下に、これらをもとにネットワーク上のあらゆる 2 地点間の移動を前提にした通過量を導入しよう。

図 7.19 に示すように、リンク L を取り出し、その一方の端点を原点とする座標系を L 上に導入する。いま、リンク L_i と L_j の間の移動に着目する。ここで、 $i = j$ のときは同一リンク上の移動を表し、 $i \neq j$ のときは異なるリンク間の移動を表すものとする。リンク L_i と L_j の間の移動に対応する、 $P \in L$ における正の向きの通過量を $q_{ij\text{正}}(z)$ と表すことにする。いま、 L_i と L_j の間の移動が P を通過しない場合は $q_{ij\text{正}}(z) = 0$ と考える。ここで、 $q_{ij\text{正}}(z) = 0$ となるのは、 P が L_i と L_j に含まれず、かつ L_i から L_j への移動に用いられるどの途中経路にも含まれない場合である。ネットワーク上のあらゆる 2 地点間の移動に対応する、地点 P における正の向きの通過量 $q_{\text{正}}(z)$ は以下のように表される：

$$q_{\text{正}}(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m q_{ij\text{正}}(z). \quad (7.3.25)$$

ここで、 m はリンクの総数を意味する。同様に、リンク L_i と L_j の間の移動に対応する、 P における負の向きの通過量を $q_{ij\text{負}}(z)$ と表せば、地点 P における負の向きの通過量 $q_{\text{負}}(z)$ は以下のように表される：

$$q_{\text{負}}(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m q_{ij\text{負}}(z). \quad (7.3.26)$$

以上より、地点 P における合計の通過量 $q_{\text{合}}(z)$ は以下のように表される：

$$q_{\text{合}}(z) = q_{\text{正}}(z) + q_{\text{負}}(z). \quad (7.3.27)$$

7.4 通過量の数値例

本節では、合計の通過量 $q_{\text{合}}(z)$ の数値例を示す。図 7.20 (b) に、図 7.20 (a) に示す (直線分のリンクのみから構成された) ネットワークにおける合計の通過量 $q_{\text{合}}(z)$ の立体図を示した。各リンク上で

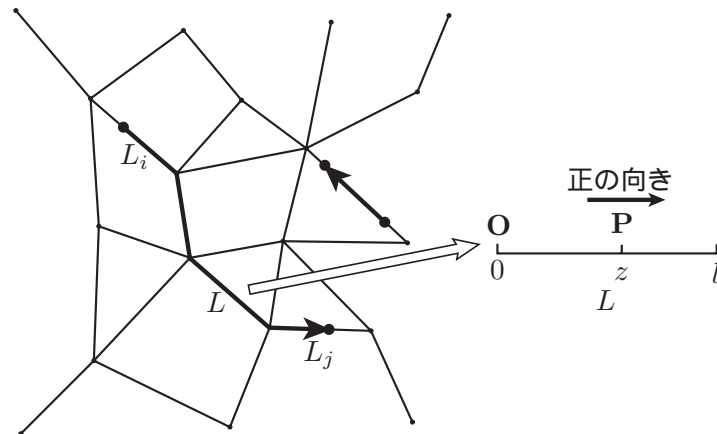
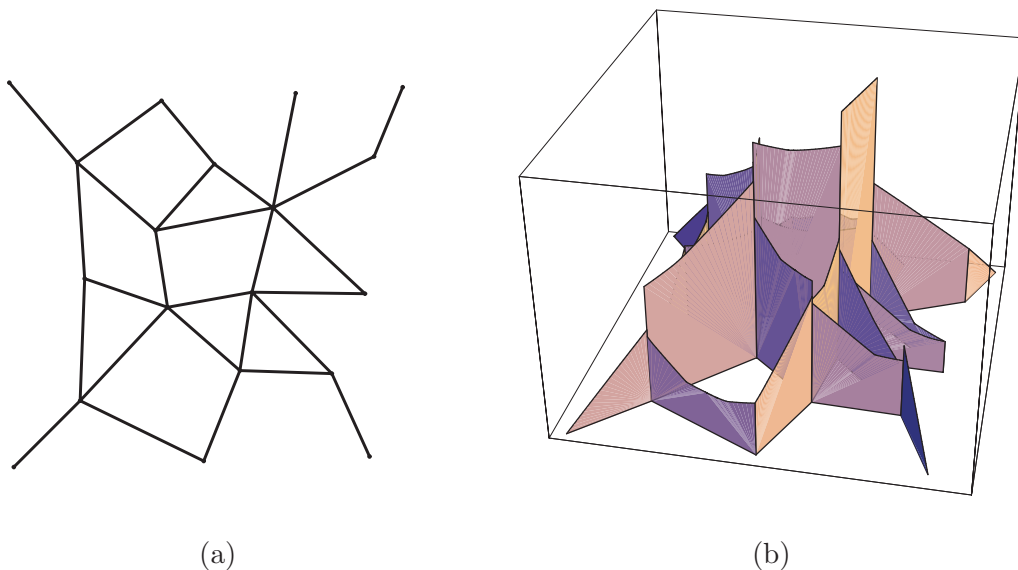


図 7.19 合計の通過量の導入.

は、(他のリンクとの間の移動を考える際に出現する)数多くの衝突点の存在によって、通過量が細かく場合分けされて表されることになる。すでに見たように、ケース I とケース II の通過量は連続であるため、これらの組み合わせとして記述されるリンク上の通過量も連続となる。図 7.20 (b) の例では、同一リンクでも地点によっては通過量に大きな差異が見られるケースが存在する様子が見られる。

図 7.20 (a) 計算例に用いたネットワークと (b) 合計の通過量 $q_{合}(z)$ の立体図.

7.5 通過密度の導出

7.3 節では、同一リンク上の移動も異なるリンク間の移動も、図 7.3 のケース I とケース II の組み合わせとして表現できることをみた。したがって、ケース I とケース II における通過密度を用意すれば、それらを適切に足し合わせることによって、ネットワーク全体での通過密度を導出できることがわかる。本節では、ケース I とケース II の通過密度を導出したのち、いくつかの数値例を示す。

7.5.1 ケース I と ケース II の通過密度の導入

ネットワーク全体での通過密度を導くために、図 7.3 のケース I と ケース II に対応する通過密度を、通過量の時刻に関する密度として導入する。

まず、ケース I の通過密度を導入する。ケース I における通過時刻の密度関数 $\psi_{cI}(t; z)$ を用意する。もちろん $\psi_{cI}(t; z)$ は、観測地点 P の位置によって、(a) $P \in L_1$, (b) $P \in R$ および (c) $P \in L_2$ の 3 通りについてそれぞれ導かなければならない。ケース I の通過密度 $p_{cI}(z, t)$ を、通過量 $q_{cI}(z, t)$ の時刻に関する密度として以下のように導入する：

$$p_{cI}(z, t) = q_{cI}(z, t) \cdot \psi_{cI}(t; z). \quad (7.5.1)$$

次に、ケース II の通過密度を導入する。ケース II における、 R_2 を利用する移動者の通過時刻の密度関数 $\psi_{cII2}(t; z)$ を用意する。もちろん $\psi_{cII2}(t; z)$ は、観測地点 P の位置によって、(a) $P \in L_1$, (b) $P \in R_2$ および (c) $P \in L_2$ の 3 通りについてそれぞれ導かなければならない。ケース II の R_2 を利用する移動者の通過密度 $p_{cII2}(z, t)$ を、通過量 $q_{cII2}(z, t)$ の時刻に関する密度として以下のように導入する：

$$p_{cII2}(z, t) = q_{cII2}(z, t) \cdot \psi_{cII2}(t; z). \quad (7.5.2)$$

以下の第 7.5.2 小節と第 7.5.3 小節で、一様な出社時刻分布

$$f(t) = \frac{1}{a} \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + a). \quad (7.5.3)$$

に対応するケース I と ケース II の通過時刻の密度関数を導出する。

7.5.2 ケース I における通過時刻の密度関数

ここでは、ケース I における通過時刻の密度関数 $\psi_{cI}(t; z)$ を導出する。そのために、これまでと同様に、観測地点 P から目的地 Q_2 までの所要時間が u である移動者の条件付の通過時刻の密度関数 $\psi_{cI}(t; z|u)$ を用いて以下の積分によって $\psi_{cI}(t; z)$ を導く：

$$\psi_{cI}(t; z) = \int_0^{u_{\max}} \psi_{cI}(t; z|u) g(u) du. \quad (7.5.4)$$

ここで、 $g(u)$ は P から目的地 Q_2 までの所要時間 u の密度関数を意味する。

まず、式 (7.5.4) の、 P から目的地 Q_2 まで所要時間の累積分布 $G(u)$ および密度関数 $g(u)$ を計算する。累積分布 $G(u)$ は、 P から所要時間 u 以内で到達可能な目的地の割合を表す。図 7.21 に、(a) $P \in L_1$, (b) $P \in R$ および (c) $P \in L_2$ のそれぞれについて、 P から所要時間 u 以内で到達可能な目的地集合をグレーで示した。この図をもとに $G(u)$ を計算し、 u について微分することにより、 $g(u)$ を導くことができる。この手順に従って、 $G(u)$ と $g(u)$ を具体的に計算すると以下の通りとなる：

(a) $P \in L_1$ のとき

$$G(u) = \frac{vu - (l_1 - z + r)}{l_2} \quad \left(\frac{l_1 - z + r}{v} \leq u \leq \frac{l_1 - z + r + l_2}{v} \right), \quad (7.5.5)$$

$$g(u) = \frac{v}{l_2} \quad \left(\frac{l_1 - z + r}{v} \leq u \leq \frac{l_1 - z + r + l_2}{v} \right). \quad (7.5.6)$$

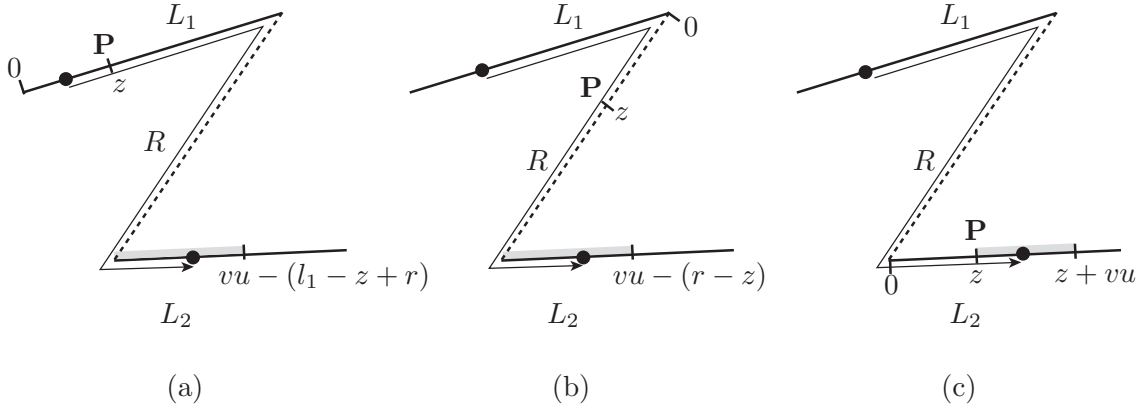


図 7.21 地点 P からの所要時間が u 以下である終点集合 : (a) $P \in L_1$ のとき ; (b) $P \in R$ のとき ; (c) $P \in L_2$ のとき .

(b) $P \in R$ のとき

$$G(u) = \frac{vu - (r - z)}{l_2} \quad \left(\frac{r-z}{v} \leq u \leq \frac{r-z+l_2}{v} \right), \tag{7.5.7}$$

$$g(u) = \frac{v}{l_2} \quad \left(\frac{r-z}{v} \leq u \leq \frac{r-z+l_2}{v} \right). \tag{7.5.8}$$

(c) $P \in L_2$ のとき

$$G(u) = \frac{vu}{l_2 - z} \quad \left(0 \leq u \leq \frac{l_2 - z}{v} \right), \tag{7.5.9}$$

$$g(u) = \frac{v}{l_2 - z} \quad \left(0 \leq u \leq \frac{l_2 - z}{v} \right). \tag{7.5.10}$$

式 (7.5.4) を計算するために, P を通過する時刻 t と P からの所要時間 u の集合が満たす t - u 平面上の平行四辺形 E に着目する. 図 7.22, 図 7.23 および図 7.24 に, それぞれ (a) $P \in L_1$, (b) $P \in R$ および (c) $P \in L_2$ に対応する平行四辺形を示した. これらをもとに, これまでと同様の手順を経ることにより, (a) $P \in L_1$, (b) $P \in R$ および (c) $P \in L_2$ に対応する $\psi_{cI}(t; z)$ を導くことができる. 以下に, 一様な出社時刻分布に対応する $\psi_{cI}(t; z)$ の導出結果を示す.

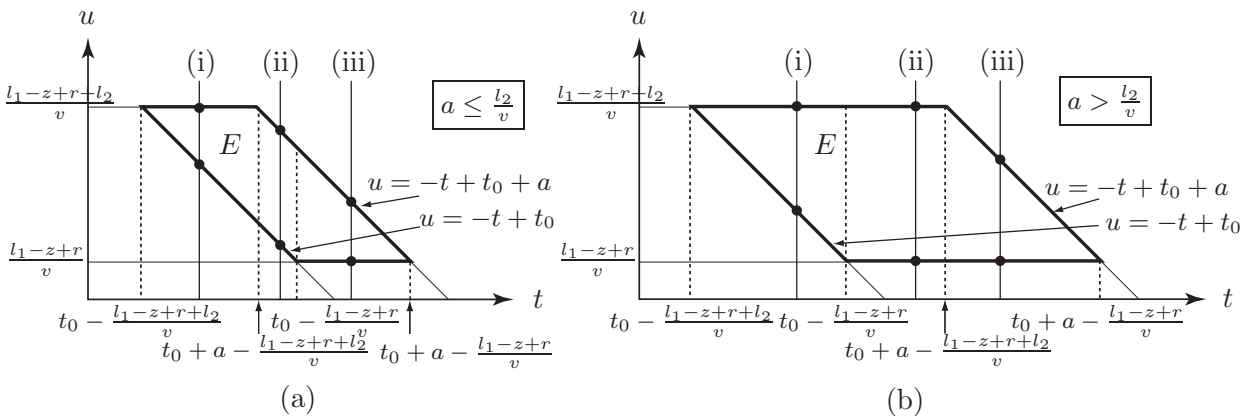


図 7.22 地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 ($P \in L_1$ の場合).

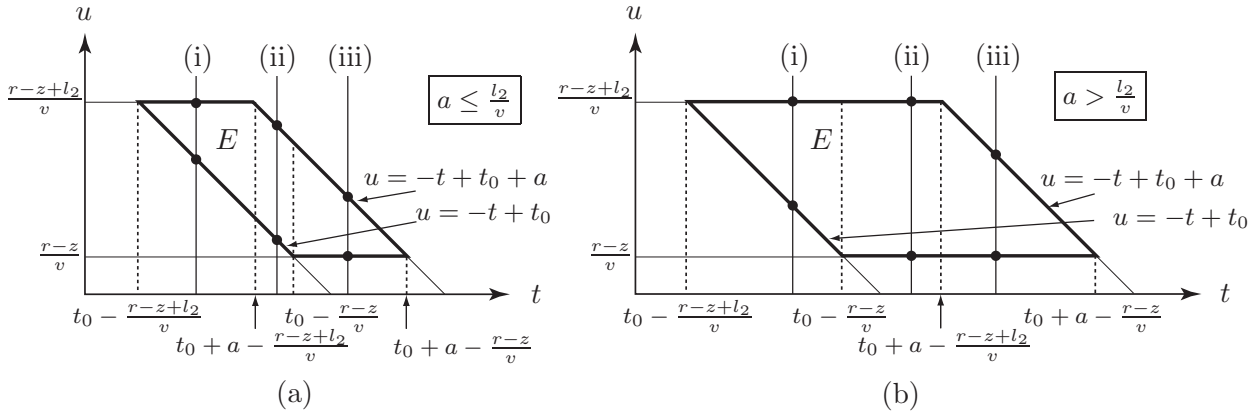


図 7.23 地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 ($P \in R$ の場合)。

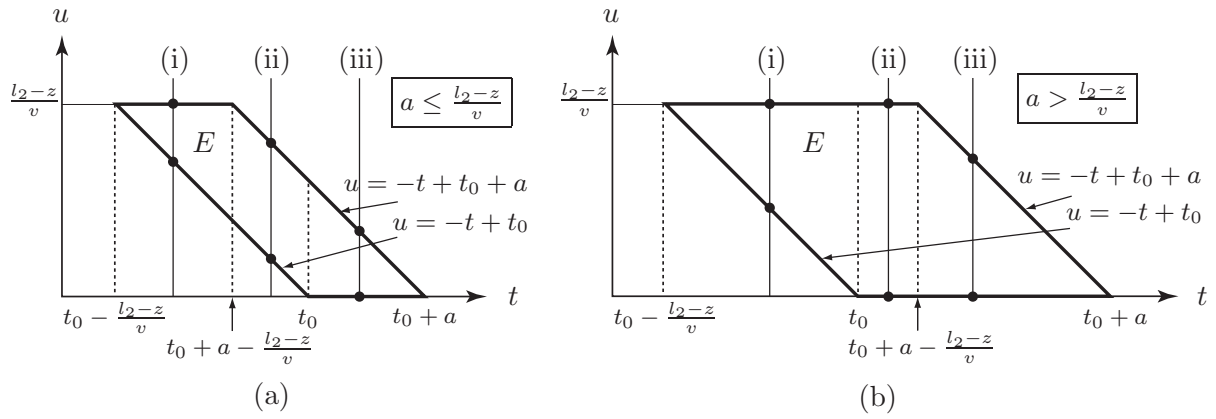


図 7.24 地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 ($P \in L_2$ の場合)。

観測地点が起点側のリンク上にある場合

$P \in L_1$ のときの $\psi_{cI}(t; z)$ の導出結果を以下に示す：

(a) $a \leq \frac{l_2}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l_1-z+r+l_2}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l_1-z+r+l_2}{v}$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{vt - z + l_1 + l_2 + r - vt_0}{al_2}, \tag{7.5.11}$$

(ii) $t_0 + a - \frac{l_1-z+r+l_2}{v} \leq t < t_0 - \frac{l_1-z+r}{v}$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{v}{l_2}, \tag{7.5.12}$$

(iii) $t_0 - \frac{l_1-z+r}{v} \leq t \leq t_0 + a - \frac{l_1-z+r}{v}$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{-vt + z - l_1 - r + va + vt_0}{al_2}. \tag{7.5.13}$$

(b) $a > \frac{l_2}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l_1 - z + r + l_2}{v} \leq t < t_0 - \frac{l_1 - z + r}{v}$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{vt - z + l_1 + l_2 + r - vt_0}{al_2}, \quad (7.5.14)$$

(ii) $t_0 - \frac{l_1 - z + r}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l_1 - z + r + l_2}{v}$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{1}{a}, \quad (7.5.15)$$

(iii) $t_0 + a - \frac{l_1 - z + r + l_2}{v} \leq t \leq t_0 + a - \frac{l_1 - z + r}{v}$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{-vt + z - l_1 - r + va + vt_0}{al_2}. \quad (7.5.16)$$

観測地点が途中経路にある場合

$\mathbf{P} \in R$ のときの $\psi_{cI}(t; z)$ の導出結果を以下に示す :

(a) $a \leq \frac{l_2}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{r - z + l_2}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{r - z + l_2}{v}$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{vt - z + l_2 + r - vt_0}{al_2}, \quad (7.5.17)$$

(ii) $t_0 + a - \frac{r - z + l_2}{v} \leq t < t_0 - \frac{r - z}{v}$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{v}{l_2}, \quad (7.5.18)$$

(iii) $t_0 - \frac{r - z}{v} \leq t \leq t_0 + a - \frac{r - z}{v}$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{-vt + z - r + va + vt_0}{al_2}. \quad (7.5.19)$$

(b) $a > \frac{l_2}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{r - z + l_2}{v} \leq t < t_0 - \frac{r - z}{v}$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{vt - z + l_2 + r - vt_0}{al_2}, \quad (7.5.20)$$

(ii) $t_0 - \frac{r-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{r-z+l_2}{v}$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{1}{a}, \quad (7.5.21)$$

(iii) $t_0 + a - \frac{r-z+l_2}{v} \leq t \leq t_0 + a - \frac{r-z}{v}$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{-vt + z - r + va + vt_0}{al_2}. \quad (7.5.22)$$

観測地点が終点側のリンク上にある場合

$\mathbf{P} \in L_2$ のときの $\psi_{cI}(t; z)$ の導出結果を以下に示す：

(a) $a \leq \frac{l_2 - z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l_2-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l_2-z}{v}$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{vt - z + l_2 - vt_0}{a(l_2 - z)}, \quad (7.5.23)$$

(ii) $t_0 + a - \frac{l_2-z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{v}{l_2 - z}, \quad (7.5.24)$$

(iii) $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{(a + t_0 - t)v}{a(l_2 - z)}. \quad (7.5.25)$$

(b) $a > \frac{l_2 - z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l_2-z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{vt - z + l_2 - vt_0}{a(l_2 - z)}, \quad (7.5.26)$$

(ii) $t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{l_2-z}{v}$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{1}{a}, \quad (7.5.27)$$

(iii) $t_0 + a - \frac{l_2-z}{v} \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{cI}(t; z) = \frac{(a + t_0 - t)v}{a(l_2 - z)}. \quad (7.5.28)$$

7.5.3 ケース II における通過時刻の密度関数

ここでは、ケース II において、経路 R_2 を利用する移動者の通過時刻の密度関数 $\psi_{cII2}(t; z)$ を導出する（もちろん R_1 を利用する移動に対応するものも対称性を利用することで直ちに得られる）。これまでと同様に、観測地点 P から目的地 Q_2 までの所要時間が u である移動者の条件付の通過時刻の密度関数 $\psi_{cII2}(t; z|u)$ を用いて以下の積分によって $\psi_{cII2}(t; z)$ を導く：

$$\psi_{cII2}(t; z) = \int_0^{u_{\max}} \psi_{cII2}(t; z|u)g(u)du. \tag{7.5.29}$$

ここで、 $g(u)$ は P から目的地 Q_2 までの所要時間 u の密度関数を意味する。

まず、式 (7.5.29) の、 P から目的地 Q_2 までの所要時間の累積分布 $G(u)$ および密度関数 $g(u)$ を計算する。累積分布 $G(u)$ は、 P から所要時間 u 以内で到達可能な目的地の割合を表す。ここでは、 $P \in L_1$ の場合の $G(u)$ について具体的な導出方法を示す。いま、図 7.25 に示すように、 R_2 を利用する移動者に着目し、 $P \in L_1$ の場合に P から所要時間 u 以内で到達可能な目的地集合を特定しよう。いま、 P からの所要時間がちょうど u である L_2 上の点の座標を y と表すと ($y \in [0, l]$)、 $vu = (l - z) + r + (l - y)$ が成立する。ここで、 P からの所要時間が u 以下である目的地集合は $\{x_2 \mid y \leq x_2 \leq l\}$ と表される。これを先の関係式を用いて具体的に記述すると、 $\{x_2 \mid -vu + 2l + r - z \leq x_2 \leq l\}$ を得る。この目的地集合は、図 7.25 のグレーの部分に対応する。

P からの所要時間が u 以内である起・終点ペアの集合を、 x_1-x_2 平面に図示したものが図 7.26 である。図中の太枠で示した領域 F は、地点 P を R_2 を利用する向きに通過するための起・終点ペアの集合に対応し（図 7.7 (b)）、グレーで示した領域 C は、そのうち P からの所要時間が u 以下である起・終点ペアの集合に対応する。累積分布 $G(u)$ は、(一様な起・終点を想定しているので) F の面積のうち C の面積が占める割合を計算することにより導くことができる。こうして導いた $G(u)$ を、 u について微分することにより $g(u)$ を得ることができる。 $P \in R_2$ と $P \in L_2$ の場合についても全く同様にして、 $G(u)$ および $g(u)$ を導くことができる。この手順に従って、 $G(u)$ と $g(u)$ を具体的に計算すると以下の通りとなる：

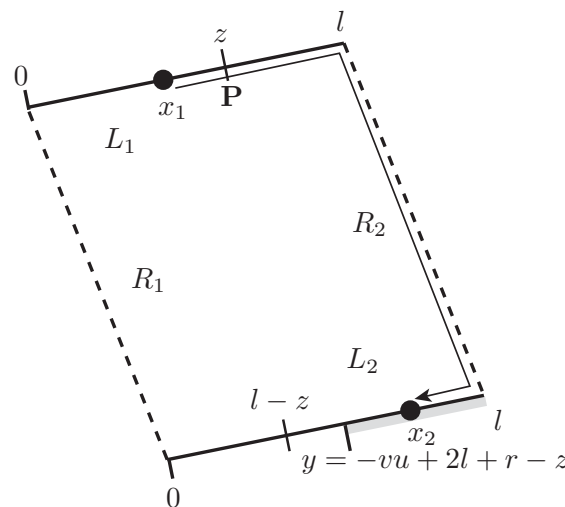


図 7.25 地点 P からの所要時間が u 以下である終点集合 ($P \in L_1$ の場合)。

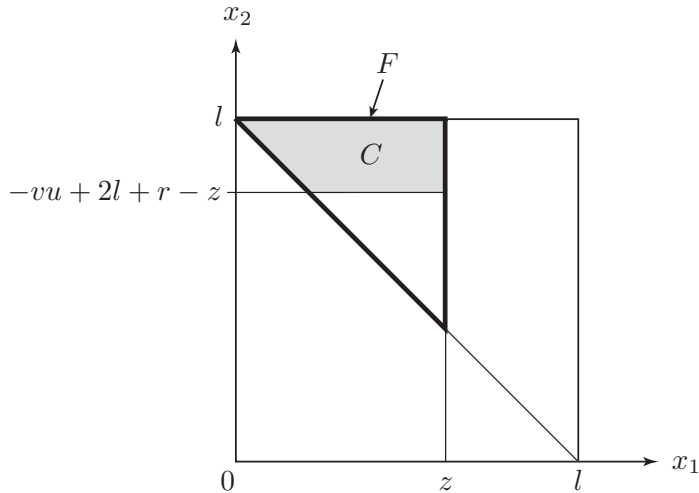


図 7.26 地点 P からの所要時間が u 以下である割合の特定 ($P \in L_1$ の場合)。

(a) $P \in L_1$ のとき

$$G(u) = \frac{(z - vu + l + r)(z + vu - l - r)}{z^2} \quad \left(\frac{l-z+r}{v} \leq u \leq \frac{l+r}{v} \right), \quad (7.5.30)$$

$$g(u) = \frac{2v(l + r - vu)}{z^2} \quad \left(\frac{l-z+r}{v} \leq u \leq \frac{l+r}{v} \right). \quad (7.5.31)$$

(b) $P \in R_2$ のとき

$$G(u) = \frac{(2l + r - z - vu)(vu + z - r)}{l^2} \quad \left(\frac{r-z}{v} \leq u \leq \frac{r-z+l}{v} \right), \quad (7.5.32)$$

$$g(u) = \frac{2v(l + r - vu - z)}{l^2} \quad \left(\frac{r-z}{v} \leq u \leq \frac{r-z+l}{v} \right). \quad (7.5.33)$$

(c) $P \in L_2$ のとき

$$G(u) = \frac{vu(2z - vu)}{z^2} \quad \left(0 \leq u \leq \frac{z}{v} \right), \quad (7.5.34)$$

$$g(u) = \frac{2v(z - vu)}{z^2} \quad \left(0 \leq u \leq \frac{z}{v} \right). \quad (7.5.35)$$

式 (7.5.29) を計算するために、 P を通過する時刻 t と P からの所要時間 u の集合が満たす t - u 平面上の平行四辺形 E に着目する。図 7.27, 図 7.28 および図 7.29 に、それぞれ (a) $P \in L_1$, (b) $P \in R_2$ および (c) $P \in L_2$ に対応する平行四辺形を示した。これらをもとに、これまでと同様の手順を経ることにより、(a) $P \in L_1$, (b) $P \in R_2$ および (c) $P \in L_2$ に対応する $\psi_{cII2}(t; z)$ を導くことができる。以下に、一様な出社時刻分布に対応する $\psi_{cII2}(t; z)$ の導出結果を示す。

観測地点が起点側のリンク上にある場合

$P \in L_1$ の場合に、経路 R_2 を利用する移動に対応する通過時刻の密度関数 $\psi_{cII2}(t; z)$ の導出結果を示す（経路 R_1 を利用する移動に対応する通過時刻の密度関数は $\psi_{cII2}(t; z)$ において z を $l - z$ に置き換えることで直ちに得られる）:

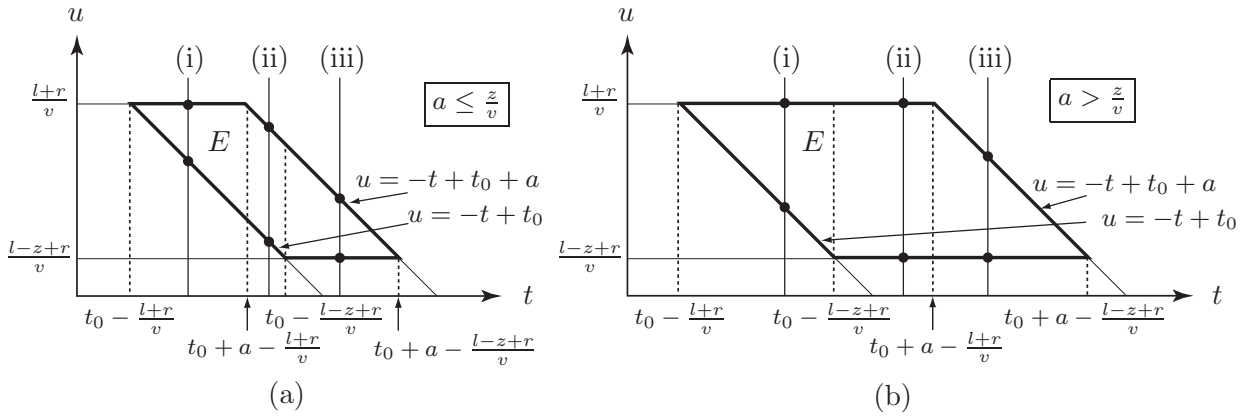


図 7.27 地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 ($P \in L_1$ の場合).

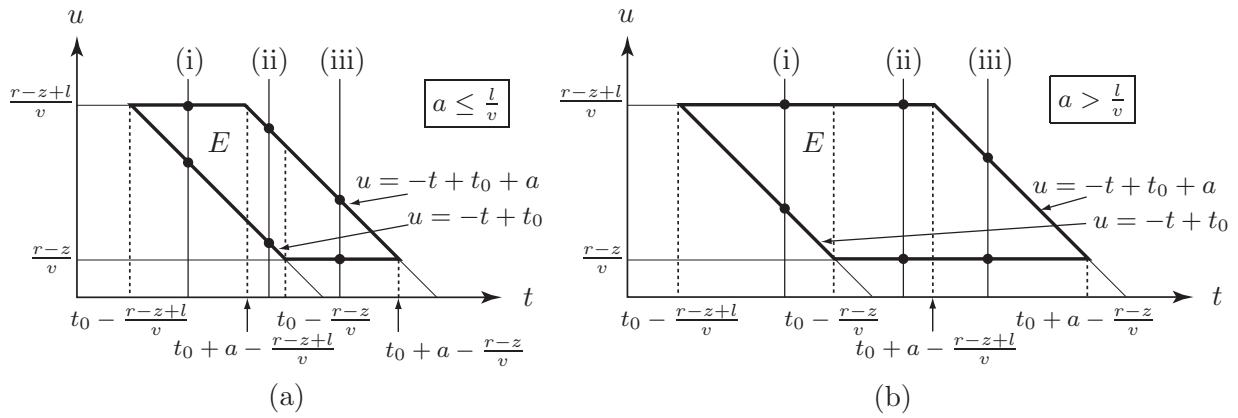


図 7.28 地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 ($P \in R_2$ の場合).

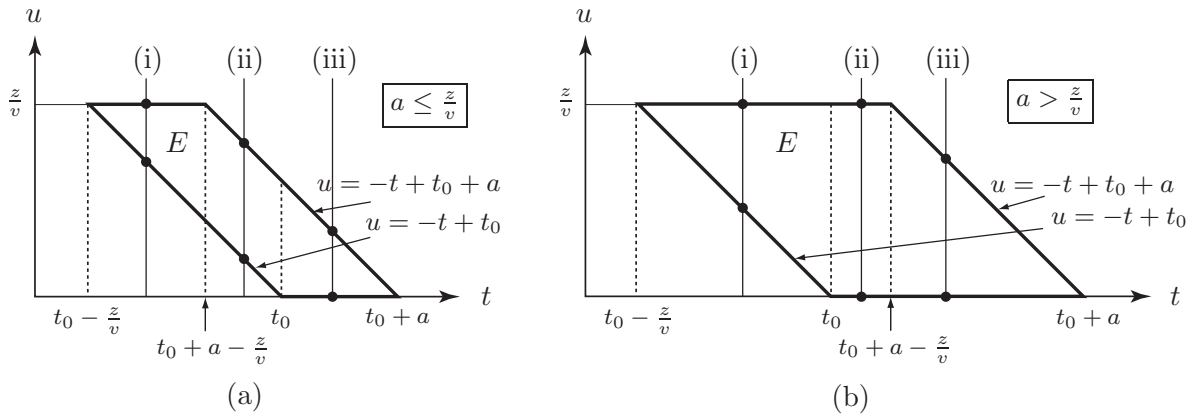


図 7.29 地点 P を通過する時刻 t と P から Q_2 までの所要時間 u の集合の図示 ($P \in L_2$ の場合).

(a) $a \leq \frac{z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l+r}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l+r}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{cII2}}(t; z) = \frac{(l+r+vt-vt_0)^2}{az^2}, \quad (7.5.36)$$

(ii) $t_0 + a - \frac{l+r}{v} \leq t < t_0 - \frac{l-z+r}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{cII2}}(t; z) = \frac{v(2vt-2vt_0-va+2l+2r)}{z^2}, \quad (7.5.37)$$

(iii) $t_0 - \frac{l-z+r}{v} \leq t \leq t_0 + a - \frac{l-z+r}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{cII2}}(t; z) = \frac{-(l+r-va-vt_0+vt-z)(l+r-va-vt_0+vt+z)}{az^2}. \quad (7.5.38)$$

(b) $a > \frac{z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{l+r}{v} \leq t < t_0 - \frac{l-z+r}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{cII2}}(t; z) = \frac{(l+r+vt-vt_0)^2}{az^2}, \quad (7.5.39)$$

(ii) $t_0 - \frac{l-z+r}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{l+r}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{cII2}}(t; z) = \frac{1}{a}, \quad (7.5.40)$$

(iii) $t_0 + a - \frac{l+r}{v} \leq t \leq t_0 + a - \frac{l-z+r}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{cII2}}(t; z) = \frac{-(l+r-va-vt_0+vt-z)(l+r-va-vt_0+vt+z)}{az^2}. \quad (7.5.41)$$

観測地点が途中経路にある場合

$\mathbf{P} \in R_2$ の場合の通過時刻の密度関数 $\psi_{\text{cII2}}(t; z)$ の導出結果を示す ($\mathbf{P} \in R_1$ の場合の通過時刻の密度関数も同一の結果となる):

(a) $a \leq \frac{l}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{r-z+l}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{r-z+l}{v}$ ならば

$$\psi_{\text{cII2}}(t; z) = \frac{(l+r-vt_0+vt-z)^2}{al^2}, \quad (7.5.42)$$

(ii) $t_0 + a - \frac{r-z+l}{v} \leq t < t_0 - \frac{r-z}{v}$ ならば

$$\psi_{cII2}(t; z) = \frac{v(2l + 2r - va - 2vt_0 + 2vt - 2z)}{l^2}, \quad (7.5.43)$$

(iii) $t_0 - \frac{r-z}{v} \leq t \leq t_0 + a - \frac{r-z}{v}$ ならば

$$\psi_{cII2}(t; z) = \frac{-(r + vt - vt_0 - va - z)(2l + r + vt - vt_0 - va - z)}{al^2}. \quad (7.5.44)$$

(b) $a > \frac{l}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{r-z+l}{v} \leq t < t_0 - \frac{r-z}{v}$ ならば

$$\psi_{cII2}(t; z) = \frac{(l + r - vt_0 + vt - z)^2}{al^2}, \quad (7.5.45)$$

(ii) $t_0 - \frac{r-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{r-z+l}{v}$ ならば

$$\psi_{cII2}(t; z) = \frac{1}{a}, \quad (7.5.46)$$

(iii) $t_0 + a - \frac{r-z+l}{v} \leq t \leq t_0 + a - \frac{r-z}{v}$ ならば

$$\psi_{cII2}(t; z) = \frac{-(r + vt - vt_0 - va - z)(2l + r + vt - vt_0 - va - z)}{al^2}. \quad (7.5.47)$$

観測地点が終点側のリンク上にある場合

$\mathbf{P} \in L_2$ の場合に、経路 R_2 を利用する移動に対応する通過時刻の密度関数 $\psi_{cII2}(t; z)$ の導出結果を示す（経路 R_1 を利用する移動に対応する通過時刻の密度関数は $\psi_{cII2}(t; z)$ において z を $l - z$ に置き換えることで直ちに得られる）:

(a) $a \leq \frac{z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{z}{v}$ ならば

$$\psi_{cII2}(t; z) = \frac{(vt - vt_0 + z)^2}{az^2}, \quad (7.5.48)$$

(ii) $t_0 + a - \frac{z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{cII2}(t; z) = \frac{v(2vt - 2vt_0 + 2z - va)}{z^2}, \quad (7.5.49)$$

(iii) $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{cII2}(t; z) = \frac{-v(t - t_0 - a)(vt - vt_0 - va + 2z)}{az^2}. \quad (7.5.50)$$

(b) $a > \frac{z}{v}$ のとき

(i) $t_0 - \frac{z}{v} \leq t < t_0$ ならば

$$\psi_{cII2}(t; z) = \frac{(vt - vt_0 + z)^2}{az^2}, \quad (7.5.51)$$

(ii) $t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{z}{v}$ ならば

$$\psi_{cII2}(t; z) = \frac{1}{a}, \quad (7.5.52)$$

(iii) $t_0 + a - \frac{z}{v} \leq t \leq t_0 + a$ ならば

$$\psi_{cII2}(t; z) = \frac{-v(t - t_0 - a)(vt - vt_0 - va + 2z)}{az^2}. \quad (7.5.53)$$

7.6 通過密度の数値例

本節では、まずケース I とケース II の通過密度の計算例を示し、続いて図 7.20 (a) のネットワークを用いた合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の計算例を示す。

7.6.1 ケース I の通過密度の数値例

図 7.30 に、ケース I の通過密度の計算例を示した。最大距離 $(l_1 + r + l_2)$ の所要時間を $(l_1 + r + l_2)/v = 2$ と定め、時間区間 $[2, 3]$ の一様な出社時刻分布を採用した。時刻を所与とした場合の通過密度は、 $P \in L_1$ の場合は z に関する 2 次関数で与えられるのに対し、 $P \in L_2$ の場合は z に関する 1 次関数で与えられる（全時間を通じての通過量はどちらも 1 次関数）。この点は、時刻に依存する形で交通量を厳密に導いて初めて明らかになる興味深い知見である。

7.6.2 ケース II の通過密度の数値例

図 7.31 と図 7.32 に、ケース II の通過密度の計算例を示した。図 7.31 は、経路 R_1 を用いる移動のみに着目した場合の通過密度を、図 7.32 は、 R_1 と R_2 を用いる場合の通過密度を示している。最大距離 $(l + r)$ の所要時間を $(l + r)/v = 2$ と定め、時間区間 $[2, 3]$ の一様な出社時刻分布を採用した。起点側リンク L_1 と終点側リンク L_2 とでは、（全時間を通じての通過量は等しいのに対し）通過密度の関数型が異なる点は興味深い。

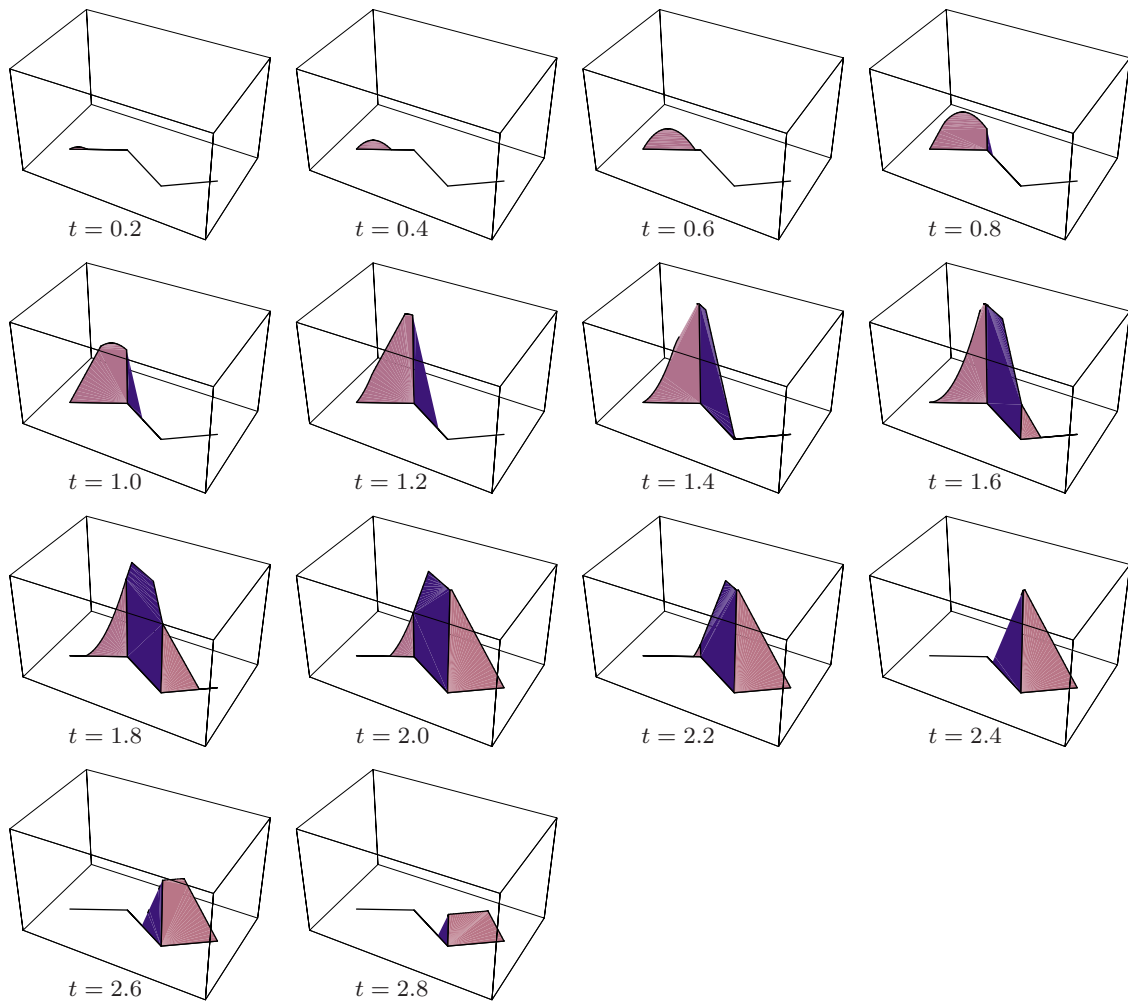


図 7.30 ケース I の通過密度の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合)。

7.6.3 合計の通過密度の数値例

図 7.20 (a) のネットワークにおける合計の通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の数値例を示す。最大距離 l_T の所要時間を $l_T/v = 2$ と定め、総トリップ数を $N = 1$ とする。

図 7.33 は、時間区間 $[2, 3]$ の一様な出社時刻分布に対応する通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の空間分布を時間を追って示したものである。このとき移動が観測される時間帯は $t \in [0, 3]$ となる。ピークは $t = 2.0$ 付近で観測されることがわかる。図 7.20 の総通過量 $q_{\text{合}}(z)$ のグラフと比較すると、全体的な傾向は近いものの、最も混雑する地点は時刻によって異なる点が興味深い。

図 7.36 は、図 7.34 に示した 4 つの観測地点における通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の時間的な変化を示したものである。出社時刻分布としては、図 7.35 に示す 4 通りの異なる一様分布を採用した ($a = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$)。各地点における全時間を通じての通過量を比較すると、① $<$ ② $<$ ③ $<$ ④ となっている (図 7.20 (b))。出社パターンの集中度の高い $a = 0.5$ や $a = 1.0$ の例では、通過密度の時間変動の様子が地点毎に大きく異なっている様子が見て取れる。

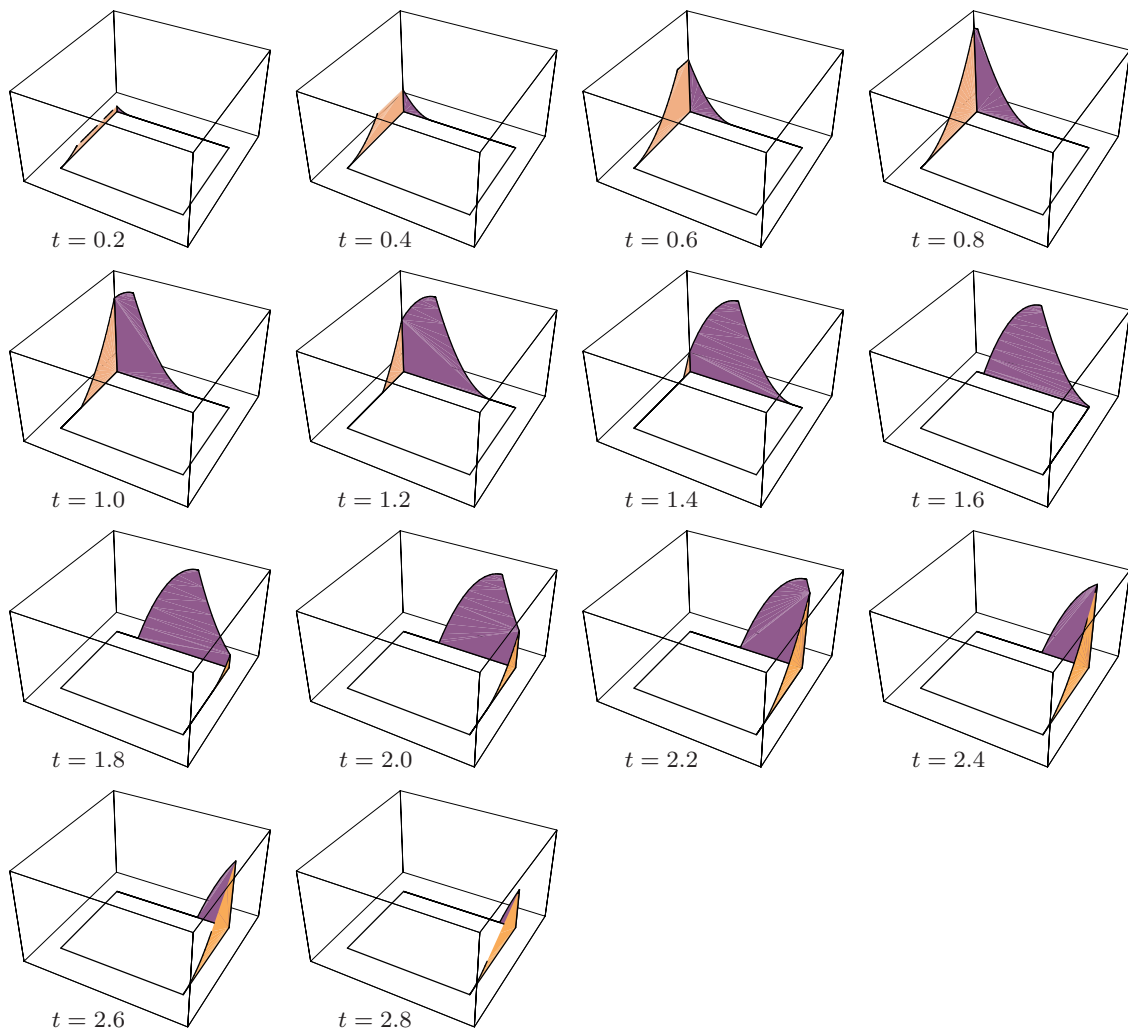


図 7.31 ケース II の一方の経路を用いる移動のみに着目した場合の通過密度の立体図（時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合）.

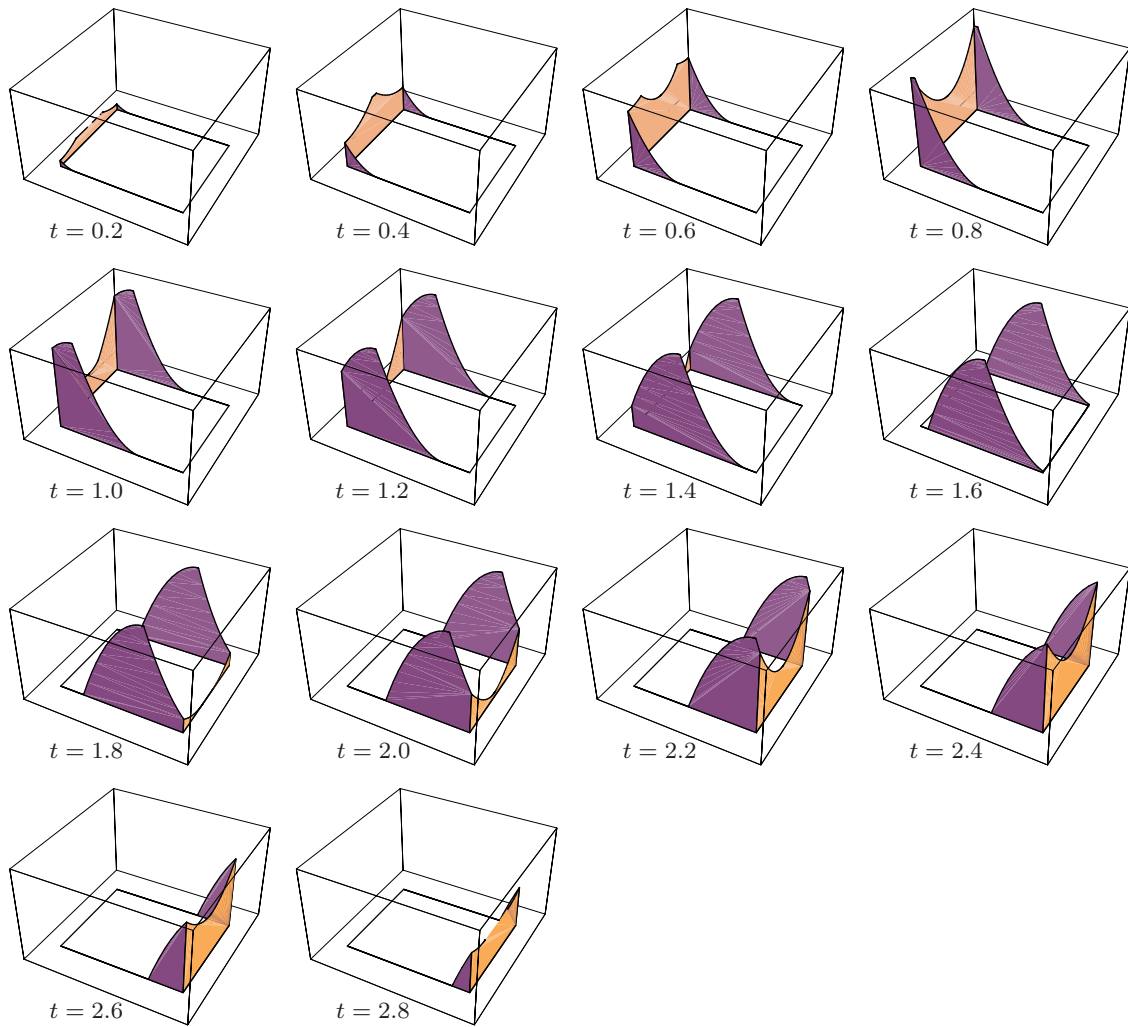


図 7.32 ケース II の通過密度の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).

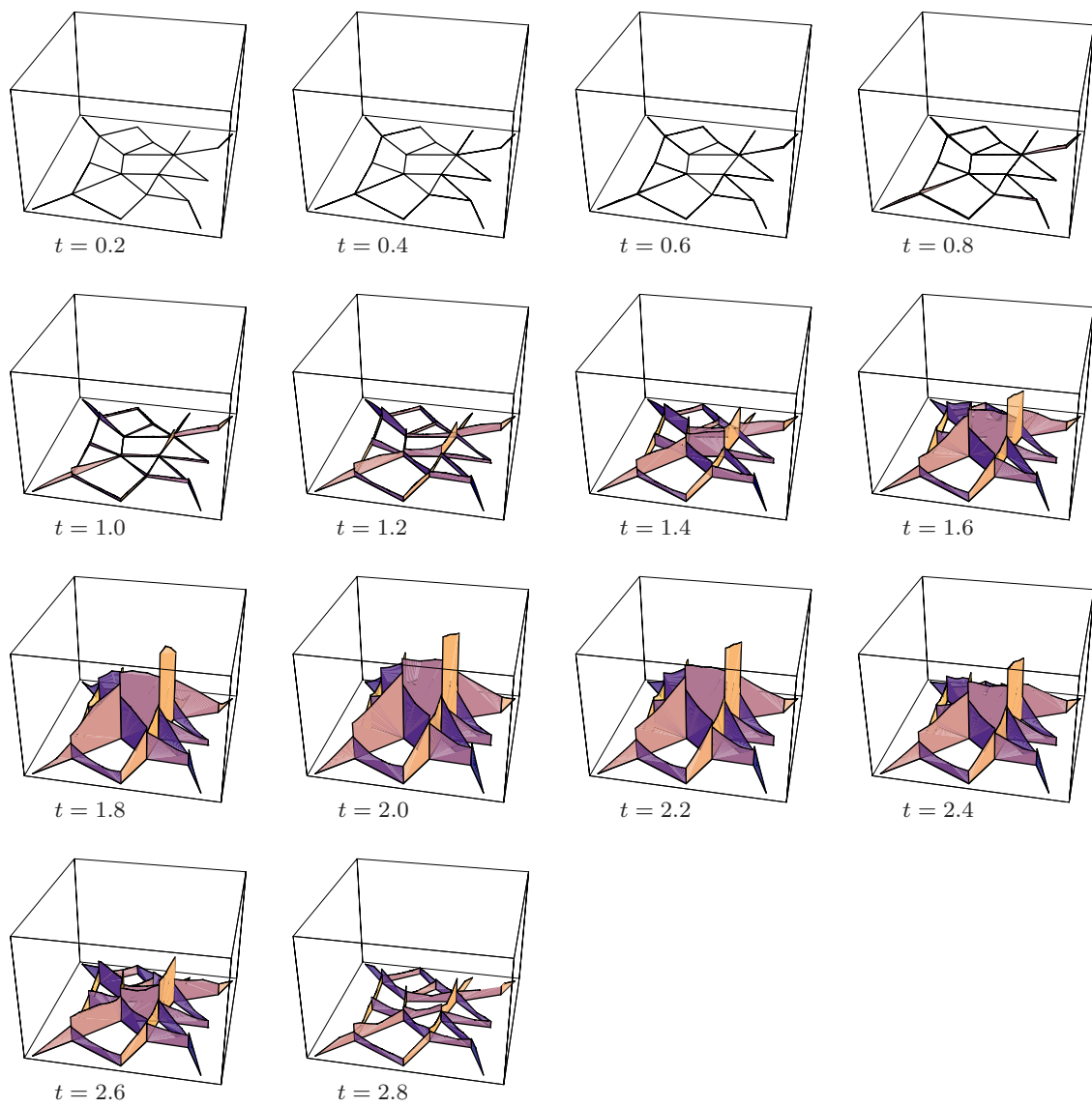


図 7.33 図 7.20 (a) のネットワークにおける通過密度 $p_{\text{合}}(z, t)$ の立体図 (時間区間 $[2, 3]$ の一様出社の場合).

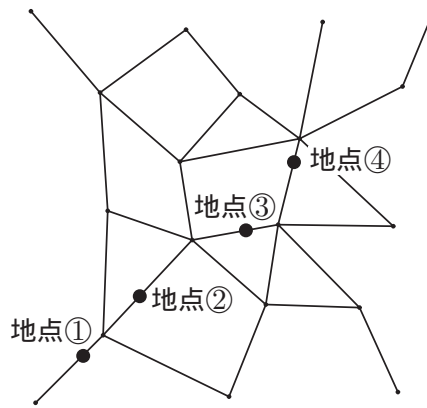


図 7.34 図 7.36 の計算に用いたネットワーク上の4つの観測地点 .

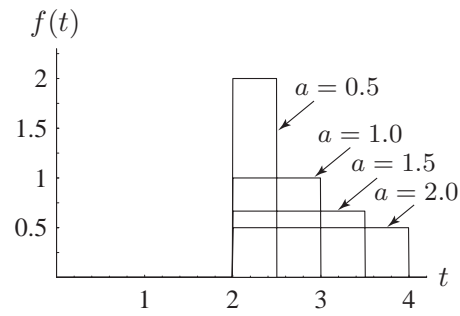


図 7.35 図 7.36 の計算に用いた4通りの一様な出社時刻分布 .

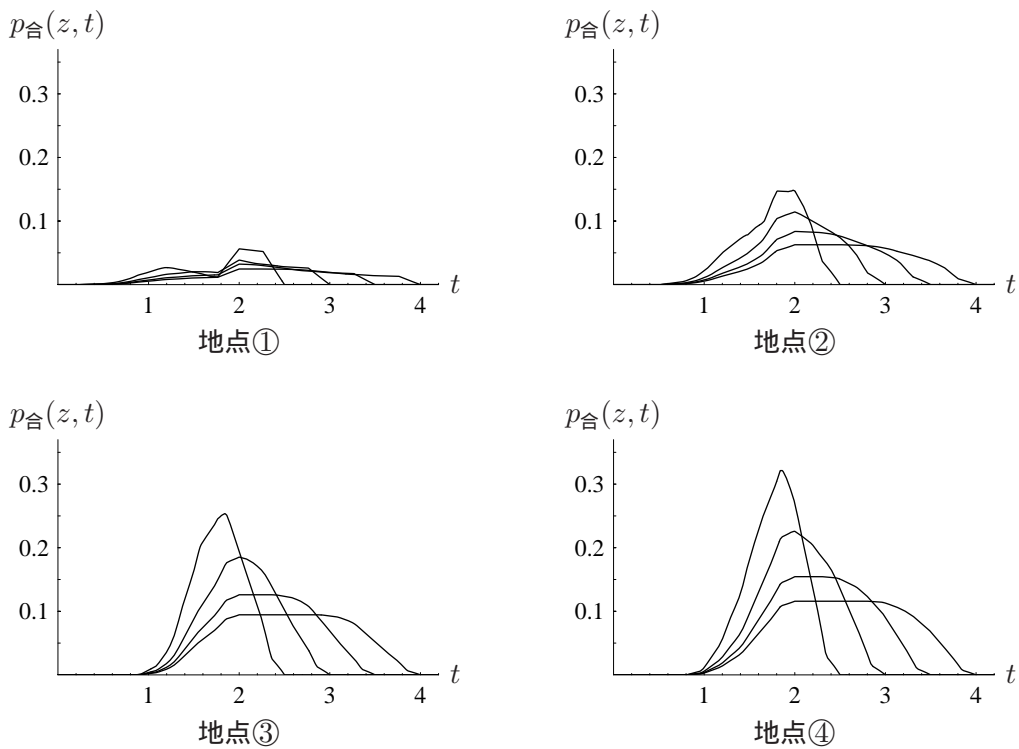


図 7.36 図 7.20 (a) のネットワークにおける通過密度 $p_{合}(z, t)$ の時間的分布 .

7.7 第7章のまとめ

本章では、起・終点がリンク上で連続的に分布するネットワークにおける時刻依存型の通過量モデルを構成した。一様なトリップ密度と一様な出社時刻分布を想定した場合、任意のリンク対の移動に対応する通過密度は、地点と時刻の変数としてかなり簡潔に導かれた。この点は、本モデルを様々な方向へと一般化する際にも大きな強みであるといえよう。以下に、本モデルを用いて行うべき研究と今後の課題を整理する。

放射・環状パターンや格子状パターンなどの規範的なネットワーク上の通過密度を分析し、交通網パターンの定性的・定量的性質を明らかにすることが重要である。この研究は、起・終点が連続的に分布する放射状と格子状パターンにおける総通過量を扱った腰塚 (1999) の一般化モデルとして位置付けられる。特に、第6章で示したように、規則的な格子状パターンのもとで通過量を解析的に導く作業はかなり煩雑なものとなった。格子状パターンのもとで、都市領域の形状が交通量分布に与える影響を追求するために、ネットワークモデルによる分析を行うことは、一つの有効なアプローチとなる。

また、ロードプライシングの導入効果の分析は興味深い対象である。都心のある地区に含まれるリンク上に通過のための課金を導入し、経路選択ルールを最短距離から最短コストへと拡張すれば、本モデルの枠組みを直ちに適用することができる。その際に、総通過量のみを扱った研究からは把握できない知見を蓄積することが重要である。最も混雑する時刻はいつなのか、またそのときの交通量はどのくらいなのか、課金の設定方法や設定地区によって交通量の時空間分布がどのように変化するか、などは今後明らかにすべき魅力的な課題であろう。この問題をさらに推し進めて、混雑解消のための最適な課金値の設定問題へと発展させることができるものと思われる。都心部における課金の設定値が大き過ぎると、逆にその周辺部が混雑する構造があるはずである。そこで、例えば与えられた課金導入地区において、課金の値をどのように設定すれば最も混雑する地点の交通量を最小化することができるのか、といった最適化問題は追求し得る課題であるものと思われる。

また、リンク間の OD 表を現実データなどから作成すれば、幅広い都市交通網の分析へと発展させることができるものと考えられる。さらに、本モデルを用いて大規模なネットワーク上での交通流を分析するためには、通過密度を効率的に算出するためのアルゴリズムの開発が重要な課題となる。

本章で示したネットワークモデルの対象は、必ずしも道路網や鉄道網である必要はない。例えば、建築物内部の歩行者用通路や人々の利用可能空間を、起・終点が連続的に分布する3次元ネットワーク空間としてモデル化すれば、建築計画への幅広い展開が期待できる。このアプローチは、建築物の安全性や快適性の評価を行ったり、通路の必要容量の設計をする際の、基本モデルとして利用できるものと考えられる。例えば、建築物内部における災害発生時の人々の分布と避難の目的地の分布（建築物の避難出口の集合）および避難開始時刻を与えておく。これらを様々なシナリオのもとで設定すれば、大規模災害による被害の見積もりや、安全性からみた建築物の通路や利用可能空間の配置や容量の評価を解析的な枠組みで行えるものと考えられる。

第 8 章 結論と今後の課題

8.1 本研究の結論

本研究は、人々の目的地への到着時刻パターンを所与としたときに、地点と時刻に依存した交通量の分布を導くための方法論を構成した。この手法に従って、線分領域モデル、直線距離に基づく任意形状都市モデル、放射・環状距離に基づく円形都市モデル、直交距離に基づく矩形都市モデルにおいて、交通量の時空間分布を具体的に導出した。

既存研究では、与えられた交通網上での人々の移動パターンを前提として、各地点を全時間を通じて通過する交通量の分布を、マクロな視点から扱ったモデルが数多く提案されてきた。これらの研究では、都市内の交通量分布が、交通網の幾何学的パターンや都市・地域の形状、起・終点の都市内分布などによってどのように実現されるのか、という問題について興味向けられ様々な知見が蓄積されてきた。

本研究では既存研究の視点に加え、時間軸上の行動パターンにも着目し、総通過量の時刻に関する密度を導くことにより、既存研究では扱えなかった交通量の時間的変動を直接解析することのできるモデルへと発展させた。特に、到着時刻の時間的な集中の度合いが、交通混雑に与える影響を直接分析するための基礎を築いた点は、本研究の理論的な貢献として最も重要なものである。

総通過量を扱った既存研究では、起・終点が一様に分布してさえ中心部が混雑する、という構造が示されており、有限領域で人々が行き来をする都市の宿命として強調されてきた。本研究では時間軸上のパターンについても、近い関係を示すことができた。すなわち、出社時刻パターンが一様に分布していてもピーク時刻が自ずと出現する、という構造である。この点は、時空間的な人々の行動パターンが生み出す、興味深い性質として広く認識されるべき重要なものであると考える。

以下に、本研究の第 3 章以降で構成した時空間通過量モデルにおいて得られた知見をまとめる。

第 3 章

第 3 章では、線分領域において一様独立なトリップ密度のもとで、(1) 一斉到着の場合、(2) 一様到着の場合、(2) 2 次関数型の到着の場合、の 3 パターンについて、通過密度を厳密に導くことに成功した。その結果、出社が開始される時刻付近で、混雑ピークが出現する構造が明らかになった。

第 4 章

第 4 章では、起・終点が任意形状の都市領域内部に存在する状況を想定し、移動が直線距離で行われる場合の通過密度を導出した。直線移動を前提とした理論的な通過量モデルは、過去いくつか提案されたが、流量がダイナミックに変化するモデルを解析的に追求したものは、おそらく本研究が初めてだと思われる。一様なトリップ密度と一様な出社時刻分布のもとでの通過密度が、かなり単純な式の形で表せたのは大きな収穫であった。

第5章

第5章では、一様なトリップ密度と一様な到着時刻分布のもとでの環状路と放射路の通過密度を厳密に導いた。その結果、数多くの場合分けを要するものの、通過密度は比較的簡便な形で導かれた。

混雑する環状路の半径は時刻によってかなり変化すること、一様なトリップ密度の場合には、ピーク時に最も混雑する環状路は都市中心と都市境界の中間点付近に表れることを示した。

放射路の場合には、総通過量は上り方面と下り方面とで同一であるのに対し、時間的な変動にも着目した場合には両者の間に非常に大きな違いが見られることが判明した。下り方面の交通は上り方面よりもあとから観測されることから時間的に集中する。そのため同じ総量を短時間で輸送する必要のある下り方面の移動は、上り方面の移動よりもピーク時の交通量がかなり大きくなることを示した。ネットワークの性質としては、下り方面の方が渋滞の潜在性が高いという構造は、広く認識されるべき重要なものであると思われる。

また、総通過量のモデルのみではあるが、Clark型の起・終点分布に対応する環状路と放射路の通過量を式の形で明示することができた。さらに、無限領域を想定した場合、最も混雑する環状路の半径が極めて簡潔な形で記述されることが示された。

第6章

第6章では、矩形領域における直交距離に基づく通過密度を導出した。円盤と比較して回転対称性に劣る矩形領域では、通過密度を解析的に導く作業は、数多くの場合分けのため極めて煩雑であることを示した。都心部の混雑緩和という観点からは、格子状網は放射・環状網はもとより、直線距離による移動パターンよりも混雑を分散される効果があることが明らかになった。

第7章

第7章では、起・終点がリンク上で連続的に分布するネットワークにおける時刻依存型の通過量モデルを構成した。一様なトリップ密度と一様な出社時刻分布を想定した場合、任意のリンク対の移動に対応する通過密度は、地点と時刻の変数としてかなり簡潔に導かれた。この点は、本モデルを様々な方向へと一般化する際にも大きな強みであるといえよう。

8.2 本研究の課題と展望

本研究では、連続平面におけるマクロな都市交通モデルの系譜として位置付けられる通過量モデルを、時刻依存型のモデルへと拡張するための基礎理論を構成した。この枠組みを基礎として、代表的な交通網パターンのもつ性質を、総通過量に関する既存モデルでは分析し得なかった話題を追求することに主眼をおいた。出社時刻パターンを前提として、理想化された状況のもとで、交通量を地点と時刻を変数とする関数として厳密に導くことを分析の中心とした。本研究を出発点として、追求すべき話題には様々なものが存在する。特にモデルの記述力を高めるための空間相互作用の導入、様々な規準に基づく最適化モデルへの発展、都市分析を行う際の実践的な道具への展開、は今後追求すべき大きな柱であると考えられる。以下にこれらについて今後の課題と展望を述べる。

本研究では、一般のトリップ密度のもとでの定式化を行ってはいないものの、移動の起・終点が独立に分布する場合のみを扱った。もちろん現実には、移動の出発点と目的点は独立に分布する訳ではなく、

両者の距離の増大に伴って領域間移動量が減衰するのが常である。このような状況をモデル化する空間相互作用を明示的にモデルに組み込んだ分析は今後行うべき重要な課題である。特に、比較的広域な道路網や鉄道網のパターンを想定したモデルの場合、本論文で示した結果が、距離減衰を考慮した状況でどの程度妥当なものかを検討する必要がある。

本論文では、特定の交通網パターンを想定した都市領域において、移動の起・終点分布に加え、出社時刻パターンが与えられた場合の、交通量の時空間分布を導くための記述モデルを構成した。このモデルを出発点として、様々な最適化問題へと発展させることが重要である。魅力的な課題のひとつに、混雑緩和を追求するための出社時刻パターンの解明、という問題がある。例えば、出社時間帯の幅が与えられたときに、最大の混雑を最小化するという問題が考えられる。現状のトリップパターンのもとで交通混雑を分散させるための出社時刻分布を追求する、という問題は、都市計画やオペレーションズ・リサーチの分野で追求すべき重要な実務的課題であると考えられる。大都市圏における、慢性的な通勤混雑が社会問題化されてから久しい。この問題に対処するために更なる交通容量を確保するというハード的な方策には限界がある。例えば、東京圏における山手線や中央線などは、すでに超過密ダイヤで運行されており、これ以上の大幅な輸送力増強は望めそうもない。このような状況のもとでは、現状の土地利用構造と交通容量を前提として、ソフト的な方策を講じることが重要であろう。そのために、出社時刻の時間的分散を目指すオフピーク通勤の導入効果の分析はもちろんのこと、最適な出社時刻パターンを追求するという課題は魅力的なものである。

本モデルを前提として、現実の都市活動の分析を本格的に追求するための道具へと発展させるためには、今後追求すべき課題が数多く存在する。まずは、現実の交通量データを用いてモデルの記述力を検証することが重要である。本研究の枠組みで構成したモデルで、現実の交通量データをどこまで再現できるのかを検討し、記述力を向上させるための方向性を追求する必要がある。現実の都市領域や交通網を対象とする分析ツールとしては、第4章や第7章で構成したモデルを適用することができる。第4章で扱った、任意形状の都市における直線移動を想定したモデルは、都市や地域の形状がもつ特徴によって、どのような交通量分布が観測されるかを測るための最もマクロなモデルとして利用できよう。第7章で扱った、ネットワーク空間におけるモデルは、ミクロな街路網からマクロな都市交通網まで幅広い応用が期待できる。特に、リンク対に対応するOD表さえ用意しておけば、一様独立な本研究の枠組みで領域間距離の増大に伴う距離減衰効果を導入した分析が可能である点は大きな強みであろう。都市分析への応用のためには、計算機を用いて通過密度を効率的に算出するためのアルゴリズムの開発が重要な課題となる。また、ネットワークモデルを用いて、建築物内部の歩行者用通路や人々の利用可能空間を、起・終点が連続的に分布する3次元ネットワーク空間としてモデル化すれば、建築計画への幅広い展開が期待できる。

今回の研究で構成したモデルは、人々の時間軸上の行動パターンをもとに、交通量の時間的変動を記述する最も基礎的なモデルである。今後このモデルを出発点として、様々な魅力的課題を追求していきたい。

付録 A 環状路と放射路の通過時刻の密度関数

A.1 環状路を先に利用する場合の環状路の通過時刻の密度関数

図 5.2 (a) に示した，環状路を先に利用する場合の起・終点ペアの集合に対応する，通過時刻の密度関数を式の形で明示する．出社時刻分布としては時間区間 $[t_0, t_0 + a]$ の一様分布

$$f(t) = \frac{1}{a} \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + a) \quad (\text{A.1.1})$$

を採用する．地点 $P(z, \varphi)$ における右回りと左回りの通過密度 $\psi_{\text{環右}a}(t; \mathbf{P})$ と $\psi_{\text{環左}a}(t; \mathbf{P})$ は等しいから，以降では，両者を区別せず $\psi_{\text{環}a}(t; \mathbf{P})$ と表すことにする．

第 5 章で述べたとおり， $\psi_{\text{環}a}(t; \mathbf{P})$ を導く際に利用する平行四辺形には， a と z の組み合わせによって 12 通りの形状が存在する．これら 12 通りの平行四辺形に対応する， a - z 平面の部分領域を示したものが図 A.1 である（図 5.12 の再掲）．各平行四辺形に対応する $\psi_{\text{環}a}(t; \mathbf{P})$ は，時刻 t の範囲によってそれぞれ 7 通りのケースをもつ．したがって， $\psi_{\text{環}a}(t; \mathbf{P})$ には， a と z および t の 3 つの変数に対し， $12 \times 7 = 84$ 通りのケースが存在することになる．

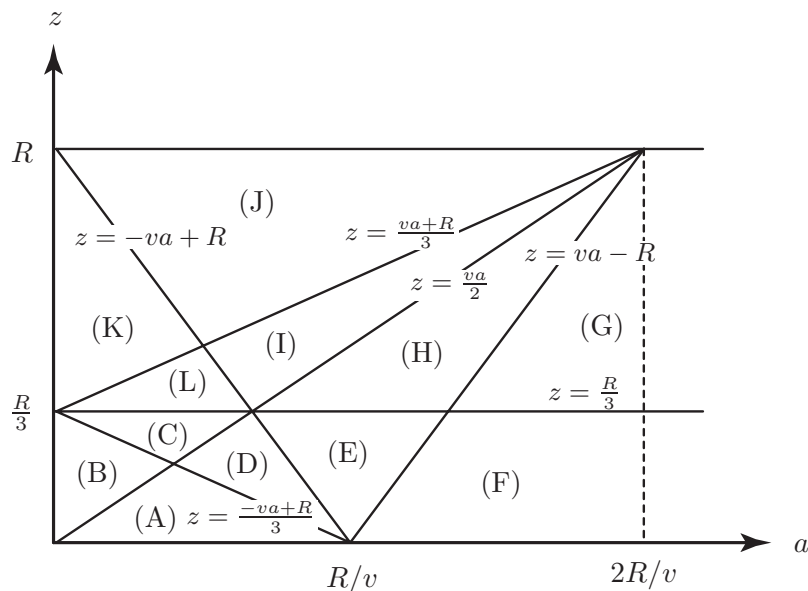


図 A.1 環状路を先に利用する場合の環状路の通過時刻の密度関数を導出するための a - z 平面．

実際には，このうち重複している $\psi_{\text{環}a}(t; \mathbf{P})$ が数多く含まれるため，最終的には (a, z, t) によって定められる $\psi_{\text{環}a}(t; \mathbf{P})$ は 18 通りのみであることが判明する．以下に，18 通りの $\psi_{\text{環}a}(t; \mathbf{P})$ をすべて列挙する（以降の便宜のため 1 から 18 の添え字を付した）：

$$\psi_{\text{環a1}}(t; \mathbf{P}) = \frac{(R - vt_0 + vt + z)^3(3R + vt_0 - vt - z)}{24az^2(R^2 - z^2)}, \quad (\text{A.1.2})$$

$$\psi_{\text{環a2}}(t; \mathbf{P}) = \frac{-3v^2t^2 + 2v(3vt_0 + z)t - z^2 - 2vt_0z + 3R^2 - 3v^2t_0^2}{3a(R^2 - z^2)}, \quad (\text{A.1.3})$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{環a3}}(t; \mathbf{P}) &= \frac{1}{24z^2(R^2 - z^2)} [-4v^4t^3 + 6v^3(va + 2vt_0 - 2z)t^2 \\ &\quad + 4v^2(3R^2 - v^2a^2 - 3va(vt_0 - z) - 3(vt_0 - z)^2)t + 8vR^3 + v^4a^3 - 6v^2aR^2 \\ &\quad - 2v(vt_0 - z)(6R^2 - 2v^2a^2 - 3v^2at_0 - 2v^2t_0^2 + 3vaz + 4vt_0z - 2z^2)], \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{環a4}}(t; \mathbf{P}) &= \frac{1}{24az^2(R + z)} [6v^2(R + z)t^2 + 4v(2R^2 - 3vt_0R + 5zR - 3vt_0z + 5z^2)t \\ &\quad + R^2(3R - 8vt_0 + 11z) + (R + z)(6v^2t_0^2 - 20vt_0z + 17z^2)], \end{aligned} \quad (\text{A.1.5})$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{環a5}}(t; \mathbf{P}) &= \frac{1}{24az^2(R^2 - z^2)} [v^4t^4 - 4v^3(va + vt_0 - z)t^3 \\ &\quad + 6v^2(v^2a^2 - R^2 + v^2t_0^2 + 2v^2at_0 - 2vaz - 2vt_0z - 3z^2)t^2 \\ &\quad - 4v(2R^3 + v^3a^3 - 3vaR^2 - 3(vt_0 - z)(R^2 - v^2a^2 - v^2at_0 + vaz))t \\ &\quad - 4v(vt_0 - 5z)(vt_0 + z)^2t + v^4a^4 + (vt_0 - 7z)(vt_0 + z)^3 - 3R^4 \\ &\quad + 4v^3a^3(vt_0 - z) + 4va(vt_0 - z)^3 + 8R^3(va + vt_0 - z) + 6v^2a^2(vt_0 - z)^2 \\ &\quad - 6R^2(v^2a^2 + v^2t_0^2 + 2v^2at_0 - 2vaz - 2vt_0z - 3z^2)], \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{環a6}}(t; \mathbf{P}) &= \frac{1}{24az^2(R^2 - z^2)} [v^4t^4 - 4v^3(vt_0 - z)t^3 + 6v^2(v^2t_0^2 - 2vt_0z - 4z^2)t^2 + v^4t_0^4 \\ &\quad - 4v^2t_0(v^2t_0^2 - 3vt_0z - 12z^2)t - 4v^3t_0^3z - 24v^2t_0^2z^2 + 24z^2(R^2 - z^2)], \end{aligned} \quad (\text{A.1.7})$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{環a7}}(t; \mathbf{P}) &= \frac{1}{24az^2(R^2 - z^2)} [v^4t^4 - 4v^3(va + vt_0 - z)t^3 + 6v^3(a + t_0)(va + vt_0 - 2z)t^2 \\ &\quad - 4v(v^3a^3 + 3v^2a^2(vt_0 - z) + (vt_0 + z)(vt_0 - 2z)^2)t \\ &\quad - 12v^2a((vt_0 - z)^2 - R^2)t + v^4a^4 + 4v^3a^3(vt_0 - z) \\ &\quad + 4va(2R + vt_0 - z)(R - vt_0 + z)^2 + (vt_0 + 2z)(vt_0 - 2z)^3 \\ &\quad + 6v^2a^2((vt_0 - z)^2 - R^2)], \end{aligned} \quad (\text{A.1.8})$$

$$\psi_{\text{環a8}}(t; \mathbf{P}) = \frac{v(3va + 6vt_0 - 6vt + 2z)}{3(R^2 - z^2)}, \quad (\text{A.1.9})$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{環a9}}(t; \mathbf{P}) &= \frac{1}{24az^2(R^2 - z^2)} [2v^4t^4 - 4v^3(va + 2vt_0 - 2z)t^3 \\ &\quad + 6v^2(v^2a^2 - R^2 + 2v^2t_0^2 + 2va(vt_0 - z) - 4vt_0z - 3z^2)t^2 \\ &\quad - 4v(2R^3 + v^3a^3 + 2v^3t_0^3 + 3v^2a^2(vt_0 - z) - 3R^2(va + vt_0 - z) - 6v^2t_0^2z)t \\ &\quad + 4v(9vt_0z^2 + z^3 - 3va(vt_0 - z)^2)t - 3R^4 + v^4a^4 + 2v^4t_0^4 + 4v^3a^3(vt_0 - z) \\ &\quad + 4va(vt_0 - z)^3 + 8R^3(va + vt_0 - z) - 8v^3t_0^3z - 18v^2t_0^2z^2 - 4vt_0z^3 - 23z^4 \\ &\quad + 6v^2a^2(vt_0 - z)^2 - 6R^2(v^2a^2 + v^2t_0^2 + 2va(vt_0 - z) - 2vt_0z - 3z^2)], \end{aligned} \quad (\text{A.1.10})$$

$$\psi_{\text{環a10}}(t; \mathbf{P}) = \frac{1}{a}, \quad (\text{A.1.11})$$

$$\psi_{\text{環a11}}(t; \mathbf{P}) = \frac{6v^2(R + z)t + 4vR^2 - v(3va + 6vt_0 - 10z)(R + z)}{12z^2(R + z)}, \quad (\text{A.1.12})$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{環a12}}(t; \mathbf{P}) &= \frac{1}{24az^2(R^2 - z^2)} [v^4t^4 - 4v^3(vt_0 - z)t^3 + 6v^3t_0(vt_0 - 2z)t^2 \\ &\quad - 4v(4z^3 + 12vaz^2 + v^3t_0^3 - 3v^2t_0^2z)t + v^4t_0^4 - 4v^3t_0^3z \\ &\quad + 16vt_0z^2(3va + z) + 8z^2(3v^2a^2 + 2vaz - 2z^2)], \end{aligned} \quad (\text{A.1.13})$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{環a13}}(t; \mathbf{P}) &= \frac{1}{24az^2(R^2 - z^2)} [v^4t^4 - 4v^3(va + vt_0 - z)t^3 + 6v^2((va + vt_0 - z)^2 - R^2)t^2 \\ &\quad - 4v(2R + va + vt_0 - z)(R - va - vt_0 + z)^2t - 3R^4 + v^4a^4 + v^4t_0^4 - 4v^3t_0^3z \\ &\quad + 4v^3a^3(vt_0 - z) + 4va(vt_0 - z)^3 + 8R^3(va + vt_0 - z) + 6v^2t_0^2z^2 - 4vt_0z^3 - 23z^4 \\ &\quad + 6v^2a^2(vt_0 - z)^2 - 6R^2(v^2a^2 + v^2t_0^2 + 2va(vt_0 - z) - 2vt_0z - 3z^2)], \end{aligned} \quad (\text{A.1.14})$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{環a14}}(t; \mathbf{P}) &= \frac{1}{24az^2(R^2 - z^2)} [v^4t^4 - 4v^3(vt_0 - z)t^3 + 6v^2(v^2t_0^2 - R^2 - 2vt_0z - 3z^2)t^2 \\ &\quad + 4v(3R^2(va + vt_0 - z) - 2R^3 - v^3t_0^3 + 3v^2t_0^2z + 9vt_0z^2 + z^2(5z - 3va))t \\ &\quad + z^2(6v^2a^2 - 20vaz - 7z^2) - 6R^2(v^2a^2 + v^2t_0^2 + 2va(vt_0 - z) - 2vt_0z - 3z^2) - 3R^4 \\ &\quad + v^4t_0^4 + 8R^3(va + vt_0 - z) - 4v^3t_0^3z - 18v^2t_0^2z^2 + 4vt_0(3va - 5z)z^2], \end{aligned} \quad (\text{A.1.15})$$

$$\psi_{\text{環a15}}(t; \mathbf{P}) = \frac{3v^2t^2 - (6v^2a + 6v^2t_0 + 2vz)t + 3v^2(a^2 + t_0^2) + 2vt_0z - 2z^2 + 2va(3vt_0 + z)}{3a(R^2 - z^2)}, \quad (\text{A.1.16})$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{環a16}}(t; \mathbf{P}) &= \frac{1}{24z^2(R^2 - z^2)} [4v^4t^3 - 6v^3(va + 2vt_0 - 2z)t^2 + 4v^2(v^2a^2 + 3va(vt_0 - z))t \\ &\quad + 12v^2(v^2t_0^2 - 2vt_0z - 4z^2)t - v^2(v^2a^3 + 4va^2(vt_0 - z)) \\ &\quad - 4v^2t_0(v^2t_0^2 - 3vt_0z - 12z^2) - 6v^2a(v^2t_0^2 - 2vt_0z - 4z^2)], \end{aligned} \quad (\text{A.1.17})$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{環a17}}(t; \mathbf{P}) &= \frac{1}{24az^2(R + z)} [-6v^2(R + z)t^2 + 4v((R + z)(3va + 3vt_0 - 5z) - 2R^2)t \\ &\quad - (R + z)(6v^2a^2 + 6v^2t_0^2 + 4va(3vt_0 - 5z) - 20vt_0z - 7z^2) - 3R^3 \\ &\quad + R^2(8va + 8vt_0 - 11z)], \end{aligned} \quad (\text{A.1.18})$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{環a18}}(t; \mathbf{P}) &= \frac{1}{24az^2(R^2 - z^2)} [-v^4t^4 + 4v^3(va + vt_0 - z)t^3 - 6v^2(v^2a^2 + v^2t_0^2 - 4z^2)t^2 \\ &\quad - 12v^2(v^2at_0 - vaz - vt_0z)t^2 + 4(a + t_0)v^2(v^2a^2 + v^2t_0^2)t \\ &\quad + 4(a + t_0)v^2(2v^2at_0 - 3vaz - 3vt_0z - 12z^2)t \\ &\quad - (a + t_0)^2v^2(v^2a^2 + v^2t_0^2 + 2v^2at_0 - 4vaz - 4vt_0z - 24z^2)]. \end{aligned} \quad (\text{A.1.19})$$

図 A.1 の領域 (A) から (L) に対応する, $\psi_{\text{環a}}(t; \mathbf{P})$ は以下の通りに導かれる:

(A) $z \leq \frac{va}{2}$ かつ $z \leq \frac{-va+R}{3}$ のとき

$$\psi_{\text{環a}}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{環a1}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環a2}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{環a5}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環a8}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環a12}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{環a15}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環a18}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.1.20})$$

(B) $\frac{va}{2} \leq z \leq \frac{-va+R}{3}$ のとき

$$\psi_{\text{環}a}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{環}a1}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a3}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a5}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a8}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a12}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a16}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{環}a18}(t; \mathbf{P}) & (t_0 \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.1.21})$$

(C) $\frac{-va+R}{3} \leq z \leq \frac{R}{3}$ かつ $\frac{va}{2} \leq z$ のとき

$$\psi_{\text{環}a}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{環}a1}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a3}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a5}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a9}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a12}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a16}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{環}a18}(t; \mathbf{P}) & (t_0 \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.1.22})$$

(D) $\frac{-va+R}{3} \leq z \leq \frac{va}{2}$ かつ $z \leq -va + R$ のとき

$$\psi_{\text{環}a}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{環}a1}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a2}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a5}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a9}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a12}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{環}a15}(t; \mathbf{P}) & (t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a18}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.1.23})$$

(E) $-va + R \leq z \leq \frac{R}{3}$ かつ $va - R \leq z$ のとき

$$\psi_{\text{環}a}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{環}a1}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a2}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a6}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a9}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{環}a13}(t; \mathbf{P}) & (t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a15}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a18}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.1.24})$$

(F) $z \leq \frac{R}{3}$ かつ $z \leq va - R$ のとき

$$\psi_{\text{環}a}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{環}a1}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a2}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a6}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{環}a10}(t; \mathbf{P}) & (t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a13}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a15}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a18}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.1.25})$$

(G) $\frac{R}{3} \leq z \leq va - R$ のとき

$$\psi_{\text{環}a}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{環}a1}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a4}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a6}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{環}a10}(t; \mathbf{P}) & (t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a13}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a17}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a18}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.1.26})$$

(H) $\frac{R}{3} \leq z \leq \frac{va}{2}$ かつ $va - R \leq z$ のとき

$$\psi_{\text{環}a}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{環}a1}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a4}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a6}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a9}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{環}a13}(t; \mathbf{P}) & (t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a17}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a18}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.1.27})$$

(I) $\frac{va}{2} \leq z \leq \frac{va+R}{3}$ かつ $-va + R \leq z$ のとき

$$\psi_{\text{環}a}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{環}a1}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a4}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a7}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a9}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a14}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{環}a17}(t; \mathbf{P}) & (t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{\text{環}a18}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.1.28})$$

(J) $\frac{va+R}{3} \leq z$ かつ $-va + R \leq z$ のとき

$$\psi_{環a}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{環a1}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{環a4}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{環a7}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{環a11}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{環a14}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{環a17}(t; \mathbf{P}) & (t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{環a18}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.1.29})$$

(K) $\frac{va+R}{3} \leq z \leq -va + R$ のとき

$$\psi_{環a}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{環a1}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{環a3}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{環a7}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{環a11}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{環a14}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{環a16}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{環a18}(t; \mathbf{P}) & (t_0 \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.1.30})$$

(L) $\frac{R}{3} \leq z \leq \frac{va+R}{3}$ かつ $z \leq -va + R$ のとき

$$\psi_{環a}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{環a1}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{環a3}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{環a7}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{環a9}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{環a14}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R-z}{v}), \\ \psi_{環a16}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R-z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{環a18}(t; \mathbf{P}) & (t_0 \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.1.31})$$

A.2 放射路の上り方面の通過時刻の密度関数

図 5.4 (a) に示した，放射路の上り方面の起・終点ペアの集合に対応する，通過時刻の密度関数 $\psi_{放上}(t; \mathbf{P})$ を式の形で明示する．出社時刻分布としては時間区間 $[t_0, t_0 + a]$ の一様分布

$$f(t) = \frac{1}{a} \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + a) \quad (\text{A.2.1})$$

を採用する．

第 5 章で述べたとおり， $\psi_{放上}(t; \mathbf{P})$ を導く際に利用する平行四辺形には， a と z の組み合わせによって 9 通りの形状が存在する．これら 9 通りの平行四辺形に対応する， a - z 平面の部分領域を示したものが図 A.2 である（図 5.18 の再掲）．各平行四辺形に対応する $\psi_{放上}(t; \mathbf{P})$ は，時刻 t の範囲によってそれぞれ 7 通りのケースをもつ．したがって， $\psi_{放上}(t; \mathbf{P})$ には， a と z および t の 3 つの変数に対し， $9 \times 7 = 63$ 通りのケースが存在することになる．

実際には，このうち重複している $\psi_{放上}(t; \mathbf{P})$ が数多く含まれるため，最終的には (a, z, t) によって定められる $\psi_{環a}(t; \mathbf{P})$ は 13 通りのみであることが判明する．以下に，13 通りの $\psi_{放上}(t; \mathbf{P})$ をすべて列挙する（以降の便宜のため 1 から 13 の添え字を付した）：

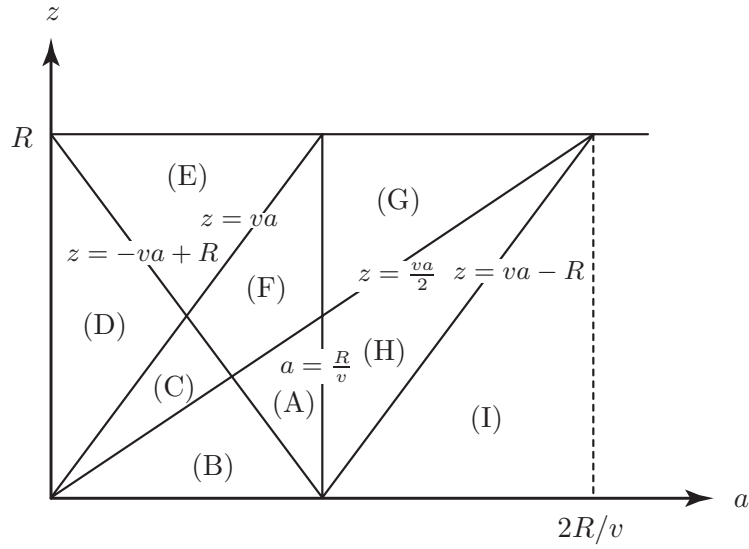


図 A.2 放射路の上り方面の通過時刻の密度関数を導出するための a - z 平面 .

$$\psi_{\text{放上1}}(t; \mathbf{P}) = \frac{(\pi - 2)(R^2 - (vt_0 - vt - z)^2)}{(\pi - 2)aR^2 + 2az^2}, \quad (\text{A.2.2})$$

$$\psi_{\text{放上2}}(t; \mathbf{P}) = \frac{(vt + 2z - vt_0)((\pi - 3)(t_0 - t)v + 2z) + (\pi - 2)(R^2 - z^2)}{(\pi - 2)aR^2 + 2az^2}, \quad (\text{A.2.3})$$

$$\psi_{\text{放上3}}(t; \mathbf{P}) = \frac{(\pi - 2)v(va + 2vt_0 - 2(vt + z))}{(\pi - 2)R^2 + 2z^2}, \quad (\text{A.2.4})$$

$$\psi_{\text{放上4}}(t; \mathbf{P}) = \frac{1}{(\pi - 2)aR^2 + 2az^2} [v^2t^2 - 2v(vt_0 + (\pi - 2)va - 2z)t + (\pi - 2)v^2a^2 + (vt_0 - 2z)^2 - (4 - 2\pi)va(vt_0 - z)], \quad (\text{A.2.5})$$

$$\psi_{\text{放上5}}(t; \mathbf{P}) = \frac{-v^2t^2 + 2v^2t_0t + (\pi - 2)R^2 - v^2t_0^2 + 2z^2}{(\pi - 2)aR^2 + 2az^2}, \quad (\text{A.2.6})$$

$$\psi_{\text{放上6}}(t; \mathbf{P}) = \frac{1}{(\pi - 2)aR^2 + 2az^2} [(\pi - 3)v^2t^2 - 2v((\pi - 2)(va - z) + (\pi - 3)vt_0)t + (\pi - 3)v^2t_0^2 + (\pi - 2)v^2a^2 + (2\pi - 4)va(vt_0 - z) - (2\pi - 4)vt_0z + \pi z^2], \quad (\text{A.2.7})$$

$$\psi_{\text{放上7}}(t; \mathbf{P}) = \frac{(\pi - 3)v^2(2t_0 - 2t + a) + (8 - 2\pi)vz}{(\pi - 2)R^2 + 2z^2}, \quad (\text{A.2.8})$$

$$\psi_{\text{放上8}}(t; \mathbf{P}) = \frac{1}{a}, \quad (\text{A.2.9})$$

$$\psi_{\text{放上9}}(t; \mathbf{P}) = \frac{1}{(\pi - 2)aR^2 + 2az^2} [(\pi - 2)v^2t^2 - (2\pi - 4)(v^2a + v^2t_0 - vz)t + (\pi - 2)v^2a^2 + (\pi - 2)v^2t_0^2 + (2\pi - 4)va(vt_0 - z) - (2\pi - 4)vt_0z + \pi z^2], \quad (\text{A.2.10})$$

$$\psi_{\text{放上10}}(t; \mathbf{P}) = \frac{1}{(\pi - 2)aR^2 + 2az^2} [-(4 - \pi)v^2t^2 - 2v((\pi - 3)va - (4 - \pi)(vt_0 - z))t + (\pi - 3)v^2a^2 - (4 - \pi)(vt_0 - z)^2 + 2va((\pi - 3)vt_0 + (4 - \pi)z)], \quad (\text{A.2.11})$$

$$\psi_{\text{放上11}}(t; \mathbf{P}) = \frac{1}{(\pi - 2)aR^2 + 2az^2} [(\pi - 3)v^2t^2 - 2v((\pi - 3)(va + vt_0) + (4 - \pi)z)t + (\pi - 3)v^2a^2 + (\pi - 3)v^2t_0^2 + (8 - 2\pi)vt_0z - (4 - \pi)z^2 + (2\pi - 6)v^2at_0 + (8 - 2\pi)vaz], \quad (\text{A.2.12})$$

$$\psi_{\text{放}_{12}}(t; \mathbf{P}) = \frac{(a + 2t_0 - 2t)v^2}{(\pi - 2)R^2 + 2z^2}, \quad (\text{A.2.13})$$

$$\psi_{\text{放}_{13}}(t; \mathbf{P}) = \frac{(a + t_0 - t)^2 v^2}{(\pi - 2)aR^2 + 2az^2}. \quad (\text{A.2.14})$$

図 A.2 の領域 (A) から (I) に対応する, $\psi_{\text{放}_{\uparrow}}(t; \mathbf{P})$ は以下の通りに導かれる:

(A) $-va + R \leq z \leq \frac{va}{2}$ かつ $a \leq \frac{R}{v}$ のとき

$$\psi_{\text{放}_{\uparrow}}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{放}_{11}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{12}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{13}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{6}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{放}_{9}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{11}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{13}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{z}{v} \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.2.15})$$

(B) $z \leq \frac{va}{2}$ かつ $z \leq -va + R$ のとき

$$\psi_{\text{放}_{\uparrow}}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{放}_{11}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{3}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{4}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{6}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{放}_{9}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{11}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{13}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{z}{v} \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.2.16})$$

(C) $\frac{va}{2} \leq z \leq va$ かつ $z \leq -va + R$ のとき

$$\psi_{\text{放}_{\uparrow}}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{放}_{11}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{3}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{4}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{6}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{10}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{放}_{11}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{13}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{z}{v} \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.2.17})$$

(D) $va \leq z \leq -va + R$ のとき

$$\psi_{\text{放}_{\uparrow}}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{放}_{11}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{3}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{4}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{7}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{10}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{12}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{放}_{13}}(t; \mathbf{P}) & (t_0 \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.2.18})$$

(E) $-va + R \leq z$ かつ $va \leq z$ のとき

$$\psi_{\text{放}_{\text{上}}}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{放}_{\text{上}1}(t; \mathbf{P})} & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}2}(t; \mathbf{P})} & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}4}(t; \mathbf{P})} & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}7}(t; \mathbf{P})} & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}10}(t; \mathbf{P})} & (t_0 - \frac{z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}12}(t; \mathbf{P})} & (t_0 + a - \frac{z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}13}(t; \mathbf{P})} & (t_0 \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.2.19})$$

(F) $-va + R \leq z \leq va$ かつ $\frac{va}{2} \leq z$ かつ $a \leq \frac{R}{v}$ のとき

$$\psi_{\text{放}_{\text{上}}}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{放}_{\text{上}1}(t; \mathbf{P})} & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}2}(t; \mathbf{P})} & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}4}(t; \mathbf{P})} & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}6}(t; \mathbf{P})} & (t_0 - \frac{z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}10}(t; \mathbf{P})} & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}11}(t; \mathbf{P})} & (t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}13}(t; \mathbf{P})} & (t_0 + a - \frac{z}{v} \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.2.20})$$

(G) $\frac{va}{2} \leq z$ かつ $\frac{R}{v} \leq a$ のとき

$$\psi_{\text{放}_{\text{上}}}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{放}_{\text{上}1}(t; \mathbf{P})} & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}2}(t; \mathbf{P})} & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}5}(t; \mathbf{P})} & (t_0 - \frac{z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}6}(t; \mathbf{P})} & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}10}(t; \mathbf{P})} & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}11}(t; \mathbf{P})} & (t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}13}(t; \mathbf{P})} & (t_0 + a - \frac{z}{v} \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.2.21})$$

(H) $va - R \leq z \leq \frac{va}{2}$ かつ $\frac{R}{v} \leq a$ のとき

$$\psi_{\text{放}_{\text{上}}}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{放}_{\text{上}1}(t; \mathbf{P})} & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}2}(t; \mathbf{P})} & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}5}(t; \mathbf{P})} & (t_0 - \frac{z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}6}(t; \mathbf{P})} & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}9}(t; \mathbf{P})} & (t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}11}(t; \mathbf{P})} & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放}_{\text{上}13}(t; \mathbf{P})} & (t_0 + a - \frac{z}{v} \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.2.22})$$

(I) $z \leq va - R$ のとき

$$\psi_{\text{放} \uparrow}(t; \mathbf{P}) = \begin{cases} \psi_{\text{放} \uparrow 1}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放} \uparrow 2}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放} \uparrow 5}(t; \mathbf{P}) & (t_0 - \frac{z}{v} \leq t < t_0), \\ \psi_{\text{放} \uparrow 8}(t; \mathbf{P}) & (t_0 \leq t < t_0 + a - \frac{R+z}{v}), \\ \psi_{\text{放} \uparrow 9}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{R+z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{2z}{v}), \\ \psi_{\text{放} \uparrow 11}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{2z}{v} \leq t < t_0 + a - \frac{z}{v}), \\ \psi_{\text{放} \uparrow 13}(t; \mathbf{P}) & (t_0 + a - \frac{z}{v} \leq t < t_0 + a). \end{cases} \quad (\text{A.2.23})$$

参考文献

- [1] 秋澤 淳・茅 陽一 (1995) : 運輸部門の省エネルギー型都市構造に対する 2 つのモデルによるアプローチ . エネルギー・資源 , 第 16 巻 , 第 6 号 , pp. 68–73.
- [2] S. Angel and G. M. Hyman (1976): *Urban Fields: A Geometry of Movement for Regional Science*. Pion Limited .
- [3] M. Beckmann (1952): A continuous model of transportation. *Econometrica*, Vol. 20, No. 4, pp. 643–660.
- [4] T. M. Cavalier and H. D. Sherali (1986): Network location problems with continuous link demands: p -medians on a chain and 2-mediands on a tree. *European Journal of Operational Research*, Vol. 23, pp. 246–255.
- [5] W. Christaller (1933): *Die Centralen Orte in Süddeutschland*. Gustav Fischer, Jena, English translation, C. W. Baskin (1966), *The Central Places of Southern Germany*. Prentice-Hall.
- [6] G. B. Dantzig and T. L. Saaty (1973): *Compact City: A Plan for a Liveable Urban Environment*. W. H. Freeman.
- [7] 藤田学洋・鈴木 勉 (2003) : 複数の環状路をもつ円盤都市における平均移動距離と流動量 . 都市計画論文集 , No. 38, pp. 421–426.
- [8] 藤田学洋・鈴木 勉 (2004) : 放射環状型高速交通網の最適パターンと交通手段別分担率との関係に関する研究 . 都市計画論文集 , No. 39, pp. 835–840.
- [9] 福田 明 (2003) : 『理工系のための応用確率論 : 基礎編』 . 森北出版.
- [10] E. M. Holroyd (1966): Theoretical average journey lengths in circular towns with various routeing systems. report 43, Transport and Road Research Laboratory, Crowthorne, Berks.
- [11] E. M. Holroyd (1968): Routeing traffic in a square town to minimize route-crossings. *Beiträge zur Theorie des Verkehrsflusses, Strassenbau und Strassenverkehrstechnik*, 86, pp. 166–175.
- [12] E. M. Holroyd and A. J. Miller (1966): Route crossings in urban areas. *Proceedings of 3rd Conference Australian Road Research Board*, Australian Road Research Board, Melbourne, pp. 394–419.
- [13] H. Hotelling (1929): Stabilitly in competition. *Economic Journal*, Vol. 39, pp. 41–57.
- [14] G. Hyman and L. Mayhew (2000a): The impact of fast routes on urban travel geometry. *Environment and Planning B: Planning and Design*, Vol. 27, No. 2, pp. 265–282.
- [15] G. Hyman and L. Mayhew (2000b): The properties of route catchments in orbital-radial cities. *Environment and Planning B: Planning and Design*, Vol. 27, No. 6, pp. 843–863.
- [16] 伊理正夫 (監修)・腰塚武志 (編) (1993) : 『計算幾何学と地理情報処理』 . 共立出版.
- [17] 伊藤通哇 (1963) : 『都市の生態と計画』 . 技報堂.

- [18] 小林 亨・田口 東 (2001): 交通路と居住地の配分を考慮した都市の立体構造の分析. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 44, No. 3, pp. 281–296.
- [19] 腰塚武志 (1976): 積分幾何学について (3). *オペレーションズ・リサーチ*, Vol. 21, No. 11, pp. 654–659.
- [20] 腰塚武志 (1986): 都市平面における距離の分布. 『都市計画数理』, 第 1 章, 朝倉書店.
- [21] 腰塚武志 (1992): 都市域の流動に関する理論的研究. 都市計画論文集, No. 27, pp. 343–348.
- [22] 腰塚武志 (1999): 移動から見た放射状と格子状ネットワークの比較. 都市計画論文集, No. 34, pp. 763–768.
- [23] 腰塚武志・小林純一 (1983): 道路距離と直線距離. 都市計画論文集, No. 18, pp. 43–48.
- [24] 腰塚武志・西野嘉彦 (1994): 道路走行パターンと混雑現象. 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会, 1-B-5, pp. 37–38.
- [25] 腰塚武志・大津 晶 (2001): 都市領域における距離分布の導出とその応用. 都市計画論文集, No. 36, pp. 871–876.
- [26] 栗田 治 (2001): 円盤都市における道路パターンの理論—直線距離, 直交距離ならびに放射・環状距離の分布—. 都市計画論文集, No. 36, pp. 859–864.
- [27] 栗田 治 (2004): 『都市モデル読本』. 共立出版.
- [28] A. Langevin, P. Mbaraga, and J. F. Campbell (1996): Continuous approximation models in freight distribution: An overview. *Transportation Research B*, Vol. 30, No. 3, pp. 163–188.
- [29] M. J. Lighthill, and G. B. Whitham (1955): On kinematic waves II: A theory of traffic flow on long crowded roads. *Proceedings of the Royal Society, A* 229, pp. 317–345.
- [30] A. Lösch (1940): *Die Räumliche Ordnung der Wirtschaft*. Gustav Fischer, Jena, English translation, W. H. Woglom and W. F. Stolper (1954), *The Economics of Location*. Yale University Press, New Haven.
- [31] G. F. Newell (1980): *Traffic Flow on Transportation Networks*. MIT Press, Cambridge, MA.
- [32] 日本応用数理学会 (2002): 交通流の数理. 応用数理, Vol. 12, No. 2.
- [33] 大蔵 泉 (1993): 『交通工学』. コロナ社.
- [34] 大津 晶 (2000): 『領域内流動に関する理論的研究』. 筑波大学社会工学研究科博士論文.
- [35] 大津 晶・腰塚武志 (1997): 都市域における交通集中に関する数理的解析. 都市計画論文集, No. 32, pp. 133–138.
- [36] 大津 晶・腰塚武志 (1998): 都市内流動量分布に関する基礎的研究. 都市計画論文集, No. 33, pp. 319–324.
- [37] 大津 晶・腰塚武志 (1999a): 非凸領域の流動量分布と部分領域を通過する流動量. 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会, 1-D-6, pp. 76–77.
- [38] 大津 晶・腰塚武志 (1999b): 移動費用を最小にする職住分布モデル. 都市計画論文集, No. 34, pp. 775–780.
- [39] A. Okabe and K. Okunuki (2002): Solving the huff-based competitive location model on a network with link-based demand. *Annals of Operations Research*, No. 111, pp. 239–252.
- [40] A. Okabe and I. Yamada (2001): The K-function method on a network and its computational implementation. *Geographical Analysis*, Vol. 33, No. 3, pp. 271–290.
- [41] A. Okabe, H. Yomono and M. Kitamura (1995): Statistical analysis of the distribution of

- points on a network. *Geographical Analysis*, Vol. 27, No. 2, pp. 152–175.
- [42] 奥平耕造 (1976) : 『都市工学読本』. 彰国社.
- [43] 奥貫圭一・岡部篤行 (1996) : 空間相互作用モデルを用いた道路ネットワークにおける店舗売上げ推定法 . 都市計画論文集 , No. 31, pp. 49–54.
- [44] T. Oyama (2000): Weight of shortest path analyses for the optimal location problem. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 43, No. 1, pp. 176–196.
- [45] C. E. M. Pearce (1974): Locating concentric ring roads in a city. *Transportation Science*, Vol. 8, pp. 142–168.
- [46] C. E. M. Pearce (1975): Time dependence in commuter traffic models. *Transportation Science*, Vol. 9, pp. 289–307.
- [47] C. E. M. Pearce (1981): Travel intensity with a barrier. *Transportation Research B*, Vol. 15, pp. 427–436.
- [48] T. Puu (1977): A proposed definition of traffic flow in continuous transportation models. *Environment and Planning A*, Vol. 9, pp. 559–567.
- [49] T. Puu (1979): *The Allocation of Road Capital in Two-dimensional Space*. North-Holland, Amsterdam.
- [50] T. Puu (2003): *Mathematical Location and Land Use Theory: An Introduction*. Berlin, Springer.
- [51] L. A. Santalo (1976): *Integral Geometry and Geometric Probability*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- [52] R. J. Smeed (1963): Road development in urban areas. *Journal of the Institution of Highway Engineers*, Vol. 10, pp. 5–30.
- [53] R. J. Smeed (1968): Traffic studies and urban congestion. *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 2, No. 1, pp. 33–70.
- [54] R. J. Smeed (1977): Traffic in a linear town. *Proceedings of the 7th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, pp. 7–36.
- [55] H. Solomon (1978): *Geometric Probability*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- [56] 鈴木 勉 (2002) : フロー需要に基づく施設配置モデルと需要構成が施設配置に与える影響 . 都市計画論文集 , No. 37, pp. 115–120.
- [57] 鈴木 勉 (2003) : 都市内流動を最小化するフロー需要施設配置モデルを用いた拠点立地に関する考察 . 都市計画論文集 , No. 38, pp. 391–396.
- [58] 田口 東 (1983) : 『道路網の連続体近似理論と都市交通流解析への応用』. 東京大学大学院工学研究科計数工学科博士論文.
- [59] 田口 東 (1995) : 都市空間の道路と住居への配分—交通渋滞のない円形都市モデル—. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 38, No. 4, pp. 398–407.
- [60] 田口 東 (1997) : 超高層ビルにおける都市型交通とエレベータ通路 . *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 40, No. 4, pp. 536–545.
- [61] 田口 東 (2004) : 首都圏電車ネットワークにおける時差出勤の効果の予測 . 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会 , 1-D-10 , pp. 94–95.

- [62] 田口 東・腰塚武志 (2001): 交通路面積を考慮に入れた高層建物の移動時間の評価. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 44, No. 4, pp. 326–342.
- [63] 田口 東・大山達雄 (1993): ネットワーク構造に基づく道路の重要度評価—都市内道路網への適用例—. *オペレーションズ・リサーチ*, Vol. 38, No. 9, pp. 5–10.
- [64] 田村一軌 (2002): 『ネットワークの連続性に着目した道路評価分析』. 筑波大学社会工学研究科博士論文.
- [65] 田村一軌・腰塚武志 (2000): 道路網上の距離分布と流動量分布に関する基礎的研究. 都市計画論文集, No. 35, pp. 1021–1026.
- [66] 田村一軌・腰塚武志・大澤義明 (2001): 道路ネットワーク上の道路距離と直線距離. 都市計画論文集, No. 36, pp. 877–882.
- [67] 田村一軌・腰塚武志・大澤義明 (2003): 移動効率および通過量に着目した一方通行規制の評価. 都市計画論文集, No. 38, pp. 145–150.
- [68] 田中健一・栗田 治 (2001): 放射・環状道路網を有する扇形都市平面上の通過交通量の分布—渋滞のない都市設計のための道路面積の適正割り当て分析—. 都市計画論文集, No. 36, pp. 865–870.
- [69] 田中健一・栗田 治 (2003): 領域内通過量からみた放射・環状道路網の数理的分析—通勤時を想定した交通量の空間的・時間的分布—. *日本応用数理学会論文誌*, Vol. 13, No. 3, pp. 321–352.
- [70] K. Tanaka and O. Kurita (2003): Time-dependent traffic flow in a rectangular city with rectilinear distance. *FORMA*, Vol. 18, No. 3, pp. 165–186.
- [71] 田中健一・栗田 治 (2004a): 直線距離に基づく時空間通過量モデル. 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会, 2-G-2, pp. 320–321.
- [72] 田中健一・栗田 治 (2004b): 時空間流動量の幾何学モデル. 形の科学会誌, 第 19 巻, 第 1 号, シンポジウム予稿, pp. 34–35.
- [73] R. J. Vaughan (1987): *Urban Spatial Traffic Patterns*. Pion Limited.
- [74] R. J. Vaughan and E. Doyle (1979): Rectangular routing in Smeed's city. *Transportation Research B*, Vol. 13, pp. 181–182.
- [75] R. J. Vaughan and E. Doyle (1981): Further aspects of rectangular routing in Smeed's city. *Transportation Research B*, Vol. 15, pp. 149–158.
- [76] J. H. Von Thünen (1826): *Der Isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft und Nationalökonomie*. Gustav Fischer, Stuttgart, English translation, C. M. Wartenburg (1966), *The Isolated State*. Oxford University Press, Oxford.
- [77] J. G. Wardrop (1952): On some theoretical aspects of road traffic research. *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, Vol. 1, pp. 325–362.
- [78] J. G. Wardrop (1969): Minimum cost paths in urban areas. *Beiträge zur Theorie des Verkehrsflusses, Strassenbau und Strassenverkehrstechnik*, 86, pp. 184–190.
- [79] A. Weber (1909): *Über den Standort der Industrien*. Tübingen, English translation, C. J. Friedrich (1929), *Theory of the Location of Industries*. University of Chicago Press.
- [80] 山田英之・栗田 治・田口 東 (2001): 放射・環状道路網を有する都市における居住地と道路の配分—交通渋滞のない円形都市—. 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会, 2-F-6, pp. 264–265.
- [81] 柳井 浩 (1995): 環状道路の混雑. *オペレーションズ・リサーチ*, Vol. 40, No. 2, pp. 43–48.