

GSMAC有限要素法に基づいた
Poisson ソルバーの拡張および
軟らかい固体と流体の連成解析

2005 年度

橋本 学

目次

第 1 章 緒言	1
1.1 本論文の背景	1
1.2 有限要素法	2
1.3 非圧縮性流体のための有限要素法	3
1.4 非圧縮超弾性体のための有限要素法	4
1.5 流体と固体の連成有限要素法	6
1.5.1 連成方法	6
1.5.2 時間積分法	7
1.5.3 要素の補間次数	7
1.6 本論文の目的	7
1.7 本論文の構成	8
第 1 章の参考文献	10
第 1 章の表および図	14
第 2 章 GSMAC 有限要素法における Poisson ソルバーの拡張	16
2.1 第 2 章の緒言	16
2.2 基礎方程式系	18
2.2.1 基礎方程式	18
2.2.2 境界条件	18
2.3 数値計算法	19
2.3.1 MAC 系解法の時間進行	19
2.3.2 Galerkin 有限要素法による離散化	20
2.3.3 優対角近似法	22
2.3.4 速度と圧力の同時緩和法	22
2.4 2次元 cavity 内強制対流の解析	24
2.4.1 4 角形要素のメッシュを用いた解析	25
2.4.2 3 角形要素のメッシュを用いた解析	26
2.4.3 4 角形要素と 3 角形要素の混合メッシュを用いた解析	27

2.5	3次元 cavity 内強制対流の解析	27
2.5.1	6面体要素のメッシュを用いた解析	27
2.5.2	4面体要素のメッシュを用いた解析	28
2.6	第2章の結言	29
	第2章の参考文献	30
	第2章の表および図	32
第3章	非圧縮超弾性体のための GSMAC 有限要素法の構築	56
3.1	第3章の緒言	56
3.2	基礎方程式系	57
3.2.1	基礎方程式	57
3.2.2	弾性ポテンシャル関数	59
3.2.3	境界条件	60
3.3	数値計算法	60
3.3.1	Newmark- β 法の考えを導入した時間進行	61
3.3.2	Galerkin 有限要素法による離散化	63
3.4	静解析の計算方法	66
3.5	計算方法の妥当性および高次要素の適用に対する検証	67
3.5.1	引張変形の2次元平面ひずみ解析	67
3.5.2	せん断変形の2次元平面ひずみ解析	68
3.5.3	引張変形の3次元解析	68
3.5.4	せん断変形の3次元解析	68
3.5.5	結果の検討	69
3.6	硬化特性の導入に対する検証	69
3.7	特異性に対する要素の比較	70
3.8	第3章の結言	71
	第3章の参考文献	72
	第3章の表および図	74
第4章	GSMAC-ALE 有限要素法に基づいた流体固体連成解析	102
4.1	第4章の緒言	102
4.2	基礎方程式	103
4.2.1	非圧縮 Newton 流体の基礎方程式	103
4.2.2	Hooke 弾性体の基礎方程式	104
4.2.3	非圧縮超弾性体の基礎方程式	105

4.3	数値計算法	106
4.3.1	非圧縮 Newton 流体の GSMAC-ALE 有限要素法離散化式	106
4.3.2	Hooke 弾性体の有限要素法離散化式	110
4.3.3	非圧縮超弾性体の GSMAC 有限要素法離散化	112
4.3.4	流体と固体の連成系の離散化式	114
4.3.5	流体と固体の連成解析アルゴリズム	117
4.3.6	提案する連成計算方法の適用範囲	119
4.4	弾性板の 2 次元渦励振問題	119
4.4.1	本解析の問題設定	120
4.4.2	弾性板が Hooke 弾性体の場合	121
4.4.3	弾性板が非圧縮超弾性体の場合	122
4.5	第 4 章の結言	122
	第 4 章の参考文献	124
	第 4 章の表および図	125
	第 5 章 結言	141
	謝辞	143
	公刊論文および口頭発表目録	144

らかい組織は流体力によって非常に変形しやすく、流体との相互作用は非常に大きい。

流体と固体の相互作用が大きい連成解析では、流体固体界面の位置は大きく変化するために、精度の良い界面の追跡・捕獲方法が必要となる。さらに、流体系と固体系を支配する方程式の非線形性を扱う必要がある。支配方程式中において、流体の対流による運動の非線形性以外に、固体の大変形に伴う幾何学的な非線形性が現れる。ゴムなどの高分子材料や生体内の軟組織は応力とひずみの関係が非線形であり、変形による体積変化がほとんどない非圧縮超弾性体としてモデル化される。したがって、流体と非圧縮超弾性体の連成解析には、固体の材料的な非線形性や流体と固体双方に非圧縮性の拘束条件を扱う必要もある。それ故に、多くの計算機記憶容量・計算時間を要する扱いにくい問題となる。

1.2 有限要素法

ある物体をその構成原子・分子の大きさより巨視的に扱う場合には、その物体は物質点という仮想的な連続体粒子の集合であると考えることができる。連続体の力学は、流体力学と固体・構造力学を中心に熱力学、電磁気学、材料力学など広範囲の学問を包括しているために、今日のあらゆる学問において重要である^{(1.5)(1.6)}。multi-physicsを連続体のレベルで解析するためには、それぞれの場を支配する偏微分方程式を複雑な境界条件を与えて連立して解く必要がある。

場を支配する微分方程式の境界値問題に対する近似解法として一般的に利用される離散化手法が、有限要素法 (Finite Element Method) である。有限要素法は、1950年代にボーイング社の研究者によって初めて航空機の設計に用いられた。固体・構造解析の分野で発展していき、現在では熱流体解析、電磁場解析などの幅広い工学の分野で使われている。有限要素法が有する主な特徴を以下に挙げる。

- 非構造のメッシュに適用できるので、工学上現れる複雑な形状を有する領域を解析対象として扱うことができる。
- 様々な境界条件を取り組むことが差分法 (Finite Difference Method)、有限体積法 (Finite Volume Method) などの他の離散化手法より容易である。
- そのアルゴリズムの性質から、一般的な目的のソフトウェアを構築することができる。それ故に、汎用有限要素法ソフトは現在多く存在する。
- 関数解析に基づいた有限要素法の数学的理論^(1.7)が発展しているため、解の収束性や精度について差分法、有限体積法などの他の離散化手法より数学的に議論することができる。

有限要素法では、重み関数と物理量の補間関数に同一の形状関数を用いる Galerkin 有限要素法がよく用いられる。その研究例が多く報告されているために、特徴が知られている Galerkin 有限要素法を本研究でも用いる。

1.3 非圧縮性流体のための有限要素法

非圧縮性物質の解析では、非圧縮条件から求めた拘束条件と運動方程式を連立して解く必要がある。非圧縮性流体の解析では、非圧縮条件を連続の式に代入することで速度の発散が零という条件を導出し、これを流れの非圧縮拘束条件とする。非圧縮性流体の非定常解析では、速度と圧力の分離型の有限要素法がよく用いられる。分離型の有限要素法では、運動方程式を時間についてのみ離散化した半離散化式から非圧縮拘束条件を利用して、分離式を導出する。このとき、分離式中に圧力の Poisson 方程式^(1.8)または修正速度ポテンシャルの Poisson 方程式^(1.9)が導入される。この Poisson 方程式を陰的に解くことによって、非圧縮拘束条件を満足する速度場と圧力場を得ることができる。分離型の有限要素法は、非圧縮性流体の差分法で発展してきた MAC 法 (Marker And Cell method)^(1.10), SMAC 法 (Simplified MAC method)^(1.11) に代表される MAC 系解法を有限要素法に拡張したものである。各時刻において非圧縮拘束条件がある程度の精度で満足されると、MAC 系解法の特徴であるサイクル誤差自己調整の原理^(1.12)により、時間進行に伴い誤差が累積することはない。また、離散化 Poisson 方程式の係数行列の大きさは後述する Lagrange 未定乗数法やペナルティ法のような非分離型の有限要素法で解くべき全体係数行列に比べて小さいので、非分離型より計算機記憶容量が少ない。さらに、離散化 Poisson 方程式の全体係数行列は正定値かつ対称であるために、解くべき連立一次方程式も扱いやすい。実現象を対象とする大規模な計算では、この離散化 Poisson 方程式の行列計算において膨大な計算機記憶容量と計算時間が必要となる。

GSMAC 有限要素法 (Generalized-Simplified MAC-FEM)^{(1.13)(1.14)} は、差分法の HS MAC 法 (Highly Simplified MAC method)^(1.15) を拡張した速度と圧力の分離型の有限要素法である。離散化 Poisson 方程式の計算は ICCG (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient) 法などの対称行列ソルバーを用いて解く場合が多い^(1.16)。それに対して、GSMAC 有限要素法では、その全体係数行列は優対角近似され、速度と圧力の同時緩和法^(1.14) が用いられる。これによって、全体係数行列の非対角成分を作成する手順を省くことができ、速度場が連続の式を満足しているかを反復計算の収束判定として用いることができる。また、係数行列の計算では、要素係数行列を要素形状に依存する部分と要素形状に依存しない部分に分解する係数行列の解析的表示^(1.14) が用いられる。要素係数行列自身を記憶せずに、要素形状に依存しない部分のみを記憶し、要素形状に依存する部分は毎時間ステップで計算を行う。これにより、Gauss の数値積分を用いた場合より計算時間を短縮でき、

第1章 緒言

1.1 本論文の背景

互いに異なる系と系が相互作用することを連成といい、流体の速度場、固体の変位場、温度場、電磁場など様々な系が混在する連成現象を multi-physics という。近年の急速な計算機の発展に伴い、multi-physics を数値計算によって解析しようとする試みが大学、企業、研究機関などでなされている^{(1.1)~(1.3)}。multi-physics のうちで、流体と固体の連成現象は、機械工学、航空宇宙工学、土木工学、バイオエンジニアリングの分野で多く存在し、重要視されている。流体の流れは固体を変形させる一方で、固体の変形は流体の流れに影響を及ぼすので、この現象は非常に複雑である。例えば、流れ場中に固体が置かれている場合には、固体表面の剥離点から渦が放出される。このとき、固体は抗力によって流れ方向に振動し、揚力によって流れと垂直方向に振動する。これは渦励振と呼ばれる。

構造物の設計では、空気力によって生ずる航空機の翼や橋梁などの構造物の振動が重要となる。これらの構造物は、Young 率が大きい金属などの材料で構成されている。金属の Young 率は 10GPa 以上で剛性が比較的大きいため、その変形は小さく、振動数は大きい。フラッターと呼ばれる激しい振動が生じると、構造物の破壊につながるために、その抑制方法が研究されている。1940 年のタコマ橋の風による落橋や 1995 年の高速炉「もんじゅ」内の温度計のナトリウム流による破損の原因解明なども研究され、様々な知見が得られている^{(1.1)(1.4)}。

一方、Young 率が小さいような軟らかい固体と流体の連成現象も存在する。ゴムなどの高分子材料の Young 率は 0.1~10MPa 程度であり、剛性が比較的小さい。そのために、流体力が作用すると、このような固体は大きく変形し、振動数が小さい振動をする。固体の変形が大きくなるに伴って、流体と固体の相互作用も大きくなる。工業製品では、ゴムなどの高分子材料を利用した軟らかい部品が多く用いられ、重要な役割を果たしている。例えば、自動車の部品としては、タイヤ、ホース、シール材などが挙げられる。このような部品と流体の連成現象として、タイヤのハイドロプレーニング、ホース内部の液体の非定常流などが存在する。また、生体工学の分野では、生体壁と流体の連成現象が研究されている。そのような研究は、体内を自由に移動して治療を行うマイクロマシンの開発、動脈硬化・動脈瘤などの病的な原因の解明、新しい手術方法の確立などにつながると考えられている。生体壁は軟組織であるものが多く、血管壁、心臓弁や心臓壁、眼球網膜などの軟

記憶容量を低減できる。上述の特徴から、他の分離型の有限要素法と比べて、GSMAC 有限要素法は複雑形状を有する非圧縮流れ解析の低容量・高速計算に適した方法の1つであると考えられる。しかし、従来の GSMAC 有限要素法における Poisson ソルバーでは、用いる要素の種類が制限されるという欠点がある。2次元解析では4角形要素のみが用いられ、3次元解析では6面体要素のみが用いられる。また、速度に1次、圧力に要素内一定の補間関数が用いられる。このように、要素の種類が制限される理由は、離散化 Poisson 方程式を優対角近似する時に、要素形状として4角形または6面体を仮定し、圧力の補間関数が要素内一定であることを仮定するからである。

GSMAC 有限要素法の国内最初の研究は、1985年の棚橋らによる研究である^(1.12)。この研究では、内部流の計算例として2次元 cavity 内の流れ、外部流の計算例として2次元円柱周りの流れが解析されている。その後、上流化手法を導入した GSMAC 有限要素法の構築や移動境界問題、電磁熱流体問題、非 Newton 流体問題への応用などが行われている^{(1.17)~(1.20)}。木倉らは、GSMAC 有限要素法に ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 法を導入することで、移動境界問題を追跡可能な GSMAC-ALE 有限要素法を構築し、2次元タンク内に存在する液体の sloshing 解析を行っている^(1.21)。木倉らが構築した GSMAC-ALE 有限要素法やその他の速度と圧力の分離型解法に ALE 法を導入する場合に、固体・構造の動解析で用いられるような高精度な時間積分法を使用している研究例はほとんどない。そのため、振動問題において時間刻み幅を大きくした場合に時間精度が悪くなる欠点がある。藤枝らは流体と Hooke 弾性体を弱連成させて、Kármán 渦の放出によって生じる弾性円柱の渦励振を解析し、ロックイン現象を捉えている^(1.22)。しかし、藤枝らが用いた計算方法では、弾性体の微小変形を仮定しているために、固体が大きく変形するような問題を扱うことができない。

1.4 非圧縮超弾性体のための有限要素法

変形やひずみの成分によって微分されることにより、共役な応力成分を生じるような弾性ポテンシャル関数が存在する物質を超弾性体という^(1.23)。ゴムなどの複雑な鎖状分子構造を有する高分子材料は、非圧縮超弾性体としてモデル化される。非圧縮超弾性体は、構成方程式において高次ひずみの項が存在するために、応力とひずみの間に非線形な関係がある固体である。近年、免震構造物の積層ゴムやパソコンのキーボードなどの設計には、非圧縮超弾性体が使用されている。また、生体内の力学挙動の解析が近年盛んに行われている。生体内の固体は軟組織を形成するものが多く、血管壁、心臓壁、眼球網膜など非圧縮超弾性体とみなせるものも多い^{(1.24)~(1.26)}。非圧縮超弾性体の解析では、材料的な非線形性のみでなく、大変形による幾何学的な非線形性も扱う必要がある。さらに、接触変形を扱う場合には、現象はより複雑になる。

非圧縮超弾性体の解析では、非圧縮条件を密度の式に代入することで変形こう配の第3不変量が1であるという条件を導出し、これを変形の非圧縮拘束条件とする。非圧縮超弾性体の有限要素法解析では、この非圧縮拘束条件と運動方程式の連立方程式を直接的に解いて、変位と圧力の近似解を求める。このような有限要素法として、ANSYS^(1.27)、ABAQUS、ADINA^(1.28)など汎用解析ソフトにも導入されているLagrange未定乗数法やペナルティ法が挙げられる。Larange未定乗数法では圧力を非圧縮拘束条件に対する未定乗数として扱うのに対して、ペナルティ法では微小な圧縮性を表すペナルティ係数を導入することで運動方程式における圧力項を消去する。これらの有限要素法では、非圧縮拘束条件と運動方程式を同時に解くために、解くべき全体係数行列に多くの計算機記憶容量が必要となる。また、未知量である変位と圧力に同じ次数の補間関数を用いると、非圧縮拘束条件を満足する解が得られないことも挙げられる。このことは、線形問題に限りinf-sup条件を用いて証明される。その問題点を解決するためには、変位の補間関数の次数より圧力の補間関数の次数を下げて、未知量の配置を工夫する必要がある。また、Larange未定乗数法の問題点として、離散化式の行列計算において直接法以外の方法を用いにくいことが挙げられる。その理由は、非圧縮拘束条件に圧力項が現れないために、解くべき離散化式における全体係数行列の対角項に零が含まれるからである。

非圧縮超弾性体の有限要素法解析の初期研究として、1971年のOdenらの研究^(1.29)が挙げられる。Odenらは円孔のあるエラストマー板を水平に引き伸ばし、得られた近似解がSegalらの実験結果と良好に一致することを示している。その後、DuffettらはLagrange未定乗数法を用いた研究を行っている^(1.30)。Sussmanらは、線形弾性体、非圧縮超弾性体、弾塑性体の変形を統一的に扱うことができるペナルティ法である u/p formulationを提案し、その有効性を示している^(1.31)。山田らは、Lagrange未定乗数法の定式化と用いる要素の種類による変形能力の違いについて検証している^(1.32)。渡辺らは、ゴムのねじりによって生じるkinking現象をLagrange未定乗数法とペナルティ法で解析し、前者の計算時間の効率性を示している^(1.33)。さらに、渡辺らはLagrange未定乗数法とペナルティ法で数種類の要素を用いた非圧縮超弾性体の大変形問題を解析し、それらの要素の特徴を議論している^(1.34)。Bonetらは、空気が非圧縮超弾性体シェル構造内部に存在する場合にシェル構造に荷重を加えてその変形を解析している^(1.35)。ただし、Bonetらの研究では空気は理想気体であり、その圧力変化はBoyleの法則に従うと仮定している。孫らは、眼球網膜手術のシミュレーションとして、眼球網膜を非圧縮超弾性体、眼球内部の液体を静止流体と仮定した解析を行っている^(1.26)。ただし、孫らの研究では静止流体の圧力を体積弾性率の定義式から簡易に計算している。松田らは従来用いられてきたtotal Lagrange法ではなく、updated Lagrange法により非圧縮超弾性体の変形を解析している^(1.36)。ただし、これらの研究は全て静解析である。

1.5 流体と固体の連成有限要素法

1.5.1 連成方法

流体と固体の連成方法としては、強連成 (direct, strong, monolithic, or simultaneous coupling) と弱連成 (iterative, weak, segregated or partitioned coupling) に分けられる。現在では、対象とする問題に応じて、強連成と弱連成は使い分けがなされている。

強連成では、流体と固体は陰的に離散化される。流体と固体の系を支配する非線形方程式はそれぞれ線形化され、流体固体界面での連続条件と平衡条件が成り立つように1つの連成した系として Newton-Raphson 法などで解かれる。強連成は強健な性質を有しているために、流体と固体が大きく相互作用する問題で非常に有効である。しかし、連成した系の連立1次方程式における行列が大きくなるために、計算機記憶容量が膨大になり、大規模計算が難しい。国外では Bathe のグループの研究が有名である。例えば、コラプシブルチューブ内の圧力伝達、燃料ポンプの弁の移動などが Rugonyi らによって2次元解析されている^(1.37)。また、国内では久田のグループの研究が有名である。例えば、血液と人工心臓内のダイアフラムの相互作用が張らによって3次元解析されている^(1.38)。また、非圧縮超弾性体とモデル化された心臓左心室を流れる血流の3次元解析が渡辺らによって行われている^(1.25)。

弱連成では、流体の流れ場を固体と独立に計算する。得られた流れ場の結果を用いて界面の境界条件を更新し、固体の変位場を流体と独立に計算する。得られた固体の変位場の結果を用いて界面の境界条件を更新し、再び流体の流れ場を固体と独立に計算する。そして、両方の系が界面での平衡条件を近似的に満足するまでこの計算を繰り返す。既存の流体の有限要素法コードと固体の有限要素法コードをそれぞれ用いることができるので、新しい有限要素法コードを作成する必要がないことが大きな利点である。強連成法のように、計算機記憶容量を必要とせず大規模な計算を行うのに向いている。しかし、流体と固体の相互作用が大きい問題では反復計算による収束性が悪いことが知られている。弱連成による研究例は多い。例えば、Heil らは静止したコラプシブルチューブ内の定常 Stokes 流を解析している^(1.39)。張らは、Newton-Raphson 法の反復中に流体と固体の線形化された式を独立に解く修正弱連成法を提案し、空中に吊るされた膜のはためき問題を対象に強連成法との比較を行っている^(1.40)。

流体と固体の連成解析が可能な汎用解析ソフトとして、ANSYS や ADINA などが挙げられる。ANSYS では弱連成が採用されていて、ADINA では問題に応じて強連成と弱連成が選ぶことができる。ADINA を用いた研究例として、Tang らによる非圧縮超弾性体とモデル化した動脈内の血流解析が挙げられる^(1.24)。

1.5.2 時間積分法

流体と固体の連成解析において、時間積分に陰的な解法がよく用いられている。次の時刻の流体系の離散化式と固体系の離散化式を評価すると、計算の安定性が良くなる。また、時間刻み幅を大きく設定でき、弾性体の高次の振動数モードを減衰できる。このような計算方法の研究として、前述した Bathe らの方法^(1.37)や久田らの方法^(1.38)による強連成解析を挙げることができる。流体系の行列と固体系の行列の処理が必要となり、ある程度の計算機負荷が必要となる。

弾性体の高振動数を扱う問題には時間刻み幅の制約が厳しくなるが、ゴムなどのような軟らかい固体の低振動数の問題には、計算機負荷を軽減するために陽的な解法を利用することができる。このような計算方法の研究として、石原による既存コードの再利用性に着目した方法^(1.41)を挙げることができる。石原の方法では、流体解析に速度と圧力の分離型の有限要素法を利用しているので、解くべき連立一次方程式は流体の圧力に関する Poisson 方程式のみである。陽的な反復計算を繰り返すことによって、次の時刻の流体と固体の連成系の離散化式を満足するような強連成アルゴリズムとなっている。

1.5.3 要素の補間次数

強連成では、流体固体界面での適合条件を満足する必要がある。固体では変形形状が曲面を表すことが可能な点や曲げ変形における shear locking の回避の点から変位に高次の要素を用いることが多い。固体変位に高次要素を用いる場合には、流速にも高次要素を用いる必要がある。Ghattas らは空気と Hooke 弾性体を強連成させて、空気の定常流による静止弾性円筒の形状の変化を計算している^{(1.42)(1.43)}。この解析では、固体変位に2次要素を用い、流速と圧力にそれぞれ2次要素と1次要素を用いている。非圧縮性流体の非定常解析では、速度に1次の補間関数をよく用いる。そのために、強連成による動解析において、固体変位に高次の要素を用いる場合には、流速に高次要素を用いる必要がある。Kayser-Herold らは、Least-Squares 有限要素法を用いて、流体と固体に高次要素を導入した強連成法を提案している^(1.44)。全体の係数行列が対称になることは、Least-Squares 有限要素法の大きな利点である。しかし、この研究では定式化の困難さのために固体の幾何学的な非線形性が導入されていない。

1.6 本論文の目的

前述した背景から、本研究で重要な点は3つ考えられる。1つ目は、軟らかい固体の固有振動数は小さいことである。そのため、流体と軟らかい固体の強連成解析には、計算機

負荷を軽減することが可能である陽的な解法を用いることが可能である。計算の安定性を良くするために、次の時刻において強連成となるように陽的な反復計算を導入する必要がある。2つ目は、強連成における流速と固体変位への高次要素の適用である。これにより、強連成において固体変位の精度を向上させることが可能となる。そこで、非圧縮性流体解析に高次要素を適用可能なように拡張された、分離型の有限要素法の Poisson ソルバーを構築する必要がある。3つ目は、低容量・高速計算に適した非圧縮超弾性体の動解析方法である。そこで、非圧縮超弾性体解析の非圧縮拘束条件である「変形こう配の第3不変量が1であること」と流体解析の非圧縮拘束条件である「速度の発散が零であること」の等価性を考慮して、非圧縮性流体解析で用いられる速度と圧力の分離型の有限要素法を非圧縮超弾性体解析へ利用する。非圧縮超弾性解析に非圧縮性流体解析で用いられる分離型の有限要素法が用いられた研究は見られない。

本研究では、低容量・高速計算に適した流体の分離型の有限要素法の1つである GSMAC 有限要素法に基づいて、流体と軟らかい固体との連成解析が可能な計算機負荷の小さい計算方法を提案して、その有効性に対する検証を行うことが目的である。流体解析と固体・構造解析は別々の分野として発展してきたために、計算方法に異なる点が多い。現在用いられる解析方法や汎用ソフトは、固体・構造解析の視点から解かれているものが多く、流体解析で用いられてきた計算方法を取り入れているものは少ない。

1.7 本論文の構成

第2章では、新しい優対角近似法と同時緩和法を提案して、要素の種類に制限されない GSMAC 有限要素法の Poisson ソルバーを提案する。様々な要素の種類を用いた cavity 内強制対流の解析において、その検証を行う。分離型の有限要素法に高次要素を用いる場合に、収束性の良い速度と圧力の補間関数の組み合わせを見つける。第3章では、非圧縮超弾性体の分離型の有限要素法を構築する。非圧縮超弾性体解析で分離型の有限要素法を用いることができれば、従来用いられてきた混合型有限要素法より計算負荷を小さくできる。流体解析で用いられる分離型を固体解析に適用するためには、Euler 表示の基礎方程式に Lagrange 法を導入し、振動問題を高精度に解析できる Newmark- β 法を導入することが重要となる。この2つの考えを考慮した非圧縮超弾性体の GSMAC 有限要素法を用いて、ひずみが大きい引張変形やせん断変形が十分に解析でき、特異性を持つブロックの押し込み変形から要素の種類による精度の違いを調べる。第4章では、GSMAC-ALE 有限要素法に基づいた流体と固体の連成計算方法を提案する。流体と固体の相互作用が大きい場合に用いられる従来の強連成法は陰的な解法であるために、次の時刻の流体と固体の連成系全体の行列計算に対して計算機の負荷が大きい。しかし、本研究で提案する方法は、次の時刻の流体と固体の連成系の離散化式を陽的な反復計算で評価するために、計算機の負荷を

小さくできる。剛体に付属した弾性板の渦励振問題を解析することによって、この計算方法を検証する。弾性板が Hooke 弾性体の場合の計算結果を他者の結果と比較し、計算方法の有効性を検討する。また、弾性板が非圧縮超弾性体の場合の計算でも、本研究で提案した連成方法が有効であることが示される。第5章は、本論文の結言である。本研究で得られた知見をまとめると共に、今後の課題について言及する。本研究の構成を図 1.1 に示す。

第1章の参考文献

- (1.1) 矢川元基編, 構造工学ハンドブック, 丸善, (2004).
- (1.2) 東京大学生産技術研究所 計算科学技術連携研究センター編, 文部科学省 IT プログラム「戦略的基盤ソフトウェアの開発」ワークショップ (第1回講演集) -次世代流体解析・次世代構造解析-, (2002).
- (1.3) 奥田洋司, 中島研吾, 並列有限要素解析 クラスタコンピューティング, **I**, 培風館, (2004).
- (1.4) 神部勉編, ながれの事典, 丸善, (2004).
- (1.5) 棚橋隆彦, 基礎流体力学入門, コロナ社, (1976).
- (1.6) 久田俊明, 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, 丸善, (1992).
- (1.7) 菊池文雄, 有限要素法の数理, 培風館, (1994).
- (1.8) Gresho, P.M. and Sani, R.L., Incompressible Flow and The Finite Element Method, **2**, John Wiley & Sons, LTD (1999).
- (1.9) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., The Finite Element Method Fluid Dynamics, **3**, Butterworth-Heinemann (2000).
- (1.10) Harlow, F.H. and Welch, J.E., Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Physics of Fluids*, **8-12**, (1965), pp. 2182–2189.
- (1.11) Amsden, A.A. and Harlow, F.H., A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculation, *Journal of Computational Physics*, **6**, 1970, pp. 322–325.
- (1.12) 棚橋隆彦, 斉藤恒洋, 粘性流体の非定常流れの数値解析アルゴリズム (GSMAC 法について), 京都大学数理解析研究所講究録, **548**, (1985), pp. 122–146.
- (1.13) Tanahashi, T., Okanaga, H., and Saito, T., GSMAC finite element method for unsteady incompressible Navier-Stokes equations at high Reynolds numbers *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **11**, (1990), pp. 479–499.
- (1.14) 棚橋隆彦, 流れの有限要素法解析, **I**, (1997), 朝倉書店.
- (1.15) Hirt, C.W. and Cook, J.L., Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain, *Journal of Computational Physics*, **10**, 1972, pp. 324–340.

- (1.16) 日本数値流体力学有限要素法委員会編, 有限要素法による流れの数値シミュレーション, Springer, (1998).
- (1.17) 棚橋隆彦, 流れの有限要素法解析, **II**, 朝倉書店, (1997).
- (1.18) 棚橋隆彦, 電磁熱流体の数値解析, 森北出版, (1995).
- (1.19) 槇原孝文, 流れの有限要素法における高精度安定化手法の構築, 慶應義塾大学博士論文, (1999).
- (1.20) 藤枝忠臣, 粘弾性体の解析に適した数値解析手法に関する研究 (流体と固体の統一解法に向けて), 慶應義塾大学博士論文, (1999).
- (1.21) 木倉宏成, 武口達, 澤田達男, 棚橋隆彦, Arbitrary Lagrangian-Eulerian GSMAC 有限要素法による非線形水面波の数値解析, 機論 B, **57**-540, (1991), pp. 152–159.
- (1.22) 藤枝忠臣, 和田壮士, 棚橋隆彦, 流体と固体の統一解法の構築, 機論 B, **65**-640, (1999), pp. 31–38.
- (1.23) 久田俊明, 野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, (1995).
- (1.24) Tang, D., Yang, C., Huang, Y., and Ku D.N., Wall stress and strain analysis using a three-dimensional thick-wall model with fluid-structure interactions for blood flow in carotid arteries with stenoses, *Computers & Structures*, **72**, (1999), pp. 341–356.
- (1.25) Watanabe, H., Hisada, T., Sugiura, S., Okada, J., and Fukunari, H., Computer simulation of blood flow, left ventricular wall motion and their interrelationship by fluid-structure interaction finite element method *JSME International Journal Series C*, **45**-4, (2002), pp. 1003–1012.
- (1.26) 孫智剛, 牧野内昭武, 超弾性体と静止液体の連成解析 FEM プログラムの開発及び眼球網膜剥離手術のシミュレーションへの応用, 機論 A, **68**-666, (2002), pp. 357–363.
- (1.27) CAD/CAE 研究会, 有限要素解析ソフト ANSYS 工学解析入門, 理工学社, (2001).
- (1.28) Bathe, K.J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, (1996).
- (1.29) J.T. オーデン著, 山田嘉昭訳, 非線形連続体の有限要素法, **2**, 培風館, (1980).
- (1.30) Duffett, G. and Reddy, B. D., The analysis of incompressible hyperelastic bodies by the finite element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **41**, (1983), pp. 105–120.

- (1.31) Sussman, T. and Bathe, K.J., A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis, *Computers & Structures*, **26**, (1987), pp. 357–409.
- (1.32) Yamada, T. and Kikuchi, H., A mixed finite element method for large deformation analysis of incompressible hyperelastic materials, *Theoretical and Applied Mechanics*, **39**, (1990), pp. 61–73.
- (1.33) 渡辺浩志, 久田俊明, 超弾性有限要素法による kinking 解析, 機論 A, **59**-557, (1993), pp. 183–190.
- (1.34) 渡辺浩志, 久田俊明, 超弾性体の混合型有限要素法に関する基礎的検討, 機論 A, **62**-595, (1996), pp. 745–752.
- (1.35) Bonet, J., Wood, R.D., Mahaney, J., and Heywood, P., Finite element analysis of air supported membrane structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, (2000), pp. 579–595.
- (1.36) 松田昭博, 渡部修, Updated Lagrange 法による超弾性体の応力速度と有限要素定式化, 機論 A, **68**-669, (2002), pp. 701–708.
- (1.37) Rugonyi, S. and Bathe, K.J., On finite analysis of fluid flows fully coupled with structural interactions, *CMES*, **2**-2, (2001), pp. 195–212.
- (1.38) 張群, 久田俊明, 構造座屈と領域大変動を伴う流体・構造連成問題の ALE 有限要素解析, 機論 A, **67**-654, (2001), pp. 11–18.
- (1.39) Heil, M., Stokes flow in an elastic tube - a large-displacement fluid-structure interaction problem, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **28**, (1998), pp. 243–265.
- (1.40) 張群, 久田俊明, 流体・構造連成有限要素法における連成手法に関する検討, 機論 A, **67**-662, (2001), pp. 1555–1562.
- (1.41) 石原大輔, 構造陽解法と流体準陽解法に基づく効率的流体構造強連成解法, 機論 B, **70**-700, (2004), pp. 3098–3105.
- (1.42) Ghattas, O. and Li, X., A variational finite element method for stationary nonlinear fluid-solid interaction, *Journal of Computational Physics*, **121**, (1995), pp. 347–356.

- (1.43) Ghattas, O. and Li, X., Domain decomposition methods for sensitivity analysis of a nonlinear aeroelasticity problem, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, **11**, (1998), pp. 113–130.
- (1.44) Kayser-Herold, O. and Matthies, G.M., Least squares finite element methods for fluid-structure interaction problems, *Computers & Structures*, **83**, (2005), pp. 191–207.

第1章の表および図

図 1.1 本研究の構成

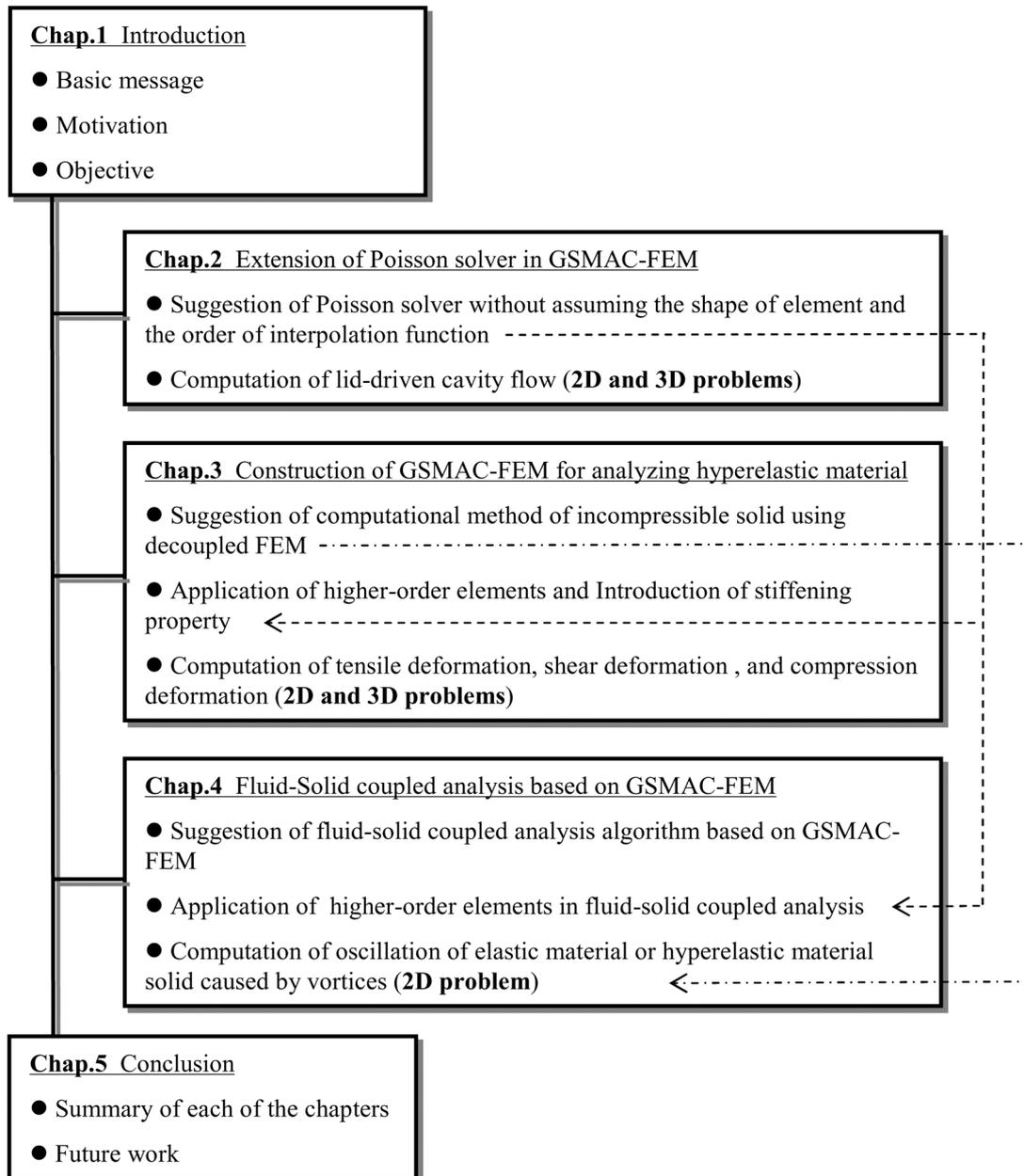


Fig.1.1 The composition of the present study

第2章 GSMAC有限要素法における Poisson ソルバーの拡張

2.1 第2章の緒言

非圧縮性流体の定常解析では、Lagrange 未定乗数法やペナルティ法で解く場合が多く、速度と圧力の補間関数の組み合わせが多くの研究者によって研究されている。これは、線形解析における inf-sup 条件^(2.1)によって圧力の次数を速度の次数より下げる必要があることが知られているからである。一方、非圧縮性流体の非定常解析では、差分法の MAC (Marker and Cell) 系解法^{(2.2)(2.3)}から発展した速度と圧力の分離型の有限要素法がよく用いられる。分離型の有限要素法において陰的に解く必要があるのは、圧力または修正速度ポテンシャルの離散化 Poisson 方程式のみである。それ故に、速度と補間関数と圧力の補間関数を用いて得られる Poisson 方程式の離散化精度が重要となる。4 角形要素や 6 面体要素が用いられる場合には、速度の補間関数を 1 次、圧力の補間関数を要素内一定にする。3 角形要素や 4 面体要素が用いられる場合には、圧力の補間関数を要素内一定にすると、Poisson 方程式の離散化に対する精度が非常に悪くなる。そこで、速度の補間関数と圧力の補間関数を 1 次にして、圧力の安定化項を加えるなどの工夫を行う必要がある。プログラムが煩雑になる点も理由の 1 つであると考えられるが、分離型の有限要素法にその他の要素を適用した研究例はほとんどなく、分離型の有限要素法に適した速度と圧力の補間関数の組み合わせは調べられていない。

速度に高次の補間関数を用いれば、流体解析で重要となる高 Reynolds 数の場合における対流項の計算の精度を向上させることができる。鄭らの研究では、rotating cone 問題において 4 角形の 1 次要素を使用した場合と 4 角形の 2 次要素を使用した場合について移流方程式の解の精度が比較されている^(2.4)。その結果として、解析領域内の節点数が少なくても、4 角形の 2 次要素の方が精度が良いことが示されている。また、1 次要素が同程度の精度を得るには、2 次要素より計算機記憶容量と計算時間が多く必要であることも確認することができる。このことは、3 角形要素でも同様に評価できる。様々な工学の分野で現れる流体と固体の相互作用が強い連成解析では、精度向上のために固体変位に高次の補間関数を用いる場合には流速にも高次の補間関数を用いる必要がある^(2.7)。しかし、非圧縮性流体解析では、速度の補間関数を高次にすると圧力の補間関数を考える必要がある。

そのために、速度と圧力の分離型の有限要素法に適した速度と圧力の補間関数の組み合わせを調べることは重要であると考えられる。

GSMAC 有限要素法 (Generalized-Simplified MAC-FEM) ^(2.5) は、差分法の HSMAC 法 (Highly Simplified MAC method) ^(2.6) を拡張した速度と圧力の分離型の有限要素法である。分離型の有限要素法のホットスポットである離散化 Poisson 方程式の計算において、その全体係数行列は優対角近似され、速度と圧力の同時緩和法 ^(2.5) が用いられる。これによって、全体係数行列の非対角成分を作成する手順を省くことができ、速度場が連続の式を満足しているかを収束判定として用いることができる。しかし、GSMAC 有限要素法における Poisson ソルバーでは、用いる要素の種類が制限されるという欠点がある。2次元解析では4角形要素のみが用いられ、3次元解析では6面体要素のみが用いられる。また、速度に1次、圧力に要素内一定の補間関数が用いられる。GSMAC 有限要素法では、圧力の補間関数が要素内一定であるという仮定から Poisson 方程式に対する重み関数を1とし、Gauss の発散定理より2階微分を1階微分へ変更する。そして、要素形状が4角形または6面体であるという仮定から修正速度ポテンシャルの法線方向微分の境界積分を要素重心に評価された圧力修正量と要素境界を用いて評価する。このような離散化 Poisson 方程式の優対角近似方法のために、要素の種類は制限される。

本研究では、低容量・高速計算に適した分離型有限要素法の1つである GSMAC 有限要素法に数種類の要素を適用できるように、Poisson ソルバーを拡張することを目的とする。従来の GSMAC 有限要素法の計算速度をできるだけ損なわず、離散化 Poisson 方程式における全体係数行列の非対角成分を作成する手順を経由しないソルバーを構築する。このとき、要素の形状と補間関数の次数を仮定せずに、離散化 Poisson 方程式を優対角近似する方法を提案し、圧力の節点が有する衛星要素を意識することによって圧力の節点に対する速度と圧力の同時緩和法を提案する。要素形状を仮定しないことで、複雑形状周りの流れ場解析における要素生成が容易な3角形要素または4面体要素を用いた GSMAC 有限要素法を構築できる。補間関数の次数を仮定しないことで、速度と圧力の同時緩和反復の収束性が良い補間関数の組み合わせを見つけることができれば、高次要素を用いることによる計算時間の増加を少なくすることが可能になり、3角形要素と4角形要素のような混合メッシュを用いて計算することも可能になる。また、係数行列の解析的表示を用いることで、高次の補間関数を用いた場合でも要素係数行列全体を記憶した場合より記憶容量を少なくする。提案する計算方法の検証として、Reynolds 数 5000 の2次元 cavity 内強制対流と Reynolds 数 1000 の3次元 cavity 内強制対流を扱い、様々な種類の要素について精度、記憶容量、計算速度、同時緩和反復回数の評価を行う。

2.2 基礎方程式系

2.2.1 基礎方程式

非圧縮 Newton 流体の基礎方程式を以下に示す.

(連続の式)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1a)$$

(Cauchy の運動方程式)

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} \quad (2.1b)$$

(非圧縮 Newton 流体の構成方程式)

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.1c)$$

(変形速度-速度こう配関係式)

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \overleftarrow{\nabla}) \quad (2.1d)$$

ただし, ∇ は空間座標のナブラ, \mathbf{v} は速度, ρ は密度, $\partial/\partial t$ は空間時間微分, \mathbf{T} は Cauchy 応力テンソル, \mathbf{b} は単位質量当たりの体積力, p は圧力, \mathbf{I} は恒等テンソル, μ は粘性係数, \mathbf{D} は変形速度テンソルである. 本研究では, 上述の基礎方程式を以下のように書き直す.

(連続の式)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.2a)$$

(運動方程式)

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{b} \quad (2.2b)$$

(粘性応力-速度こう配関係式)

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \overleftarrow{\nabla}) \quad (2.2c)$$

2.2.2 境界条件

基礎方程式の定義域となる領域を Ω , その境界を $\partial\Omega = \Gamma$ とする. 基礎方程式を解くために, 以下のような境界条件が与えられる.

(基本境界条件)

$$\mathbf{v} = \underline{\mathbf{v}} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (2.3a)$$

(自然境界条件)

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \\ &= \underline{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.3b)$$

ただし, \mathbf{t} は真応力ベクトルであり, \mathbf{n} は領域の外向き単位法線ベクトルであり, Γ_1 と Γ_2 の間には

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma \quad \text{and} \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi \quad (2.4)$$

のような関係がある.

2.3 数値計算法

基礎方程式を GSMAC 有限要素法によって離散化する. 時間に関しては, MAC 系解法の時間進行に従って離散化する. また, 空間に関しては, Galerkin 有限要素法により離散化する. 時間と空間に関して離散化した後に, 離散化 Poisson 方程式を優対角近似する.

2.3.1 MAC 系解法の時間進行

基礎方程式において速度を陽的に圧力を陰的に時間的に離散化すると, 以下に示す半離散化式が得られる.

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0 \quad (2.5a)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} &= -\rho \mathbf{v}^n \cdot \nabla \mathbf{v}^n + \rho \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n \mathbf{v}^n \right) \cdot \nabla \mathbf{v}^n \right\} \\ &\quad - \nabla p^{n+1} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^n + \rho \mathbf{b}^n \end{aligned} \quad (2.5b)$$

$$\boldsymbol{\tau}^n = \mu (\nabla \mathbf{v}^n + \mathbf{v}^n \overleftarrow{\nabla}) \quad (2.5c)$$

ただし, 右辺第 2 項は BTD(Balancing Tensor Diffusivity) 項^(2.8) であり, 1 次の陽的な時間進行をする有限要素法で生じる数値振動を抑制する効果がある. さらに, 次の時刻の非圧縮拘束条件式(2.5a) を用いて, 式(2.5b) と式(2.5c) を以下のように分離する.

(予測子ステップの式)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} &= -\rho \mathbf{v}^n \cdot \nabla \mathbf{v}^n + \rho \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n \mathbf{v}^n \right) \cdot \nabla \mathbf{v}^n \right\} \\ &\quad - \nabla p^n + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^n + \rho \mathbf{b}^n \end{aligned} \quad (2.6a)$$

(Poisson 方程式)

$$\nabla^2 \phi_p = \rho \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.6b)$$

(修正子ステップの式)

$$\rho \mathbf{v}^{n+1} = \rho \tilde{\mathbf{v}} - \nabla \phi_p \quad (2.6c)$$

$$p^{n+1} = p^n + \frac{\phi_p}{\Delta t} \quad (2.6d)$$

ただし、 ϕ_p は修正速度ポテンシャルである。

2.3.2 Galerkin 有限要素法による離散化

有限要素を Ω_e ($1 \leq e \leq n_E$) として、要素境界を $\Gamma_e = \partial\Omega_e$ ($1 \leq e \leq n_E$) とする。速度 \mathbf{v} は形状関数 N_i ($1 \leq i \leq n_N$) で補間され、圧力 p は形状関数 N_l^p ($1 \leq l \leq n_N^p$) で補間される。

(速度の補間関数)

$$\mathbf{v} = N_i \mathbf{v}_i \quad (2.7a)$$

(圧力の補間関数)

$$p = N_l^p p_l \quad (2.7b)$$

単位質量当たりの体積力 \mathbf{b} は、速度と同じ形状関数によって補間される。各要素において、節点 i が局所節点 α に対応し、節点 l が局所節点 a に対応する。

(速度の補間関数)

$$\mathbf{v} = N_\alpha \mathbf{v}_\alpha \quad \text{in } \Omega_e \quad (2.8a)$$

(圧力の補間関数)

$$p = N_a^p p_a \quad \text{in } \Omega_e \quad (2.8b)$$

Galerkin 有限要素法で離散化すると、以下に示されるような各要素に対する有限要素法離散化式が得られる。

(予測子ステップの式)

$$\begin{aligned} \rho \bar{M}_{\alpha\beta} \frac{\tilde{\mathbf{v}}_\beta - \mathbf{v}_\beta^n}{\Delta t} = & -\rho \langle \mathbf{v} \rangle_e^n \cdot \mathbf{A}_{\alpha\beta} \mathbf{v}_\beta^n - \rho \frac{\Delta t}{2} \langle \mathbf{v} \rangle_e^n \langle \mathbf{v} \rangle_e^n : \mathbf{D}_{\alpha\beta} \mathbf{v}_\beta^n \\ & + \mathbf{C}_{\alpha\beta} p_b^n - \mu \{ (\text{tr} \mathbf{D}_{\alpha\beta}) \mathbf{I} + (\mathbf{D}_{\alpha\beta})^T \} \cdot \mathbf{v}_\beta^n + \rho \bar{M}_{\alpha\beta} \mathbf{b}_\beta^n \\ & + \rho \oint_{\Gamma_e} N_\alpha \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n \mathbf{v}^n \right) \cdot \nabla \mathbf{v}^n d\Gamma + \oint_{\Gamma_e} N_\alpha \mathbf{t}^n d\Gamma \end{aligned} \quad (2.9a)$$

(Poisson 方程式)

$$\mathbf{C}_{\beta\alpha} \cdot \langle \nabla \phi_p \rangle_\beta = \rho \mathbf{C}_{\beta\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta \quad (2.9b)$$

$$\langle \nabla \phi_p \rangle_\alpha = - \frac{\sum_{e=1}^{n_E} (\mathbf{C}_{\alpha b} \phi_{pb})}{\sum_{e'=1}^{n_E} \int_{\Omega_{e'}} N_\alpha d\Omega} \quad (2.9c)$$

(修正子ステップの式)

$$\rho \bar{M}_{\alpha\beta} \mathbf{v}_\beta^{n+1} = \rho \bar{M}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \mathbf{C}_{\alpha b} \phi_{pb} - \oint_{\Gamma_e} N_\alpha (\phi_p \mathbf{n}) d\Gamma \quad (2.9d)$$

$$p_a^{n+1} = p_a^n + \frac{\phi_{pa}}{\Delta t} \quad (2.9e)$$

ただし、係数行列は

(質量行列)

$$M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega_e} N_\alpha N_\beta d\Omega \quad (2.10a)$$

(移流行列)

$$\mathbf{A}_{\alpha\beta} = \int_{\Omega_e} N_\alpha \nabla N_\beta d\Omega \quad (2.10b)$$

(こう配行列)

$$\mathbf{C}_{\alpha b} = \int_{\Omega_e} (\nabla N_\alpha) N_b^p d\Omega \quad (2.10c)$$

(拡散行列)

$$\mathbf{D}_{\alpha\beta} = \int_{\Omega_e} \nabla N_\alpha \nabla N_\beta d\Omega \quad (2.10d)$$

で表され、 $\bar{M}_{\alpha\beta}$ は質量の集中化

$$\rho \bar{M}_{\alpha\beta} = \begin{cases} \rho \int_{\Omega_e} N_\alpha d\Omega & \text{for } \alpha = \beta \\ 0 & \text{for } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (2.11)$$

から得られる集中質量行列である。また、 $\langle \mathbf{v} \rangle_e$ は

$$\langle \mathbf{v} \rangle_e = \frac{1}{\Omega_e} \left(\int_{\Omega_e} N_\alpha d\Omega \right) \mathbf{v}_\alpha \quad (2.12)$$

より求まる速度の要素平均値である。

2.3.3 優対角近似法

式(2.9c)を式(2.9b)に代入して、全要素についての和を考えると、離散化 Poisson 方程式

$$-\sum_{e=1}^{n_E} \left[\mathbf{C}_{\beta a} \cdot \left\{ \sum_{e'=1}^{n_E} (\mathbf{C}_{\beta c} \phi_{pc}) / \sum_{e''=1}^{n_E} \int_{\Omega_{e''}} N_{\beta} d\Omega \right\} \right] = \sum_{e=1}^{n_E} (\rho \mathbf{C}_{\beta a} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\beta}) \quad (2.13)$$

を得る. 式(2.13)の左辺において ϕ_{pl} の係数に着目すると、優対角近似における Poisson 方程式の対角成分の係数 λ_l は

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_E} \left\{ \mathbf{C}_{\beta a} \cdot \left(\sum_{e'=1}^{n_E} \mathbf{C}_{\beta a} / \sum_{e''=1}^{n_E} \int_{\Omega_{e''}} N_{\beta} d\Omega \right) \right\} \\ &= \left(\sum_{e=1}^{n_E} \int_{\Omega_e} N_a^p d\Omega \right) \lambda_l \quad (a: \text{no sum}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

より求まる. 速度の形状関数 N_i が 1 次関数, 圧力の形状関数 N_l^p が要素内一定の関数の場合には, 従来の GSMAC 有限要素法の係数 λ_l (2.5) とは一致せず, 中山らが剛体着水現象の有限要素法解析で用いた係数 λ_l (2.9) に一致する.

2.3.4 速度と圧力の同時緩和法

優対角近似より速度と圧力の同時緩和法を適用すると, 各要素に対する Poisson 方程式と修正子ステップの式は以下に示されるように書き直される.

(Poisson 方程式)

$$-\left(\int_{\Omega_e} N_a^p d\Omega \right) \lambda_a \tilde{\phi}_{pa}^{(k)} = \rho \mathbf{C}_{\beta a} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\beta}^{(k)} \quad (a: \text{no sum}) \quad (2.15a)$$

(修正子ステップの式)

$$\rho \bar{M}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{v}}_{\beta}^{(k+1)} = \rho \bar{M}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{v}}_{\beta}^{(k)} + \mathbf{C}_{\alpha b} \tilde{\phi}_{pb}^{(k)} - \oint_{\Gamma_e} N_{\alpha} (\tilde{\phi}_p^{(k)} \mathbf{n}) d\Gamma \quad (2.15b)$$

$$\tilde{p}_a^{(k+1)} = \tilde{p}_a^{(k)} + \frac{\tilde{\phi}_{pa}^{(k)}}{\Delta t} \quad (2.15c)$$

差分法の HSMAC 法における速度と圧力の同時緩和法が離散化 Poisson 方程式の SOR 法による反復計算と等価であることは証明されている (2.10). 以下では, この証明を有限要素法に拡張することによって, 本研究で用いる GSMAC 有限要素法においても, 同様のことが成り立つことを示す. まず, 以下に示す節点平均値を定義する.

(速度の節点平均値)

$$\langle f \rangle_i \equiv \frac{\sum_{e=1}^{n_E} \int_{\Omega_e} N_{\alpha} f d\Omega}{\sum_{e'=1}^{n_E} \int_{\Omega_{e'}} N_{\alpha} d\Omega} \quad (2.16a)$$

(圧力の節点平均値)

$$\langle g \rangle_l \equiv \frac{\sum_{e=1}^{n_E} \int_{\Omega_e} N_a^p g d\Omega}{\sum_{e'=1}^{n_E} \int_{\Omega_{e'}} N_a^p d\Omega} \quad (2.16b)$$

次に、式(2.15b)の全要素について和をとり、両辺に形状関数 N_i を乗じると、その i について総和は

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{v}}^{(k)} - \nabla \tilde{\phi}_p^{(k)} \quad (2.17)$$

となる。式(2.17)における両辺の発散を節点平均すると

$$\langle \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}^{(k+1)} \rangle_l = \langle \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}^{(k)} \rangle_l - \langle \nabla \cdot \nabla \tilde{\phi}_p^{(k)} \rangle_l \quad (2.18)$$

となり、

$$\langle \nabla N_\beta \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta^{(k+1)} \rangle_l = \langle \nabla N_\beta \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta^{(k)} \rangle_l - \langle \nabla N_\beta \cdot \langle \nabla \tilde{\phi}_p^{(k)} \rangle_\beta \rangle_l \quad (2.19)$$

が成り立つ。式(2.15a)の全要素についての和を

$$(-\lambda_l) \tilde{\phi}_{pl}^{(k)} = \langle \nabla N_\beta \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta^{(k)} \rangle_l \quad (l: \text{no sum}) \quad (2.20)$$

のように表し、これを式(2.19)に代入すると

$$(-\lambda_l) \tilde{\phi}_{pl}^{(k+1)} = -\left\{ \langle \nabla N_\beta \cdot \langle \nabla \tilde{\phi}_p^{(k)} \rangle_\beta \rangle_l - (-\lambda_l) \tilde{\phi}_{pl}^{(k)} \right\} \quad (l: \text{no sum}) \quad (2.21)$$

のように変形できる。一方、式(2.13)は

$$\langle \nabla N_\beta \cdot \langle \nabla \phi_p \rangle_\beta \rangle_l = \langle \nabla N_\beta \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle_l \quad (2.22)$$

のように表すことができる。式(2.22)の左辺における ϕ_{pl} の係数が $-\lambda_l$ であることを考慮して、式(2.22)に Jacobi 法を適用すると

$$\begin{aligned} (-\lambda_l) \phi_{pl}^{(k+1)} &= \langle \nabla N_\beta \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle_l \\ &\quad - \left\{ \langle \nabla N_\beta \cdot \langle \nabla \phi_p^{(k)} \rangle_\beta \rangle_l - (-\lambda_l) \phi_{pl}^{(k)} \right\} \quad (l: \text{no sum}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる。ここで、

$$\phi_p^{(0)} = 0 \quad \text{and} \quad \phi_p^{(k+1)} - \phi_p^{(k)} = \tilde{\phi}_p^{(k)} \quad (2.24)$$

のような関係を用いると、式(2.23)から式(2.21)を得ることができる。よって、同時緩和法が Jacobi 法による反復計算と等価になるように λ_l を決定することが示される。圧力が要素内一定の関数で補間されている場合には、式(2.15)を要素ごとに順次計算すると、同

時緩和法は Gauss-Seidel 法による反復計算と等価になる．さらに，式(2.15a)の右辺に加速係数を乗じると，SOR 法による反復計算と等価になる．本研究では，図 2.1 のような圧力の節点 l が有する衛星要素を意識することで，式(2.15)を圧力の節点ごとに順次計算する．以下に，その具体的な計算手順を示す．

- (1) 圧力の節点 $l = 1$ に着目する．
- (2) 圧力の節点 l が有する衛星要素内の速度から速度の発散の圧力の節点平均値 $\tilde{D}_l^{(k+1)}$ を求める．
- (3) $\tilde{D}_l^{(k+1)}$ より修正速度ポテンシャル $\tilde{\phi}_{pl}^{(k+1)}$ を求める．
- (4) $l = 2, 3, \dots, n_N^p$ のように (2) と (3) の計算を繰り返す．
- (5) $l = 1, 2, \dots, n_N^p$ について $\tilde{D}_l^{(k+1)}$ を求め，その最大値 $\max_{1 \leq l \leq n_N^p} \tilde{D}_l^{(k+1)}$ を求める．
- (6) $\max_{1 \leq l \leq n_N^p} \tilde{D}_l^{(k+1)}$ が収束判定基準 ϵ_1 より小さいならば，速度と圧力を時間進行する．

上述した速度と圧力の同時緩和法による反復計算を含む GSMAC 有限要素法のアルゴリズムの流れを図 2.2 に示す．圧力の補間関数を従来の要素内一定より高次にするために，圧力の定義位置が要素重心から節点と変更され，それに伴うアルゴリズムの拡張が必要となる．

2.4 2次元 cavity 内強制対流の解析

cavity 内強制対流は，流れ場計算のベンチマーク問題としてよく用いられる問題である．Ghia らにより Reynolds 数 10000 までの 2次元問題の定常解が求められている^(2.11)．Ghia らは，流れ関数の Poisson 方程式と渦度輸送方程式を差分法で解き，Reynolds 数 10000 では 256×256 の格子を用いている．連続の式と Navier-Stokes 方程式を差分法や有限要素法で解く場合も，Reynolds 数 10000 での定常解が得られることも示されている^{(2.12)~(2.14)}．しかし，離散化方法や格子数で壁面近傍の流れ場が定常状態になりにくい場合もあるために，Reynolds 数 10000 の流れ場は数値計算で層流解が得られる限界であると考えられている．

検証問題として，定常な層流解が得られる Reynolds 数 5000 の 2次元 cavity 内強制対流を扱う．図 2.3 に解析モデルと境界条件を示す．ただし， L_r は代表長さ， V_r は代表速度である．このとき，Reynolds 数は $Re = \rho V_r L_r / \mu$ で定義される．また，初期条件は解析領域内で $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ， $p = 0$ である．流れ場が十分に発達しているとみすことができる $t = 100 L_r / V_r$ における cavity 内の中心線に沿った速度分布の精度に関して， 256×256 の格子を用いた

Ghia らの結果と比較する。解析領域は、図 2.4 と図 2.5 に示される 4 角形要素または 3 角形要素によって分割される。ただし、 P_1P_0 要素、 $P_1^+P_0$ 要素では離散化 Poisson 方程式が適切な形ではなく、速度場がほとんど発達しないので、これらは用いられない。さらに、 Q_2 要素の要素内節点がない $Q_2^{(8)}$ 要素では式(2.11)の対角成分の $\alpha = 1, 2, 3, 4$ が負の値となり、 P_2 要素では式(2.11)の対角成分の $\alpha = 1, 2, 3$ が零となる。そのため、本研究では $Q_2^{(8)}$ 要素と P_2 要素を用いない。様々な要素を用いて、要素数が同じ場合の速度分布の精度、計算機記憶容量、計算時間、速度と圧力の同時緩和反復回数について比較する。本研究では、同時緩和反復の加速係数は全ての計算の場合において 1 とする。

2.4.1 4 角形要素のメッシュを用いた解析

従来の GSMAC 有限要素法 (Q_1Q_0 要素)^(2.5)、中山らの方法 (Q_1Q_0 要素)^(2.9)、提案した計算方法 (Q_1Q_1 要素、 Q_2Q_0 要素、 Q_2Q_1 要素)を用いて、5 種類の場合で解析する。ただし、従来の GSMAC 有限要素法と中山らの方法の違いは離散化 Poisson 方程式の優対角近似法のみである。また、計算データを表 2.1 に示す。ただし、 $\sqrt{S_e}$ は要素面積の平方根である。要素数 30×30 の解析メッシュと要素数 60×60 の解析メッシュを図 2.6 に示す。図 2.6 のように cavity 内中央から壁面へ向けてメッシュを等比数列的に生成する。このとき、同時緩和反復計算の収束性が悪くなるように公比を大きく設定する。

$t = 100 L_r / V_r$ における cavity 内中心線に沿った速度分布を図 2.7 に示す。また、図 2.8 と図 2.9 に流線を示し、図 2.10 と図 2.11 に圧力分布を示す。同じ空間精度であるために、従来の GSMAC 有限要素法の速度場と中山らの方法の速度場と一致する。また、 Q_1Q_1 要素の場合の速度も従来の GSMAC 有限要素法の解とほとんど一致するが、cavity 内全域に圧力振動が生じる。その振動は要素分割を細かくしてもあまり抑制されないことから、 Q_1Q_1 要素による離散化 Poisson 方程式が大きく影響していることがわかる。この不安定性の原因は、離散化 Poisson 方程式において隣の節点同士の関係が疎になるためである。差分法の MAC 系解法では、この不安定性を生じさせないように速度と圧力の格子点を一致させないスタッガード格子が用いられる。 Q_2Q_0 要素の場合の速度は、研究で用いた 4 角形要素の中で精度が最も悪い。 Q_1Q_0 要素に比べて、自由度数が多いにもかかわらず、中央での流れが小さくなる。この場合の圧力を見ると、cavity 内中央での圧力差が非常に小さいことがわかる。 Q_2Q_1 要素の場合の速度分布は、図 2.4 の 4 角形要素の中で最も Ghia らの解に近いことがわかる。速度分布が最大値または最小値となる近くで精度の差が大きい。 Q_2Q_1 要素の場合には、 Q_1Q_1 要素の場合のように圧力振動も見られない。図 2.12 と図 2.13 に同時緩和反復回数の時刻歴を示す。図 2.12 と図 2.13 を見ると、従来の GSMAC 有限要素法の反復回数は中山らの反復回数と比べて収束前では多いが、収束後では少ないことがわかる。この収束性の違いは、優対角近似の方法の違いのみによって現れるもので

あり、メッシュを細かくすることによってその違いは顕著に現れる。図 2.12 と図 2.13 より、 Q_2Q_1 要素の場合の反復回数は収束前でも収束後でも比較的少ないことがわかる。表 2.2 に中山らの方法を 1 とした場合における計算機最大記憶容量の比率と計算時間の比率を示す。 Q_2Q_1 要素の計算で要素数を 4 倍にすると、記憶容量の比率は増大するが、計算時間の比率は減少する。計算時間の比率の減少は、同時緩和反復の収束性が大きく影響しているからであり、計算が大規模になるほど計算時間に大きく影響すると考えられる。 Q_2Q_1 要素による提案した方法では、自由度が多いために精度の向上し、同時緩和反復の収束性も比較的良いことを確認できる。用いた要素の中では、 Q_2Q_1 要素は速度と圧力の補間関数の組み合わせが良い要素である。

2.4.2 3 角形要素のメッシュを用いた解析

提案した計算方法 (P_1P_1 要素, $P_1^+P_1$ 要素, $P_2^+P_0$ 要素, $P_2^+P_1$ 要素) を用いて、4 種類の場合で解析する。また、計算データを表 2.3 に示す。要素数 $30 \times 30 \times 2$ の解析メッシュと要素数 $60 \times 60 \times 2$ の解析メッシュを図 2.14 に示す。これらのメッシュは、図 2.6 のメッシュにおける 4 角形要素を 2 個の 3 角形要素に等分割したものである。

$t = 100 L_r/V_r$ における cavity 内中心線に沿った速度分布を図 2.15 に示す。また、図 2.16 と図 2.17 に流線を示し、図 2.18 と図 2.19 に圧力分布を示す。 P_1P_1 要素の場合の速度では、 $x = 0.5$ 上で数値的な振動が見られる。また、 P_1P_1 要素の場合では、cavity 内全域で圧力振動が生じる。 $P_2^+P_0$ 要素の場合の速度は cavity 内中央で小さく、精度が悪い。 $P_2^+P_0$ 要素の場合には、 Q_2Q_0 要素の場合と同様に、cavity 内中央で圧力差が非常に小さい。速度分布が最大値または最小値となる近くでの解の精度を比較すると、 $P_2^+P_1$ 要素の場合の速度分布が本研究で用いた 3 角形要素の組み合わせの中で最も Ghia らの解に近く、 $P_1^+P_1$ 要素の場合の速度分布は、 $P_2^+P_1$ 要素の場合に次いで近い。 $P_1^+P_1$ 要素または $P_2^+P_1$ 要素の場合、要素数が $30 \times 30 \times 2$ のメッシュでは圧力振動が生じる部分があるが、要素数が $60 \times 60 \times 2$ のメッシュではその圧力振動は非常に小さくなる。図 2.20 と図 2.21 に同時緩和反復回数の時刻歴を示す。 $P_1^+P_1$ 要素と $P_2^+P_1$ 要素の反復回数は、収束前でも収束後でも比較的少ないことがわかる。このことより、同時緩和反復の収束性の向上は、圧力の補間関数の次数を上げたことが原因であると考えられる。表 2.4 に $P_1^+P_1$ 要素による提案した計算方法を 1 とした場合における計算機最大記憶容量の比率と計算時間の比率を示す。 $P_2^+P_1$ 要素の計算で要素数を 4 倍にすると、記憶容量の比率と計算時間の比率は共に増大する。用いた要素の中では、 $P_1^+P_1$ 要素と $P_2^+P_1$ 要素は速度と圧力の補間関数の組み合わせが良い要素である。

2.4.3 4角形要素と3角形要素の混合メッシュを用いた解析

同時緩和反復の収束性と要素の適合条件を考慮して、4角形の Q_2Q_1 要素と3角形の $P_2^+P_1$ 要素による提案した計算方法によって、混合メッシュを用いた解析を行う。また、計算データを表 2.5 に示す。要素数 1350 の解析メッシュと要素数 5400 の解析メッシュを図 2.22 に示す。メッシュは、4角形要素と3角形要素の接する中心線で速度分布を検討できるように生成される。

$t = 100 L_r/V_r$ における cavity 内中心線に沿った速度分布を図 2.23 に示す。また、図 2.24 に流線を示し、図 2.25 に圧力分布を示す。図 2.23 を見ると、混合メッシュを用いても速度の分布は数値的に振動することもなく、 Q_2Q_1 要素の解と $P_2^+P_1$ 要素の解と比べて速度の精度も損なわれないことがわかる。図 2.25 を見ると、要素数が 1350 のメッシュでは圧力振動が生じる部分があるが、これは用いた要素数の少なさが原因であり、要素数が 5400 のメッシュではその圧力振動は非常に小さくなる。図 2.26 に同時緩和反復回数時刻歴を示す。図 2.26 より、反復回数は収束前でも収束後でも少なく、混合メッシュを用いたことによって反復回数の増加も起こらないことがわかる。

2.5 3次元 cavity 内強制対流の解析

検証問題として、Reynolds 数 1000 の3次元 cavity 内強制対流を扱う。図 2.27 に解析モデルと境界条件を示す。ただし、 L_r は代表長さ、 V_r は代表速度である。このとき、Reynolds 数は $Re = \rho V_r L_r / \mu$ で定義される。また、初期条件は解析領域内で $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 、 $p = 0$ である。流れ場が十分に発達しているとみすことが可能な $t = 100 L_r/V_r$ における cavity 内の中心線に沿った速度分布の精度に関して、 $30 \times 30 \times 30$ の格子を用いた Ku らの結果^(2.15) と比較する。解析領域は、図 2.28 と図 2.29 に示される6面体要素または4面体要素によって分割される。ただし、2次元 cavity 内強制対流を十分に解析できる要素のみを用いる。また、 P_2 要素の重心に気泡関数を有する P_2^+ では、式(2.11)の対角成分の $\alpha = 1, 2, 3, 4$ が負の値となる。そのため、本研究では P_2 要素における4面と重心に気泡関数を有する P_2^{++} 要素^(2.16) を用いる。様々な要素を用いて、要素数が同じ場合の速度分布の精度、計算機記憶容量、計算時間、速度と圧力の同時緩和反復回数について比較する。ただし、同時緩和反復の加速係数は全ての計算の場合において1とする。

2.5.1 6面体要素のメッシュを用いた解析

従来の GSMAC 有限要素法 (Q_1Q_0 要素)^(2.5)、中山らの方法 (Q_1Q_0 要素)^(2.9)、提案した計算方法 (Q_2Q_1 要素) を用いて、3種類の場合で解析する。また、計算データを表 2.6

に示す. ただし, $\sqrt[3]{V_e}$ は要素体積の立方根である. 要素数 $10 \times 5 \times 10$ の解析メッシュ, 要素数 $20 \times 10 \times 20$ の解析メッシュ, 要素数 $30 \times 15 \times 30$ の解析メッシュを図 2.30 に示す. 図 2.30 のように cavity 内中央から壁面へ向けてメッシュを等比数列的に生成するとき, 同時緩和反復計算の収束性が悪くなるように公比を大きく設定する.

$t = 100 L_r / V_r$ における cavity 内中心線に沿った速度分布を図 2.31 に示す. 同じ空間精度であるために, 従来の GSMAC 有限要素法の速度場と中山らの方法の速度場と一致する. Q_2Q_1 要素の場合の速度分布は, 自由度が多いために最も Ku らの解に近いことが最大値または最小値となる近くを見るとわかる. 図 2.32 に $30 \times 15 \times 30$ 要素を用いた場合の圧力分布を示す. 速度こう配の大きい部分で圧力振動が生じる部分があるが, 2次元 cavity 内強制対流の解析で見られた要素数の少なさが原因している振動であり, 領域全体に発生するような補間関数の組み合わせが原因である振動ではない. 図 2.33, 図 2.34, 図 2.35 に同時緩和反復回数の時刻歴を示す. 2次元 cavity 内強制対流の場合と同様に, 従来の GSMAC 有限要素法の反復回数は中山らの反復回数と比べて, 収束前では多いが, 収束後では少ないことがわかる. $30 \times 15 \times 30$ 要素を用いた場合には, 中山らの反復回数は数百回程度まで増大することがあるのに対して, Q_2Q_1 要素の場合の反復回数は多くて 10 回程度である. 表 2.7 に中山らの方法を 1 とした場合における計算機最大記憶容量の比率と計算時間の比率を示す. Q_2Q_1 要素の計算で要素数を 8 倍, 27 倍にすると, 記憶容量の比率は増大するが, 計算時間の比率は減少することが確認できる.

2.5.2 4 面体要素のメッシュを用いた解析

提案した計算方法 ($P_1^+P_1$ 要素, $P_2^+P_1$ 要素) を用いて, 2 種類の場合で解析する. また, 計算データを表 2.8 に示す. 要素数 $10 \times 5 \times 10 \times 12$ の解析メッシュと要素数 $20 \times 10 \times 20 \times 12$ の解析メッシュを図 2.36 に示す. これらのメッシュは, 図 2.30 のメッシュにおける 6 面体要素を 12 個の 4 面体要素に等分割したものである.

$t = 100 L_r / V_r$ における cavity 内中心線に沿った速度分布を図 2.37 に示す. 同じ空間精度であるために, 従来の GSMAC 有限要素法の速度場と中山らの方法の速度場と一致する. $P_2^+P_1$ 要素の場合の速度分布は, $P_1^+P_1$ 要素の場合と比較して, 自由度が多いために Ku らの解に近いことが確認できる. 図 2.38 に 48000 要素を用いた場合の圧力分布を示す. 要素数の少なさのために, 圧力は滑らかな分布とはならないが, 補間関数の組み合わせが原因となるような圧力振動が生じない. 図 2.39 と図 2.40 に同時緩和反復回数の時刻歴を示す. 2次元解析の場合と同様に, $P_1^+P_1$ 要素と $P_2^+P_1$ 要素の反復回数は, 収束前でも収束後でも比較的少ないことが確認できる. 表 2.9 に $P_1^+P_1$ 要素による提案した計算方法を 1 とした場合における計算機最大記憶容量の比率と計算時間の比率を示す. $P_2^+P_1$ 要素の計算で要素数を 8 倍にすると, 記憶容量の比率と計算時間の比率は多少減少する. $P_1^+P_1$

要素に対する収束前における反復回数のおおきな違いが原因であると考えられる。

2.6 第2章の結言

本研究では、要素形状と補間次数に制限されないように拡張された Poisson ソルバーによって cavity 内強制対流を十分解析でき、離散化 Poisson 方程式を優対角近似する方法と圧力の節点に対する速度と圧力の同時緩和法の妥当性が確認できた。このとき、要素係数行列自身を記憶せずに、係数行列の解析的表示を利用することで、要素内節点数の増大による記憶容量の増大をできるだけ抑えた。

2次元 cavity 内強制対流の解析において、4角形要素では Q_2Q_1 要素、3角形要素では $P_1^+P_1$ 要素と $P_2^+P_1$ 要素のように、同時緩和反復の収束性が良い補間関数の組み合わせを見つけることができた。高次要素である Q_2Q_1 要素による解析において、要素数が増えると、中山らの方法に対する記憶容量の比は増大したが、速度と圧力の同時緩和反復の回数が計算速度に大きく影響するために計算時間の比は減少した。さらに、解の精度と同時緩和反復の収束性から、 $P_1^+P_1$ 要素と $P_2^+P_1$ 要素は本研究で用いた3角形要素の中で実用的な要素の組み合わせであることがわかった。4角形の Q_2Q_1 要素と3角形の $P_2^+P_1$ 要素による混合メッシュも用いることが可能であることも示したが、2次元 cavity 内強制対流ではその利点を十分に示すことができなかった。それ故に、複雑形状を有する流れ場の解析に対する混合メッシュを用いた本手法の有効性を示すことが今後の課題である。

2次元 cavity 内強制対流の解析の結果を考慮して、6面体要素では Q_2Q_1 要素、4面体要素では $P_1^+P_1$ 要素と $P_2^{++}P_1$ 要素を用いて、3次元 cavity 内強制対流の解析を行った。2次元 cavity 内強制対流の解析で得られた知見と同様に、速度に2次要素を適用したことによる中心軸上の速度分布の精度向上、圧力に1次要素を適用したことによる同時緩和反復計算における収束性の向上が3次元解析でも確認でき、拡張した Poisson ソルバーを3次元解析へ十分に適用できることがわかった。

第2章の参考文献

- (2.1) 菊池文雄, 有限要素法の数理, 培風館, (1994).
- (2.2) Harlow, F. H. and Welch, J. E., Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Physics of Fluids*, **8-12**, (1965), pp. 2182–2189.
- (2.3) Amsden, A. A. and Harlow, F. H., A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculation, *Journal of Computational Physics*, **6**, (1970), pp. 322–325.
- (2.4) 鄭忠孝, 小川裕司, 棚橋隆彦, 有限要素法における移流項の高精度計算 (双2次要素を用いた GSMAC-FEM), 日本機械学会論文集, B編, **67-653**, (2001), pp. 1–8.
- (2.5) 棚橋隆彦, 流れの有限要素法解析, **I**, 朝倉書店, (1997).
- (2.6) Hirt, C. W. and Cook, J. L., Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain, *Journal of Computational Physics*, **10**, (1972), pp. 324–340.
- (2.7) Ghattas, O. and Li, X., A variational finite element method for stationary non-linear fluid-solid interaction, *Journal of Computational Physics*, **121**, (1995), pp. 347–356.
- (2.8) 棚橋隆彦, 流れの有限要素法解析, **II**, 朝倉書店, (1997).
- (2.9) 中山司, 森峰男, 剛体着水現象の数値解析のためのマーカー粒子法を併用した有限要素法, 日本機械学会論文集, B編, **61-583**, (1995), pp. 169–176.
- (2.10) 名古屋靖一郎, 非圧縮流体計算におけるソレノイダル空間への射影法, 日本応用数理学会論文誌, **10-3**, (2000), pp. 273–282.
- (2.11) Ghia, U., Ghia, K. H. and Shin, C. T., High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *Journal of Computational Physics*, **48**, (1982), pp. 387–411.
- (2.12) 日本数値流体力学会有限要素法委員会編, 有限要素法による流れの数値シミュレーション, Springer, (1998).
- (2.13) Jiang, B., *The Least-Squares Finite Element Method*, Springer, (1998).
- (2.14) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The Finite Element Method Fluid Dynamics*, **3**, Butterworth-Heinemann, (2000).

- (2.15) Ku, H. C., Hirsh, R. S. and Taylor, T. D., A pseudospectral method for solution of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of Computational Physics*, **70**, (1987), pp. 439–462.
- (2.16) 渡辺浩志, 久田俊明, 混合型有限要素解の安定条件の数値解析, 日本機械学会論文集, A編, **62-595**, (1996), pp. 745–752.

第2章の表および図

- 表 2.1 Reynolds 数 5000 の計算データ (4 角形要素)
- 表 2.2 計算機の記憶容量と CPU 時間 (4 角形要素)
- 表 2.3 Reynolds 数 5000 の計算データ (3 角形要素)
- 表 2.4 計算機の記憶容量と CPU 時間 (3 角形要素)
- 表 2.5 Reynolds 数 5000 の計算データ (4 角形要素と 3 角形要素)
- 表 2.6 Reynolds 数 1000 の計算データ (6 面体要素)
- 表 2.7 計算機の記憶容量と CPU 時間 (6 面体要素)
- 表 2.8 Reynolds 数 1000 の計算データ (4 面体要素)
- 表 2.9 計算機の記憶容量と CPU 時間 (4 面体要素)
-
- 図 2.1 圧力の節点 l ($1 \leq l \leq n_N^p$) が有する衛星要素
- 図 2.2 GSMAC-FEM のアルゴリズムの流れ図
- 図 2.3 2次元 cavity 内強制対流の解析モデルと境界条件
- 図 2.4 4 角形要素
- 図 2.5 3 角形要素 (+: 気泡関数)
- 図 2.6 解析メッシュ (4 角形要素)
- 図 2.7 $t = 100 L_r/V_r$ における水平・垂直な中心線に沿った速度分布 (4 角形要素)
- 図 2.8 $t = 100 L_r/V_r$ における流線 (30×30 の 4 角形要素)
- 図 2.9 $t = 100 L_r/V_r$ における流線 (60×60 の 4 角形要素)
- 図 2.10 $t = 100 L_r/V_r$ における圧力分布 (30×30 の 4 角形要素)
- 図 2.11 $t = 100 L_r/V_r$ における圧力分布 (60×60 の 4 角形要素)
- 図 2.12 同時緩和反復の時間履歴 (30×30 の 4 角形要素)
- 図 2.13 同時緩和反復の時間履歴 (60×60 の 4 角形要素)
- 図 2.14 解析メッシュ (3 角形要素)
- 図 2.15 $t = 100 L_r/V_r$ における水平・垂直な中心線に沿った速度分布 (3 角形要素)
- 図 2.16 $t = 100 L_r/V_r$ における流線 ($30 \times 30 \times 2$ の 3 角形要素)
- 図 2.17 $t = 100 L_r/V_r$ における流線 ($60 \times 60 \times 2$ の 3 角形要素)
- 図 2.18 $t = 100 L_r/V_r$ における圧力分布 ($30 \times 30 \times 2$ の 3 角形要素)
- 図 2.19 $t = 100 L_r/V_r$ における圧力分布 ($60 \times 60 \times 2$ の 3 角形要素)
- 図 2.20 同時緩和反復の時間履歴 ($30 \times 30 \times 2$ の 3 角形要素)
- 図 2.21 同時緩和反復の時間履歴 ($60 \times 60 \times 2$ の 3 角形要素)
- 図 2.22 解析メッシュ (4 角形要素と 3 角形要素)

- 図 2.23 $t = 100 L_r/V_r$ における水平・垂直な中心線に沿った速度分布 (4 角形要素と 3 角形要素)
- 図 2.24 $t = 100 L_r/V_r$ における流線 (4 角形要素と 3 角形要素)
- 図 2.25 $t = 100 L_r/V_r$ における圧力分布 (4 角形要素と 3 角形要素)
- 図 2.26 同時緩和反復の時間履歴 (4 角形要素と 3 角形要素)
- 図 2.27 3次元 cavity 内強制対流の解析モデルと境界条件
- 図 2.28 6 面体要素
- 図 2.29 4 面体要素 (+: 気泡関数)
- 図 2.30 解析メッシュ (6 面体要素)
- 図 2.31 $t = 100 L_r/V_r$ における中心線に沿った速度分布 (6 面体要素)
- 図 2.32 $t = 100 L_r/V_r$ における圧力分布 ($y = L_r/2$, $30 \times 15 \times 30$ の 6 面体要素)
- 図 2.33 同時緩和反復の時間履歴 ($10 \times 5 \times 10$ の 6 面体要素)
- 図 2.34 同時緩和反復の時間履歴 ($20 \times 10 \times 20$ の 6 面体要素)
- 図 2.35 同時緩和反復の時間履歴 ($30 \times 15 \times 30$ の 6 面体要素)
- 図 2.36 解析メッシュ (4 面体要素)
- 図 2.37 $t = 100 L_r/V_r$ における中心線に沿った速度分布 (4 面体要素)
- 図 2.38 $t = 100 L_r/V_r$ における圧力分布 ($y = L_r/2$, 48000 の 4 面体要素)
- 図 2.39 同時緩和反復の時間履歴 (6000 の 4 面体要素)
- 図 2.40 同時緩和反復の時間履歴 (48000 の 4 面体要素)

Table 2.1 Calculation data at $Re = 5000$ (quadrilateral elements)

n_E	30×30 (900)	60×60 (3600)
$\min_{1 \leq e \leq n_E} \sqrt{S_e}$	$5.800 \times 10^{-3} L_r$	$2.755 \times 10^{-3} L_r$
Δt	$2.0 \times 10^{-3} L_r/V_r$	$1.0 \times 10^{-3} L_r/V_r$
ϵ_1	$1.0 \times 10^{-3} V_r/L_r$	$1.0 \times 10^{-3} V_r/L_r$

Table 2.2 The ratios of memory capacity and CPU time (quadrilateral elements)(a) 30×30 elements

	Conventional (Q_1Q_0 element)	Nakayama et al. (Q_1Q_0 element)	Present (Q_1Q_1 element)	Present (Q_2Q_0 element)	Present (Q_2Q_1 element)
Memory	0.994	1.0	1.131	1.470	1.745
CPU time	0.574	1.0	3.535	1.900	2.258

(b) 60×60 elements

	Conventional (Q_1Q_0 element)	Nakayama et al. (Q_1Q_0 element)	Present (Q_1Q_1 element)	Present (Q_2Q_0 element)	Present (Q_2Q_1 element)
Memory	0.992	1.0	1.200	1.713	2.124
CPU time	0.761	1.0	3.904	1.478	1.830

Table 2.3 Calculation data at $Re = 5000$ (triangular elements)

n_E	$30 \times 30 \times 2$ (1800)	$60 \times 60 \times 2$ (7200)
$\min_{1 \leq e \leq n_E} \sqrt{S_e}$	$4.101 \times 10^{-3} L_r$	$1.948 \times 10^{-3} L_r$
Δt	$1.0 \times 10^{-3} L_r/V_r$	$4.0 \times 10^{-4} L_r/V_r$
ϵ_1	$1.0 \times 10^{-3} V_r/L_r$	$1.0 \times 10^{-3} V_r/L_r$

Table 2.4 The ratios of memory capacity and CPU time (triangular elements)

(a) $30 \times 30 \times 2$ elements

	Present (P_1P_1 element)	Present ($P_1^+P_1$ element)	Present ($P_2^+P_0$ element)	Present ($P_2^+P_1$ element)
Memory	0.815	1.0	1.271	1.352
CPU time	15.547	1.0	2.012	2.157

(b) $60 \times 60 \times 2$ elements

	Present (P_1P_1 element)	Present ($P_1^+P_1$ element)	Present ($P_2^+P_0$ element)	Present ($P_2^+P_1$ element)
Memory	0.765	1.0	1.345	1.444
CPU time	61.528	1.0	2.441	2.588

Table 2.5 Calculation data at $Re = 5000$ (quadrilateral and triangular elements)

n_E	1350	5400
$\min_{1 \leq e \leq n_E} \sqrt{S_e}$	$4.101 \times 10^{-3} L_r$	$1.948 \times 10^{-3} L_r$
Δt	$1.0 \times 10^{-3} L_r/V_r$	$4.0 \times 10^{-4} L_r/V_r$
ϵ_1	$1.0 \times 10^{-3} V_r/L_r$	$1.0 \times 10^{-3} V_r/L_r$

Table 2.6 Calculation data at $Re = 1000$ (hexahedral elements)

n_E	$10 \times 5 \times 10$ (500)	$20 \times 10 \times 20$ (4000)	$30 \times 15 \times 30$ (13500)
$\min_{1 \leq e \leq n_E} \sqrt[3]{V_e}$	$2.154 \times 10^{-2} L_r$	$9.166 \times 10^{-3} L_r$	$5.800 \times 10^{-3} L_r$
Δt	$5.0 \times 10^{-3} L_r/V_r$	$2.0 \times 10^{-3} L_r/V_r$	$1.0 \times 10^{-3} L_r/V_r$
ϵ_1	$1.0 \times 10^{-3} V_r/L_r$	$1.0 \times 10^{-3} V_r/L_r$	$1.0 \times 10^{-3} V_r/L_r$

Table 2.7 The ratios of memory capacity and CPU time (hexahedral elements)(a) $10 \times 5 \times 10$ elements

	Conventional (Q_1Q_0 element)	Nakayama et al. (Q_1Q_0 element)	Present (Q_2Q_1 element)
Memory	0.994	1.0	3.484
CPU time	0.610	1.0	7.813

(b) $20 \times 10 \times 20$ elements

	Conventional (Q_1Q_0 element)	Nakayama et al. (Q_1Q_0 element)	Present (Q_2Q_1 element)
Memory	0.991	1.0	5.059
CPU time	0.205	1.0	4.182

(c) $30 \times 15 \times 30$ elements

	Conventional (Q_1Q_0 element)	Nakayama et al. (Q_1Q_0 element)	Present (Q_2Q_1 element)
Memory	0.989	1.0	5.360
CPU time	0.082	1.0	2.046

Table 2.8 Calculation data at $Re = 1000$ (tetrahedral elements)

n_E	6000	48000
$\min_{1 \leq e \leq n_E} \sqrt[3]{V_e}$	$9.408 \times 10^{-3} L_r$	$4.003 \times 10^{-3} L_r$
Δt	$5.0 \times 10^{-4} L_r/V_r$	$2.0 \times 10^{-4} L_r/V_r$
ϵ_1	$1.0 \times 10^{-3} V_r/L_r$	$1.0 \times 10^{-3} V_r/L_r$

Table 2.9 The ratios of memory capacity and CPU time (tetrahedral elements)

(a) 6000 elements

	Present ($P_1^+P_1$ element)	Present ($P_2^{++}P_1$ element)
Memory	1.0	2.383
CPU time	1.0	5.614

(b) 48000 elements

	Present ($P_1^+P_1$ element)	Present ($P_2^{++}P_1$ element)
Memory	1.0	2.464
CPU time	1.0	5.588

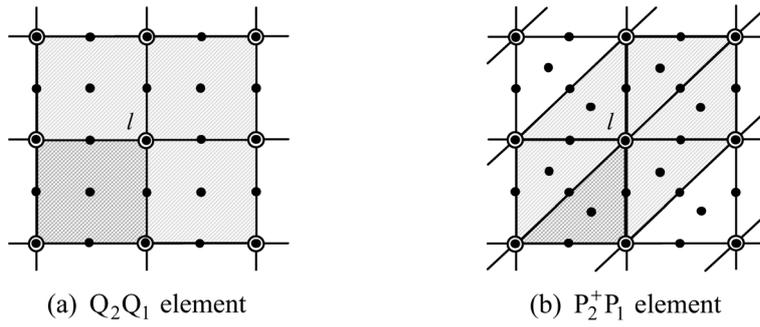


Fig.2.1 Satellite elements of a pressure node l ($1 \leq l \leq n_N^p$)

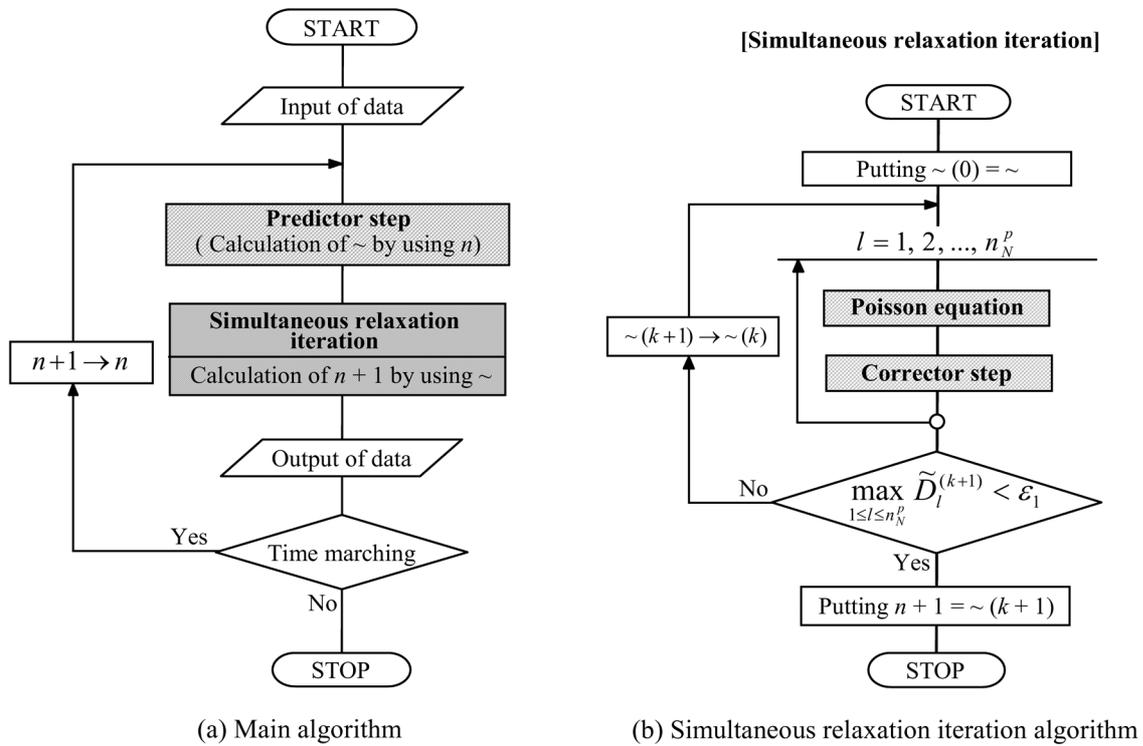


Fig.2.2 The flowchart of GSMAC-FEM algorithm

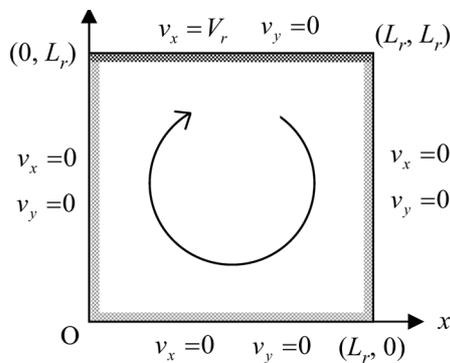


Fig.2.3 Analysis model and boundary conditions of two-dimensional lid-driven cavity flow

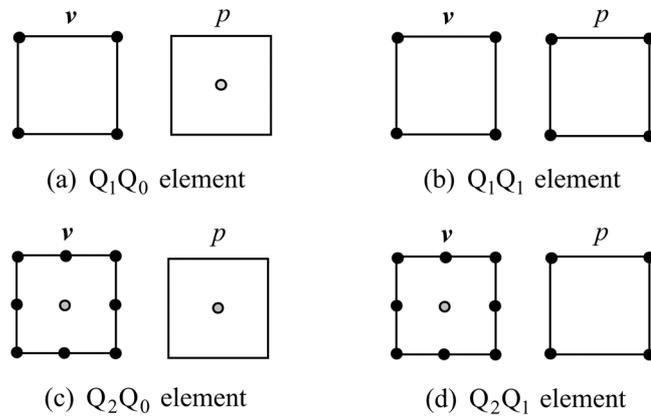


Fig.2.4 Quadrilateral elements

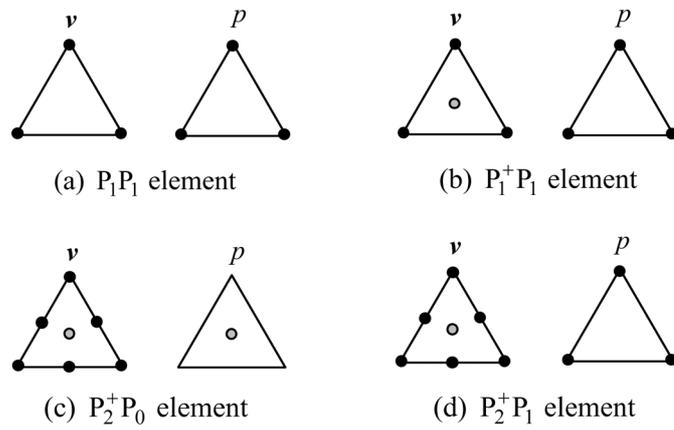


Fig.2.5 Triangular elements (+: bubble function)

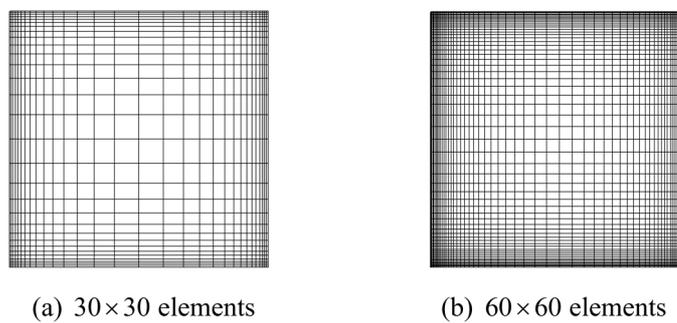


Fig.2.6 Analysis meshes (quadrilateral elements)

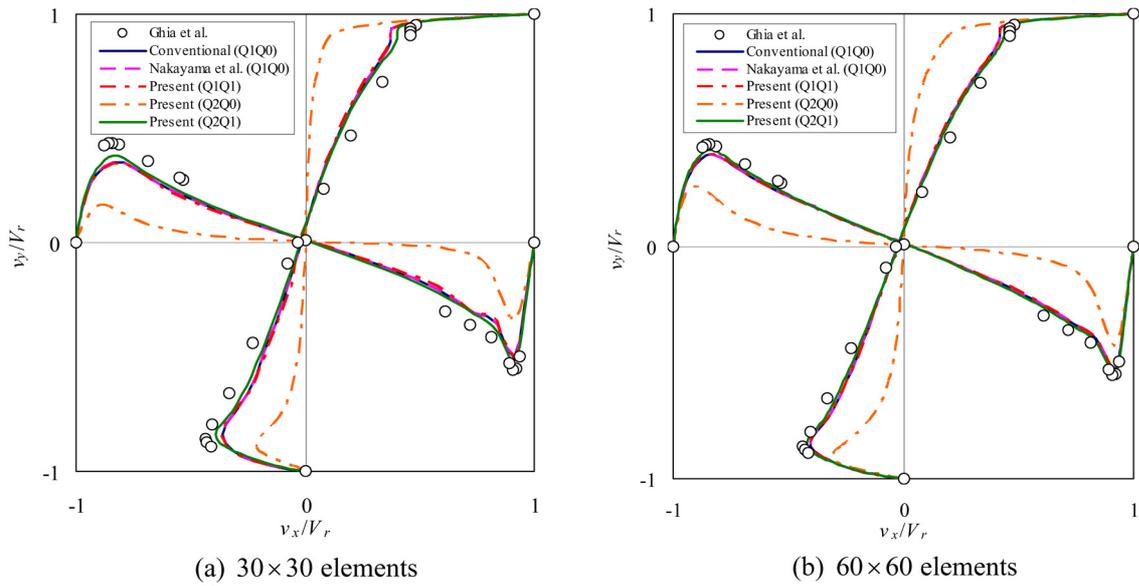


Fig.2.7 Velocity distributions along vertical or horizontal center-line at $t = 100 L_r/V_r$ (quadrilateral elements)

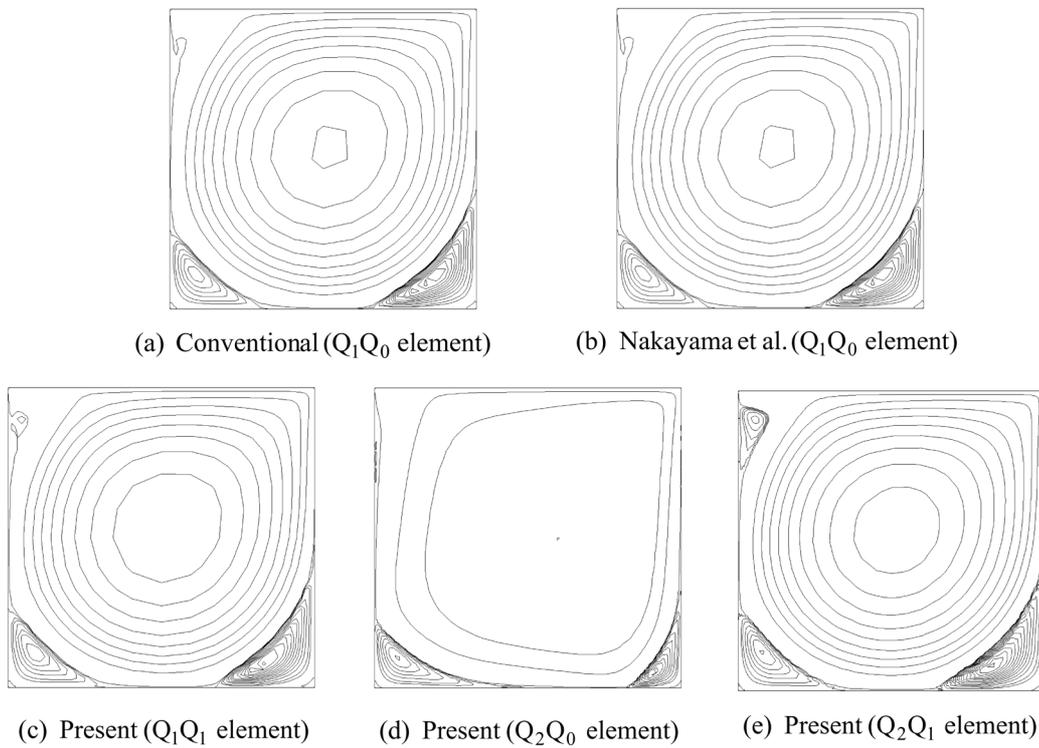


Fig.2.8 Stream lines at $t = 100 L_r/V_r$ (30×30 quadrilateral elements)

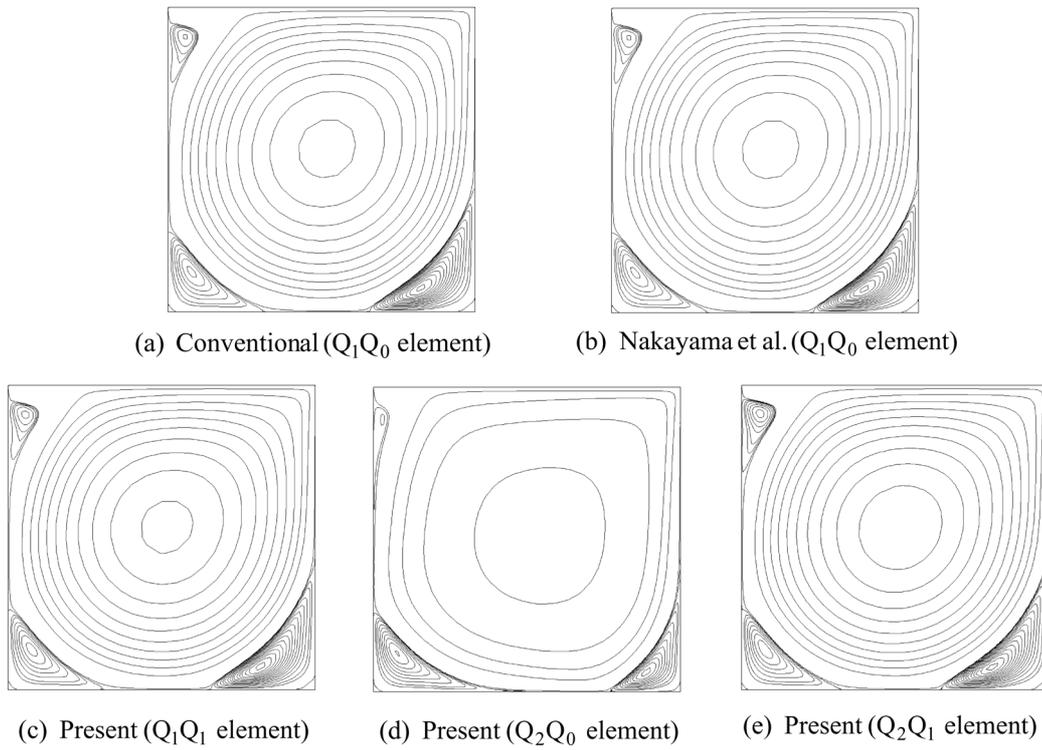


Fig.2.9 Stream lines at $t = 100 L_r / V_r$ (60×60 quadrilateral elements)

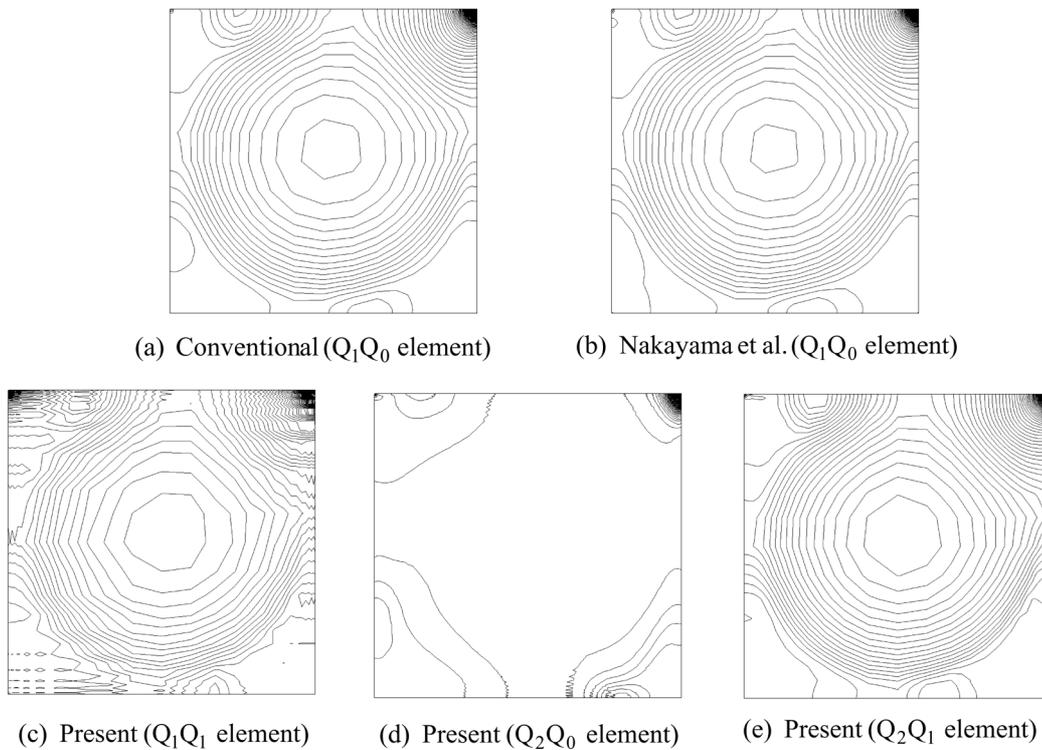


Fig.2.10 Pressure contours at $t = 100 L_r / V_r$ (30×30 quadrilateral elements)

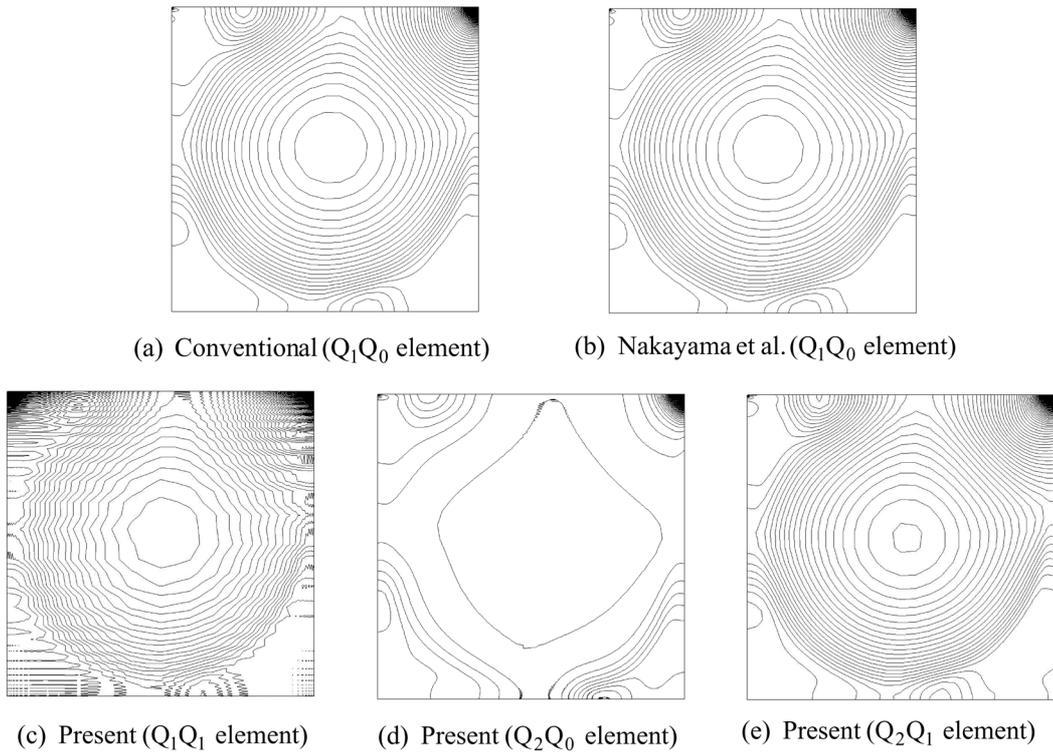


Fig.2.11 Pressure contours at $t = 100 L_r/V_r$ (60×60 quadrilateral elements)

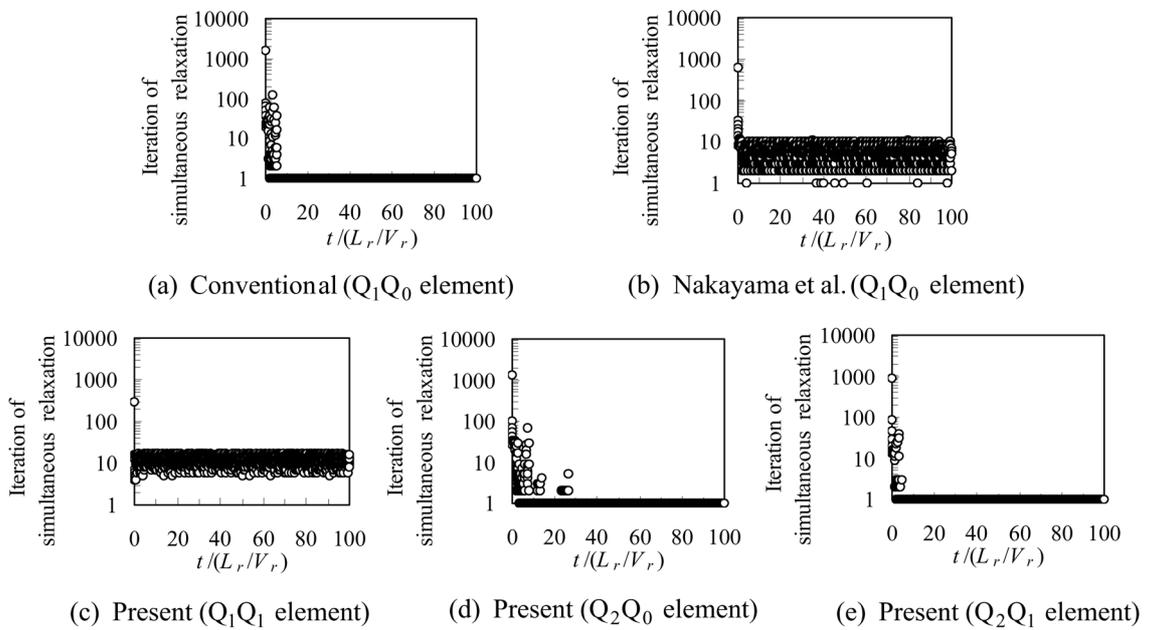


Fig.2.12 Time histories of iteration of simultaneous relaxation (30×30 quadrilateral elements)

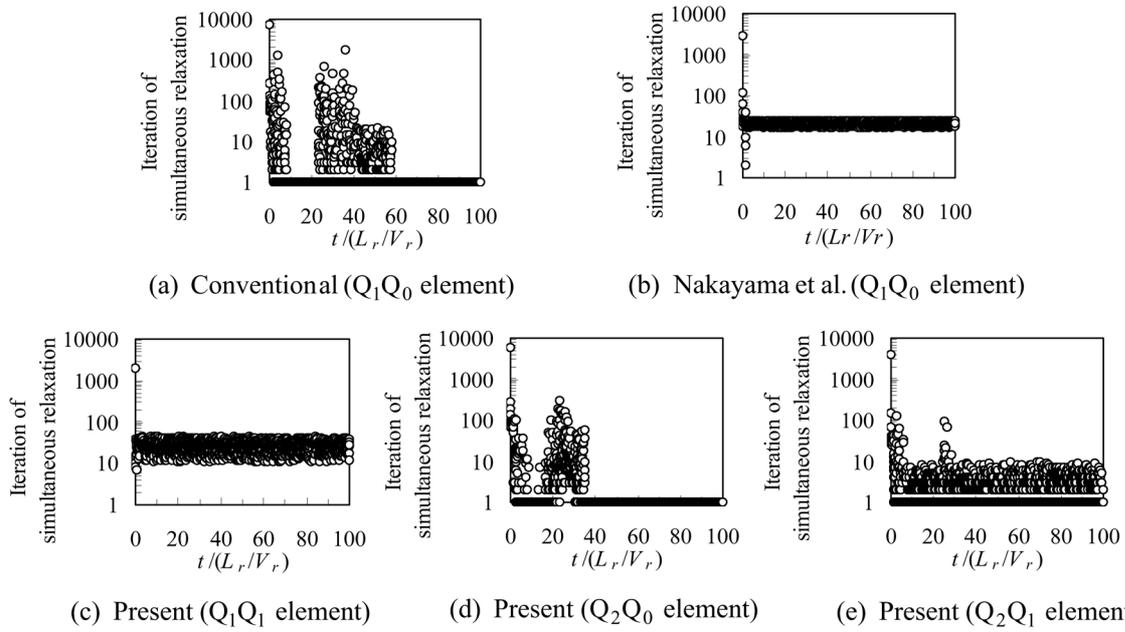


Fig.2.13 Time histories of iteration of simultaneous relaxation (60×60 quadrilateral elements)

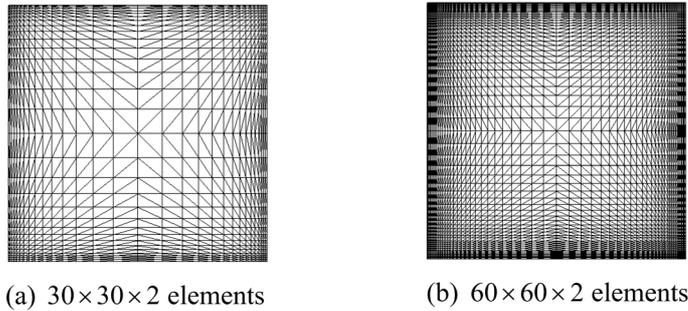


Fig.2.14 Analysis meshes (triangular elements)

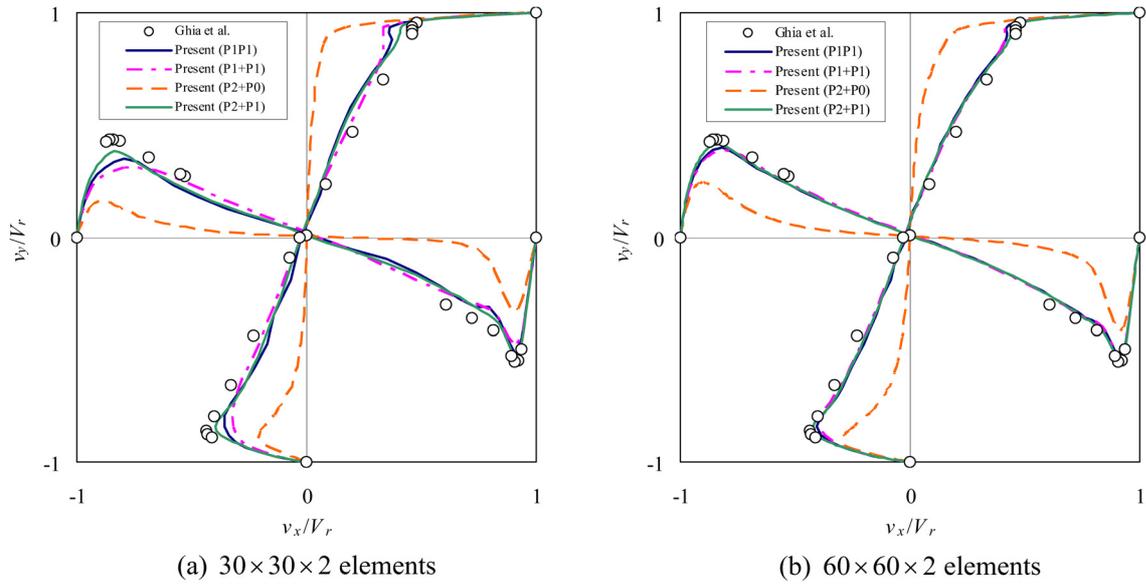


Fig.2.15 Velocity distributions along vertical or horizontal center-line at $t = 100 L_r / V_r$ (triangular elements)

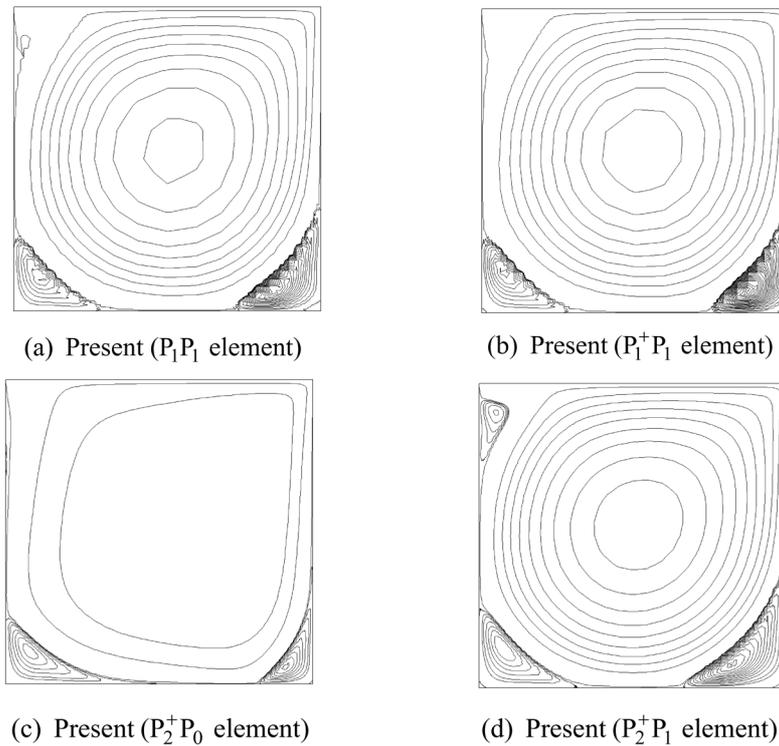


Fig.2.16 Stream lines at $t = 100 L_r / V_r$ ($30 \times 30 \times 2$ triangular elements)

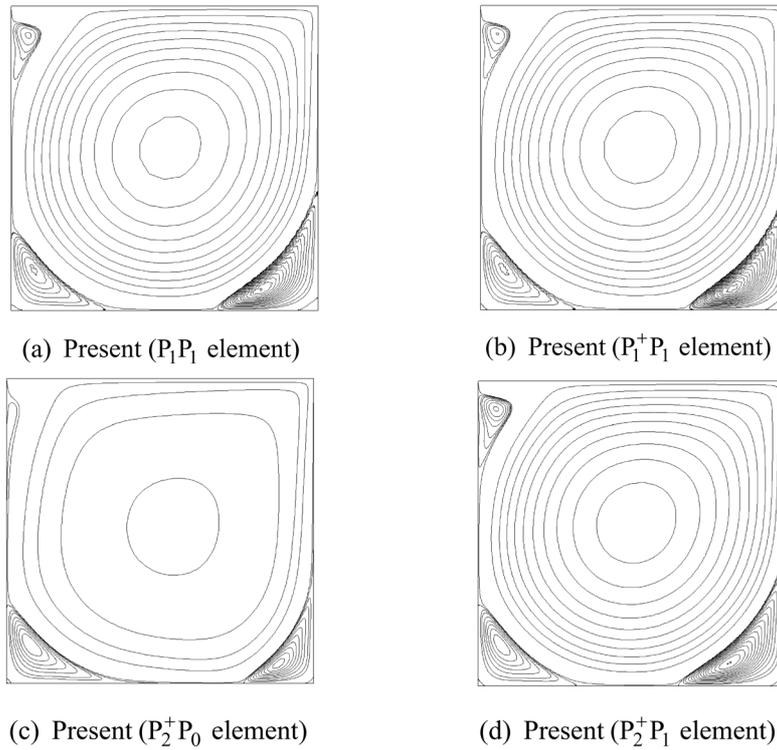


Fig.2.17 Stream lines at $t = 100 L_r / V_r$ ($60 \times 60 \times 2$ triangular elements)

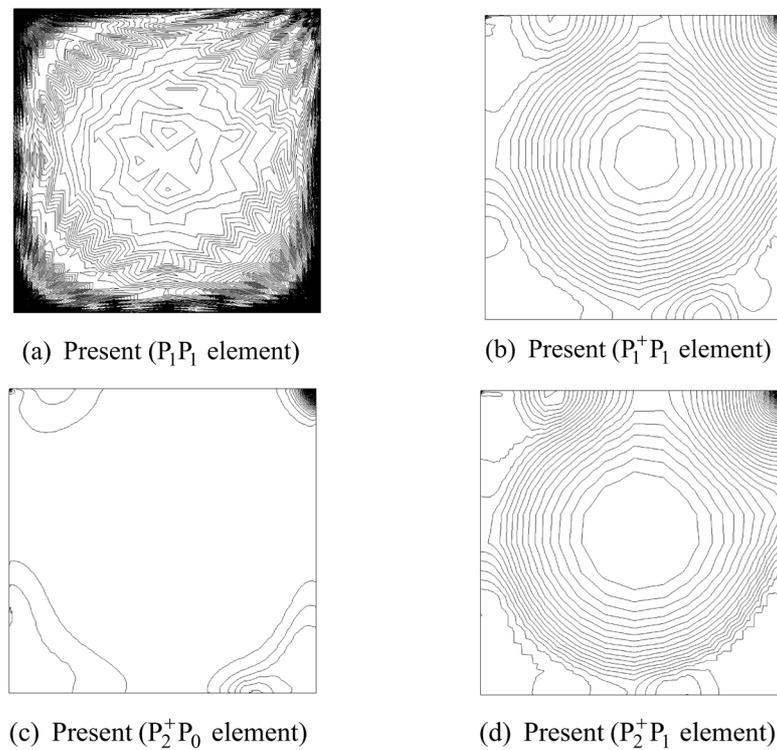


Fig.2.18 Pressure contours at $t = 100 L_r / V_r$ ($30 \times 30 \times 2$ triangular elements)

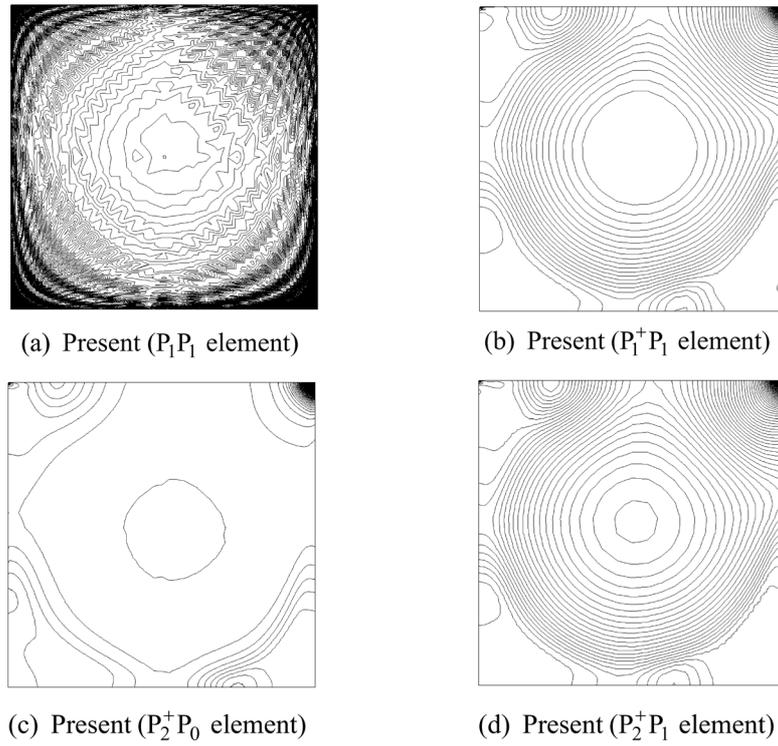


Fig.2.19 Pressure contours at $t = 100 L_r/V_r$ ($60 \times 60 \times 2$ triangular elements)

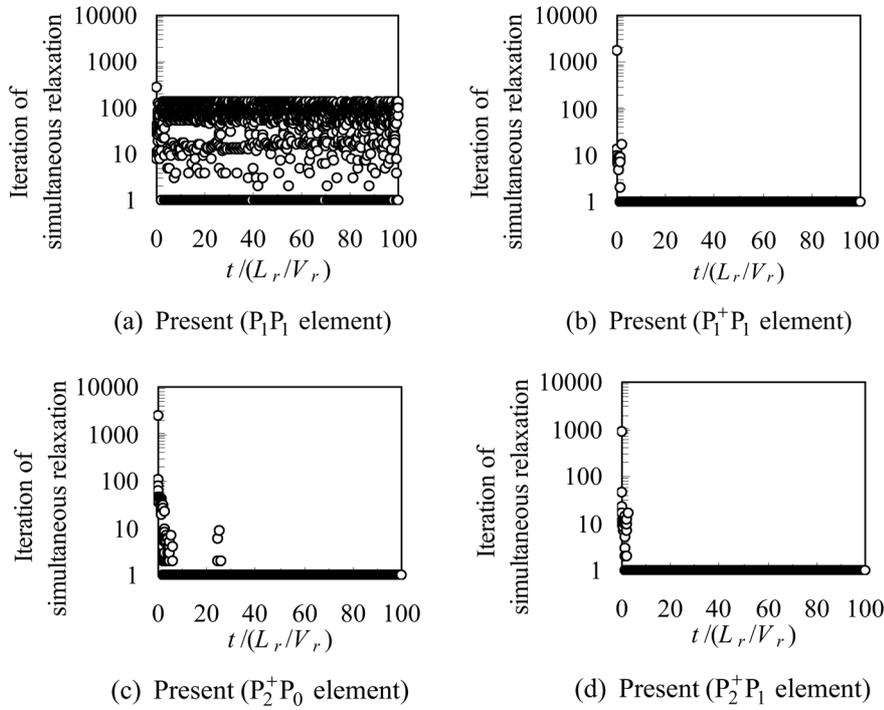


Fig.2.20 Time histories of iteration of simultaneous relaxation ($30 \times 30 \times 2$ triangular elements)

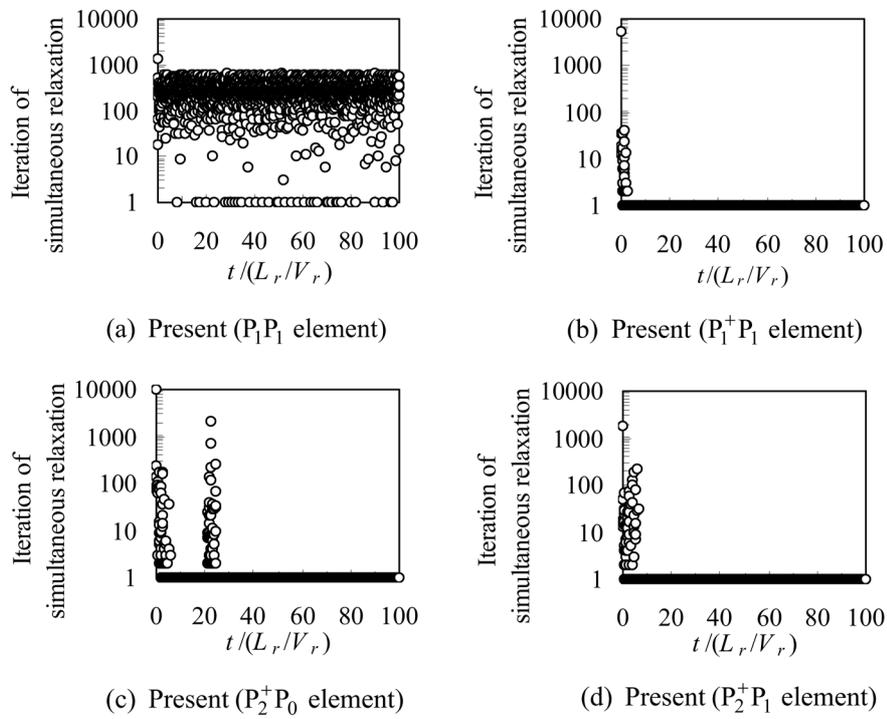


Fig.2.21 Time histories of iteration of simultaneous relaxation ($60 \times 60 \times 2$ triangular elements)

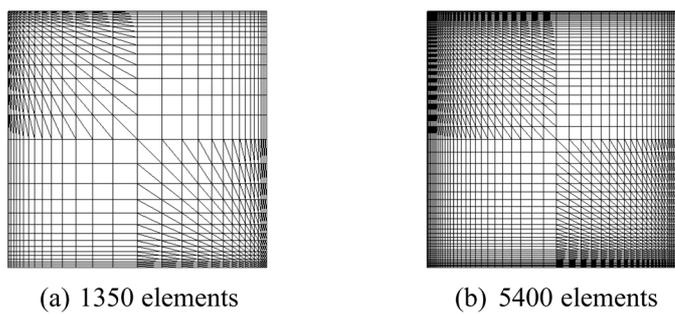


Fig.2.22 Analysis meshes (quadrilateral and triangular elements)

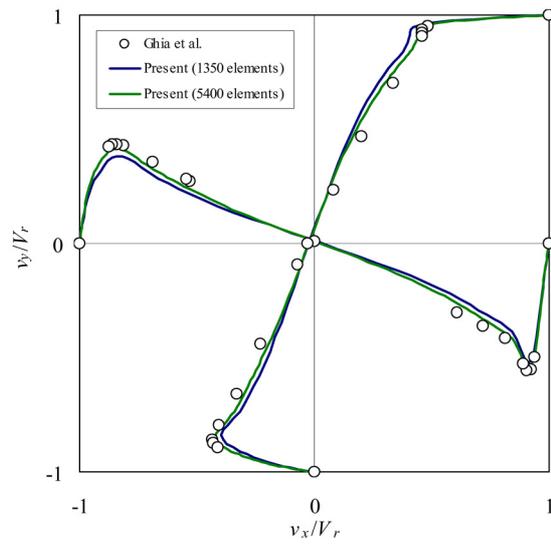
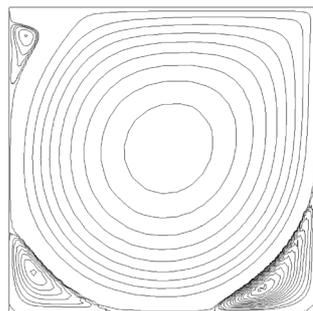
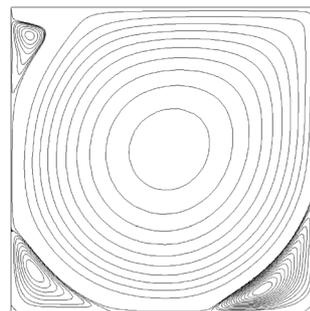


Fig.2.23 Velocity distribution along vertical or horizontal center-line at $t = 100 L_r/V_r$ (quadrilateral and triangular elements)

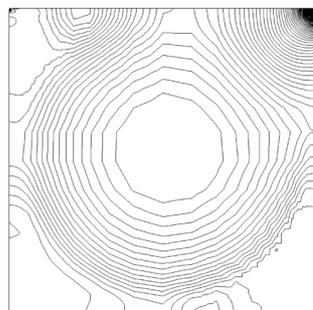


(a) Present (1350 elements)

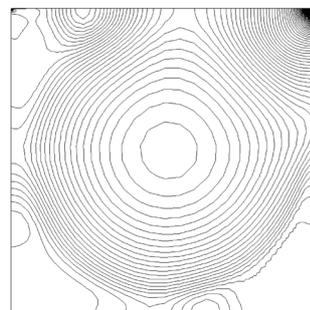


(b) Present (5400 elements)

Fig.2.24 Stream lines at $t = 100 L_r/V_r$ (quadrilateral and triangular elements)



(a) Present (1350 elements)



(b) Present (5400 elements)

Fig.2.25 Pressure contours at $t = 100 L_r/V_r$ (quadrilateral and triangular elements)

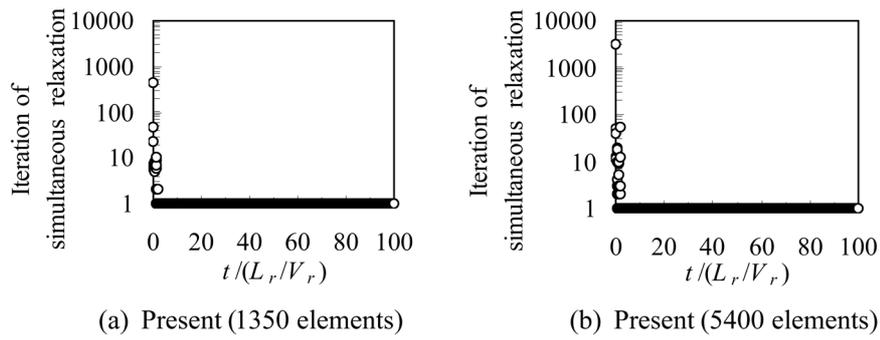


Fig.2.26 Time histories of iteration of simultaneous relaxation (quadrilateral and triangular elements)

$$\begin{aligned}
 v_x = V_r \quad v_y = 0 \quad v_z = 0 & \quad \text{on } z = L_r \\
 t_x = 0 \quad v_y = 0 \quad t_z = 0 & \quad \text{on } y = L_r / 2 \\
 v_x = 0 \quad v_y = 0 \quad v_z = 0 & \quad \text{on the other boundaries}
 \end{aligned}$$

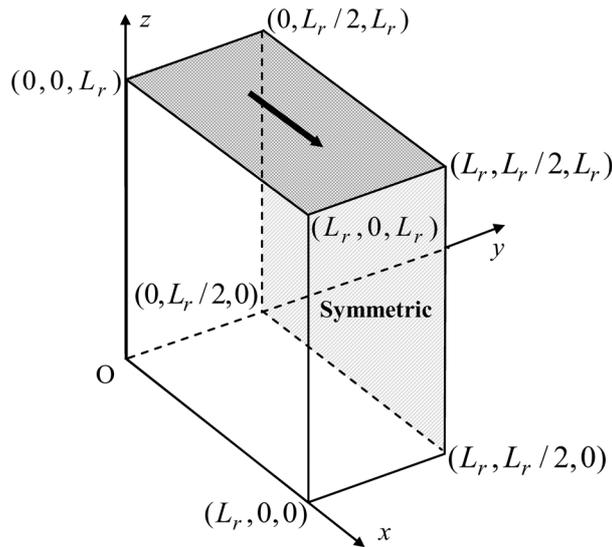


Fig.2.27 Analysis model and boundary conditions of three-dimensional lid-driven cavity flow

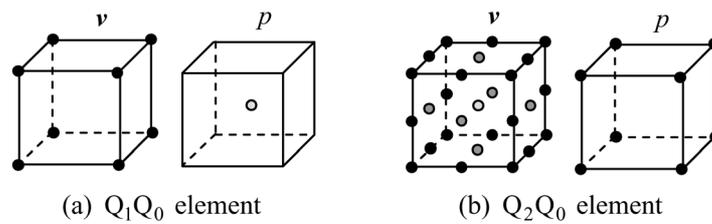


Fig.2.28 Hexahedral elements

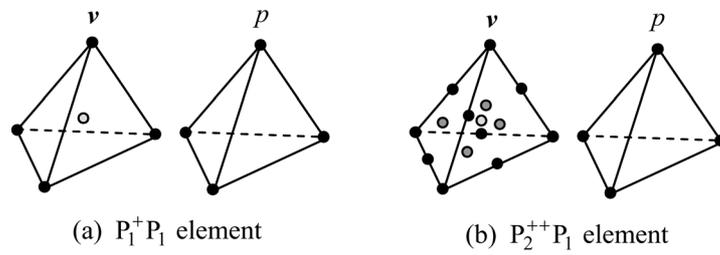
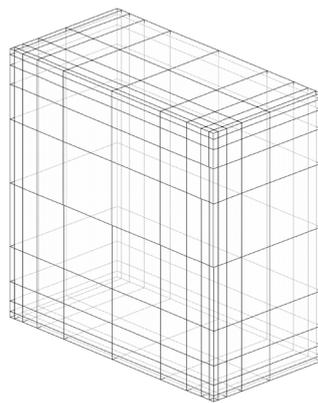
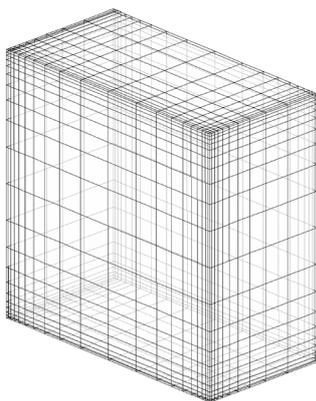


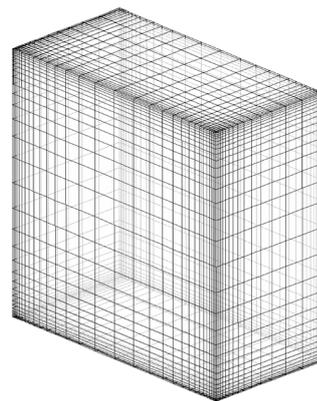
Fig.2.29 Tetrahedral elements (+: bubble function)



(a) $10 \times 5 \times 10$ (500) elements

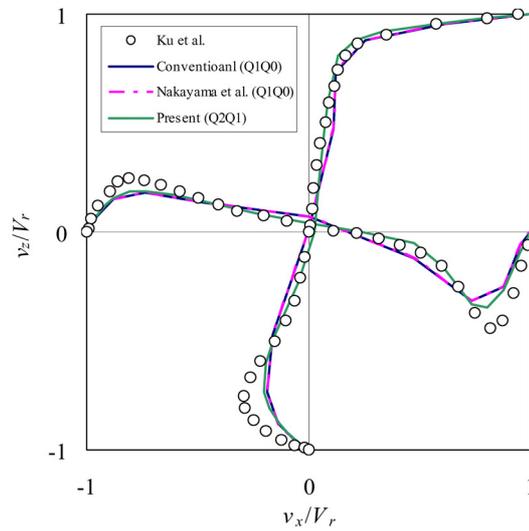


(b) $20 \times 10 \times 20$ (4000) elements

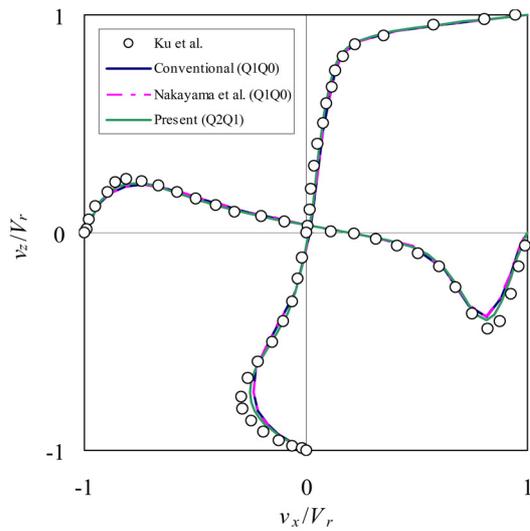


(c) $30 \times 15 \times 30$ (13500) elements

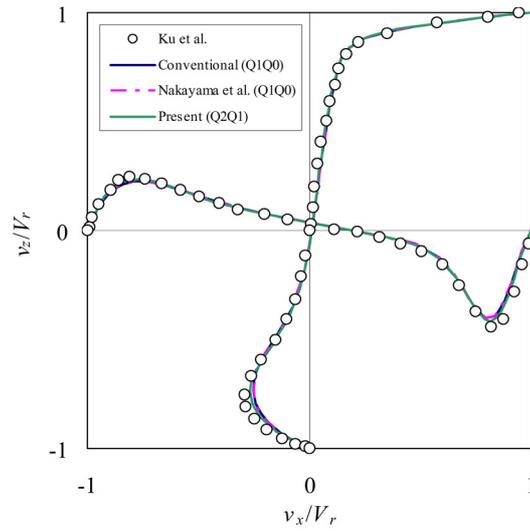
Fig.2.30 Analysis meshes (hexahedral elements)



(a) $10 \times 5 \times 10$ elements

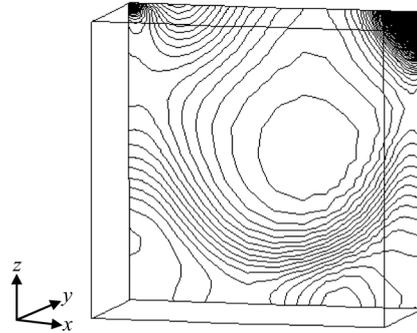


(b) $20 \times 10 \times 20$ elements

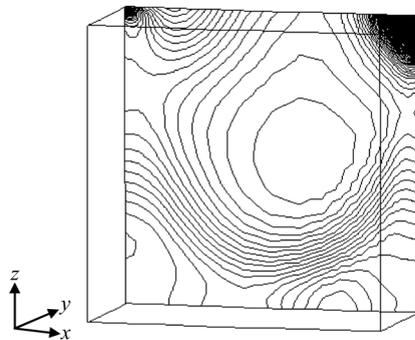


(c) $30 \times 15 \times 30$ elements

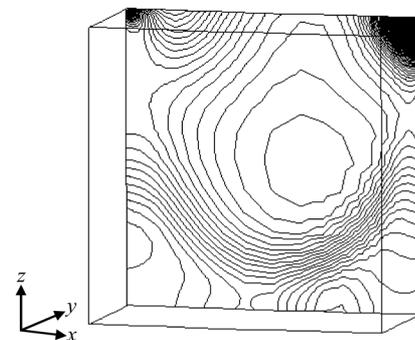
Fig.2.31 Velocity distributions along vertical or horizontal center-line at $t = 100 L_r/V_r$ (hexahedral elements)



(a) Conventional (Q_1Q_0 element)

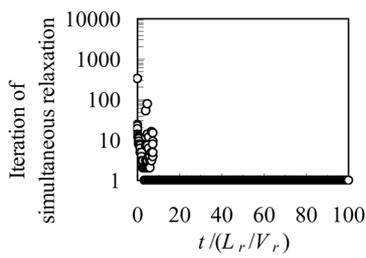


(b) Nakayama et al. (Q_1Q_0 element)

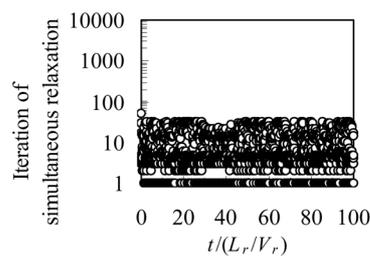


(c) Present (Q_2Q_1 element)

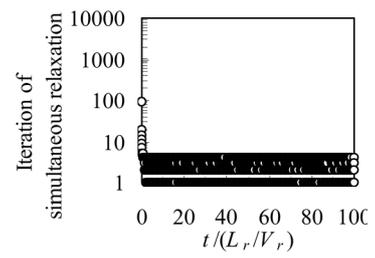
Fig. 2.32 Pressure contours at $t = 100 L_r/V_r$ ($y = L_r/2$, $30 \times 15 \times 30$ hexahedral elements)



(a) Conventional (Q_1Q_0 element)

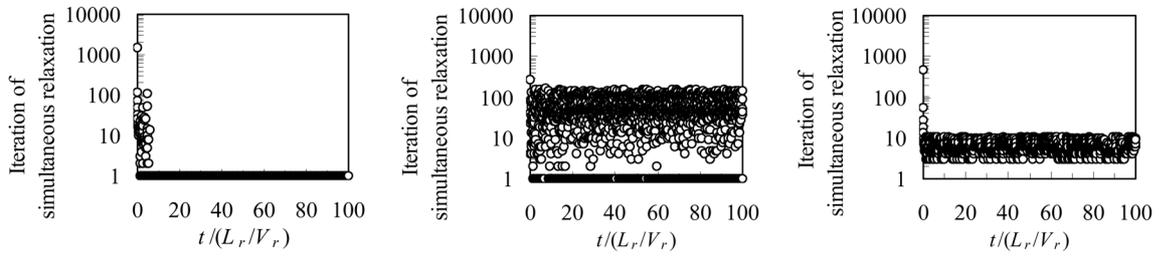


(b) Nakayama et al. (Q_1Q_0 element)



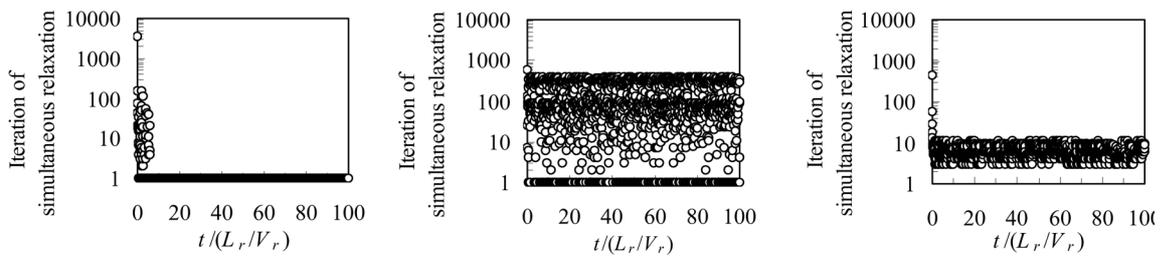
(c) Present (Q_2Q_1 element)

Fig. 2.33 Time histories of iteration of simultaneous relaxation ($10 \times 5 \times 10$ hexahedral elements)



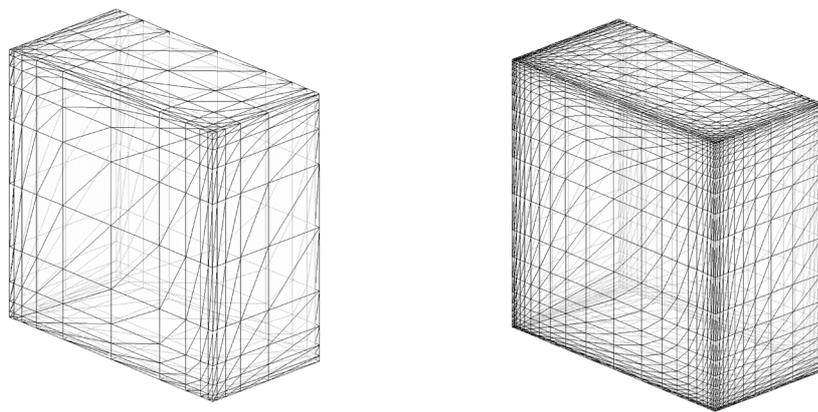
(a) Conventional (Q_1Q_0 element) (b) Nakayama et al. (Q_1Q_0 element) (c) Present (Q_2Q_1 element)

Fig.2.34 Time histories of iteration of simultaneous relaxation ($20 \times 10 \times 20$ hexahedral elements)



(a) Conventional (Q_1Q_0 element) (b) Nakayama et al. (Q_1Q_0 element) (c) Present (Q_2Q_1 element)

Fig.2.35 Time histories of iteration of simultaneous relaxation ($30 \times 15 \times 30$ hexahedral elements)



(a) 6000 elements

(b) 48000 elements

Fig.2.36 Analysis meshes (tetrahedral elements)

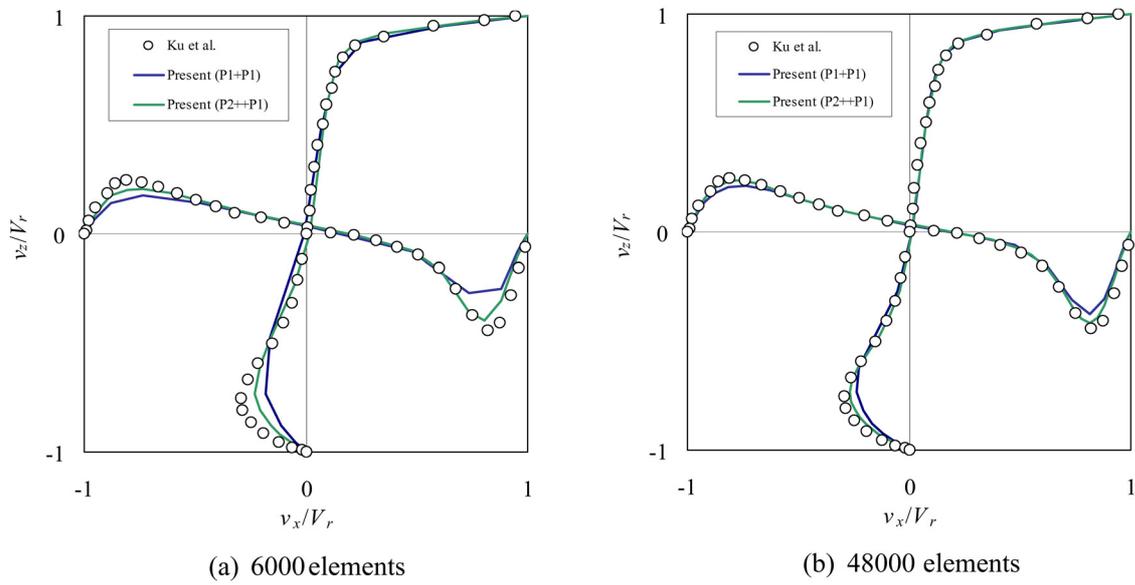


Fig.2.37 Velocity distributions along vertical or horizontal center-line at $t = 100 L_r / V_r$ (tetrahedral elements)

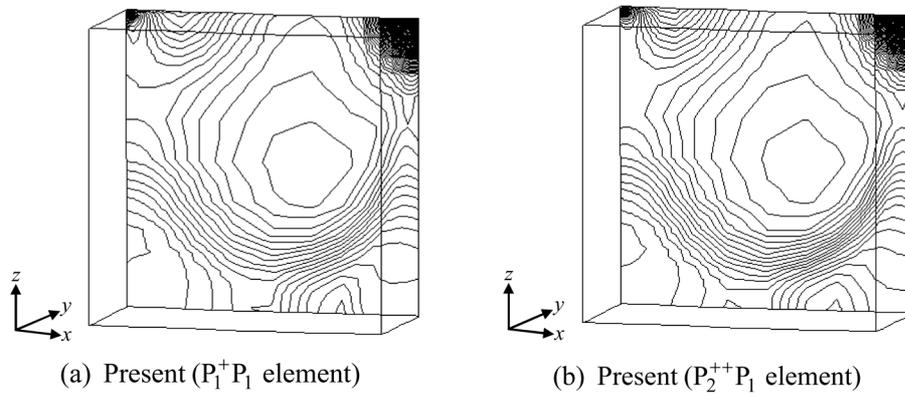
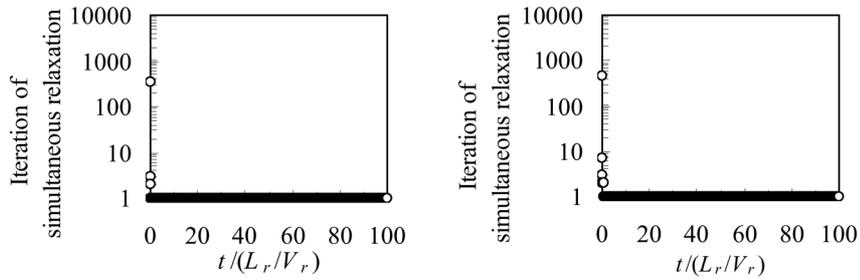


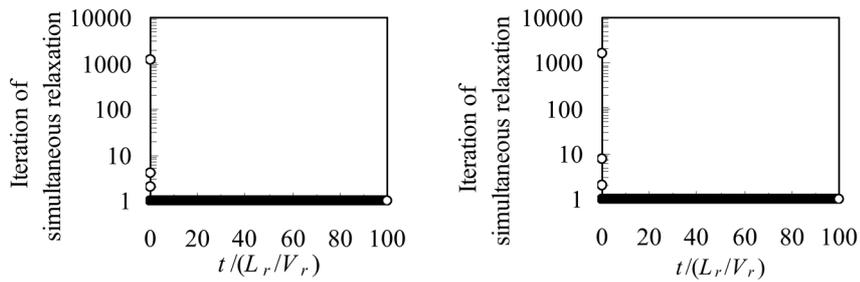
Fig.2.38 Pressure contours at $t = 100 L_r / V_r$ ($y = L_r / 2$, 48000 tetrahedral elements)



(a) Present ($P_1^+P_1$ element)

(b) Present ($P_2^{++}P_1$ element)

Fig.2.39 Time histories of iteration of simultaneous relaxation (6000 tetrahedral elements)



(a) Present ($P_1^+P_1$ element)

(b) Present ($P_2^{++}P_1$ element)

Fig.2.40 Time histories of iteration of simultaneous relaxation (48000 tetrahedral elements)

第3章 非圧縮超弾性体のためのGSMAC有限要素法の構築

3.1 第3章の緒言

変形やひずみの成分によって微分されることにより、共役な応力成分を生じるような弾性ポテンシャル関数が存在する物質を超弾性体という^(3.1)。ゴムなどの複雑な鎖状分子構造を有する高分子材料は、非圧縮超弾性体としてモデル化される。免震構造物の積層ゴムやパソコンのキーボードなどの設計、生体内の血管壁、心臓壁、眼球網膜など軟組織の解析^{(3.2)~(3.4)}には非圧縮超弾性体が使用されている。

非圧縮超弾性体解析では、非圧縮条件を密度の式に代入することで変形こう配の第3不変量が1であるという条件を導出し、これを変形の非圧縮拘束条件とする。非圧縮超弾性体解析で用いられる有限要素法として、Lagrange未定乗数法やペナルティ法が挙げられる^{(3.5)~(3.7)}。これらの有限要素法では、非圧縮拘束条件と運動方程式を直接的に解いて近似解を求めるために、解くべき全体係数行列に多くの計算機記憶容量が必要となる。

非圧縮性流体解析では、非圧縮条件を連続の式に代入することで速度の発散が零という条件を導出し、これを流れの非圧縮拘束条件とする。非圧縮性流体の有限要素法解析では、差分法のMAC系解法^{(3.8)~(3.10)}を有限要素法に拡張した速度と圧力の分離型の有限要素法がよく用いられる。分離型の有限要素法では、運動方程式を時間についてのみ離散化した半離散化式から非圧縮拘束条件を利用して分離式を求める。このとき、分離式中に圧力または修正速度ポテンシャルのPoisson方程式が導入され、これを陰的に解くことによって、非圧縮拘束条件を満足する近似解を得ることができる。各時刻において非圧縮拘束条件がある程度の精度で満足されると、MAC系解法の特徴であるサイクル誤差自己調整の原理^(3.11)により、時間進行に伴い誤差が累積することはない。また、離散化Poisson方程式の係数行列の大きさは前述したLagrange未定乗数法やペナルティ法のような非分離型の有限要素法で解くべき全体係数行列に比べて小さいので、非分離型より計算機記憶容量が少ない。さらに、離散化Poisson方程式の全体係数行列は正定値かつ対称であるために、解くべき連立一次方程式も扱いやすい。

非圧縮超弾性体の有限要素法解析においてLagrange未定乗数法やペナルティ法が用いられる解析例は多く見られるが、速度と圧力の分離型の有限要素法が用いられた解析例は

見られない。そこで、本研究では分離型の有限要素法の1つである GSMAC 有限要素法 (Generalized-Simplified MAC-FEM) ^(3.12) を利用した低容量・高速計算に適した非圧縮超弾性体の動解析方法を構築する。特に、非圧縮超弾性体として一般的によく用いられる Mooney-Rivlin 体 ^(3.1) を扱う。変形前の不定圧力の初期値を有しないようにするために、低減不変量 ^(3.13) を導入した Mooney-Rivlin 体の構成方程式を用いる。非圧縮性流体解析で用いられる分離型の有限要素法を固体解析に適用するためには、Euler 表示の基礎方程式に Lagrange 法を導入し、振動問題を高精度に解析できる Newmark- β 法 ^(3.1) を導入することが重要となる。本研究では、これらの考えを導入することによって、固体である非圧縮超弾性体を流体の計算手法である分離型の有限要素法で解析できることが示される。

本研究では、この計算方法の実用化に向けて、変形後の曲面形状を表すことが可能である高次要素の適用と大変形時のゴムの硬化性を表すことができる完全3次の Mooney-Rivlin 体の導入について検討する。まず、2次元問題では4角形・3角形要素、3次元問題では6角体・4面体要素を用いて、引張変形とせん断変形を解析する。ここでは、本計算方法の妥当性および第2章の流体解析で新しく提案した高次要素用の Poisson ソルバーを用いた高次要素の適用を検証する。次に、3次元解析からゴムの硬化特性を表す S 字型応力ひずみ曲線を作成する。要素平均値を用いた弾性定数の計算によって、完全3次の Mooney-Rivlin 体を導入できることを検証する。最後に、特異性が存在する2次元の押し込み変形問題を扱う。要素のゆがみによる解析条件の厳しい問題における補関数の次数に対する精度の比較を行う。非圧縮超弾性体の解析では、接触が生じることもよくあるが、接触時の計算方法を新しく導入する必要があるために、今後の課題とする。

3.2 基礎方程式系

3.2.1 基礎方程式

非圧縮超弾性体の基礎方程式を以下に示す。

(密度の式)

$$\det \mathbf{F} = 1 \quad (3.1a)$$

(Cauchy の運動方程式)

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} \quad (3.1b)$$

(非圧縮超弾性体の構成方程式)

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2 \left\{ \frac{\partial W}{\partial III_B} III_B \mathbf{I} + \left(\frac{\partial W}{\partial I_B} + \frac{\partial W}{\partial II_B} I_B \right) \mathbf{B} - \frac{\partial W}{\partial II_B} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right\} \quad (3.1c)$$

(低減不変量の定義式)

$$\tilde{I}_B = \frac{I_B}{III_B^{\frac{1}{3}}} \quad (3.1d)$$

$$\tilde{II}_B = \frac{II_B}{III_B^{\frac{2}{3}}} \quad (3.1e)$$

(変形-変形こう配関係式)

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (3.1f)$$

(変形こう配-変位こう配関係式)

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{u} \overleftarrow{\nabla}_X \quad (3.1g)$$

ただし, \mathbf{F} は変形こう配, ρ は密度, \mathbf{u} は変位, d/dt は実質時間微分, ∇ は空間座標のナブラ, \mathbf{T} は Cauchy 応力, \mathbf{b} は単位質量当たりの体積力, p は不定圧力, \mathbf{I} は恒等テンソル, \mathbf{B} は左 Cauchy-Green 変形, I_B , II_B , III_B は

$$I_B = \text{tr} \mathbf{B} \quad (3.2a)$$

$$II_B = \frac{1}{2} \left\{ (\text{tr} \mathbf{B})^2 - \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \right\} \quad (3.2b)$$

$$III_B = \det \mathbf{B} \quad (3.2c)$$

で定義される不変量, W は弾性ポテンシャル関数, \tilde{I}_B , \tilde{II}_B は低減不変量, ∇_X は物質座標のナブラであり, 空間座標における位置 \mathbf{x} と物質座標における位置 \mathbf{X} の間には

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (3.3)$$

の関係がある. 本研究では, 上述の基礎方程式を以下のように書き直す.

(連続の式)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.4a)$$

(運動方程式)

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p_r + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{b} \quad (3.4b)$$

(変位-速度関係式)

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{v} \quad (3.4c)$$

(圧力の変換式)

$$p_r = p + \frac{2}{3} \left[\frac{\partial W}{\partial \tilde{I}_B} (\text{tr} \mathbf{B}) + \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} \{ (\text{tr} \mathbf{B})^2 - \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \} \right] \quad (3.4d)$$

(余剰応力-変形関係式)

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \left\{ \frac{\partial W}{\partial \tilde{I}_B} + \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} (\text{tr} \mathbf{B}) \right\} \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \quad (3.4e)$$

(変形-変形こう配関係式)

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (3.4f)$$

(変形こう配-変位こう配関係式)

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{u} \overleftarrow{\nabla}_X \quad (3.4g)$$

ただし、 \mathbf{v} は速度である。従来の非圧縮超弾性体の有限要素法解析では、非圧縮拘束条件として $\det \mathbf{F} = 1$ または $III_B = 1$ の条件が一般に用いられる。しかし、本研究では速度と圧力の分離型の有限要素法によって非圧縮超弾性体の基礎方程式を離散化するので、非圧縮性流体解析で用いられる式(3.4a)を用いる。

3.2.2 弾性ポテンシャル関数

弾性ポテンシャル関数として、実験的に考案されたもの、数学的に導入されたものと様々なモデルが提案されている。実験的に考案されたもの、数学的に導入されたものと様々なモデルがあるが、Mooney-Rivlin 体と Ogden 体がよく用いられる。エネルギーを表す弾性ポテンシャル関数が座標変換に不変な量であるから、ひずみの不変量の関数として表すことができるという考えに基づくのが Mooney-Rivlin 体であり、ひずみの固有値を表す主値の関数として表すことができるという考えに基づくのが Ogden 体である。本研究では、有限要素法による離散化の点から容易である Mooney-Rivlin 体の弾性ポテンシャルを用いる。完全3次で近似した場合の弾性ポテンシャル関数を以下に示す。

$$\begin{aligned} W = & c_{10}(\tilde{I}_B - 3) + c_{01}(\tilde{II}_B - 3) \\ & + c_{11}(\tilde{I}_B - 3)(\tilde{II}_B - 3) + c_{20}(\tilde{I}_B - 3)^2 + c_{02}(\tilde{II}_B - 3)^2 \\ & + c_{21}(\tilde{I}_B - 3)^2(\tilde{II}_B - 3) + c_{12}(\tilde{I}_B - 3)(\tilde{II}_B - 3)^2 \\ & + c_{30}(\tilde{I}_B - 3)^3 + c_{03}(\tilde{II}_B - 3)^3 \end{aligned} \quad (3.5)$$

ただし、 c_{pq} ($p, q = 0, 1, 2, 3$) は Mooney-Rivlin 定数である。また、高分子材料が硬化特性を表すような大変形を扱わない場合には、以下に示すような完全1次で近似したモデルがよく用いられる。

$$W = c_{10}(\tilde{I}_B - 3) + c_{01}(\tilde{II}_B - 3) \quad (3.6)$$

3.2.3 境界条件

基礎方程式の定義域となる現配置の領域を Ω ，その境界を $\partial\Omega = \Gamma$ とする．一方，基準配置の領域を Ω^0 ，その境界を $\partial\Omega^0 = \Gamma^0$ とする．基礎方程式を解くために，以下のような境界条件が与えられる．現配置で表す場合の境界条件は

(基本境界条件)

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (3.7a)$$

(自然境界条件)

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \\ &= \underline{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (3.7b)$$

である．ただし， \mathbf{t} は真応力ベクトルであり， \mathbf{n} は領域の外向き単位法線ベクトルであり， Γ_1 と Γ_2 の間には

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma \quad \text{and} \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi \quad (3.8)$$

のような関係がある．一方，基準配置で表す場合の境界条件は

(基本境界条件)

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_1^0 \quad (3.9a)$$

(自然境界条件)

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_n &= \mathbf{n}^0 \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T) \\ &= \underline{\mathbf{t}}_n \quad \text{on } \Gamma_2^0 \end{aligned} \quad (3.9b)$$

である．ただし， \mathbf{t}_n は公称応力ベクトルであり， \mathbf{n}^0 は基準配置における領域の外向き単位法線ベクトルであり， Γ_1^0 と Γ_2^0 の間には

$$\Gamma_1^0 \cup \Gamma_2^0 = \Gamma^0 \quad \text{and} \quad \Gamma_1^0 \cap \Gamma_2^0 = \phi \quad (3.10)$$

のような関係がある．

3.3 数値計算法

基礎方程式を速度と圧力の分離型の有限要素法によって離散化する．時間進行において重要となることは2つある．1つ目は，弾性振動問題を精度良く解析できるように高精度な時間積分法である Newmark- β 法の考えを導入することである．2つ目は，時刻 $t = t^{n+1}$ における $\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t^{n+1})$ の分布と物質点の位置 $\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t^{n+1})$ を用いて定義される $\nabla^{n+1} \cdot \mathbf{v}^{n+1} \equiv \nabla \cdot \{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t^{n+1})\}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{n+1}}$ が零であることを満足するように圧力 p_r^{n+1} を決めることである (図 3.1 参照)．

3.3.1 Newmark- β 法の考えを導入した時間進行

基礎方程式を Newmark- β 法に基づいて時間的に離散化すると、以下ようになる。

$$\nabla^{n+1} \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0 \quad (3.11a)$$

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^{n+1} = -\nabla^{n+1} p_r^{n+1} + \nabla^{n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}^{n+1} + \rho \mathbf{b}^{n+1} \quad (3.11b)$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \Delta t \left\{ \gamma \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^{n+1} + (1-\gamma) \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^n \right\} \quad (3.11c)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{v}^n + \Delta t^2 \left\{ \beta \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^n \right\} \quad (3.11d)$$

ただし、Newmark- β 法のパラメータが

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \beta = \frac{1}{6} \quad (3.12)$$

の場合には、線形加速度法に対応する。また、Newmark- β 法のパラメータが

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \beta \geq \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (3.13)$$

の場合には、時間刻み幅 Δt に関係なく安定な解が得られる。

式(3.11)を近似的に満足するために、陽的な反復計算による MAC 系解法の時間進行を導入する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^{(0)} \simeq \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^n \\ \mathbf{v}^{(0)} \simeq \mathbf{v}^n \\ p_r^{(0)} \simeq p_r^n \\ \mathbf{u}^{(0)} \simeq \mathbf{u}^n \end{array} \right. \quad (3.14)$$

とおく。 $m+1$ 回目の反復において、速度 \mathbf{v}^{n+1} の予測子 $\mathbf{v}^{(m+1)}$ が条件 $\nabla^{(m)} \cdot \mathbf{v}^{(m+1)} = 0$ を満足すると、 p_r^{n+1} の予測子 $p_r^{(m+1)}$ が求まるように、運動方程式の半離散化式を定める。

$$\nabla^{(m)} \cdot \mathbf{v}^{(m+1)} = 0 \quad (3.15a)$$

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^{(m+1)} = -\nabla^{(m)} p_r^{(m+1)} + \nabla^{(m)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(m)} + \rho \mathbf{b}^{(m)} \quad (3.15b)$$

$$\mathbf{v}^{(m+1)} = \mathbf{v}^n + \Delta t \left\{ \gamma \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^{(m+1)} + (1-\gamma) \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^n \right\} \quad (3.15c)$$

$$\mathbf{u}^{(m+1)} = \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{v}^n + \Delta t^2 \left\{ \beta \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^{(m+1)} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^n \right\} \quad (3.15d)$$

さらに、次の時刻の非圧縮拘束条件式(3.15a) を用いて、式(3.15b) と式(3.15c) を以下のように分離する。

(予測子ステップの式)

$$\rho \left(\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} \right) = -\nabla^{(m)} p_r^{(m)} + \nabla^{(m)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(m)} + \rho \mathbf{b}^{(m)} \quad (3.16a)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^n + \Delta t \left\{ \gamma \left(\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} \right) + (1 - \gamma) \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^n \right\} \quad (3.16b)$$

(Poisson 方程式)

$$(\nabla^{(m)})^2 \phi_p = \rho \nabla^{(m)} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad (3.16c)$$

(修正子ステップの式)

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^{(m+1)} = \rho \left(\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} \right) - \frac{\nabla^{(m)} \phi_p}{\gamma \Delta t} \quad (3.16d)$$

$$\rho \mathbf{v}^{(m+1)} = \rho \tilde{\mathbf{v}} - \nabla^{(m)} \phi_p \quad (3.16e)$$

$$p_r^{(m+1)} = p_r^{(m)} + \frac{\phi_p}{\gamma \Delta t} \quad (3.16f)$$

ただし、 ϕ_p は修正速度ポテンシャルである。そして、収束判定条件

$$|\mathbf{v}^{(m+1)} - \mathbf{v}^{(m)}| < \epsilon_2 \quad (3.17)$$

を満足するときに

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^{n+1} \simeq \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^{(m+1)} \\ \mathbf{v}^{n+1} \simeq \mathbf{v}^{(m+1)} \\ p_r^{n+1} \simeq p_r^{(m+1)} \\ \mathbf{u}^{n+1} \simeq \mathbf{u}^{(m+1)} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

とする。

速度と圧力の分離型の有限要素法では、各時刻の圧力を安定に求めるために、圧力をできるだけ陰的に扱うことが望ましい。そこで、本研究では $\gamma > 1/2$ を用い、式(3.13) より β を決定する。ただし、ここで提案する計算方法は変位に対して陽的な解法であり、陰的な解法である本来の Newmark- β 法とは時間積分の安定性が異なる。それ故に、パラメータ γ と β を式(3.13) のように定めても、 Δt の決定には制約を受けることになる。

3.3.2 Galerkin 有限要素法による離散化

有限要素を $\Omega_e^{(m)}$ ($1 \leq e \leq n_E$) とし、要素境界を $\Gamma_e^{(m)} = \partial\Omega_e^{(m)}$ ($1 \leq e \leq n_E$) とする。変位 $\mathbf{u}^{(m)}$ は形状関数 N_i ($1 \leq i \leq n_N$) で補間され、変換後の圧力 $p_r^{(m)}$ は形状関数 N_l^p ($1 \leq l \leq n_N^p$) で補間される。

(変位の補間関数)

$$\mathbf{u}^{(m)} = N_i \mathbf{u}_i^{(m)} \quad (3.19a)$$

(変換後の圧力の補間関数)

$$p_r^{(m)} = N_l^p p_{rl}^{(m)} \quad (3.19b)$$

単位質量当たりの体積力 $\mathbf{b}^{(m)}$ は、変位と同じ形状関数によって補間される。各要素において、節点 i が局所節点 α に対応し、節点 l が局所節点 a に対応する。

(変位の補間関数)

$$\mathbf{u}^{(m)} = N_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{(m)} \quad \text{in } \Omega_e^{(m)} \quad (3.20a)$$

(変換後の圧力の補間関数)

$$p^{(m)} = N_a^p p_a^{(m)} \quad \text{in } \Omega_e^{(m)} \quad (3.20b)$$

陽的な反復計算開始時に、

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_i^{(0)} \simeq \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_i^n \\ \mathbf{v}_i^{(0)} \simeq \mathbf{v}_i^n \\ p_{rl}^{(0)} \simeq p_{rl}^n \\ \mathbf{u}_i^{(0)} \simeq \mathbf{u}_i^n \end{array} \right. \quad (3.21)$$

とおく。 $m+1$ 回目の反復において、Galerkin 有限要素法で離散化すると、以下に示されるような各要素に対する有限要素法離散化式が得られる。

(予測子ステップの式)

$$\begin{aligned}
& \rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \left(\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} \right)_\beta \\
&= \mathbf{C}_{\alpha b}^{(m)} p_{rb}^{(m)} - 2 \left(\left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{I}_B} \right\rangle_e^{(m)} + 2 \left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} \right\rangle_e^{(m)} \right) \mathbf{S}_\alpha^0 \\
&\quad - 2 \left(\left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{I}_B} \right\rangle_e^{(m)} + \left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} \right\rangle_e^{(m)} \right) (\text{tr} \mathbf{S}_{\alpha\beta}^0) \mathbf{u}_\beta^{(m)} \\
&\quad - 2 \left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} \right\rangle_e^{(m)} \left[\{ 2\mathbf{S}_{\alpha\beta}^0 - (\mathbf{S}_{\alpha\beta}^0)^T \} \cdot \mathbf{u}_\beta^{(m)} + 2\mathbf{S}_{\gamma\beta\alpha}^0 \cdot (\mathbf{u}_\beta^{(m)} \mathbf{u}_\gamma^{(m)})^T \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + (\mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma}^0 - \mathbf{S}_{\gamma\beta\alpha}^0) (\mathbf{u}_\beta^{(m)} \cdot \mathbf{u}_\gamma^{(m)}) - (\mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma}^0 + \mathbf{S}_{\gamma\beta\alpha}^0) \cdot \mathbf{u}_\beta^{(m)} \mathbf{u}_\gamma^{(m)} \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + S_{\alpha\beta\gamma\delta}^{N2} \{ \mathbf{u}_\beta^{(m)} (\mathbf{u}_\gamma^{(m)} \cdot \mathbf{u}_\delta^{(m)}) - (\mathbf{u}_\beta^{(m)} \cdot \mathbf{u}_\gamma^{(m)}) \mathbf{u}_\delta^{(m)} \} \right] \\
&\quad + \rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \mathbf{b}_\beta^{n+1} + \oint_{\Gamma_e^0} N_\alpha \tilde{\mathbf{t}}^{(m)} d\Gamma^0 \tag{3.22a}
\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha^n + \Delta t \left\{ \gamma \left(\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} \right)_\alpha + (1 - \gamma) \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_\alpha^n \right\} \tag{3.22b}$$

(Poisson 方程式)

$$\mathbf{C}_{\beta a}^{(m)} \cdot \langle \nabla^{(m)} \phi_p \rangle_\beta = \rho \mathbf{C}_{\beta a}^{(m)} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tag{3.22c}$$

$$\langle \nabla^{(m)} \phi_p \rangle_\alpha = - \frac{\sum_{e'=1}^{n_E} (\mathbf{C}_{\alpha b}^{(m)} \phi_{pb})}{\sum_{e''=1}^{n_E} \int_{\Omega_{e''}^{(m)}} N_\alpha d\Omega^{(m)}} \tag{3.22d}$$

(修正子ステップの式)

$$\rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_\beta^{(m+1)} = \rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \left(\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} \right)_\beta + \frac{\mathbf{C}_{\alpha b}^{(m)} \phi_{pb}}{\gamma \Delta t} - \oint_{\Gamma_e^{(m)}} N_\alpha \left(\frac{\phi_p \mathbf{n}^{(m)}}{\gamma \Delta t} \right) d\Gamma^{(m)} \tag{3.22e}$$

$$\rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \mathbf{v}_\beta^{(m+1)} = \rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \mathbf{C}_{\alpha b}^{(m)} \phi_{pb} - \oint_{\Gamma_e^{(m)}} N_\alpha (\phi_p \mathbf{n}^{(m)}) d\Gamma^{(m)} \tag{3.22f}$$

$$p_a^{(m+1)} = p_a^{(m)} + \frac{\phi_{pa}}{\gamma \Delta t} \tag{3.22g}$$

(変位の更新式)

$$\mathbf{u}_\alpha^{(m+1)} = \mathbf{u}_\alpha^n + \Delta t \mathbf{v}_\alpha^n + \Delta t^2 \left\{ \beta \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_\alpha^{(m+1)} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_\alpha^n \right\} \tag{3.22h}$$

ただし、係数行列は

(質量行列)

$$M_{\alpha\beta}^{(m)} = \int_{\Omega_e^{(m)}} N_\alpha N_\beta d\Omega^{(m)} \quad (3.23a)$$

(こう配行列)

$$C_{\alpha b}^{(m)} = \int_{\Omega_e^{(m)}} (\nabla^{(m)} N_\alpha) N_b^p d\Omega^{(m)} \quad (3.23b)$$

(剛性行列)

$$S_\alpha^0 = \int_{\Omega_e^0} \nabla_X N_\alpha d\Omega^0 \quad (3.23c)$$

$$S_{\alpha\beta}^0 = \int_{\Omega_e^0} \nabla_X N_\alpha \nabla_X N_\beta d\Omega^0 \quad (3.23d)$$

$$S_{\alpha\beta\gamma}^0 = \int_{\Omega_e^0} \nabla_X N_\alpha (\nabla_X N_\beta \cdot \nabla_X N_\gamma) d\Omega^0 \quad (3.23e)$$

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta}^0 = \int_{\Omega_e^0} (\nabla_X N_\alpha \cdot \nabla_X N_\beta) (\nabla_X N_\gamma \cdot \nabla_X N_\delta) d\Omega^0 \quad (3.23f)$$

で表され、 $\overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)}$ は質量の集中化

$$\rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} = \begin{cases} \rho \int_{\Omega_e^{(m)}} N_\alpha d\Omega^{(m)} & \text{for } \alpha = \beta \\ 0 & \text{for } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (3.24)$$

から得られる集中質量行列である。また、左 Cauchy-Green 変形 \mathbf{B} の要素平均値

$$\langle \mathbf{B} \rangle_e^{(m)} = \mathbf{I} + \frac{1}{\Omega_e^0} \{ S_\alpha^0 \mathbf{u}_\alpha^{(m)} + \mathbf{u}_\alpha^{(m)} S_\alpha^0 + (\text{tr} S_{\alpha\beta}^0) \mathbf{u}_\alpha^{(m)} \mathbf{u}_\beta^{(m)} \} \quad (3.25)$$

と低減不変量の定義式を用いると、完全3次の場合における弾性定数の要素平均値は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{I}_B} \right\rangle_e^{(m)} &= c_{10} + c_{11} (\langle \tilde{II}_B \rangle_e^{(m)} - 3) + 2c_{20} (\langle \tilde{I}_B \rangle_e^{(m)} - 3) \\ &\quad + 2c_{21} (\langle \tilde{I}_B \rangle_e^{(m)} - 3) (\langle \tilde{II}_B \rangle_e^{(m)} - 3) + c_{12} (\langle \tilde{II}_B \rangle_e^{(m)} - 3)^2 \\ &\quad + 3c_{30} (\langle \tilde{I}_B \rangle_e^{(m)} - 3)^2 \end{aligned} \quad (3.26a)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} \right\rangle_e^{(m)} &= c_{01} + c_{11} (\langle \tilde{I}_B \rangle_e^{(m)} - 3) + 2c_{02} (\langle \tilde{II}_B \rangle_e^{(m)} - 3) \\ &\quad + c_{21} (\langle \tilde{I}_B \rangle_e^{(m)} - 3)^2 + 2c_{12} (\langle \tilde{I}_B \rangle_e^{(m)} - 3) (\langle \tilde{II}_B \rangle_e^{(m)} - 3) \\ &\quad + 3c_{03} (\langle \tilde{II}_B \rangle_e^{(m)} - 3)^2 \end{aligned} \quad (3.26b)$$

そして、収束条件 $|\mathbf{v}_i^{(m+1)} - \mathbf{v}_i^{(m)}| < \epsilon_2$ を満足するとき

$$\begin{cases} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_i^{n+1} \simeq \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_i^{(m+1)} \\ \mathbf{v}_i^{n+1} \simeq \mathbf{v}_i^{(m+1)} \\ p_{rl}^{n+1} \simeq p_{rl}^{(m+1)} \\ \mathbf{u}_i^{n+1} \simeq \mathbf{u}_i^{(m+1)} \end{cases} \quad (3.27)$$

のように時間進行を行う。このように時間進行した後に、

$$\begin{aligned} & \langle p \rangle_e^{n+1} \\ &= \frac{1}{\Omega_e^{n+1}} \left(\int_{\Omega_e^{n+1}} N_a^p d\Omega^{n+1} \right) p_{ra}^{n+1} - 2 \left(\left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{I}_B} \right\rangle_e^{n+1} + 2 \left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} \right\rangle_e^{n+1} \right) \\ & \quad - \frac{4}{3\Omega_e^0} \left(\left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{I}_B} \right\rangle_e^{n+1} + 4 \left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} \right\rangle_e^{n+1} \right) \mathbf{S}_\alpha^0 \cdot \mathbf{u}_\alpha^{n+1} \\ & \quad - \frac{2}{3\Omega_e^0} \left(\left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{I}_B} \right\rangle_e^{n+1} + 2 \left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} \right\rangle_e^{n+1} \right) (\text{tr} \mathbf{S}_{\alpha\beta}^0) (\mathbf{u}_\alpha^{n+1} \cdot \mathbf{u}_\beta^{n+1}) \\ & \quad - \frac{2}{3\Omega_e^0} \left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} \right\rangle_e^{n+1} \left[2 \{ 2\mathbf{S}_{\alpha\beta}^0 - (\mathbf{S}_{\alpha\beta}^0)^T \} : \mathbf{u}_\alpha^{n+1} \mathbf{u}_\beta^{n+1} \right. \\ & \quad \quad \quad + 4\mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma}^0 \cdot \{ \mathbf{u}_\alpha^{n+1} (\mathbf{u}_\beta^{n+1} \cdot \mathbf{u}_\gamma^{n+1}) - \mathbf{u}_\gamma^{n+1} (\mathbf{u}_\beta^{n+1} \cdot \mathbf{u}_\alpha^{n+1}) \} \\ & \quad \quad \quad + \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}^0 \{ (\mathbf{u}_\alpha^{n+1} \cdot \mathbf{u}_\beta^{n+1}) (\mathbf{u}_\gamma^{n+1} \cdot \mathbf{u}_\delta^{n+1}) \\ & \quad \quad \quad \left. - (\mathbf{u}_\alpha^{n+1} \cdot \mathbf{u}_\delta^{n+1}) (\mathbf{u}_\beta^{n+1} \cdot \mathbf{u}_\gamma^{n+1}) \} \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

より $\langle p \rangle_e^{n+1}$ を求める。

得られた離散化 Poisson 方程式は優対角近似され、速度と圧力の同時緩和法によって計算される。上述した GSMAC 有限要素法の流れ図を図 3.2 に示す。ただし、図 3.2(b) における \tilde{D}_l は修正された速度の発散を圧力の節点平均した値を意味し、 ϵ_1 は非圧縮拘束条件の収束判定基準である。

3.4 静解析の計算方法

本研究で提案する非圧縮超弾性体解析の検証方法として、静的な状態における厳密値との比較を行う。Cauchy 応力に粘性応力項を加えて粘弾性体として扱い、ひずみ遅延を起こさせることによって静的状態を実現する。静的な状態の判定には、 $|\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n| < \epsilon_3$ を用いる。粘弾性体のモデルとして、式(3.4e)を

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \left\{ \frac{\partial W}{\partial \tilde{I}_B} + \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} (\text{tr} \mathbf{B}) \right\} \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + \lambda_t \{ 4(c_{10} + c_{01}) \mathbf{D} \} \quad (3.29)$$

に変更した Voigt モデルの構成方程式を用いる。ここで、 λ_t は 1 次元の場合における遅延時間に相当するパラメータであり、 \mathbf{D} は

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) \quad (3.30)$$

で表される変形速度である。

3.5 計算方法の妥当性および高次要素の適用に対する検証

2次元・3次元の単純な変形問題を解析し、様々な要素を適用した本計算方法の検証を行う。前章の非圧縮流体解析の結果から速度と圧力の分離型の有限要素法で離散化 Poisson 方程式の収束性が比較的良いと考えられる要素として、2次元解析では図 3.3 に示されるような 4 角形要素または 3 角形要素を用い、3次元解析では図 3.4 に示されるような 6 面体要素または 4 面体要素を用いる。表 3.1 に計算に使用する共通のデータを示す。減衰効果と Δt の制限から考えて、 $\lambda_t = 0.01$ s を用いる。代表速度は $V_r = \sqrt{(c_{10} + c_{01})/\rho}$ とする。計算の初期条件として $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{v} = \mathbf{u} = \mathbf{0}$, $p = 0$ ($p_r = 2c_{10} + 4c_{01}$) を用いる。

3.5.1 引張変形の 2 次元平面ひずみ解析

図 3.5 のような 2 次元平面ひずみ状態の解析モデルと境界条件を考える。ただし、図 3.5 の $x = 0$ において対称面を仮定する。図 3.5 に示される W は厚さであり、平面ひずみ状態を仮定するために変形において一定である。図 3.5 の引張変形における l と h について検証する。ただし、その厳密値は

$$\left(\frac{l}{L}\right)^4 - \frac{P_0}{2(c_{10} + c_{01})HW} \left(\frac{l}{L}\right)^3 - 1 = 0 \quad (3.31a)$$

$$\frac{h}{H} = \frac{L}{l} \quad (3.31b)$$

のような 4 次方程式より求めることができる。表 3.1 と表 3.2 に計算に使用した解析条件のデータを示す。代表長さは $L_r = H$ とする。

図 3.6 に Q_2Q_1 要素、図 3.7 に $P_2^+P_1$ 要素を用いた場合における変形時のメッシュと速度ベクトルを示す。速度が減衰して、静止状態に近づく様子がわかる。図 3.8 に解析領域の全面積の時刻歴を示す。図 3.12 を見ると、全面積の変化は $2.0 \times 10^{-4}\%$ 未満であり、非常に小さいことがわかる。表 3.3 に静的状態における相対誤差を厳密値と共に示す。表 3.3 を見ると、相対誤差の最大値は Cauchy 応力成分 T_{xx} の $1.472 \times 10^{-1}\%$ であり、近似値は厳密値と良好に一致することがわかる。

3.5.2 せん断変形の2次元平面ひずみ解析

図 3.9 のような 2 次元平面ひずみ状態の解析モデルと境界条件を考える．図 3.9 に示される角度が $2\gamma_0$ となるせん断変形における u_0 について検証する．表 3.4 に計算に使用した解析条件のデータを示す．代表長さは $L_r = L$ とする．

図 3.10 に Q_2Q_1 要素，図 3.11 に $P_2^+P_1$ 要素を用いた場合における変形時のメッシュと速度ベクトルを示す．図 3.12 に解析領域の全面積の時刻歴を示す．図 3.12 を見ると，全面積の変化は $2.5 \times 10^{-5}\%$ 未満であることがわかる．表 3.7 に静的な状態における相対誤差を厳密値と共に示す．表 3.7 を見ると，相対誤差の最大値は不定圧力 p の $7.962 \times 10^{-3}\%$ であり，近似値は厳密値と良好に一致することがわかる．

3.5.3 引張変形の3次元解析

図 3.13 のような 3 次元の解析モデルと境界条件を考える．図 3.13 の引張変形における l と h について検証する．ただし，その厳密値は

$$\left(\frac{l}{L}\right)^4 + \frac{1}{2c_{10}}\left(2c_{10} - \frac{P_0}{H^2}\right)\left(\frac{l}{L}\right)^3 - \left(\frac{l}{L}\right) - \frac{c_{01}}{c_{10}} = 0 \quad (3.32a)$$

$$\frac{h}{H} = \sqrt{\frac{L}{l}} \quad (3.32b)$$

のような 4 次方程式より求めることができる．表 3.6 に計算に使用した解析条件のデータを示す．ただし，代表長さは $L_r = H$ とする．

図 3.14 に Q_2Q_1 要素，図 3.15 に $P_2^+P_1$ 要素を用いた場合における変形時のメッシュと速度ベクトルを示す．速度が減衰して，静止状態に近づく様子がわかる．図 3.16 に解析領域の全体積の時刻歴を示す．図 3.16 を見ると，全体積の変化は $8.0 \times 10^{-3}\%$ 未満であることがわかる．表 3.7 に静的状態における相対誤差を厳密値と共に示す．表 3.7 を見ると，相対誤差の最大値は Cauchy 応力成分 T_{xx} の $4.506 \times 10^{-1}\%$ であり，近似値は厳密値と良好に一致することがわかる．

3.5.4 せん断変形の3次元解析

図 3.17 のような 3 次元の解析モデルと境界条件を考える．図 3.17 に示される角度が $2\gamma_0$ となるせん断変形における u_0 について検証する．表 3.8 に計算に使用した解析条件のデータを示す．代表長さは $L_r = L$ とする．

図 3.18 に Q_2Q_1 要素，図 3.19 に $P_2^+P_1$ 要素を用いた場合における変形時のメッシュと速度ベクトルを示す．図 3.20 に解析領域の全体積の時刻歴を示す．図 3.20 を見ると，全体積の変化は $6.0 \times 10^{-5}\%$ 未満であることがわかる．表 3.9 に静的な状態における相対誤差

を厳密値と共に示す. 表 3.9 を見ると, 相対誤差の最大値は不定圧力 p の $4.281 \times 10^{-3}\%$ であり, 近似値は厳密値と良好に一致することがわかる.

3.5.5 結果の検討

各時刻において $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ をある程度満足することによって, ひずみが 1 以上となるような大変形においても, 非圧縮超弾性体の全体積がほとんど変化しない. これは, 本研究で提案する計算方法によって, 非圧縮性固体の変形挙動を表すことができることを意味する. すなわち, 各時刻において $\det \mathbf{F} = 1$ と $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ の等価性が十分に満足されている. 計算開始直後に大きな変形が生じるために, 最終的に微小な体積誤差が残るが, 蓄積されるようなことはない. これは, 速度と圧力の分離型の有限要素法の特徴であるサイクル誤差自己調整の原理が働くためである. 弾性振動が減衰した後の静的な状態とみなすことができる時刻では, 計算結果は厳密値と良好に一致する. このことより, 変形後における外力と内力の釣り合いが成立することがわかる.

3.6 硬化特性の導入に対する検証

大変形時において, ゴムなどの高分子材料は硬化することが知られている. そのために, 応力ひずみ曲線は S 字型となる. このことは, Ogden 体や高次モデルの Mooney-Rivlin 体を用いることによって, 表すことが可能である. 単純引張変形, 2 軸引張変形, 純せん断変形を解析することによって, S 字型応力ひずみ曲線を作成する. 得られた計算結果から, 本計算方法における要素平均値を用いた弾性定数の計算方法について検討する.

図 3.21 に示す解析モデルと図 3.22 に示す境界条件を考える. 表 3.10 に計算に使用した解析条件のデータを示す. 代表長さは $L_r = L$, 代表速度は $V_r = \sqrt{(c_{10} + c_{01})/\rho}$ とする. ただし, 本解析で用いる Mooney-Rivlin 定数は, 実測値からカーブフィットによって求められた値である^(3.14). 70 個以上のデータを求めるために, 1 個の 6 面体 Q_1Q_0 要素を用いる. 計算の初期条件として $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{v} = \mathbf{u} = \mathbf{0}$, $p = 0$ ($p_r = 2c_{10} + 4c_{01}$) を用いる. 以下に, S 字型応力ひずみ曲線を作成するための計算手順を示す.

- (1) 外力 $P_0 = 0$ と時間刻み幅 $\Delta t = \Delta t_{\max}$ を設定する.
- (2) 正のひずみを求める場合には, 外力 P_0 に ΔP_0 を加える. 負のひずみを求める場合には, 外力 P_0 から ΔP_0 を差し引く.
- (3) 計算を開始して, 弾性振動が減衰させる. 計算が破綻する場合には, Δt を 1/2 倍にして, 再び計算を開始する.

(4) 与えた応力 P_0/gL^2 と得られたひずみ $(l-L)/L$ を応力ひずみ曲線にプロットする。ただし、 g は重力加速度である。

(5) 変形した状態を初期条件とする。(2) から (5) の計算を繰り返す。

本解析では、 $\Delta P_0/gL^2 = 2.5 \times 10^4 \text{kg/m}^2$ 、 $\Delta t_{\max} = 5.0 \times 10^{-4} \text{s}$ と設定する。

図 3.23 に与えた応力と設定した時間刻み幅の関係を示す。 P_0/gL^2 が $3.0 \times 10^5 \text{kg/m}^2$ あたりからひずみの変化量が小さくなるので、時間刻み幅を小さくする必要がなくなる。図 3.24 に作成した S 字型応力ひずみ曲線を実測値^(3.14)、厳密値と共に示す。外力の大きさに応じて適切な時間刻み幅を設定すると、動的な状態から静的な状態を実現することができ、静的な状態は厳密値と良好に一致する。図 3.25 に単純引張変形、図 3.26 に 2 軸引張変形、図 3.27 に純せん断変形の静的な状態における要素形状を示す。これらの要素形状から、大きなひずみを与えたときの硬化特性が現れていることが確認できる。これらの結果より、大きなひずみ領域における硬化性を表すことが可能であることが確認できる。要素平均値を用いた弾性定数の計算によって、完全 3 次の Mooney-Rivlin 体の変形挙動を十分に解析できると考えられる。

3.7 特異性に対する要素の比較

押し込み変形のような特異点が存在する問題では、特異点付近での要素のゆがみが大きくなり、計算が厳しくなる。このとき、変位に 1 次の補間関数を用いると、特異点付近の解が硬くなる。本解析では、特異性が存在する問題において要素の種類による解の違いを調べる。

図 3.28 のような平面ひずみ状態の解析モデルと 2 次元・3 次元の境界条件を考える。強制変位を与える境界では、

$$u_y(t) = \begin{cases} \Delta u_0 \left\{ 1 - \frac{(t - T_r)^2}{T_r^2} \right\} \\ \quad (0 \leq t \leq T_r) \\ \Delta u_0 \quad (t > T_r) \end{cases} \quad (3.33)$$

のように時間的に変化する基本境界条件を与える。本解析では、 $\Delta u_0 = -0.25L_r$ と設定する(図 3.29 参照)。表 3.11 と表 3.12 に計算に使用した解析条件のデータを示す。ただし、 $V_r = \sqrt{(c_{10} + c_{01})/\rho}$ は代表速度である。計算の初期条件として $dv/dt = \mathbf{v} = \mathbf{u} = \mathbf{0}$ 、 $p = 0$ ($p_r = 2c_{10} + 4c_{01}$) を用いる。

図 3.30 に 2 次元 Q_2Q_1 要素、図 3.31 に 2 次元 $P_2^+P_1$ 要素を用いた場合における変形時のメッシュと速度ベクトルを山田らの結果と共に示す。また、図 3.32 に 3 次元 Q_2Q_1 要素、

図 3.33 に 3 次元 $P_2^+P_1$ 要素を用いた場合における変形時のメッシュと速度ベクトルを示し、図 3.34 に 3 次元メッシュの幾何形状と山田らの結果との比較を示す。本計算方法で求めた 2 次元 $P_2^+P_1$ 要素、3 次元 $P_2^+P_1$ 要素のメッシュ形状は、Lagrange 未定乗数法を用いた山田らの 2 次元解析結果^(3.6) と良好に一致する。山田らも $6 \times 6 \times 2$ の 2 次元 $P_2^+P_1$ 要素を用いているが、要素境界で不連続な圧力を用いている点異なる。図 3.35 に 2 次元平面ひずみ要素を用いた場合における解析領域の全面積の時刻歴を示し、図 3.36 に 3 次元要素を用いた場合における解析領域の全体積の時刻歴を示す。2 次元平面ひずみ要素を用いた場合の全面積の変化と 3 次元要素を用いた場合の全体積の変化は $1.4 \times 10^{-4}\%$ 未満であることがわかる。圧縮変形下において、各時刻の解析領域の全体積は十分に保存されている。図 3.37 に 2 次元要素の圧力分布と図 3.38 に 3 次元要素の圧力分布を示す。変位の補間に 1 次関数を用いた結果は、2 次関数と比べて、特異点付近で圧力場が大きくなる。これは、1 次関数を用いると、特異点付近で曲線形状を表すことができないために、変形が硬くなることが原因であると考えられる。特異点付近における要素のゆがみによる離散化 Poisson 方程式の離散化精度の悪化も 1 次要素の方が 2 次要素より大きく影響してくると考えられる。

3.8 第3章の結言

本章では、 $\det \mathbf{F} = 1$ と $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ の等価性に注目して、従来用いられてきた Lagrange 未定乗数法やペナルティ法ではなく、速度と圧力の分離型解法の 1 つである GSMAC 有限要素法によって非圧縮超弾性体の挙動を計算できる方法を提案し、その実用化に向けて検証を行った。2 次元・3 次元問題の検証において、その有効性を以下のように確認することができた。まず、 Q_1Q_0 要素、 Q_2Q_1 要素、 $P_1^+P_1$ 要素、 $P_2^+P_1$ 要素 ($P_2^+P_1$ 要素) を用いて単純な変形問題を解析し、静的な状態の近似値は厳密値と良好に一致した。このとき、分離型の有限要素法の特徴であるサイクル誤差自己調整の原理が働き、体積誤差が蓄積されるようなことはなく、体積保存が十分な精度で成り立つことを確認できた。粘性項を付加すると弾性振動が減衰して、静的状態を実現でき、静的な状態の近似値は厳密値と良好に一致した。次に、大変形時の高分子材料が有する硬化特性を表すことができるように、要素平均値を用いた弾性定数の計算方法を導入した。作成した S 字型応力ひずみ曲線は厳密値と良好に一致し、高次 Mooney-Rivlin 体の変形挙動を表すことが可能であることがわかった。最後に、特異性が存在する押し込み問題を解析し、2 次元要素の滑らかに変化する圧力分布に対して、1 次元要素の分布は特異点付近で高い値となった。1 次元要素が有する幾何学的な形状が特異点付近の圧力場の精度に、大きく影響を及ぼすことがわかった。

今後陽的に計算できる接触方法を導入することによって、ゴムの球を壁に当てて跳ね返すような問題などの非圧縮超弾性体の様々な動的な問題が解析できると考えられる。

第3章の参考文献

- (3.1) 久田俊明, 野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, (1995).
- (3.2) Tang, D., Yang, C., Huang, Y., and Ku D.N., Wall stress and strain analysis using a three-dimensional thick-wall model with fluid-structure interactions for blood flow in carotid arteries with stenoses, *Computers & Structures*, **72**, (1999), pp. 341–356.
- (3.3) Watanabe, H., Hisada, T., Sugiura, S., Okada, J., and Fukunari, H., Computer simulation of blood flow, left ventricular wall motion and their interrelationship by fluid-structure interaction finite element method *JSME International Journal Series C*, **45-4**, (2002), pp. 1003–1012.
- (3.4) 孫 智剛, 牧野内昭武, 超弾性体と静止液体の連成解析 FEM プログラムの開発及び眼球網膜剥離手術のシミュレーションへの応用, 日本機械学会論文集, A 編, **68-666**, (2002), pp. 357–356.
- (3.5) Sussman, T. and Bathe, K. J., A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis, *Computers & Structures*, **26**, (1987), pp. 357–409.
- (3.6) Yamada, T. and Kikuchi, F., A mixed finite element method for large deformation analysis of incompressible hyperelastic materials, *Theoretical and Applied Mechanics*, **39**, (1990), pp. 61–73.
- (3.7) 渡辺浩志, 久田俊明, 超弾性体の混合型有限要素法に関する基礎的検討, 日本機械学会論文集, A 編, **62-595**, (1996), pp. 745–752.
- (3.8) Harlow, F. H. and Welch, J. E., Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Physics of Fluids*, **8-12**, (1965), pp. 2182–2189.
- (3.9) Amsden, A. A. and Harlow, F. H., A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculation, *Journal of Computational Physics*, **6**, (1970), pp. 322–325.
- (3.10) Hirt, C. W. and Cook, J. L., Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain, *Journal of Computational Physics*, **10**, (1972), pp. 324–340.

- (3.11) 棚橋隆彦, 斉藤恒洋, 粘性流体の非定常流れの数値解析アルゴリズム (GSMAC 法について), 京都大学数理解析研究所講究録, **548**, (1985), pp. 122–146.
- (3.12) 棚橋隆彦, 流れの有限要素法解析, **I**, 朝倉書店, (1997).
- (3.13) Marcus, R. and Erwin, S., Analysis finite element computation and error estimation in transversely isotropic nearly incompressible finite elasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, (2000), pp. 519–541.
- (3.14) ゴム材料のモデリング, セミナーテキスト, 株式会社メカニカルデザイン.

第3章の表および図

- 表 3.1 計算データ (2次元・3次元の単純変形)
- 表 3.2 計算データ (2次元の引張変形)
- 表 3.3 相対誤差 (2次元の引張変形)
- 表 3.4 計算データ (2次元のせん断変形)
- 表 3.5 相対誤差 (2次元のせん断変形)
- 表 3.6 計算データ (3次元の引張変形)
- 表 3.7 相対誤差 (3次元の引張変形)
- 表 3.8 計算データ (3次元のせん断変形)
- 表 3.9 相対誤差 (3次元のせん断変形)
- 表 3.10 計算データ (硬化特性の導入)
- 表 3.11 計算データ (押し込み変形)
- 表 3.12 計算データ (押し込み変形)
-
- 図 3.1 移動する物質点の位置と非圧縮条件
- 図 3.2 非圧縮超弾性体の GSMAC 有限要素法アルゴリズムの流れ図
- 図 3.3 4角形要素と3角形要素 (+: 気泡関数)
- 図 3.4 6面体要素と4面体要素 (+: 気泡関数)
- 図 3.5 2次元引張変形問題における解析モデルと境界条件
- 図 3.6 解析メッシュと速度ベクトル ($P_0 = 3.0 \times 10^4$ N, Q_2Q_1 要素)
- 図 3.7 解析メッシュと速度ベクトル ($P_0 = 3.0 \times 10^4$ N, $P_2^+P_1$ 要素)
- 図 3.8 全面積の時刻歴 ($P_0 = 3.0 \times 10^4$ N)
- 図 3.9 2次元せん断変形問題における解析モデルと境界条件
- 図 3.10 解析メッシュと速度ベクトル ($\gamma_0 = \pi/6$, Q_2Q_1 要素)
- 図 3.11 解析メッシュと速度ベクトル ($\gamma_0 = \pi/6$, $P_2^+P_1$ 要素)
- 図 3.12 全面積の時刻歴 ($\gamma_0 = \pi/6$)
- 図 3.13 3次元引張変形問題における解析モデルと境界条件
- 図 3.14 解析メッシュと速度ベクトル ($P_0 = 2.0 \times 10^4$ N, Q_2Q_1 要素)
- 図 3.15 解析メッシュと速度ベクトル ($P_0 = 2.0 \times 10^4$ N, $P_2^{++}P_1$ 要素)
- 図 3.16 全面積の時刻歴 ($P_0 = 2.0 \times 10^4$ N)
- 図 3.17 3次元せん断変形問題における解析モデルと境界条件
- 図 3.18 解析メッシュと速度ベクトル ($\gamma_0 = \pi/6$, Q_2Q_1 要素)
- 図 3.19 解析メッシュと速度ベクトル ($\gamma_0 = \pi/6$, $P_2^{++}P_1$ 要素)

- 図 3.20 全面積の時刻歴 ($\gamma_0 = \pi/6$)
- 図 3.21 解析モデル (硬化特性の導入)
- 図 3.22 境界条件 (硬化特性の導入)
- 図 3.23 公称応力と時間刻み幅の関係 ($\Delta t_{\max} = 5.0 \times 10^{-4}$ s, $\Delta t_{\min}/\Delta t_{\max} = 9.76563 \times 10^{-4}$)
- 図 3.24 公称応力と公称ひずみの関係
- 図 3.25 要素の幾何学形状 (単純引張変形)
- 図 3.26 要素の幾何学形状 (2 軸引張変形)
- 図 3.27 要素の幾何学形状 (純粋せん断変形)
- 図 3.28 押し込み変形の 2 次元問題における解析モデルと境界条件
- 図 3.29 上方境界で与えられる変位, 速度, 加速度の時刻歴
- 図 3.30 解析メッシュと速度ベクトル ($u_y = -0.25$, Q_2Q_1 要素)
- 図 3.31 解析メッシュと速度ベクトル ($u_y = -0.25$, $P_2^+P_1$ 要素)
- 図 3.32 解析メッシュと速度ベクトル ($u_y = -0.25$, Q_2Q_1 要素)
- 図 3.33 解析メッシュと速度ベクトル ($u_y = -0.25$, $P_2^{++}P_1$ 要素)
- 図 3.34 圧縮下の幾何形状 ($u_y = -0.25$, 3 次元要素)
- 図 3.35 全面積の時刻歴 ($u_y = -0.25$, 2 次元平面ひずみ要素)
- 図 3.36 全体積の時刻歴 ($u_y = -0.25$, 3 次元要素)
- 図 3.37 圧力分布 ($u_y = -0.25$, 2 次元平面ひずみ要素)
- 図 3.38 圧力分布 ($u_y = -0.25$, 3 次元要素)

Table 3.1 Calculation data (two-dimensional or three-dimensional simple deformation)

ρ	$1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
c_{10}	$3.0 \times 10^5 \text{ Pa}$
c_{01}	$2.0 \times 10^5 \text{ Pa}$
λ_t	$1.0 \times 10^{-2} \text{ s}$
γ	0.6
β	0.3025
ϵ_1	$1.0 \times 10^{-3} V_r/L_r$
ϵ_2	$1.0 \times 10^{-6} V_r$
ϵ_3	$1.0 \times 10^{-9} V_r$

Table 3.2 Calculation data (two-dimensional tensile deformation)

	Quadrilateral elements	Triangular elements
n_E	2×2	$2 \times 2 \times 2$
$\min_{1 \leq e \leq n_E} \sqrt{S_e}$	$8.660 \times 10^{-2} \text{ m}$	$6.124 \times 10^{-2} \text{ m}$
Δt	$1.0 \times 10^{-6} \text{ s}$	$2.0 \times 10^{-7} \text{ s}$

Table 3.3 Relative errors (two-dimensional tensile deformation)

Exact solution	Q ₁ Q ₀ element	Q ₂ Q ₁ element	P ₁ ⁺ P ₁ element	P ₂ ⁺ P ₁ element
$l = 9.1072323 \times 10^{-1} \text{ m}$	$3.194 \times 10^{-3} \%$	$2.978 \times 10^{-2} \%$	$1.354 \times 10^{-2} \%$	$9.727 \times 10^{-3} \%$
$h = 3.2940853 \times 10^{-2} \text{ m}$	$3.437 \times 10^{-3} \%$	$2.868 \times 10^{-2} \%$	$2.292 \times 10^{-3} \%$	$9.038 \times 10^{-2} \%$
$p = -4.3094744 \times 10^6 \text{ Pa}$	$2.941 \times 10^{-3} \%$	$2.690 \times 10^{-2} \%$	$6.830 \times 10^{-3} \%$	$8.884 \times 10^{-2} \%$
$T_{xx} = 9.1072323 \times 10^6 \text{ Pa}$	$4.817 \times 10^{-3} \%$	$4.453 \times 10^{-2} \%$	$1.087 \times 10^{-2} \%$	$1.472 \times 10^{-1} \%$

Table 3.4 Calculation data (two-dimensional shear deformation)

	Quadrilateral elements	Triangular elements
n_E	2×2	$2 \times 2 \times 2$
$\min_{1 \leq e \leq n_E} \sqrt{S_e}$	5.000×10^{-2} m	3.536×10^{-2} m
Δt	2.0×10^{-6} s	5.0×10^{-7} s

Table 3.5 Relative errors (two-dimensional shear deformation)

Exact solution	Q ₁ Q ₀ element	Q ₂ Q ₁ element	P ₁ ⁺ P ₁ element	P ₂ ⁺ P ₁ element
$u_0 = 1.7320508 \times 10^{-1}$ m	9.658×10^{-4} %	1.215×10^{-3} %	3.327×10^{-3} %	3.380×10^{-3} %
$p = -2.0000000 \times 10^5$ Pa	3.777×10^{-3} %	3.491×10^{-3} %	7.962×10^{-3} %	7.367×10^{-3} %
$T_{xx} = 1.8000000 \times 10^6$ Pa	5.603×10^{-4} %	6.049×10^{-4} %	3.248×10^{-3} %	3.372×10^{-3} %
$T_{xy} = 1.7320508 \times 10^6$ Pa	5.371×10^{-4} %	5.406×10^{-4} %	2.320×10^{-3} %	2.351×10^{-3} %
$T_{yy} = -1.2000000 \times 10^6$ Pa	1.914×10^{-3} %	1.883×10^{-3} %	6.750×10^{-3} %	6.727×10^{-3} %

Table 3.6 Calculation data (three-dimensional tensile deformation)

	Hexahedral elements	Tetrahedral elements
n_E	2	12
$\min_{1 \leq e \leq n_E} \sqrt[3]{V_e}$	7.211×10^{-2} m	3.969×10^{-2} m
Δt	2.0×10^{-6} s	2.0×10^{-7} s

Table 3.7 Relative errors (three-dimensional tensile deformation)

Exact solution	Q ₁ Q ₀ element	Q ₂ Q ₁ element	P ₁ ⁺ P ₁ element	P ₂ ⁺ P ₁ element
$l = 8.4657356 \times 10^{-1}$ m	6.114×10^{-3} %	6.512×10^{-2} %	2.752×10^{-1} %	1.176×10^{-1} %
$h = 2.9764479 \times 10^{-2}$ m	3.082×10^{-3} %	3.306×10^{-2} %	1.377×10^{-1} %	1.176×10^{-1} %
$p = -1.8812746 \times 10^6$ Pa	6.109×10^{-3} %	6.509×10^{-2} %	2.762×10^{-1} %	2.329×10^{-1} %
$T_{xx} = 5.6438237 \times 10^6$ Pa	1.002×10^{-2} %	1.064×10^{-1} %	4.506×10^{-1} %	3.803×10^{-1} %

Table 3.11 Calculation data (compression deformation)

c_{10}	$1.5 \rho(L_r/T_r)^2$
c_{01}	$0.5 \rho(L_r/T_r)^2$
λ_t	$15.0 T_r$
γ	0.6
β	0.3025
ϵ_1	$1.0 \times 10^{-3} V_r/L_r$
ϵ_2	$1.0 \times 10^{-6} V_r$
ϵ_3	$1.0 \times 10^{-6} V_r$

Table 3.12 Calculation data (compression deformation)

(a) Two-dimensional problem

	Q ₁ Q ₀ element	Q ₂ Q ₁ element	P ₁ ⁺ P ₁ element	P ₂ ⁺ P ₁ element
n_E	12×12	6×6	$12 \times 12 \times 2$	$6 \times 6 \times 2$
Δt	$2.0 \times 10^{-6} T_r$	$5.0 \times 10^{-6} T_r$	$1.0 \times 10^{-6} T_r$	$2.0 \times 10^{-6} T_r$

(b) Three-dimensional problem

	Q ₁ Q ₀ element	Q ₂ Q ₁ element	P ₁ ⁺ P ₁ element	P ₂ ⁺ P ₁ element
n_E	288	36	1728	216
Δt	$2.0 \times 10^{-6} T_r$	$5.0 \times 10^{-6} T_r$	$5.0 \times 10^{-7} T_r$	$2.0 \times 10^{-6} T_r$

Table 3.8 Calculation data (three-dimensional shear deformation)

	Hexahedral elements	Tetrahedral elements
n_E	2	12
$\min_{1 \leq e \leq n_E} \sqrt[3]{V_e}$	6.300×10^{-2} m	4.368×10^{-2} m
Δt	2.0×10^{-6} s	1.0×10^{-6} s

Table 3.9 Relative errors (three-dimensional shear deformation)

Exact solution	Q ₁ Q ₀ element	Q ₂ Q ₁ element	P ₁ ⁺ P ₁ element	P ₂ ⁺ P ₁ element
$u_0 = 1.7320508 \times 10^{-1}$ m	9.656×10^{-4} %	4.435×10^{-4} %	1.105×10^{-3} %	9.656×10^{-4} %
$p = -2.0000000 \times 10^5$ Pa	3.776×10^{-4} %	1.304×10^{-3} %	4.281×10^{-3} %	3.157×10^{-3} %
$T_{yy} = 1.8000000 \times 10^6$ Pa	5.607×10^{-4} %	9.137×10^{-4} %	1.492×10^{-3} %	1.748×10^{-3} %
$T_{yz} = 1.7320508 \times 10^6$ Pa	5.372×10^{-4} %	6.395×10^{-4} %	1.103×10^{-3} %	1.174×10^{-3} %
$T_{zz} = -1.2000000 \times 10^6$ Pa	1.914×10^{-3} %	1.612×10^{-3} %	3.295×10^{-3} %	3.281×10^{-3} %

Table 3.10 Calculation data (introduction of stiffening property)

ρ	1.0×10^3 kg/m ³
c_{10}	1.81222092×10^5 Pa
c_{01}	9.95175450×10^3 Pa
c_{11}	-1.51094601×10^2 Pa
c_{20}	-2.11709610×10^3 Pa
c_{02}	0.0
c_{21}	0.0
c_{12}	0.0
c_{30}	5.00884866×10^1 Pa
c_{03}	0.0
λ_t	1.0×10^{-2} s
γ	0.6
β	0.3025
ϵ_1	1.0×10^{-3} V_r/L_r
ϵ_2	1.0×10^{-6} V_r
ϵ_3	1.0×10^{-9} V_r

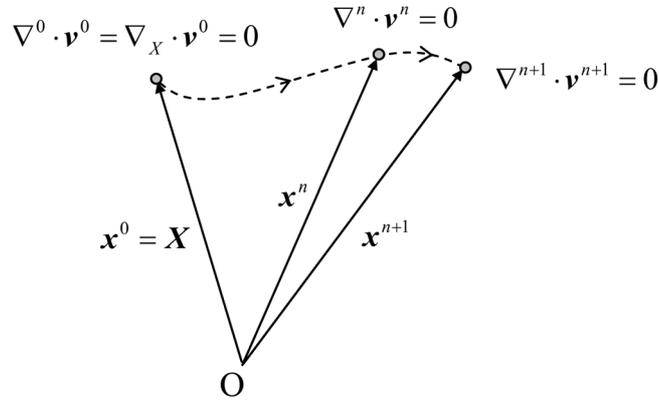


Fig.3.1 Positions of moving material point and incompressible conditions

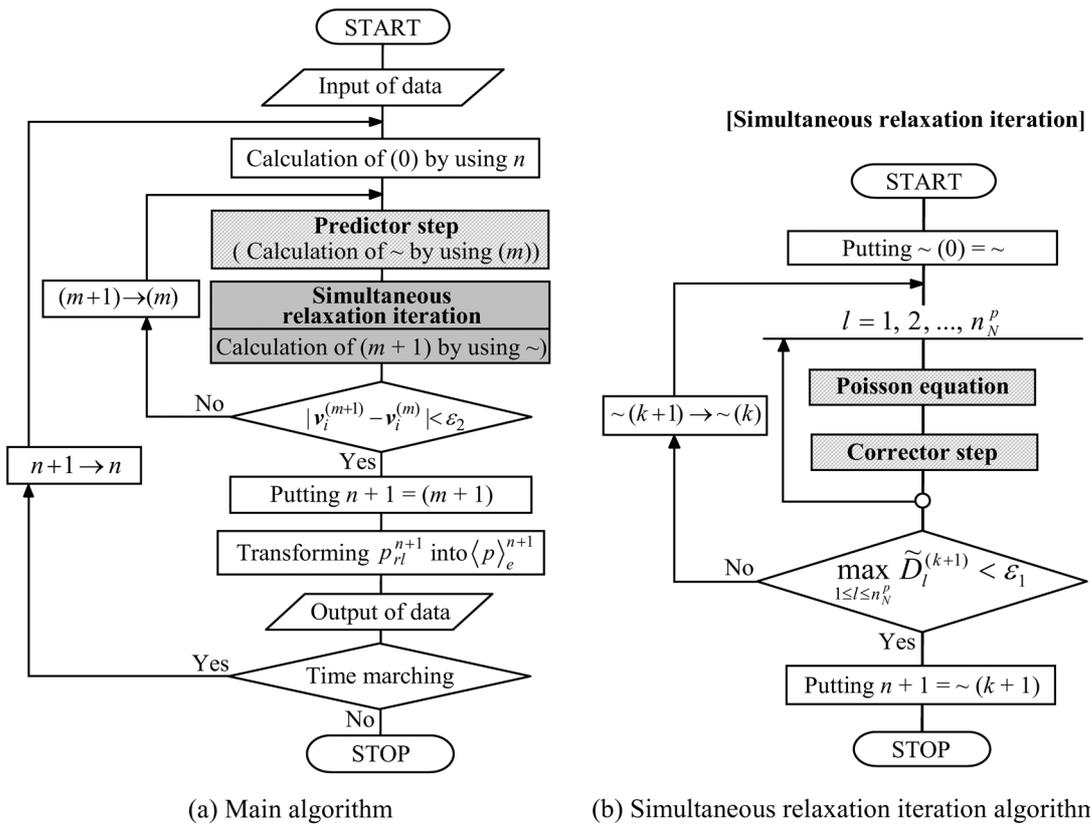


Fig.3.2 The flowchart of GSMAC-FEM algorithm for incompressible hyperelastic material

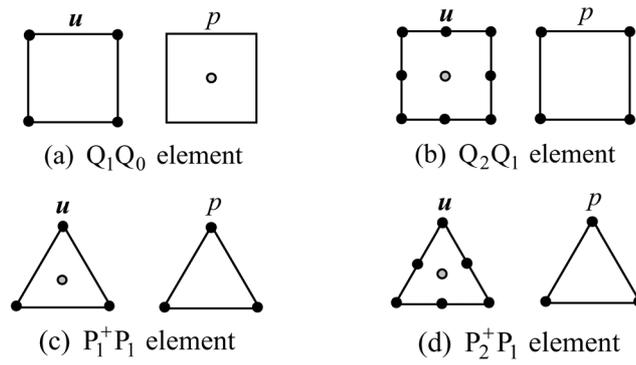


Fig.3.3 Quadrilateral and triangular elements

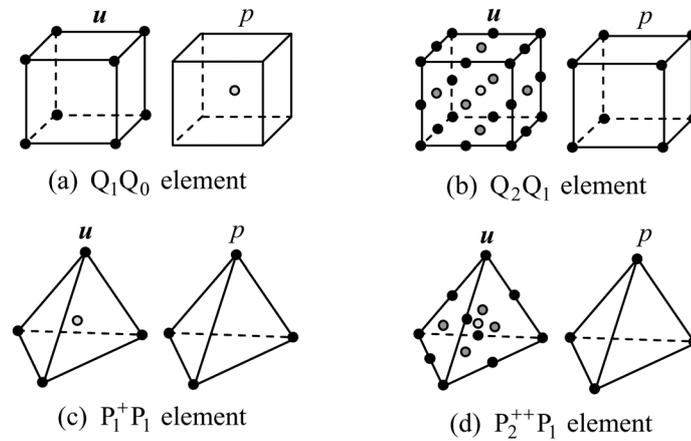


Fig.3.4 Hexahedral and tetrahedral elements (+: bubble function)

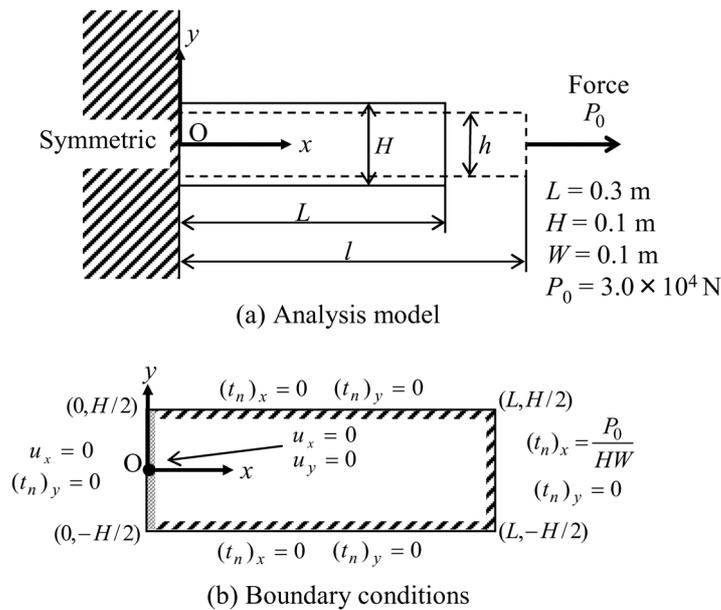


Fig.3.5 Analysis model and boundary conditions (two-dimensional tensile deformation)

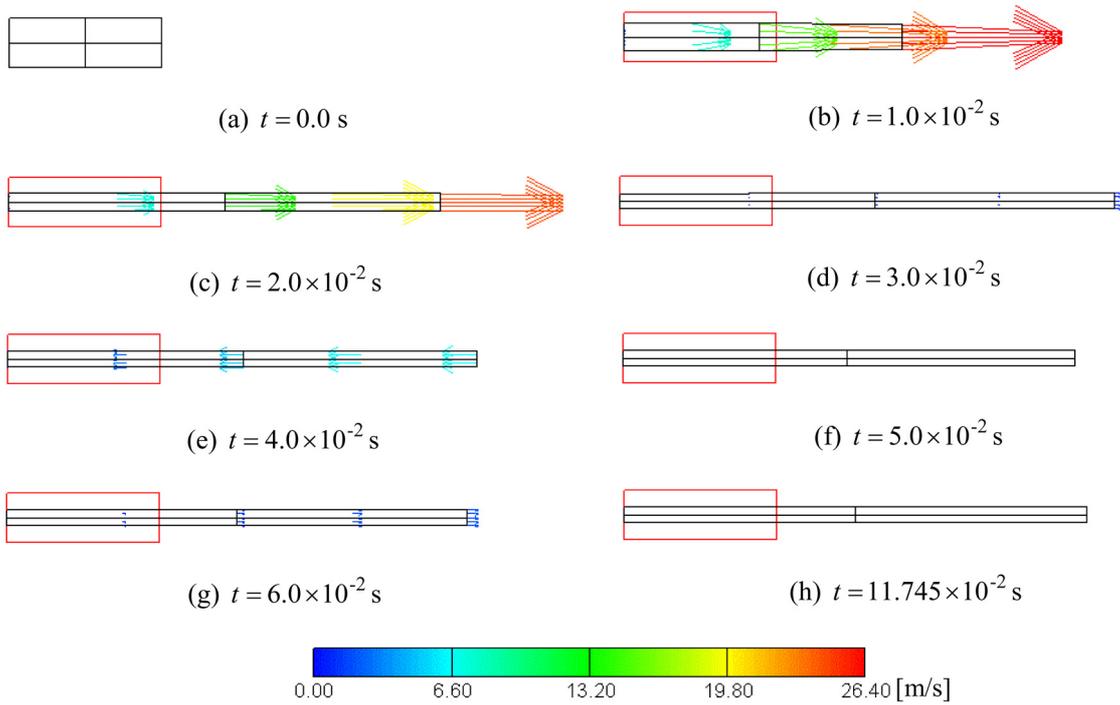


Fig.3.6 Analysis meshes and velocity vectors ($P_0 = 3.0 \times 10^4$ N, Q_2Q_1 elements)

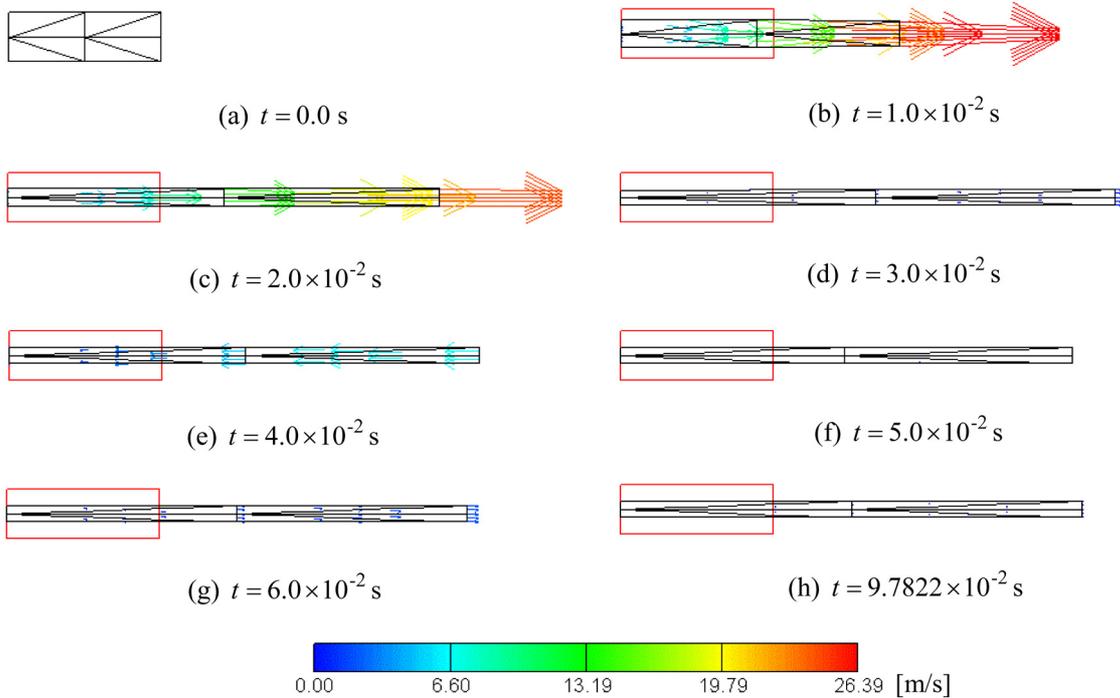


Fig.3.7 Analysis meshes and velocity vectors ($P_0 = 3.0 \times 10^4$ N, $P_2^+P_1$ element)

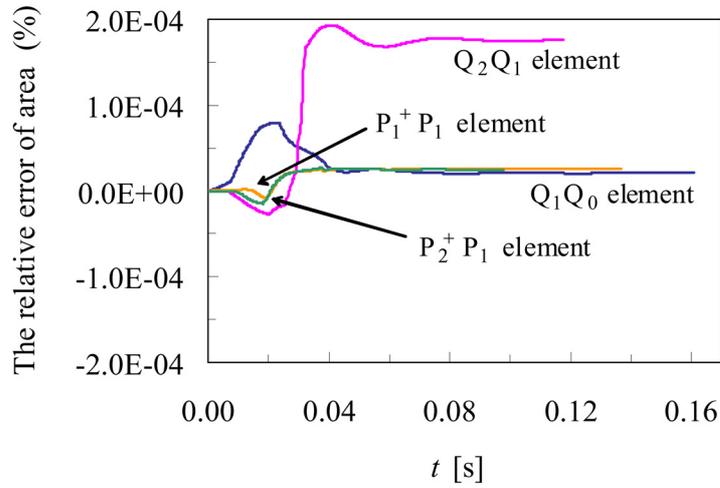


Fig.3.8 Time histories of the total area of analysis domain ($P_0 = 3.0 \times 10^4$ N)

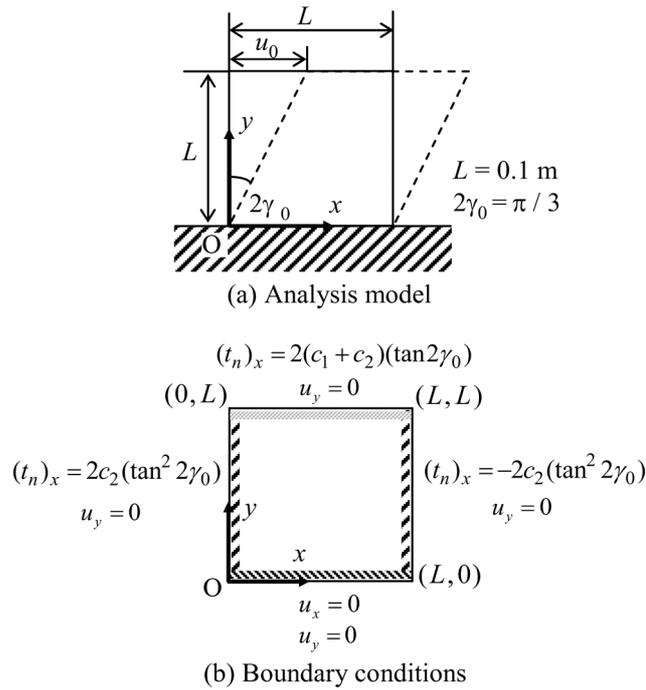


Fig.3.9 Analysis model and boundary conditions (two-dimensional shear deformation)

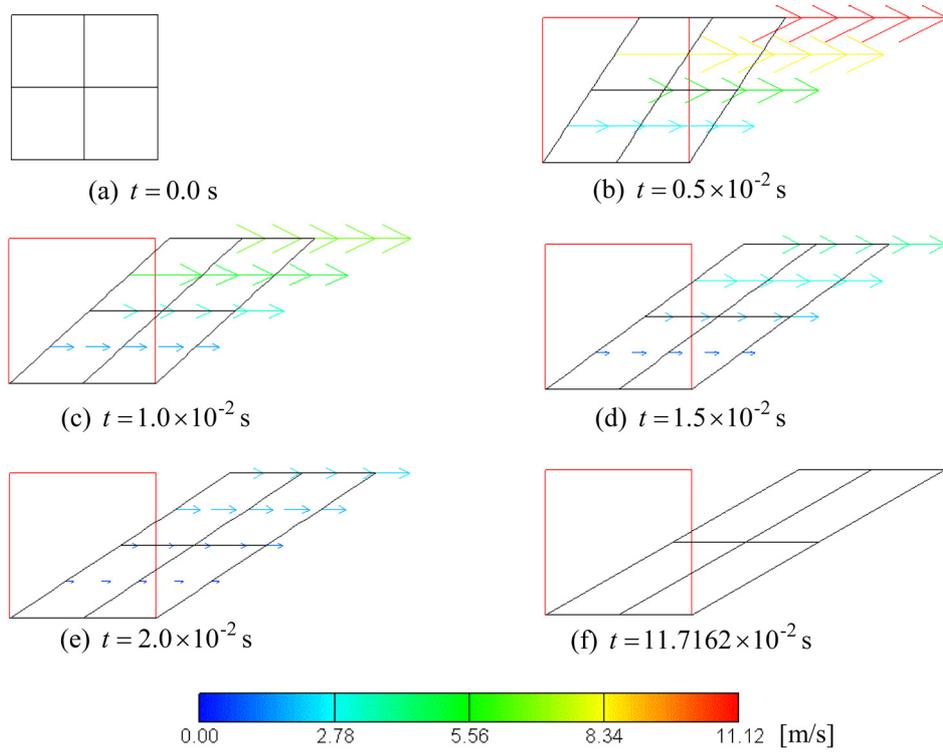


Fig.3.10 Analysis meshes and velocity vectors ($\gamma_0 = \pi/6$, Q_2Q_1 elements)

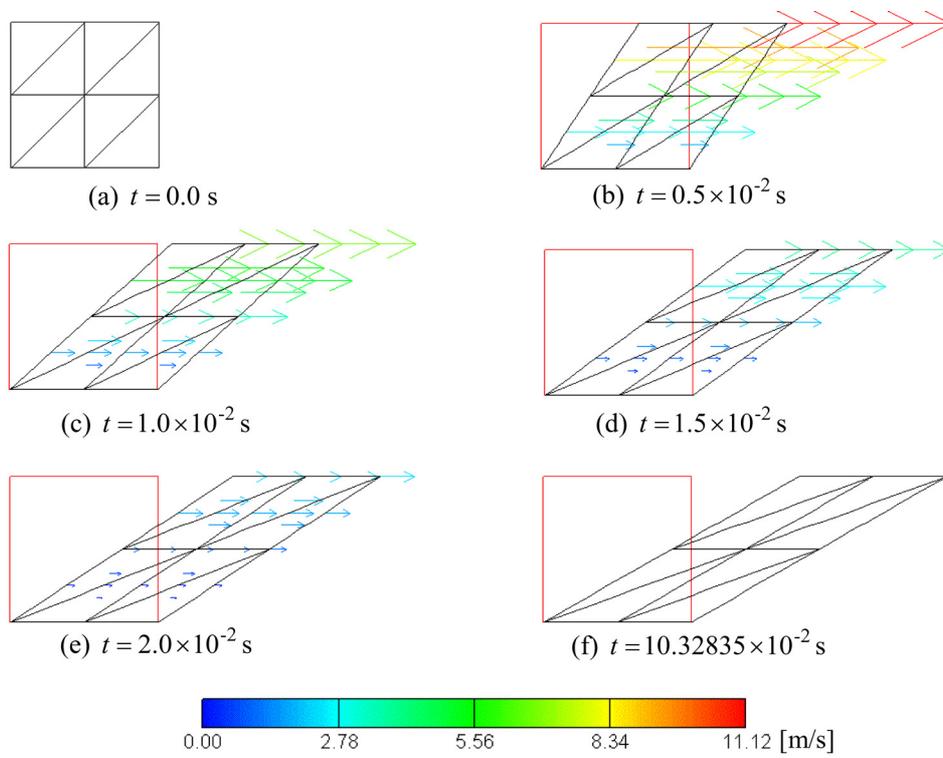


Fig.3.11 Analysis meshes and velocity vectors ($\gamma_0 = \pi/6$, $P_2^+P_1$ elements)

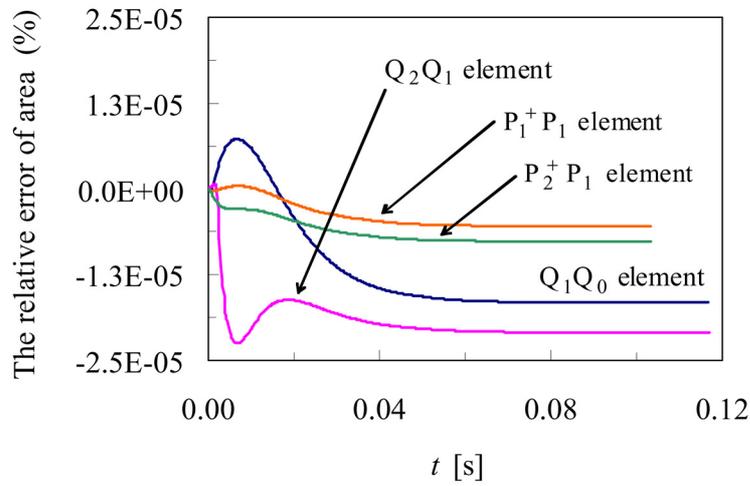


Fig.3.12 Time histories of the total area of analysis domain ($\gamma_0 = \pi/6$)

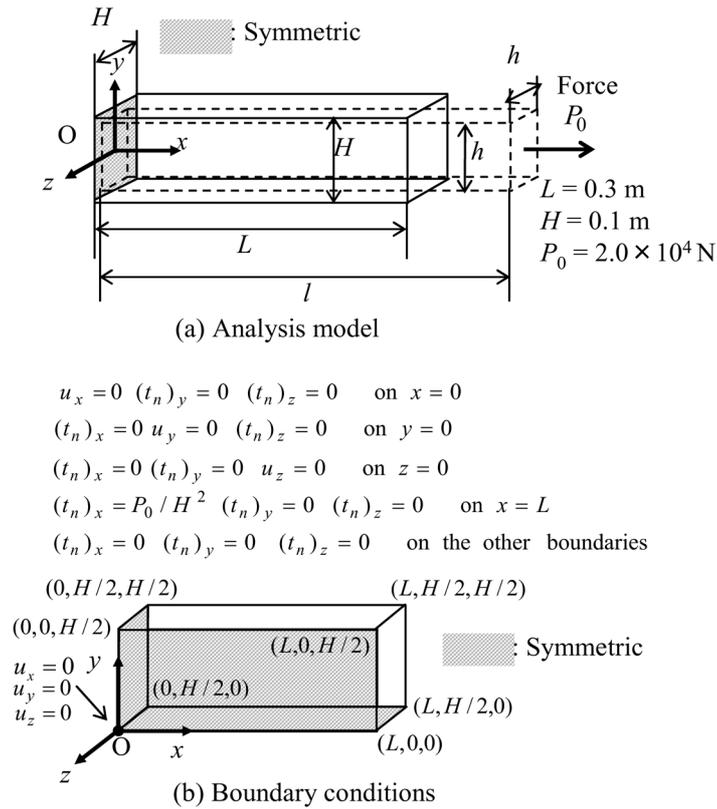


Fig.3.13 Analysis model and boundary conditions (three-dimensional tensile deformation)

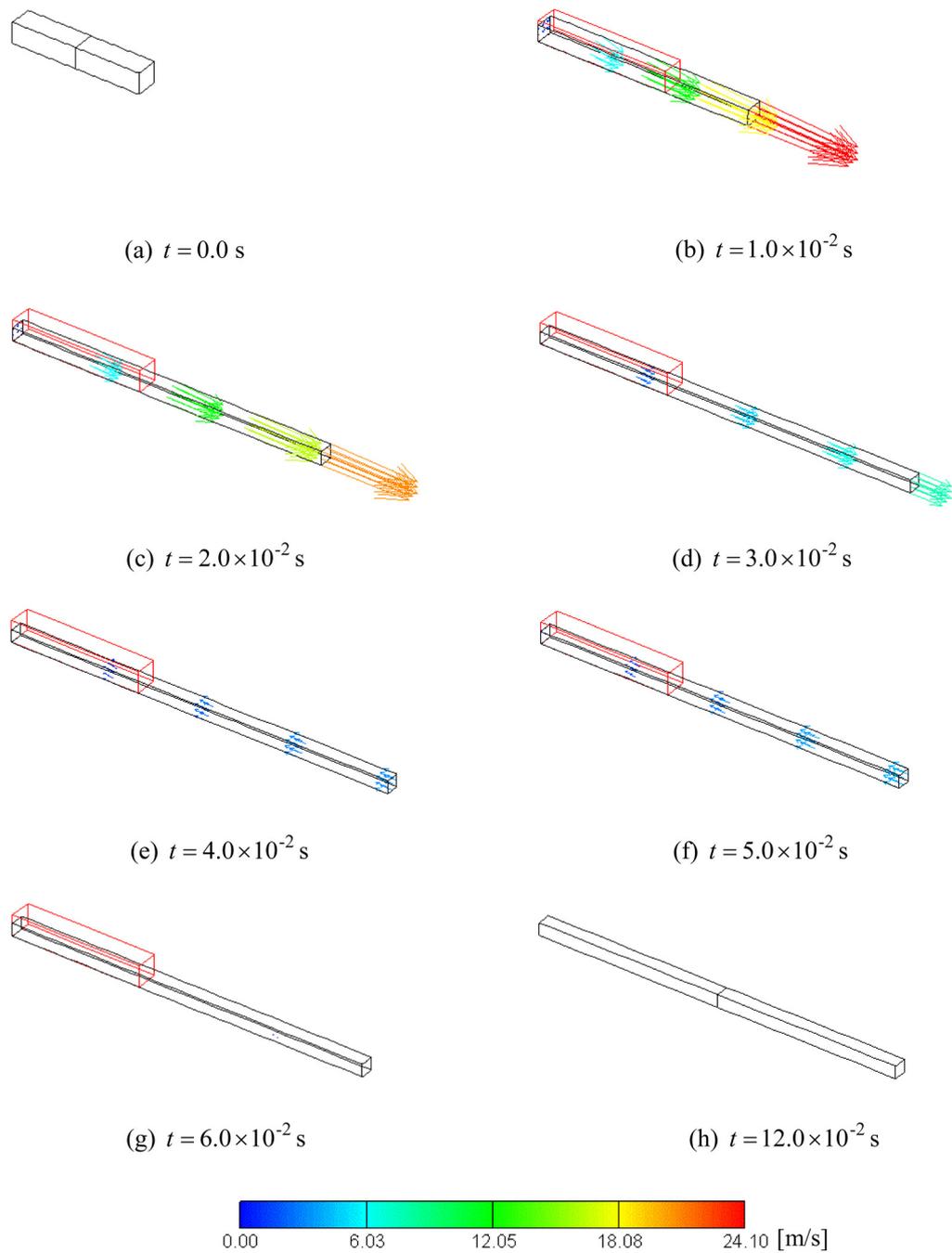


Fig.3.14 Analysis meshes and velocity vectors ($P_0 = 2.0 \times 10^4 \text{ N}$, Q_2Q_1 elements)

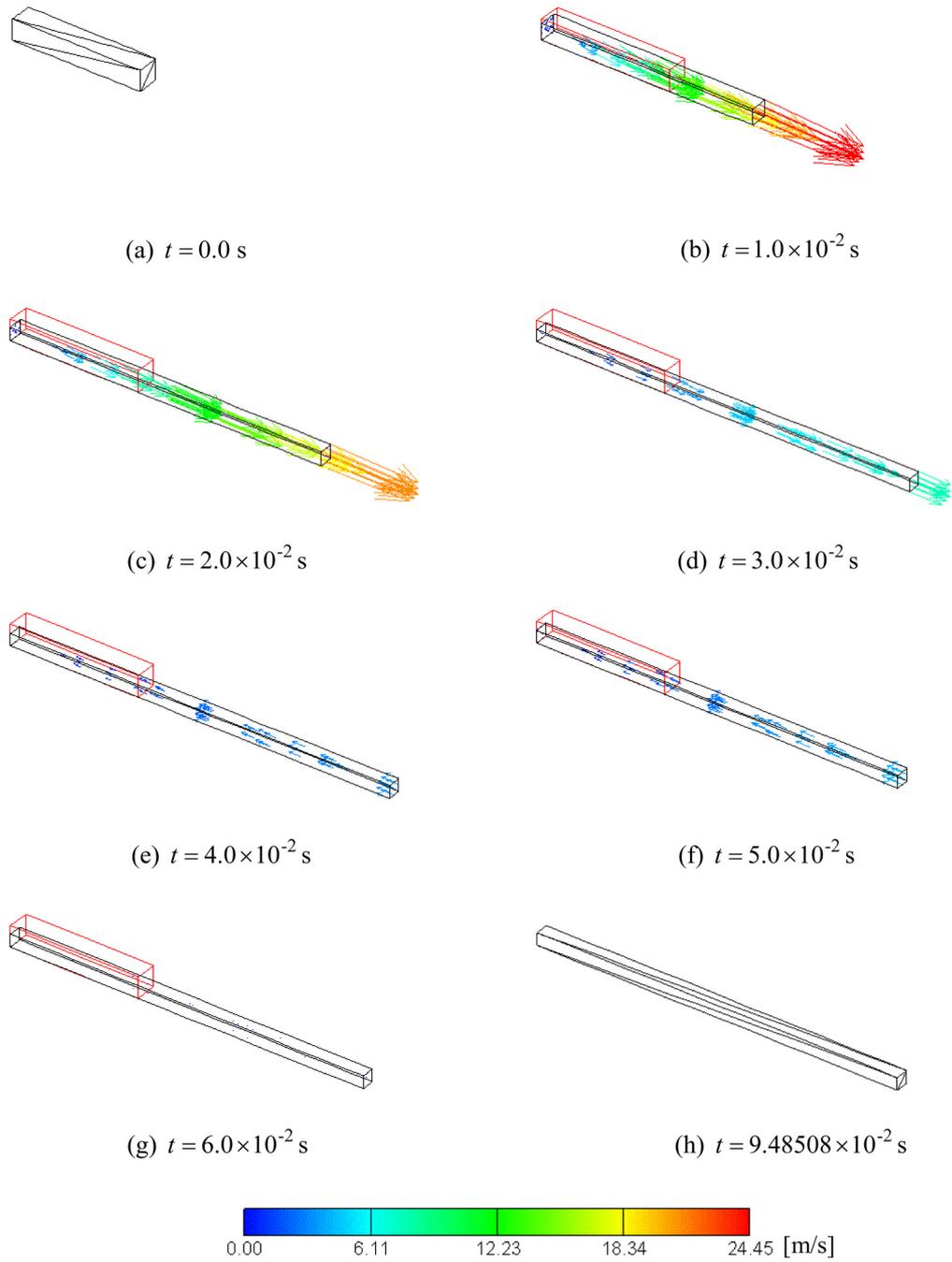


Fig.3.15 Analysis meshes and velocity vectors ($P_0 = 2.0 \times 10^4 \text{ N}$, $P_2^+P_1$ element)

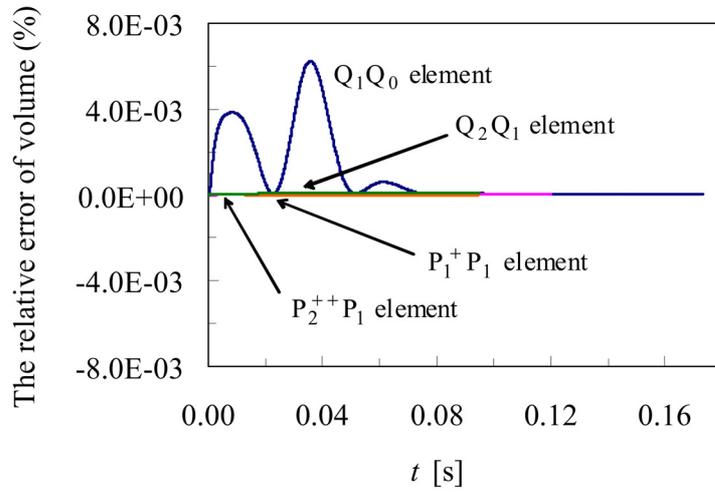
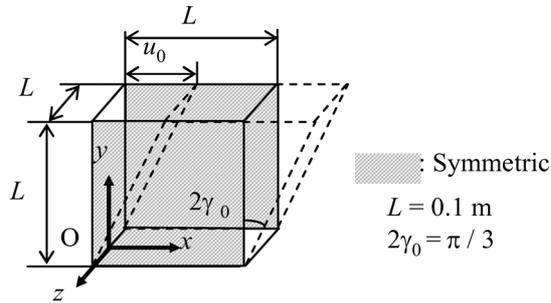


Fig.3.16 Time histories of the total volume of analysis domain ($P_0 = 2.0 \times 10^4$ N)



$$u_x = 0 \quad (t_n)_y = 0 \quad (t_n)_z = 0 \quad \text{on } x = \pm L/2$$

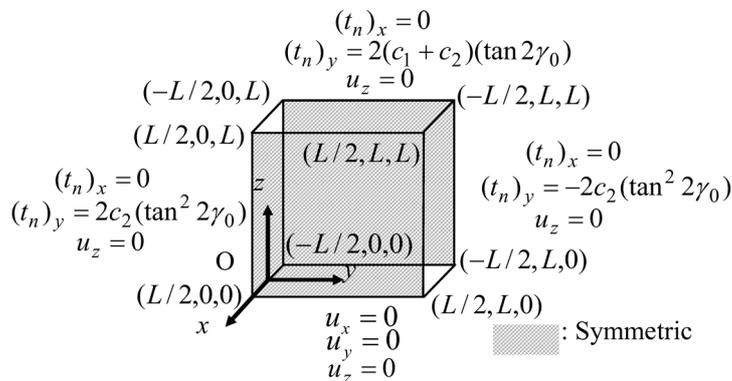


Fig.3.17 Analysis model and boundary conditions (three-dimensional shear deformation)

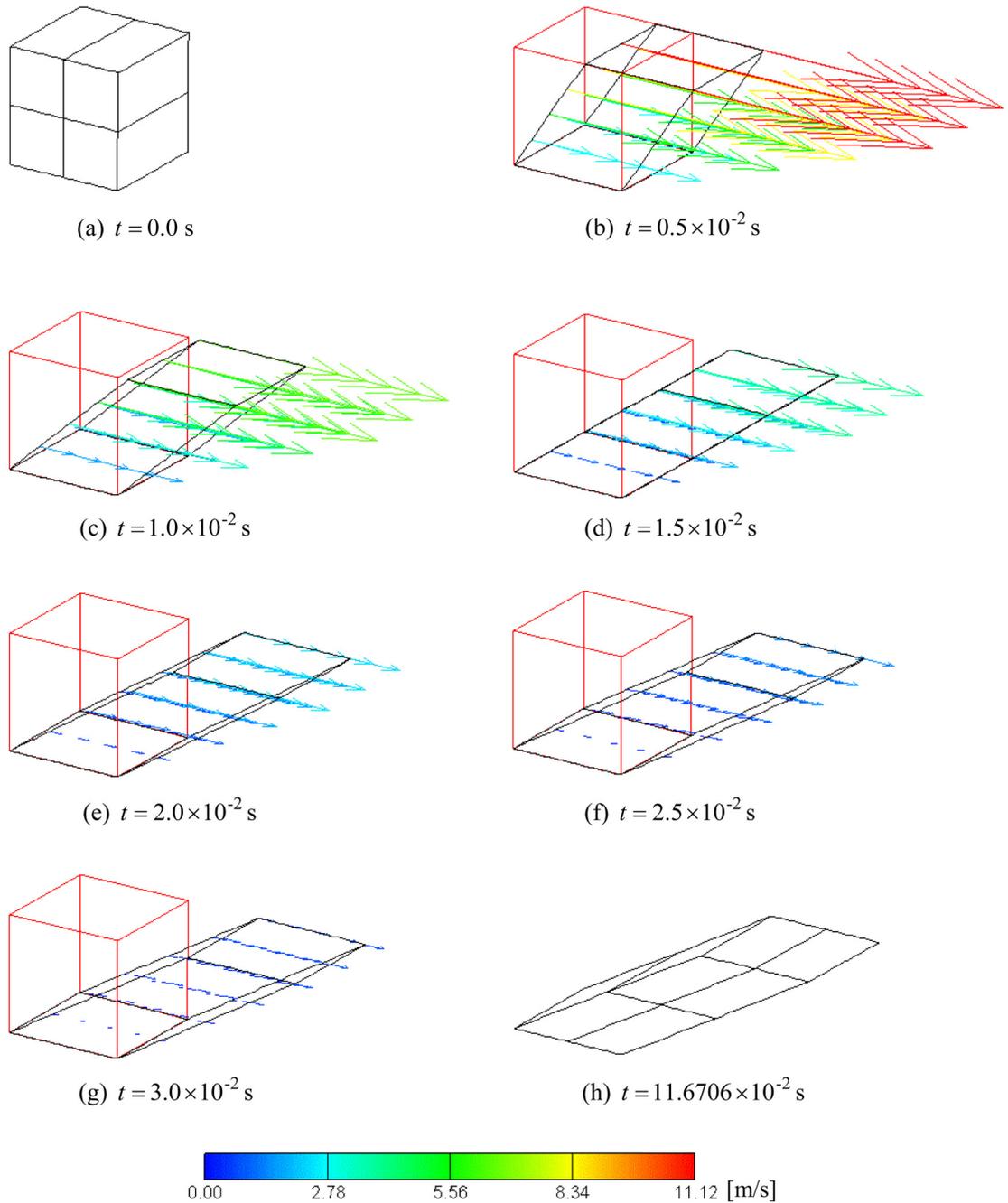


Fig.3.18 Analysis meshes and velocity vectors ($\gamma_0 = \pi/6$, Q_2Q_1 elements)

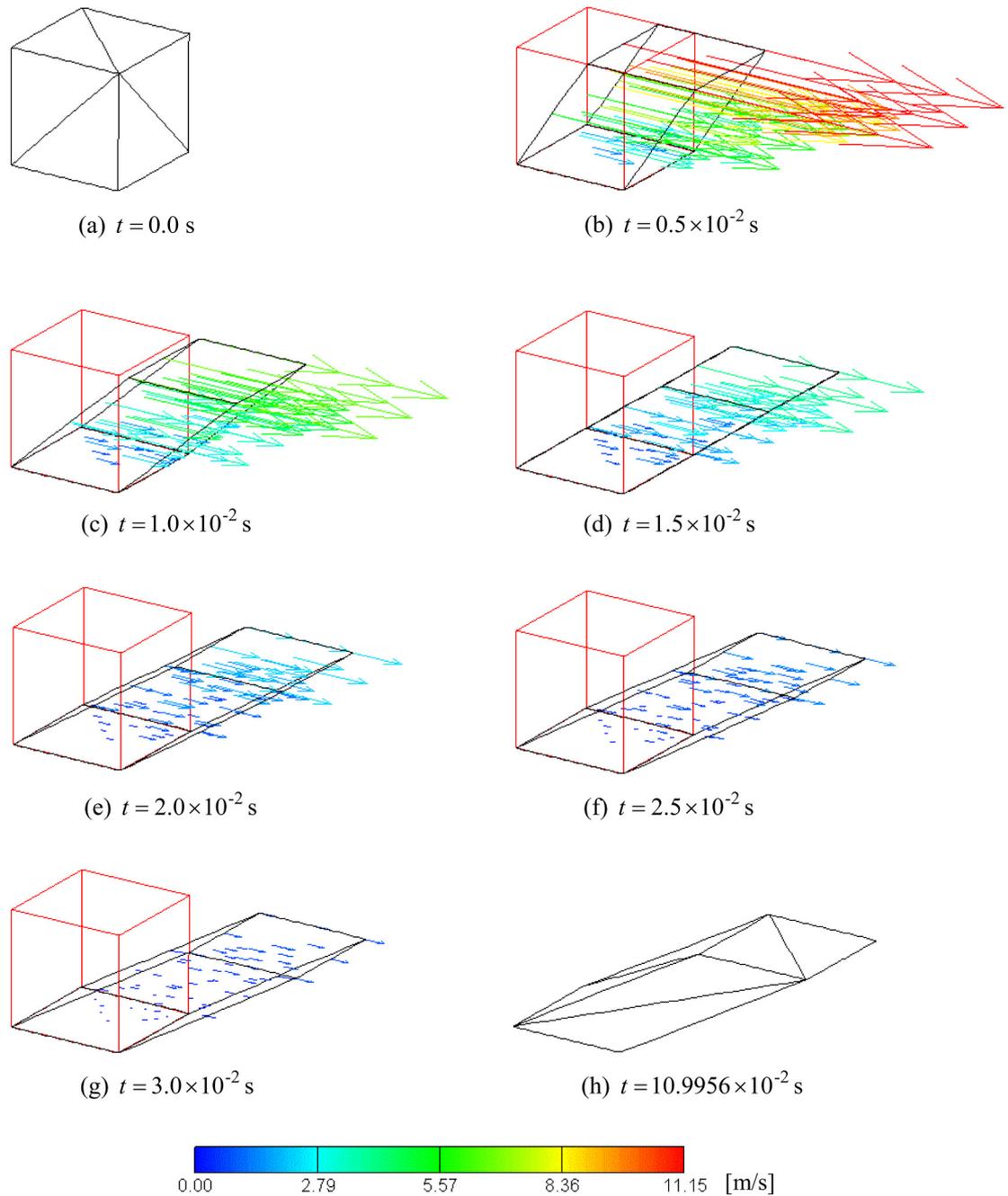


Fig.3.19 Analysis meshes and velocity vectors ($\gamma_0 = \pi/6$, $P_2^++P_1$ elements)

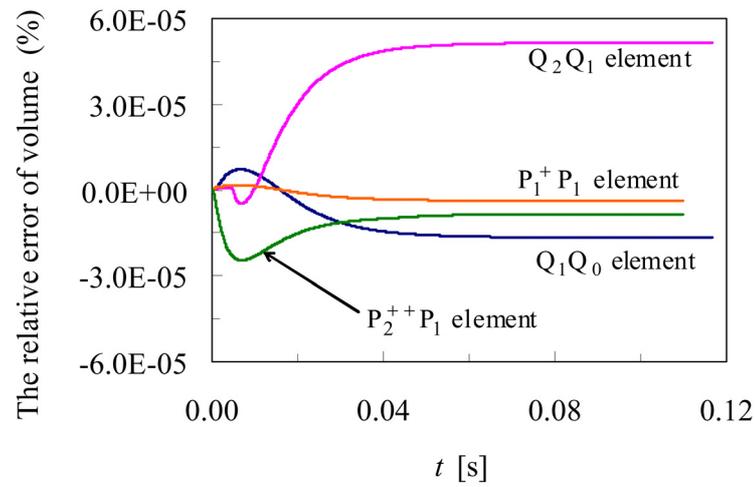


Fig.3.20 Time histories of the total volume of analysis domain ($\gamma_0 = \pi/6$)

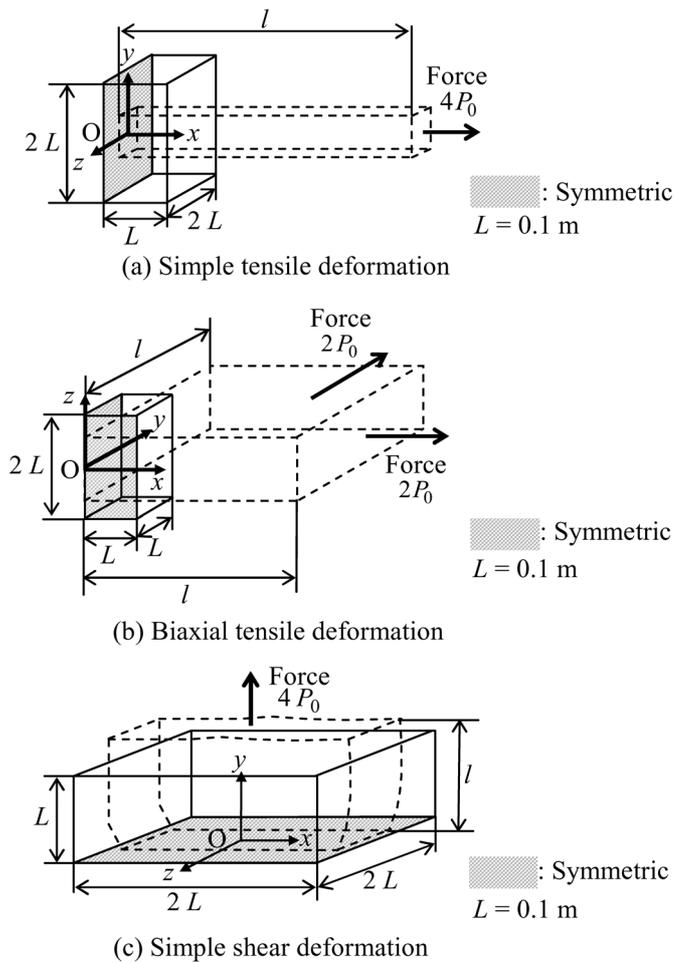
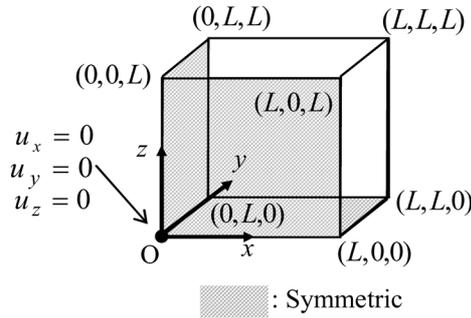


Fig.3.21 Analysis models (introduction of stiffening property)



Simple tensile deformation

$$\begin{aligned}
 &u_x = 0 \quad (t_n)_y = 0 \quad (t_n)_z = 0 \quad \text{on } x = 0 \\
 &(t_n)_x = 0 \quad u_y = 0 \quad (t_n)_z = 0 \quad \text{on } y = 0 \\
 &(t_n)_x = 0 \quad (t_n)_y = 0 \quad u_z = 0 \quad \text{on } z = 0 \\
 &(t_n)_x = P_0 / L^2 \quad (t_n)_y = 0 \quad (t_n)_z = 0 \quad \text{on } x = L \\
 &(t_n)_x = 0 \quad (t_n)_y = 0 \quad (t_n)_z = 0 \quad \text{on } y = L \\
 &(t_n)_x = 0 \quad (t_n)_y = 0 \quad (t_n)_z = 0 \quad \text{on } z = L
 \end{aligned}$$

Biaxial tensile deformation

$$\begin{aligned}
 &u_x = 0 \quad (t_n)_y = 0 \quad (t_n)_z = 0 \quad \text{on } x = 0 \\
 &(t_n)_x = 0 \quad u_y = 0 \quad (t_n)_z = 0 \quad \text{on } y = 0 \\
 &(t_n)_x = 0 \quad (t_n)_y = 0 \quad u_z = 0 \quad \text{on } z = 0 \\
 &(t_n)_x = P_0 / L^2 \quad (t_n)_y = 0 \quad (t_n)_z = 0 \quad \text{on } x = L \\
 &(t_n)_x = 0 \quad (t_n)_y = P_0 / L^2 \quad (t_n)_z = 0 \quad \text{on } y = L \\
 &(t_n)_x = 0 \quad (t_n)_y = 0 \quad (t_n)_z = 0 \quad \text{on } z = L
 \end{aligned}$$

Pure shear deformation

$$\begin{aligned}
 &u_x = 0 \quad (t_n)_y = 0 \quad (t_n)_z = 0 \quad \text{on } x = 0 \\
 &u_x = 0 \quad u_y = 0 \quad (t_n)_z = 0 \quad \text{on } y = 0 \\
 &u_x = 0 \quad (t_n)_y = 0 \quad u_z = 0 \quad \text{on } z = 0 \\
 &(t_n)_x = 0 \quad (t_n)_y = 0 \quad (t_n)_z = 0 \quad \text{on } x = L \\
 &u_x = 0 \quad (t_n)_y = P_0 / L^2 \quad (t_n)_z = 0 \quad \text{on } y = L \\
 &(t_n)_x = 0 \quad (t_n)_y = 0 \quad (t_n)_z = 0 \quad \text{on } z = L
 \end{aligned}$$

Fig.3.22 Boundary conditions (introduction of stiffening property)

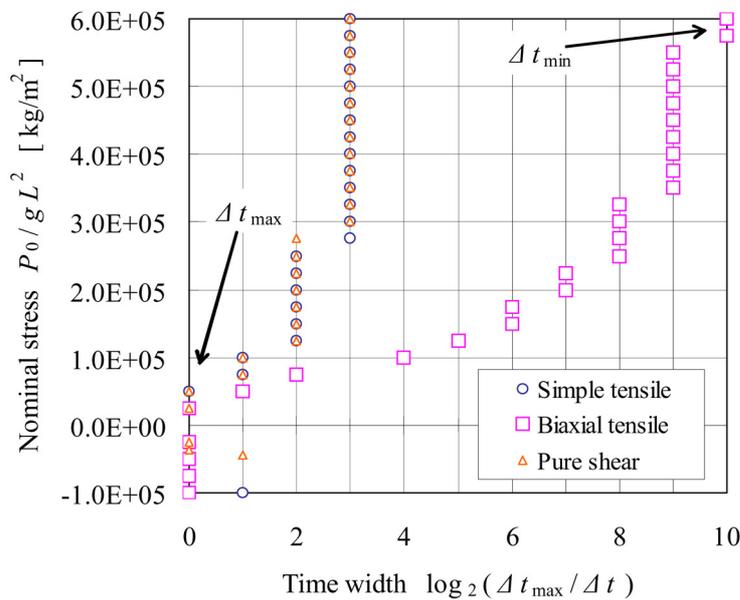


Fig.3.23 Relationships between nominal stress and time width ($\Delta t_{\max} = 5.0 \times 10^{-4}$ s, $\Delta t_{\min} / \Delta t_{\max} = 9.76563 \times 10^{-4}$)

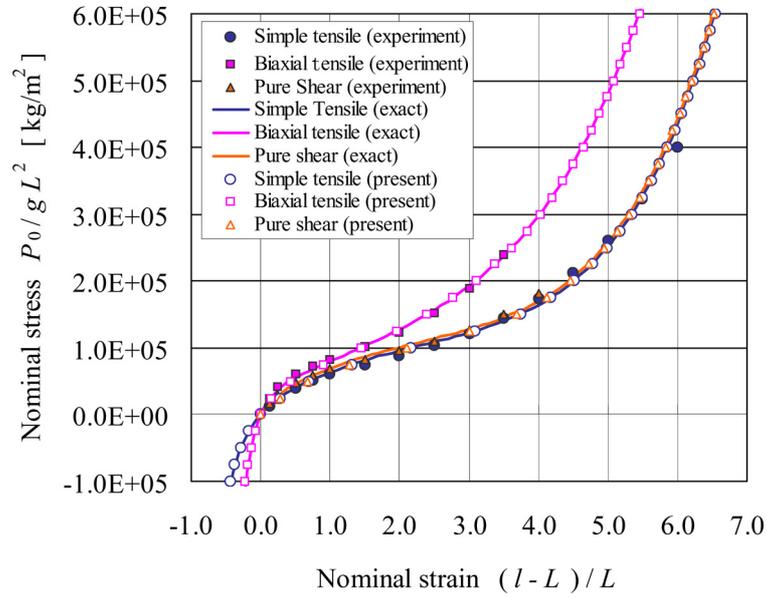


Fig.3.24 Relationships between nominal stress and nominal strain

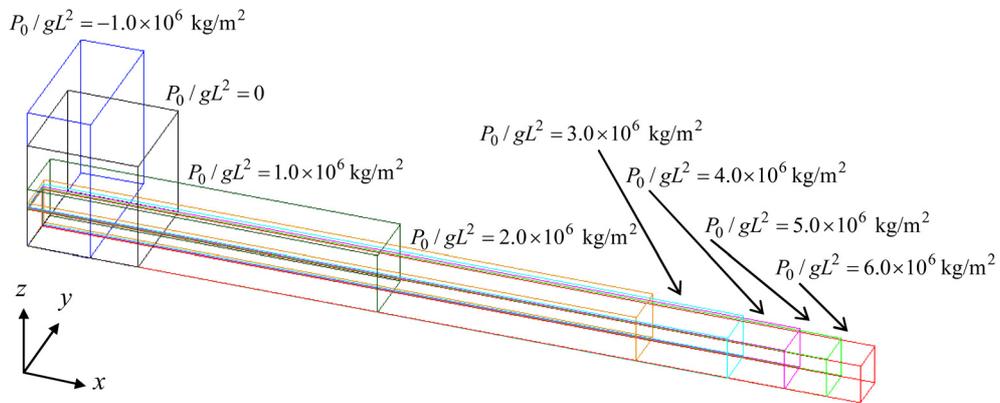


Fig.3.25 The geometrical shapes of element (simple tensile deformation)

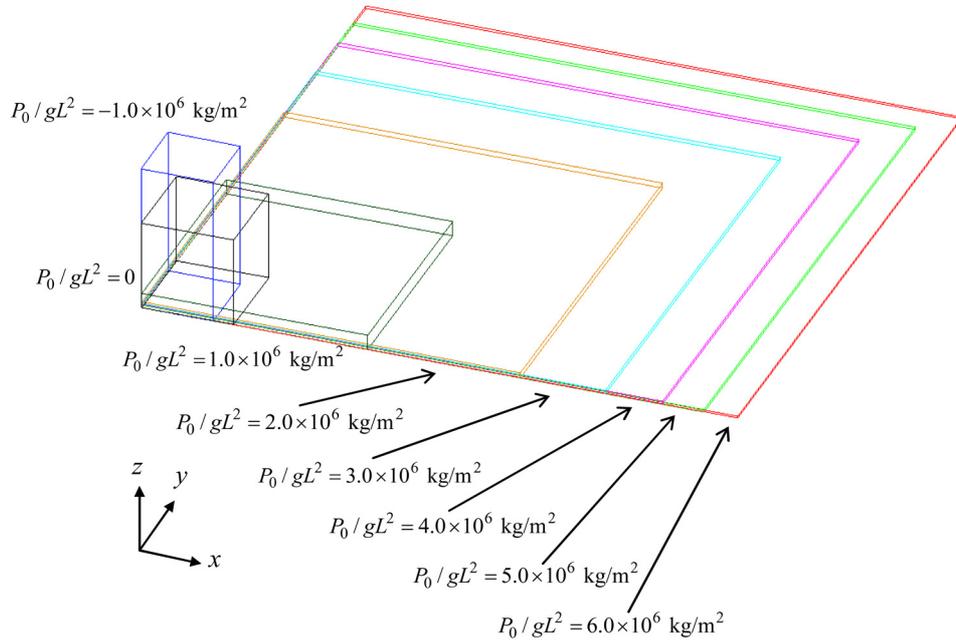


Fig.3.26 The geometrical shapes of element (biaxial tensile deformation)

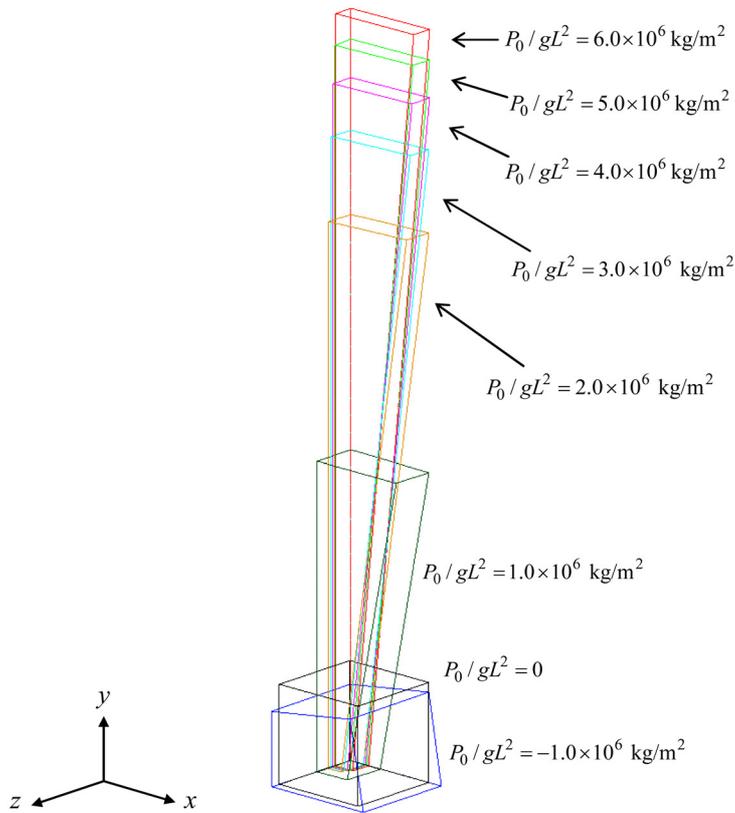


Fig.3.27 The geometrical shapes of element (pure shear deformation)

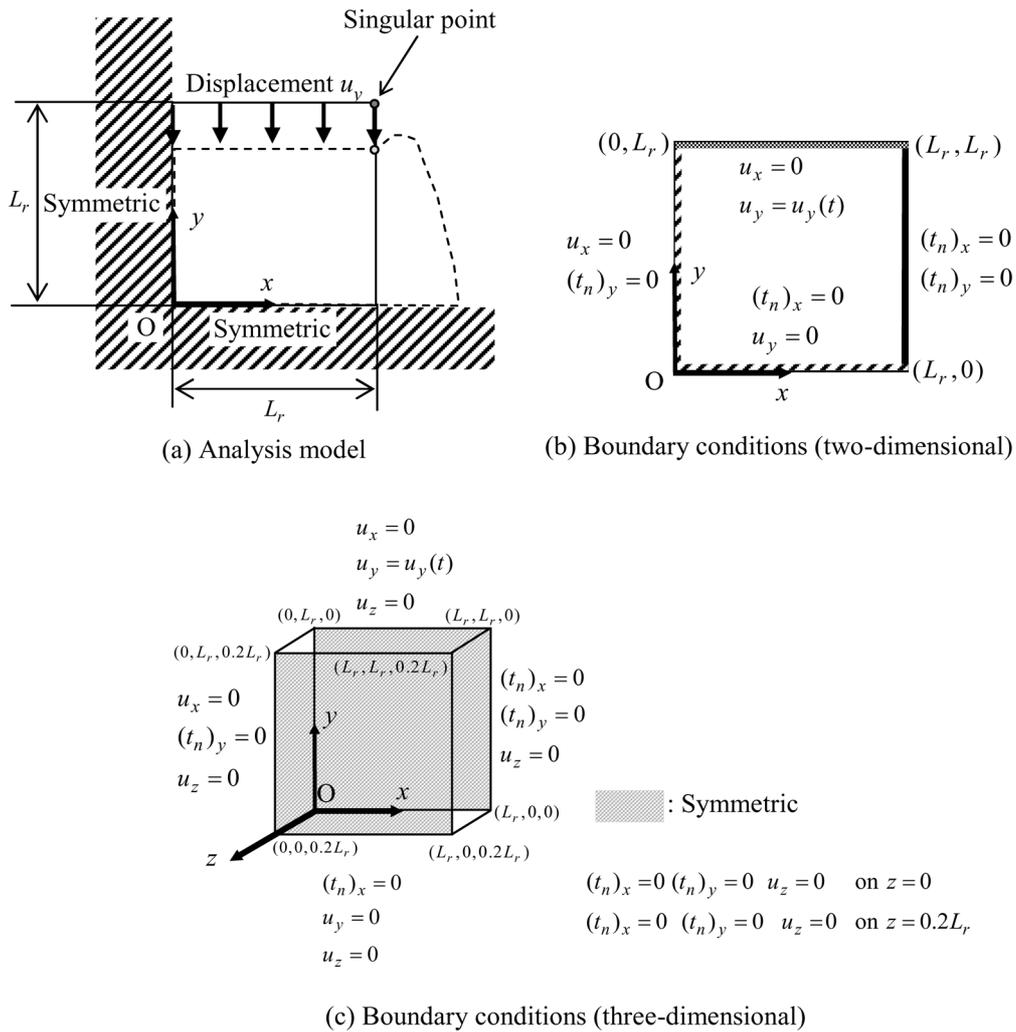


Fig. 3.28 Analysis model and boundary conditions (two-dimensional or three-dimensional compression deformation)

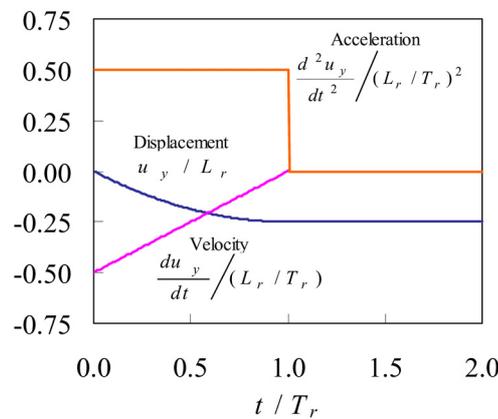


Fig.3.29 Time histories of the displacement, velocity, and acceleration given on upper boundary

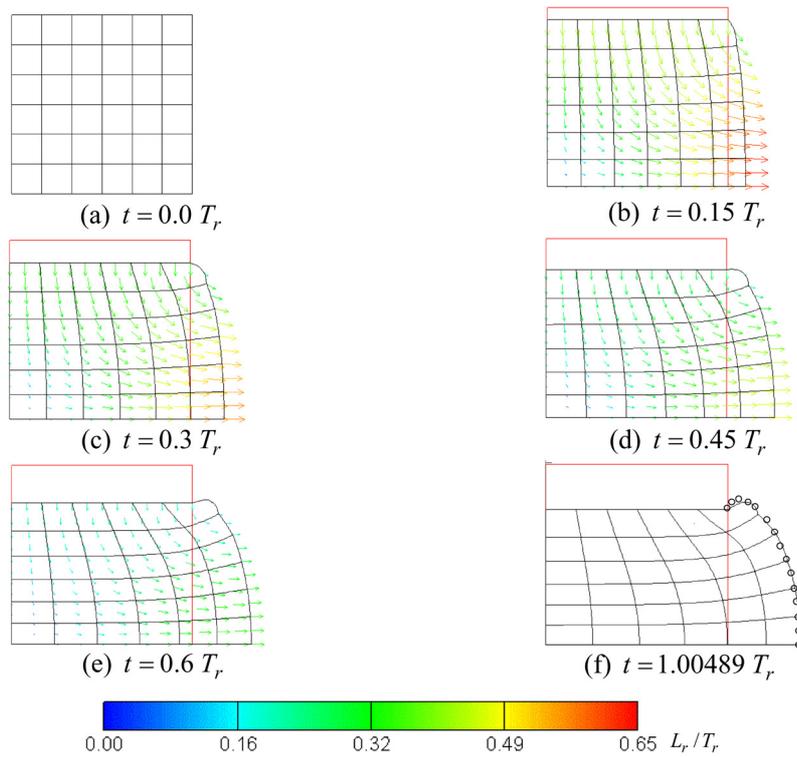


Fig. 3.30 Analysis meshes and velocity vectors ($u_y = -0.25L_r$, Q_2Q_1 elements, \circ : Yamada et al.)

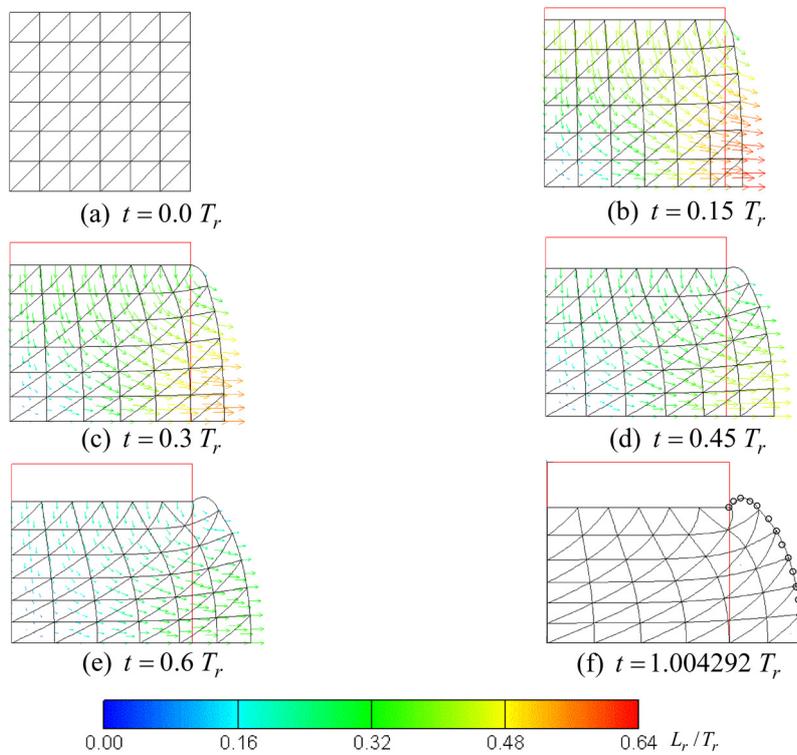


Fig. 3.31 Analysis meshes and velocity vectors ($u_y = -0.25L_r$, $P_2^+P_1$ elements, \circ : Yamada et al.)

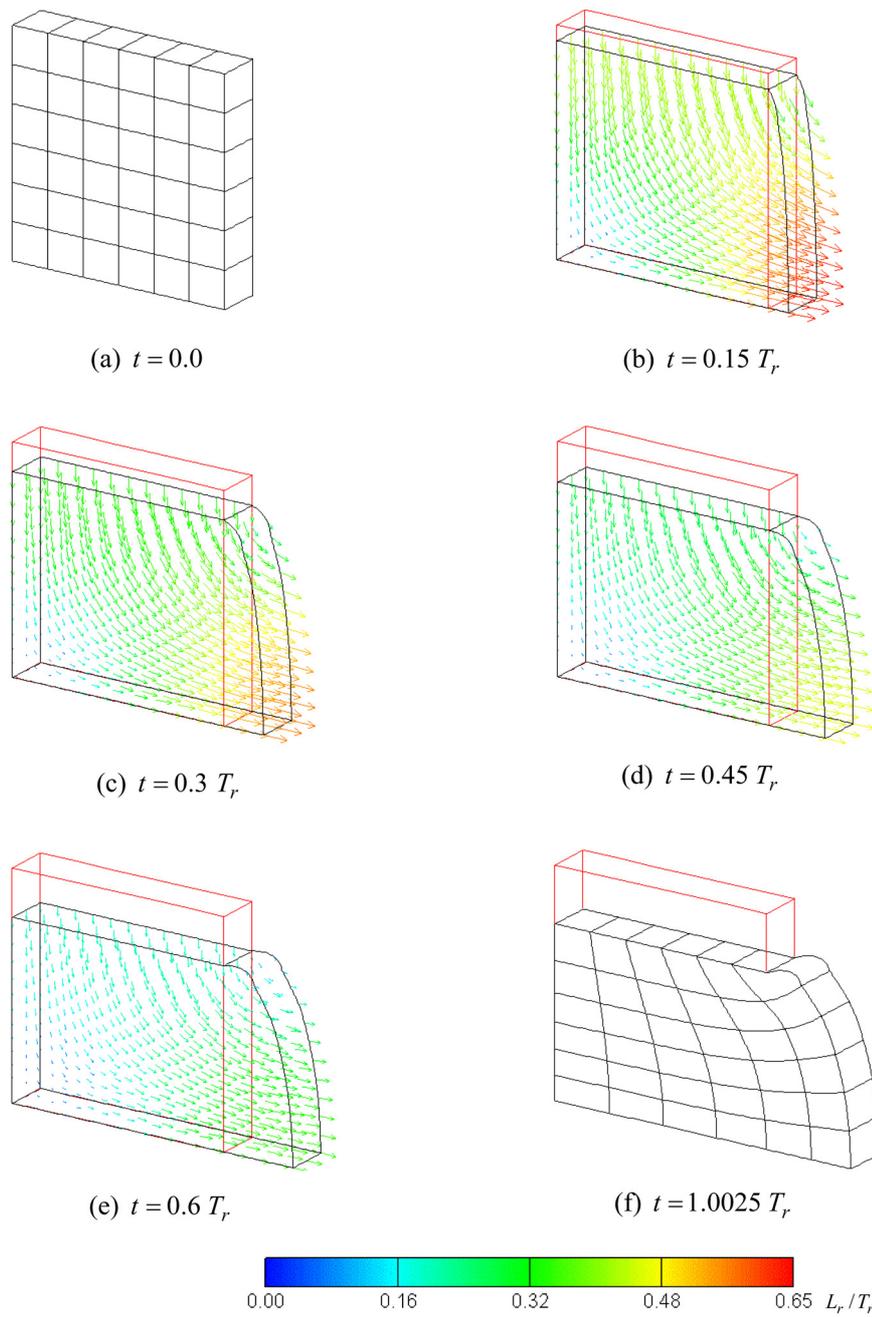


Fig.3.32 Analysis meshes and velocity vectors ($u_y = -0.25L_r$, Q_2Q_1 elements)

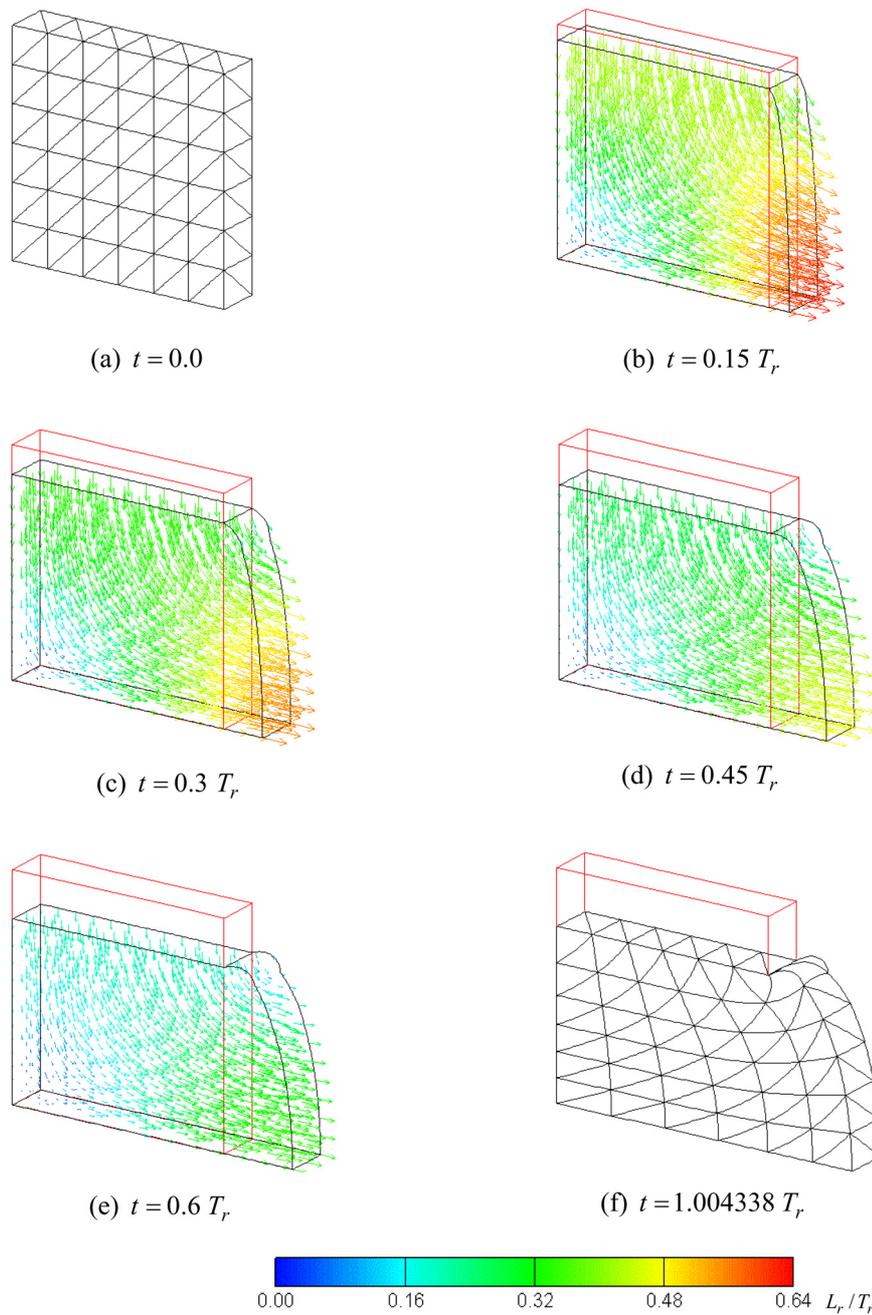


Fig.3.33 Analysis meshes and velocity vectors ($u_y = -0.25L_r$, $P_2^{++}P_1$ elements)

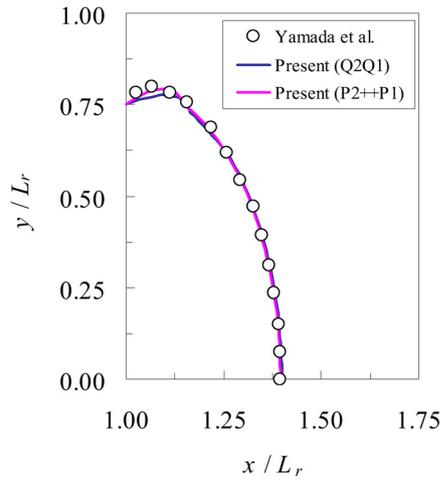


Fig.3.34 The geometric shapes under compression ($u_y = -0.25L_r$, three-dimensional elements)

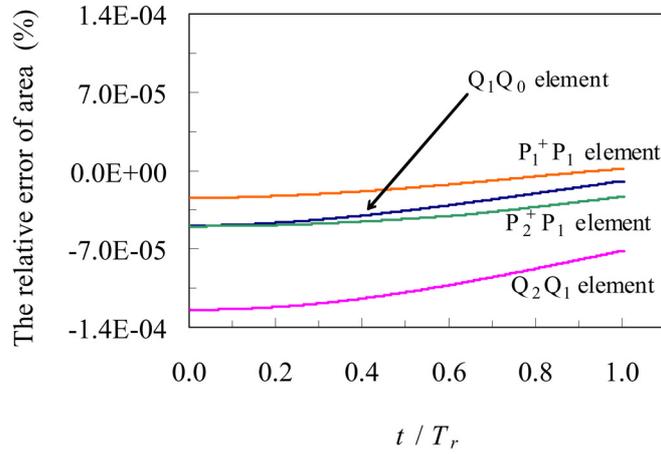


Fig.3.35 Time histories of the total area of analysis domain ($u_y = -0.25L_r$, two-dimensional plane strain elements)

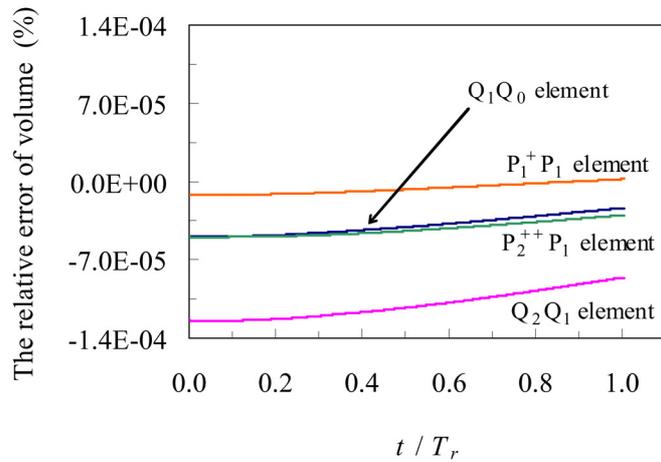


Fig.3.36 Time histories of the total volume of analysis domain ($u_y = -0.25L_r$, three-dimensional elements)

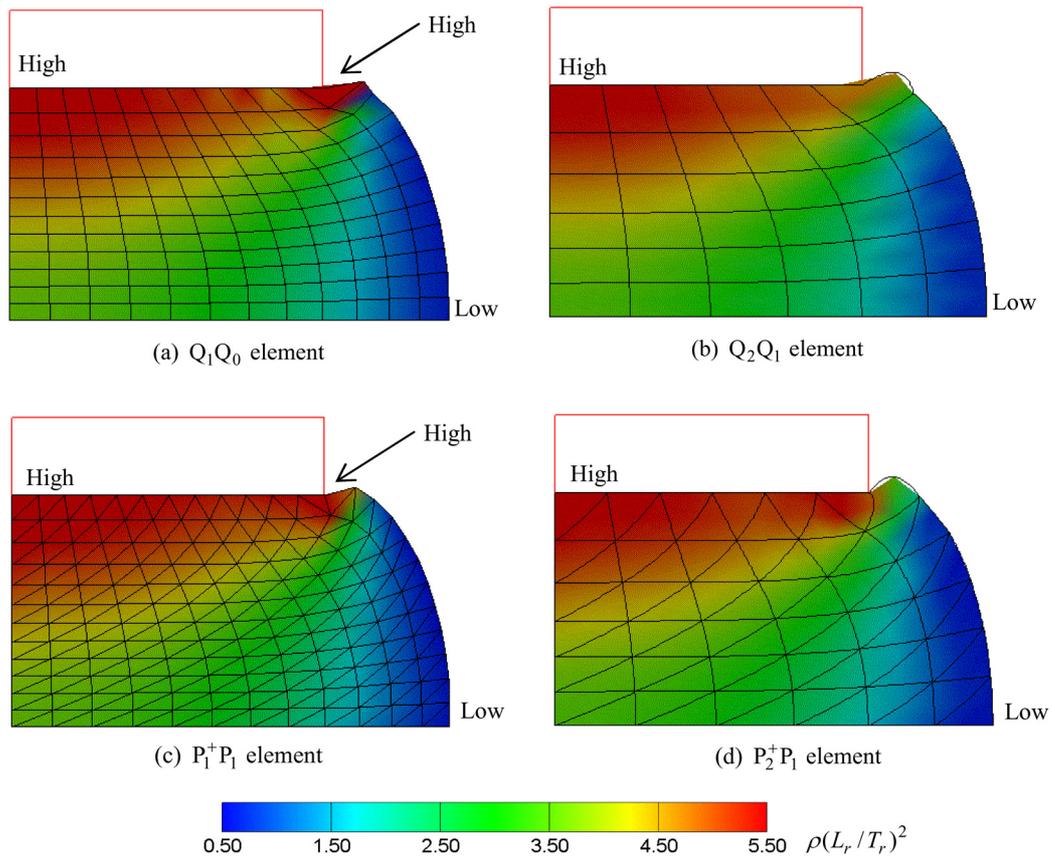


Fig.3.37 Pressure contours ($u_y = -0.25L_r$, two-dimensional plane strain elements)

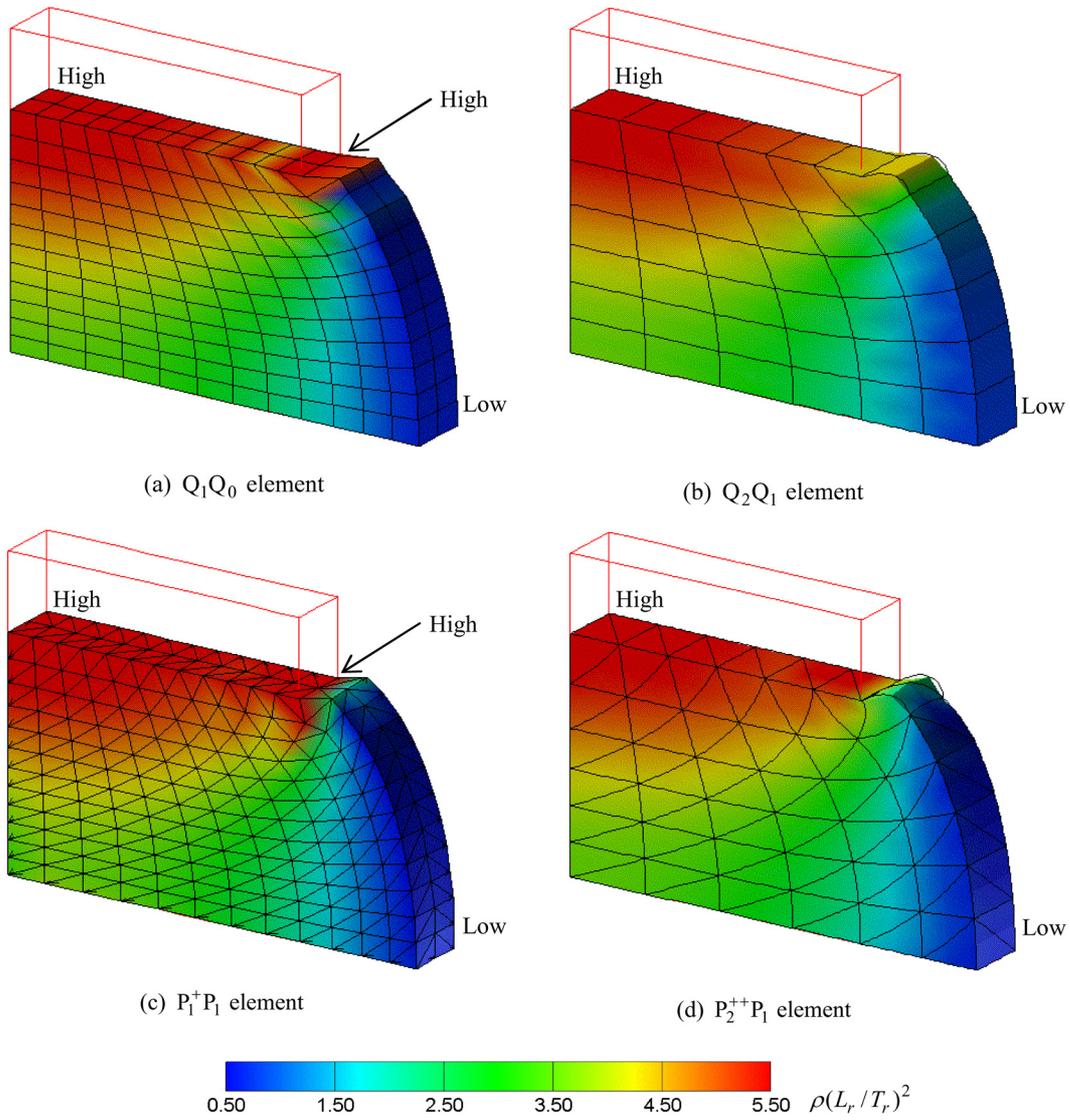


Fig.3.38 Pressure contours ($u_y = -0.25L_r$, three-dimensional elements)

第4章 GSMAC-ALE有限要素法に基づいた流体固体連成解析

4.1 第4章の緒言

近年、流体と固体の連成問題に対する研究が多くなされている。特に、流体力が固体を大きく変形させ、変形した固体が流れ場に影響を及ぼすような連成問題は、現象が複雑になる。Young 率が小さいような軟らかい固体と流体の連成現象は、その相互作用が大きいために重要な問題の1つである。金属の Young 率は 10GPa 以上であるのに対して、ゴムなどの高分子材料の Young 率は 0.1~10MPa 程度であるために剛性が比較的小さい。そのために、流体力が作用すると、このような軟らかい固体は大きく変形し、振動数が小さい振動をする。固体の変形が大きくなるに伴って、流体と固体の相互作用も大きくなる。工業製品では、ゴムなどの高分子材料を利用した軟らかい部品が多く用いられ、重要な役割を果たしている。このような部品と流体の連成現象として、タイヤのヒドロプレーニング、ホース内部の液体の非定常流などが存在する。また、生体工学の分野では、生体壁と流体の連成現象が研究されている。生体壁は軟組織であるものが多く、血管壁、心臓弁や心臓壁、眼球網膜などは流体力によって非常に変形しやすく、流体との相互作用は非常に大きい。

互いの相互作用が大きい流体と固体の連成解析では、計算の安定性を良くするために、次の時刻の流体系の離散化式と固体系の離散化式を評価する必要がある。強連成法の場合には、時間積分に陰的な解法を用いることによって、次の時刻における流体と固体の連成系の離散化式を評価することが多い。陰的な時間積分法を用いると、時間刻み幅を大きく設定でき、弾性体の高次の振動数モードを減衰できる利点がある。このような計算方法の研究として、Bathe らの方法^(4.1)や久田らの方法^(4.2)を挙げることができる。この方法では、流体と固体の連成系の行列処理が必要となり、記憶容量の点で計算機負荷が大きくなる。計算機負荷を軽減するために、次の時刻における流体と固体の連成系の離散化式を評価するのに陽的な反復計算を利用することができる。しかし、高振動数の問題には時間刻み幅の制約が厳しくなるために、ゴムなどの Young 率が小さい固体の低振動数の問題にこの方法は最も有効である。このような計算方法の研究として、石原の方法^{(4.3)(4.4)}を挙げることができる。石原の方法では、流体解析に速度と圧力の分離型の有限要素法を利用

している。この方法では、次の時刻における増分形で表された流体と固体の連成系の離散化式の解を陽的な反復計算から得るために、流体固体界面と流体領域における増分形の離散化 Poisson 方程式のみを陰的に解く。

本研究では、流体とゴムのような軟らかい固体を解析するために、低容量・高速計算に適している GSMAC (Generalized-Simplified Marker And Cell) - ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 有限要素法^(4.5)に基づいた計算機負荷の小さい陽的な流体固体連成計算方法を提案する。この方法では、流体と固体が強連成となるような次の時刻における連成系の離散化式を陽的に反復計算する。陽的な反復計算によって、時間進行の安定性を向上させる。ただし、流体と固体の両方に非圧縮拘束条件が課せられる場合があるために、離散化 Poisson 方程式の計算では流体領域と固体領域を分離して陰的に計算する。検証問題として、軟らかい弾性板の2次元渦励振問題を扱う。弾性板の渦励振問題で連成計算方法を検証する研究は多数存在し、流入速度や弾性板に異なるパラメータを用いた解析もなされている^{(4.6)~(4.9)}。本解析では、弾性板が Hooke 弾性体である場合と非圧縮超弾性体である場合を扱う。また、流速と固体変位の補間関数が1次の場合と2次の場合を比較する。流速と固体変位の補間関数を一致させる理由は、流体と固体の連成系の離散化式を得る際に界面上における要素の適合条件を満足することが必要となるからである^(4.10)。2次の補間関数を用いる場合には第2章で拡張した流体解析の Poisson ソルバーを用い、弾性板を非圧縮超弾性体として扱う場合には第3章で構築した非圧縮超弾性体のための GSMAC 有限要素法を用いる。この非圧縮超弾性体計算方法を用いるために、本計算方法では次の時刻における流体と固体の連成系の離散化式を増分形として評価しない。まず、仮想的な軟らかい物性値を有する Hooke 弾性体と流体の連成解析の結果を Wall らによる弱連成法の結果^(4.6)と比較し、提案する計算方法を評価する。次に、実際問題の解析において必要となる非圧縮超弾性体と流体の連成解析の結果を検討する。

4.2 基礎方程式

本章の流体固体連成解析では、流体として非圧縮 Newton 流体を扱い、固体として Hooke 弾性体または非圧縮超弾性体を扱う。

4.2.1 非圧縮 Newton 流体の基礎方程式

非圧縮 Newton 流体の基礎方程式を以下に示す。
(連続の式)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad (4.1a)$$

(運動方程式)

$$\rho \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} + \rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{b} \quad (4.1b)$$

(粘性応力-変形速度関係式)

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \overleftarrow{\nabla}) \quad (4.1c)$$

ただし、 ∇ は空間座標のナブラ、 \mathbf{v} は速度、 ρ は密度、 $\delta/\delta t = (\partial/\partial t)|_{\mathcal{X}}$ は任意時間微分、 \mathbf{w} は任意速度、 p は圧力、 $\boldsymbol{\tau}$ は粘性応力、 \mathbf{b} は単位質量当たりの体積力、 μ は粘性係数である。

4.2.2 Hooke 弾性体の基礎方程式

Hooke 弾性体の基礎方程式を以下に示す。

(運動方程式)

$$\rho^0 \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \nabla_X \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T) + \rho^0 \mathbf{b} \quad (4.2a)$$

(構成方程式)

$$\mathbf{S} = \lambda_S (\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu_S \mathbf{E} \quad (4.2b)$$

(ひずみ-変位こう配関係式)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla_X \mathbf{u} + \mathbf{u} \overleftarrow{\nabla}_X + \nabla_X \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \overleftarrow{\nabla}_X) \quad (4.2c)$$

(変形こう配-変位こう配関係式)

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{u} \overleftarrow{\nabla}_X \quad (4.2d)$$

ただし、 ρ^0 は基準配置の密度、 $d/dt = (\partial/\partial t)|_{\mathbf{X}}$ は実質時間微分、 \mathbf{u} は変位、 ∇_X は物質座標のナブラ、 \mathbf{S} は第2Piola-Kirchhoff 応力、 \mathbf{F} は変形こう配、 \mathbf{E} は Green-Lagrange ひずみ、 λ_S と μ_S は Lamé 定数、 \mathbf{I} は恒等テンソルである。Lamé 定数は、Young 率 E_S と Poisson 比 ν_S を用いて、

$$\lambda_S = \frac{E_S \nu_S}{(1 + \nu_S)(1 - 2\nu_S)} \quad (4.3a)$$

$$\mu_S = \frac{E_S}{2(1 + \nu_S)} \quad (4.3b)$$

と表される。

4.2.3 非圧縮超弾性体の基礎方程式

非圧縮超弾性体の基礎方程式を以下に示す.

(連続の式)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.4a)$$

(運動方程式)

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p_r + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{b} \quad (4.4b)$$

(変位-速度関係式)

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{v} \quad (4.4c)$$

(圧力の変換式)

$$p_r = p + \frac{2}{3} \left[\frac{\partial W}{\partial \tilde{I}_B} (\text{tr} \mathbf{B}) + \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} \{ (\text{tr} \mathbf{B})^2 - \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \} \right] \quad (4.4d)$$

(余剰応力-変形関係式)

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \left\{ \frac{\partial W}{\partial \tilde{I}_B} + \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} (\text{tr} \mathbf{B}) \right\} \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \quad (4.4e)$$

(変形-変形こう配関係式)

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (4.4f)$$

(変形こう配-変位こう配関係式)

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{u} \overleftarrow{\nabla}_X \quad (4.4g)$$

ただし, p_r は変換された不定圧力, $\boldsymbol{\tau}$ は余剰応力, \mathbf{B} は左 Cauchy-Green 変形, W は弾性ポテンシャル関数, \tilde{I}_B , \tilde{II}_B は低減不変量である. 従来の非圧縮超弾性体の有限要素法解析では, 非圧縮拘束条件として $\det \mathbf{F} = 1$ または $III_B = 1$ の条件が一般に用いられる. 本研究では, 速度と圧力の分離型の有限要素法で離散化できるように, 連続の式(4.4a)を非圧縮拘束条件とした基礎方程式を用いる. 完全3次で近似した場合の弾性ポテンシャル関数を以下に示す.

$$\begin{aligned} W = & c_{10}(\tilde{I}_B - 3) + c_{01}(\tilde{II}_B - 3) \\ & + c_{11}(\tilde{I}_B - 3)(\tilde{II}_B - 3) + c_{20}(\tilde{I}_B - 3)^2 + c_{02}(\tilde{II}_B - 3)^2 \\ & + c_{21}(\tilde{I}_B - 3)^2(\tilde{II}_B - 3) + c_{12}(\tilde{I}_B - 3)(\tilde{II}_B - 3)^2 \\ & + c_{30}(\tilde{I}_B - 3)^3 + c_{03}(\tilde{II}_B - 3)^3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

ただし, c_{pq} ($p, q = 0, 1, 2, 3$) は Mooney-Rivlin 定数である.

4.3 数値計算法

非圧縮 Newton 流体と Hooke 弾性体, 非圧縮 Newton 流体と非圧縮超弾性体の連成計算方法の導出手順を以下に示す.

- (1) 流体と固体それぞれに対して, 振動問題を解析できるように Newmark- β 法の考えを導入した陽的な反復計算方法を導入する.
- (2) 非圧縮 Newton 流体に対して, 次の時刻における連続の式を満足するように, 予測子ステップの式, Poisson 方程式, 修正子ステップの式から構成される分離式を導出する. ただし, 固体として非圧縮超弾性体を用いる場合にも, 同様に分離式を導出する.
- (3) 得られた流体と固体の時間的な離散化式をそれぞれ Galerkin 有限要素法によって空間的に離散化する. このとき, 非圧縮 Newton 流体に対して, 速度と圧力の同時緩和の反復計算方法を導入する. ただし, 固体として非圧縮超弾性体を用いる場合にも, 同様に同時緩和の反復計算方法を導入する.
- (4) 流体と固体の界面 Γ_I 上で成立する以下の条件を用いて, 非圧縮 Newton 流体の予測子ステップの式と Hooke 弾性体の運動方程式, 非圧縮 Newton 流体と非圧縮超弾性体の予測子ステップの式を結合する.

4.3.1 非圧縮 Newton 流体の GSMAC-ALE 有限要素法離散化式

流体解析では, 解析メッシュを固定した Euler 法がよく用いられる. 一方, 固体解析では, 物質点の速度で解析メッシュが移動する Lagrange 法がよく用いられる. 流体と固体の連成解析では, このような流体運動と固体運動の表現方法の違いを計算方法にどのように適用するかが問題となる. 本研究では, 流体領域内のメッシュの大きなゆがみを抑制するように解析メッシュが移動する ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 法を流体解析に導入する. ALE 法を導入すると, 基礎方程式における任意速度 \boldsymbol{w} はメッシュの移動速度となり, 座標 \boldsymbol{x} との間に

$$\boldsymbol{w} = \frac{\delta \boldsymbol{x}}{\delta t} \quad (4.6)$$

の関係が成り立つ. メッシュの移動速度は, 流体固体界面の速度から決まる.

有限要素を $\Omega_e^{(m)}$ ($1 \leq e \leq n_{FE}$) とし, 要素境界を $\Gamma_e^{(m)} = \partial\Omega_e^{(m)}$ ($1 \leq e \leq n_{FE}$) とする. 速度 $\boldsymbol{v}^{(m)}$ は形状関数 N_i ($1 \leq i \leq n_{FN}$) で補間され, 圧力 $p^{(m)}$ は形状関数 N_l^p ($1 \leq l \leq n_{FN}^p$) で補間される.

(速度の補関数)

$$\boldsymbol{v}^{(m)} = N_i \boldsymbol{v}_i^{(m)} \quad (4.7a)$$

(圧力の補間関数)

$$p^{(m)} = N_i^p p_i^{(m)} \quad (4.7b)$$

単位質量当たりの体積力 $\mathbf{b}^{(m)}$ は、速度と同じ形状関数によって補間される。各要素において、節点 i が局所節点 α に対応し、節点 l が局所節点 a に対応する。

(速度の補間関数)

$$\mathbf{v}^{(m)} = N_\alpha \mathbf{v}_\alpha^{(m)} \quad \text{in } \Omega_e^{(m)} \quad (4.8a)$$

(圧力の補間関数)

$$p^{(m)} = N_a^p p_a^{(m)} \quad \text{in } \Omega_e^{(m)} \quad (4.8b)$$

陽的な反復計算開始時に、

(流体の変数)

$$\begin{cases} \left(\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} \right)_i^{(0)} \simeq \left(\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} \right)_i^n \\ \mathbf{v}_i^{(0)} \simeq \mathbf{v}_i^n \\ p_l^{(0)} \simeq p_l^n \end{cases} \quad (4.9a)$$

(メッシュの変数)

$$\begin{cases} \left(\frac{\delta \mathbf{w}}{\delta t} \right)_i^{(0)} \simeq \left(\frac{\delta \mathbf{w}}{\delta t} \right)_i^n \\ \mathbf{w}_i^{(0)} \simeq \mathbf{w}_i^n \\ \mathbf{x}_i^{(0)} \simeq \mathbf{x}_i^n \end{cases} \quad (4.9b)$$

とおく。 $m+1$ 回目の反復において、時間的に離散化した基礎方程式から予測子ステップの式、Poisson 方程式、修正子ステップから成る分離式を導いた後に、その分離式を Galerkin 有限要素法で離散化すると、以下に示されるような各要素に対する有限要素法離散化式が得られる。

(予測子ステップの式)

$$\rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \left(\frac{\delta \tilde{\mathbf{v}}}{\delta t} \right)_\beta = -\rho (\langle \mathbf{v} \rangle_e^{(m)} - \langle \mathbf{w} \rangle_e^{(m)}) \cdot \mathbf{A}_{\alpha\beta}^{(m)} \mathbf{v}_\beta^{(m)} + (\mathbf{F}_{\text{in}})_\alpha^{(m)} + (\mathbf{F}_{\text{ext}})_\alpha^{(m)} \quad (4.10a)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha^n + \Delta t \left\{ \gamma \left(\frac{\delta \tilde{\mathbf{v}}}{\delta t} \right)_\alpha + (1 - \gamma) \left(\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} \right)_\alpha^n \right\} \quad (4.10b)$$

(Poisson 方程式)

$$\mathbf{C}_{\beta a}^{(m)} \cdot \langle \nabla^{(m)} \phi_p \rangle_{\beta} = \rho \mathbf{C}_{\beta a}^{(m)} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\beta} \quad (4.10c)$$

$$\langle \nabla^{(m)} \phi_p \rangle_{\alpha} = - \frac{\sum_{e'=1}^{n_{FE}} (\mathbf{C}_{\alpha b}^{(m)} \phi_{pb})}{\sum_{e''=1}^{n_{FE}} \int_{\Omega_{e''}^{(m)}} N_{\alpha} d\Omega^{(m)}} \quad (4.10d)$$

(修正子ステップの式)

$$\begin{aligned} \rho \overline{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}^{(m)} \left(\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} \right)_{\beta}^{(m+1)} &= \rho \overline{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}^{(m)} \left(\frac{\delta \tilde{\mathbf{v}}}{\delta t} \right)_{\beta} + \mathbf{C}_{\alpha b}^{(m)} \frac{\phi_{pb}}{\gamma \Delta t} \\ &\quad - \oint_{\Gamma_e^{(m)}} N_{\alpha} \left(\frac{\phi_p}{\gamma \Delta t} \mathbf{n}^{(m)} \right) d\Gamma^{(m)} \end{aligned} \quad (4.10e)$$

$$\rho \overline{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}^{(m)} \mathbf{v}_{\beta}^{(m+1)} = \rho \overline{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}^{(m)} \tilde{\mathbf{v}}_{\beta} + \mathbf{C}_{\alpha b}^{(m)} \phi_{pb} - \oint_{\Gamma_e^{(m)}} N_{\alpha} (\phi_p \mathbf{n}^{(m)}) d\Gamma^{(m)} \quad (4.10f)$$

$$p_a^{(m+1)} = p_a^{(m)} + \frac{\phi_{pa}}{\gamma \Delta t} \quad (4.10g)$$

ただし、 γ と β は Newmark- β 法のパラメータであり、予測子ステップの式の内力部分と外力部分はそれぞれ

(内力部分)

$$(\mathbf{F}_{\text{in}})_{\alpha}^{(m)} = \mathbf{C}_{\alpha b}^{(m)} p_b^{(m)} - \mu \{ (\text{tr} \mathbf{D}_{\alpha\beta}^{(m)}) \mathbf{I} + (\mathbf{D}_{\alpha\beta}^{(m)})^T \} \cdot \mathbf{v}_{\beta}^{(m)} \quad (4.11a)$$

(外力部分)

$$(\mathbf{F}_{\text{ext}})_{\alpha}^{(m)} = \rho \overline{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}^{(m)} \mathbf{b}_{\beta}^{(m)} + \oint_{\Gamma_e^{(m)}} N_{\alpha} \mathbf{t}^{(m)} d\Gamma^{(m)} \quad (4.11b)$$

である。また、メッシュの更新式は以下のようなになる。

$$\mathbf{w}_{\alpha}^{(m+1)} = \mathbf{w}_{\alpha}^n + \Delta t \left\{ \gamma \left(\frac{\delta \mathbf{w}}{\delta t} \right)_{\alpha}^{(m+1)} + (1 - \gamma) \left(\frac{\delta \mathbf{w}}{\delta t} \right)_{\alpha}^n \right\} \quad (4.12a)$$

$$\mathbf{x}_{\alpha}^{(m+1)} = \mathbf{x}_{\alpha}^n + \Delta t \mathbf{w}_{\alpha}^n + \Delta t^2 \left\{ \beta \left(\frac{\delta \mathbf{w}}{\delta t} \right)_{\alpha}^{(m+1)} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \left(\frac{\delta \mathbf{w}}{\delta t} \right)_{\alpha}^n \right\} \quad (4.12b)$$

このとき、上添字 $^{(m)}$ は

$$\max_{1 \leq i \leq n_{FN}} |\mathbf{v}_i^{(m+1)} - \mathbf{v}_i^{(m)}| < \epsilon_2 \quad (4.13)$$

となるまで陽的に反復することを意味する．反復計算後に，
(流体の変数)

$$\begin{cases} \left(\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t}\right)_i^{n+1} \simeq \left(\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t}\right)_i^{(m+1)} \\ \mathbf{v}_i^{n+1} \simeq \mathbf{v}_i^{(m+1)} \\ p_l^{n+1} \simeq p_l^{(m+1)} \end{cases} \quad (4.14a)$$

(メッシュの変数)

$$\begin{cases} \left(\frac{\delta \mathbf{w}}{\delta t}\right)_i^{n+1} \simeq \left(\frac{\delta \mathbf{w}}{\delta t}\right)_i^{(m+1)} \\ \mathbf{w}_i^{n+1} \simeq \mathbf{w}_i^{(m+1)} \\ \mathbf{x}_i^{n+1} \simeq \mathbf{x}_i^{(m+1)} \end{cases} \quad (4.14b)$$

とする．係数行列は以下のように定義される．

(質量行列)

$$M_{\alpha\beta}^{(m)} = \int_{\Omega_e^{(m)}} N_\alpha N_\beta d\Omega^{(m)} \quad (4.15a)$$

(移流行列)

$$A_{\alpha\beta}^{(m)} = \int_{\Omega_e^{(m)}} N_\alpha \nabla N_\beta d\Omega^{(m)} \quad (4.15b)$$

(こう配行列)

$$C_{\alpha b}^{(m)} = \int_{\Omega_e^{(m)}} (\nabla N_\alpha) N_b^p d\Omega^{(m)} \quad (4.15c)$$

(拡散行列)

$$D_{\alpha\beta}^{(m)} = \int_{\Omega_e^{(m)}} \nabla N_\alpha \nabla N_\beta d\Omega^{(m)} \quad (4.15d)$$

また， $\overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)}$ は質量の集中化

$$\rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} = \begin{cases} \rho \int_{\Omega_e^{(m)}} N_\alpha d\Omega^{(m)} & \text{for } \alpha = \beta \\ 0 & \text{for } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (4.16)$$

から得られる集中質量行列である．また， $\langle \mathbf{v} \rangle_e^{(m)}$ と $\langle \mathbf{w} \rangle_e^{(m)}$ は

$$\langle \mathbf{v} \rangle_e^{(m)} = \frac{1}{\Omega_e^{(m)}} \left(\int_{\Omega_e^{(m)}} N_\alpha d\Omega^{(m)} \right) \mathbf{v}_\alpha^{(m)} \quad (4.17a)$$

$$\langle \mathbf{w} \rangle_e^{(m)} = \frac{1}{\Omega_e^{(m)}} \left(\int_{\Omega_e^{(m)}} N_\alpha d\Omega^{(m)} \right) \mathbf{w}_\alpha^{(m)} \quad (4.17b)$$

より求まる速度と任意速度の要素平均値である．

4.3.2 Hooke 弾性体の有限要素法離散化式

有限要素を $\Omega_e^{(m)}$ ($1 \leq e \leq n_{SE}$) とし、要素境界を $\Gamma_e^{(m)} = \partial\Omega_e^{(m)}$ ($1 \leq e \leq n_{SE}$) とする。変位 $\mathbf{u}^{(m)}$ は形状関数 N_i ($1 \leq i \leq n_{SN}$) で補間される。

(変位の補間関数)

$$\mathbf{u}^{(m)} = N_i \mathbf{u}_i^{(m)} \quad (4.18)$$

単位質量当たりの体積力 $\mathbf{b}^{(m)}$ は、変位と同じ形状関数によって補間される。各要素において、節点 i が局所節点 α に対応する。

(変位の補間関数)

$$\mathbf{u}^{(m)} = N_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{(m)} \quad \text{in } \Omega_e^{(m)} \quad (4.19)$$

陽的な反復計算開始時に、

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \right)_i^{(0)} \simeq \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \right)_i^n \\ \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_i^{(0)} \simeq \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_i^n \\ \mathbf{u}_i^{(0)} \simeq \mathbf{u}_i^n \end{cases} \quad (4.20)$$

とおく。 $m+1$ 回目の反復において、時間的に離散化した基礎方程式を Galerkin 有限要素法で離散化すると、以下に示されるような各要素に対する有限要素法離散化式が得られる。

(運動方程式)

$$\rho^0 \overline{M}_{\alpha\beta}^0 \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \right)_\beta^{(m+1)} = (\mathbf{F}_{\text{in}})_\alpha^{(m)} + (\mathbf{F}_{\text{ext}})_\alpha^{(m)} \quad (4.21a)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_\alpha^{(m+1)} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_\alpha^n + \Delta t \left\{ \gamma \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \right)_\alpha^{(m+1)} + (1-\gamma) \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \right)_\alpha^n \right\} \quad (4.21b)$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{(m+1)} = \mathbf{u}_\alpha^n + \Delta t \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_\alpha^n + \Delta t^2 \left\{ \beta \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \right)_\alpha^{(m+1)} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \right)_\alpha^n \right\} \quad (4.21c)$$

ただし、運動方程式の内力部分と外力部分はそれぞれ

(内力部分)

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_{\text{in}})_\alpha^{(m)} = & - \left[\lambda_S \mathbf{S}_{\alpha\beta}^0 + \mu_S \{ (\text{tr} \mathbf{S}_{\alpha\beta}^0) \mathbf{I} + (\mathbf{S}_{\alpha\beta}^0)^T \} \right] \cdot \mathbf{u}_\beta^{(m)} \\ & - \{ \lambda_S \mathbf{S}_{\beta\gamma\alpha}^0 + \mu_S (\mathbf{S}_{\gamma\alpha\beta}^0 + \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma}^0) \} \cdot \mathbf{u}_\beta^{(m)} \mathbf{u}_\gamma^{(m)} \\ & - \left(\frac{\lambda_S}{2} \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma}^0 + \mu_S \mathbf{S}_{\gamma\beta\alpha}^0 \right) (\mathbf{u}_\beta^{(m)} \cdot \mathbf{u}_\gamma^{(m)}) \\ & - \left(\frac{\lambda_S}{2} \mathbf{S}_{\alpha\delta\beta\gamma}^0 + \mu_S \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}^0 \right) (\mathbf{u}_\beta^{(m)} \cdot \mathbf{u}_\gamma^{(m)}) \mathbf{u}_\delta^{(m)} \end{aligned} \quad (4.22a)$$

(外力部分)

$$(\mathbf{F}_{\text{ext}})_{\alpha}^{(m)} = \rho^0 \overline{M}_{\alpha\beta}^0 \mathbf{b}_{\beta}^{(m)} + \oint_{\Gamma_e^0} N_{\alpha} \mathbf{t}_n^{(m)} d\Gamma^0 \quad (4.22b)$$

である. このとき, 上添字 (m) は

$$\max_{1 \leq i \leq n_{SN}} \left| \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_i^{(m+1)} - \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_i^{(m)} \right| < \epsilon_2 \quad (4.23)$$

となるまで陽的に反復することを意味する. 反復計算後に,

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \right)_i^{n+1} \simeq \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \right)_i^{(m+1)} \\ \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_i^{n+1} \simeq \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_i^{(m+1)} \\ \mathbf{u}_i^{n+1} \simeq \mathbf{u}_i^{(m+1)} \end{cases} \quad (4.24)$$

とする. 係数行列は以下のように定義される.

(質量行列)

$$M_{\alpha\beta}^0 = \int_{\Omega_e^0} N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega^0 \quad (4.25a)$$

(剛性行列)

$$\mathbf{S}_{\alpha}^0 = \int_{\Omega_e^0} \nabla_X N_{\alpha} d\Omega^0 \quad (4.25b)$$

$$\mathbf{S}_{\alpha\beta}^0 = \int_{\Omega_e^0} \nabla_X N_{\alpha} \nabla_X N_{\beta} d\Omega^0 \quad (4.25c)$$

$$\mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma}^0 = \int_{\Omega_e^0} \nabla_X N_{\alpha} (\nabla_X N_{\beta} \cdot \nabla_X N_{\gamma}) d\Omega^0 \quad (4.25d)$$

$$\mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}^0 = \int_{\Omega_e^0} (\nabla_X N_{\alpha} \cdot \nabla_X N_{\beta}) (\nabla_X N_{\gamma} \cdot \nabla_X N_{\delta}) d\Omega^0 \quad (4.25e)$$

また, $\overline{M}_{\alpha\beta}^0$ は質量の集中化

$$\rho^0 \overline{M}_{\alpha\beta}^0 = \begin{cases} \rho^0 \int_{\Omega_e^0} N_{\alpha} d\Omega^0 & \text{for } \alpha = \beta \\ 0 & \text{for } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (4.26)$$

から得られる集中質量行列である.

4.3.3 非圧縮超弾性体の GSMAC 有限要素法離散化

有限要素を $\Omega_e^{(m)}$ ($1 \leq e \leq n_{SE}$) とし、要素境界を $\Gamma_e^{(m)} = \partial\Omega_e^{(m)}$ ($1 \leq e \leq n_{SE}$) とする。変位 $\mathbf{u}^{(m)}$ は形状関数 N_i ($1 \leq i \leq n_{SN}$) で補間され、変換後の圧力 $p_r^{(m)}$ は形状関数 N_l^p ($1 \leq l \leq n_{SN}^p$) で補間される。

(変位の補間関数)

$$\mathbf{u}^{(m)} = N_i \mathbf{u}_i^{(m)} \quad (4.27a)$$

(変換後の圧力の補間関数)

$$p_r^{(m)} = N_l^p p_{rl}^{(m)} \quad (4.27b)$$

単位質量当たりの体積力 $\mathbf{b}^{(m)}$ は、変位と同じ形状関数によって補間される。各要素において、節点 i が局所節点 α に対応し、節点 l が局所節点 a に対応する。

(変位の補間関数)

$$\mathbf{u}^{(m)} = N_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{(m)} \quad \text{in } \Omega_e^{(m)} \quad (4.28a)$$

(変換後の圧力の補間関数)

$$p_r^{(m)} = N_a^p p_{ra}^{(m)} \quad \text{in } \Omega_e^{(m)} \quad (4.28b)$$

陽的な反復計算開始時に、

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_i^{(0)} \simeq \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_i^n \\ \mathbf{v}_i^{(0)} \simeq \mathbf{v}_i^n \\ p_{rl}^{(0)} \simeq p_{rl}^n \\ \mathbf{u}_i^{(0)} \simeq \mathbf{u}_i^n \end{array} \right. \quad (4.29)$$

とおく。 $m+1$ 回目の反復において、時間的に離散化された基礎方程式から予測子ステップの式、Poisson 方程式、修正子ステップから成る分離式を導いた後に、分離式を Galerkin 有限要素法で離散化すると、以下に示されるような各要素に対する有限要素法離散化式が得られる。

(予測子ステップの式)

$$\rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \left(\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} \right)_\beta = (\mathbf{F}_{\text{in}})_\alpha^{(m)} + (\mathbf{F}_{\text{ext}})_\alpha^{(m)} \quad (4.30a)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha^n + \Delta t \left\{ \gamma \left(\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} \right)_\alpha + (1 - \gamma) \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_\alpha^n \right\} \quad (4.30b)$$

(Poisson 方程式)

$$\mathbf{C}_{\beta a}^{(m)} \cdot \langle \nabla^{(m)} \phi_p \rangle_{\beta} = \rho \mathbf{C}_{\beta a}^{(m)} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\beta} \quad (4.30c)$$

$$\langle \nabla^{(m)} \phi_p \rangle_{\alpha} = - \frac{\sum_{e'=1}^{n_{SE}} (\mathbf{C}_{\alpha b}^{(m)} \phi_{pb})}{\sum_{e''=1}^{n_{SE}} \int_{\Omega_{e''}^{(m)}} N_{\alpha} d\Omega^{(m)}} \quad (4.30d)$$

(修正子ステップの式)

$$\rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_{\beta}^{(m+1)} = \rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \left(\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} \right)_{\beta} + \frac{\mathbf{C}_{\alpha b}^{(m)} \phi_{pb}}{\gamma \Delta t} - \oint_{\Gamma_e^{(m)}} N_{\alpha} \left(\frac{\phi_p \mathbf{n}^{(m)}}{\gamma \Delta t} \right) d\Gamma^{(m)} \quad (4.30e)$$

$$\rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \mathbf{v}_{\beta}^{(m+1)} = \rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \tilde{\mathbf{v}}_{\beta} + \mathbf{C}_{\alpha b}^{(m)} \phi_{pb} - \oint_{\Gamma_e^{(m)}} N_{\alpha} (\phi_p \mathbf{n}^{(m)}) d\Gamma^{(m)} \quad (4.30f)$$

$$p_a^{(m+1)} = p_a^{(m)} + \frac{\phi_{pa}}{\gamma \Delta t} \quad (4.30g)$$

(変位の更新式)

$$\mathbf{u}_{\alpha}^{(m+1)} = \mathbf{u}_{\alpha}^n + \Delta t \mathbf{v}_{\alpha}^n + \Delta t^2 \left\{ \beta \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_{\alpha}^{(m+1)} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_{\alpha}^n \right\} \quad (4.30h)$$

ただし、運動方程式の内力部分と外力部分はそれぞれ

(内力部分)

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_{\text{in}})_{\alpha}^{(m)} &= \mathbf{C}_{\alpha b}^{(m)} p_{\gamma b}^{(m)} - 2 \left(\left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{I}_B} \right\rangle_e^{(m)} + 2 \left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} \right\rangle_e^{(m)} \right) \mathbf{S}_{\alpha}^0 \\ &\quad - 2 \left(\left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{I}_B} \right\rangle_e^{(m)} + \left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} \right\rangle_e^{(m)} \right) (\text{tr} \mathbf{S}_{\alpha\beta}^0) \mathbf{u}_{\beta}^{(m)} \\ &\quad - 2 \left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} \right\rangle_e^{(m)} \left[\{ 2 \mathbf{S}_{\alpha\beta}^0 - (\mathbf{S}_{\alpha\beta}^0)^T \} \cdot \mathbf{u}_{\beta}^{(m)} + 2 \mathbf{S}_{\gamma\beta\alpha}^0 \cdot (\mathbf{u}_{\beta}^{(m)} \mathbf{u}_{\gamma}^{(m)})^T \right. \\ &\quad \quad \quad \left. + (\mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma}^0 - \mathbf{S}_{\gamma\beta\alpha}^0) (\mathbf{u}_{\beta}^{(m)} \cdot \mathbf{u}_{\gamma}^{(m)}) \right. \\ &\quad \quad \quad \left. - (\mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma}^0 + \mathbf{S}_{\gamma\beta\alpha}^0) \cdot \mathbf{u}_{\beta}^{(m)} \mathbf{u}_{\gamma}^{(m)} \right. \\ &\quad \quad \quad \left. + S_{\alpha\beta\gamma\delta}^{N2} \{ \mathbf{u}_{\beta}^{(m)} (\mathbf{u}_{\gamma}^{(m)} \cdot \mathbf{u}_{\delta}^{(m)}) - (\mathbf{u}_{\beta}^{(m)} \cdot \mathbf{u}_{\gamma}^{(m)}) \mathbf{u}_{\delta}^{(m)} \} \right] \quad (4.31a) \end{aligned}$$

(外力部分)

$$(\mathbf{F}_{\text{ext}})_{\alpha}^{(m)} = \rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \mathbf{b}_{\beta}^{(m)} + \oint_{\Gamma_e^0} N_{\alpha} \tilde{\mathbf{t}}^{(m)} d\Gamma^0 \quad (4.31b)$$

である。このとき、上添字^(m)は

$$\max_{1 \leq i \leq n_{SN}} \left| \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_i^{(m+1)} - \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_i^{(m)} \right| < \epsilon_2 \quad (4.32)$$

となるまで陽的に反復することを意味する．反復計算後に，

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_i^{(0)} \simeq \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_i^n \\ \mathbf{v}_i^{(0)} \simeq \mathbf{v}_i^n \\ p_{rl}^{(0)} \simeq p_{rl}^n \\ \mathbf{u}_i^{(0)} \simeq \mathbf{u}_i^n \end{array} \right. \quad (4.33)$$

とする．また，左 Cauchy-Green 変形 \mathbf{B} の要素平均値

$$\langle \mathbf{B} \rangle_e^{(m)} = \mathbf{I} + \frac{1}{\Omega_e^0} \{ \mathbf{S}_\alpha^0 \mathbf{u}_\alpha^{(m)} + \mathbf{u}_\alpha^{(m)} \mathbf{S}_\alpha^0 + (\text{tr} \mathbf{S}_{\alpha\beta}^0) \mathbf{u}_\alpha^{(m)} \mathbf{u}_\beta^{(m)} \} \quad (4.34)$$

と低減不変量の定義式を用いると，完全3次の場合における弾性定数の要素平均値は以下のようなになる．

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{I}_B} \right\rangle_e^{(m)} &= c_{10} + c_{11} (\langle \tilde{II}_B \rangle_e^{(m)} - 3) + 2c_{20} (\langle \tilde{I}_B \rangle_e^{(m)} - 3) \\ &\quad + 2c_{21} (\langle \tilde{I}_B \rangle_e^{(m)} - 3) (\langle \tilde{II}_B \rangle_e^{(m)} - 3) + c_{12} (\langle \tilde{II}_B \rangle_e^{(m)} - 3)^2 \\ &\quad + 3c_{30} (\langle \tilde{I}_B \rangle_e^{(m)} - 3)^2 \end{aligned} \quad (4.35a)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial W}{\partial \tilde{II}_B} \right\rangle_e^{(m)} &= c_{01} + c_{11} (\langle \tilde{I}_B \rangle_e^{(m)} - 3) + 2c_{02} (\langle \tilde{II}_B \rangle_e^{(m)} - 3) \\ &\quad + c_{21} (\langle \tilde{I}_B \rangle_e^{(m)} - 3)^2 + 2c_{12} (\langle \tilde{I}_B \rangle_e^{(m)} - 3) (\langle \tilde{II}_B \rangle_e^{(m)} - 3) \\ &\quad + 3c_{03} (\langle \tilde{II}_B \rangle_e^{(m)} - 3)^2 \end{aligned} \quad (4.35b)$$

4.3.4 流体と固体の連成系の離散化式

図 4.1 のような流体領域と固体領域を考える．流体の境界では $\Gamma_{F1} \cap \Gamma_{F2} = \phi$ であり，以下に示す現配置の境界条件が与えられる．

(基本境界条件)

$$\mathbf{v} = \underline{\mathbf{v}} \quad \text{on } \Gamma_{F1} \quad (4.36a)$$

(自然境界条件)

$$\mathbf{t} = \underline{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_{F2} \quad (4.36b)$$

ただし， \mathbf{t} は真応力である．また，固体の境界では $\Gamma_{S1} \cap \Gamma_{S2} = \phi$ であり，以下に示す基準配置の境界条件が与えられる．

(基本境界条件)

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_{S1}^0 \quad (4.37a)$$

(自然境界条件)

$$\mathbf{t}_n = \underline{\mathbf{t}}_n \quad \text{on } \Gamma_{S2}^0 \quad (4.37b)$$

ただし, \mathbf{t}_n は公称応力である. さらに, 流体と固体の界面上では以下の条件が成り立つ.

(連続条件)

$$\mathbf{v}|_{\text{Fluid}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}|_{\text{Solid}} \quad \text{on } \Gamma_I \quad (4.38a)$$

(平衡条件)

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})|_{\text{Fluid}} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})|_{\text{Solid}} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_I \quad (4.38b)$$

ただし, \mathbf{n} は境界外向きの単位法線ベクトル, \mathbf{T} は Cauchy 応力である.

式(4.10a) の流体全要素の総和と式(4.21a) または式(4.30a) の固体全要素の総和を足すと (非圧縮 Newton 流体と Hooke 弾性体)

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_{FE}} \left\{ \rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \left(\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} \right)_\beta \right\} + \sum_{e=1}^{n_{SE}} \left\{ \rho^0 \overline{M}_{\alpha\beta}^0 \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \right)_\beta^{(m+1)} \right\} \\ &= \sum_{e=1}^{n_{FE}} \left\{ -\rho (\langle \mathbf{v} \rangle_e^{(m)} - \langle \mathbf{w} \rangle_e^{(m)}) \cdot \mathbf{A}_{\alpha\beta}^{(m)} \mathbf{v}_\beta^{(m)} + (\mathbf{F}_{\text{in}})_\alpha^{(m)} + (\mathbf{F}_{\text{ext}})_\alpha^{(m)} \right\} \\ &+ \sum_{e=1}^{n_{SE}} \left\{ (\mathbf{F}_{\text{in}})_\alpha^{(m)} + (\mathbf{F}_{\text{ext}})_\alpha^{(m)} \right\} \end{aligned} \quad (4.39a)$$

(非圧縮 Newton 流体と非圧縮超弾性体)

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_{FE}} \left\{ \rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \left(\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} \right)_\beta \right\} + \sum_{e=1}^{n_{SE}} \left\{ \rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_\beta \right\} \\ &= \sum_{e=1}^{n_{FE}} \left\{ -\rho (\langle \mathbf{v} \rangle_e^{(m)} - \langle \mathbf{w} \rangle_e^{(m)}) \cdot \mathbf{A}_{\alpha\beta}^{(m)} \mathbf{v}_\beta^{(m)} + (\mathbf{F}_{\text{in}})_\alpha^{(m)} + (\mathbf{F}_{\text{ext}})_\alpha^{(m)} \right\} \\ &+ \sum_{e=1}^{n_{SE}} \left\{ (\mathbf{F}_{\text{in}})_\alpha^{(m)} + (\mathbf{F}_{\text{ext}})_\alpha^{(m)} \right\} \end{aligned} \quad (4.39b)$$

となる. 非圧縮 Newton 流体の基礎方程式における外力部分は

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_{FE}} (\mathbf{F}_{\text{ext}})_\alpha^{(m)} &= \sum_{e=1}^{n_{FE}} \left(\rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \mathbf{b}_\beta^{(m)} \right) \\ &+ \int_{\Gamma_{F2}^{(m)}} N_\alpha \underline{\mathbf{t}}^{(m)} d\Gamma^{(m)} + \int_{\Gamma_I^{(m)}} N_\alpha (\mathbf{n}^{(m)} \cdot \mathbf{T}^{(m)}) d\Gamma^{(m)} \end{aligned} \quad (4.40)$$

であり, 弾性体の基礎方程式における外力部分は

(Hooke 弾性体)

$$\begin{aligned}
\sum_{e=1}^{n_{SE}} (\mathbf{F}_{\text{ext}})_{\alpha}^{(m)} &= \sum_{e=1}^{n_{SE}} \left(\rho^0 \overline{M}_{\alpha\beta}^0 \mathbf{b}_{\beta}^{(m)} \right) \\
&\quad + \int_{\Gamma_{S_2}^0} N_{\alpha} \underline{\mathbf{t}}_n^{(m)} d\Gamma^0 + \int_{\Gamma_I^0} N_{\alpha} \{ \mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{S}^{(m)} \cdot (\mathbf{F}^{(m)})^T \} d\Gamma^0 \\
&= \sum_{e=1}^{n_{SE}} \left(\rho^0 \overline{M}_{\alpha\beta}^0 \mathbf{b}_{\beta}^{(m)} \right) \\
&\quad + \int_{\Gamma_{S_2}^0} N_{\alpha} \underline{\mathbf{t}}_n^{(m)} d\Gamma^0 + \int_{\Gamma_I^{(m)}} N_{\alpha} (\mathbf{n}^{(m)} \cdot \mathbf{T}^{(m)}) d\Gamma^{(m)} \tag{4.41a}
\end{aligned}$$

(非圧縮超弾性体)

$$\begin{aligned}
\sum_{e=1}^{n_{SE}} (\mathbf{F}_{\text{ext}})_{\alpha}^{(m)} &= \sum_{e=1}^{n_{SE}} \left(\rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \mathbf{b}_{\beta}^{(m)} \right) \\
&\quad + \int_{\Gamma_{S_2}^0} N_{\alpha} \underline{\mathbf{t}}_n^{(m)} d\Gamma^0 + \int_{\Gamma_I^0} N_{\alpha} \{ \mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{S}^{(m)} \cdot (\mathbf{F}^{(m)})^T \} d\Gamma^0 \\
&= \sum_{e=1}^{n_{SE}} \left(\rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \mathbf{b}_{\beta}^{(m)} \right) \\
&\quad + \int_{\Gamma_{S_2}^0} N_{\alpha} \underline{\mathbf{t}}_n^{(m)} d\Gamma^0 + \int_{\Gamma_I^{(m)}} N_{\alpha} (\mathbf{n}^{(m)} \cdot \mathbf{T}^{(m)}) d\Gamma^{(m)} \tag{4.41b}
\end{aligned}$$

である。界面上の平衡条件より，式(4.40)と式(4.41)における界面での面積力部分が相殺される。よって，流体と固体の連成系の離散化式は以下ようになる。

(非圧縮 Newton 流体と Hooke 弾性体)

$$\begin{aligned}
&\sum_{e=1}^{n_{FE}} \left\{ \rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \left(\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} \right)_{\beta} \right\} + \sum_{e=1}^{n_{SE}} \left\{ \rho^0 \overline{M}_{\alpha\beta}^0 \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \right)_{\beta}^{(m+1)} \right\} \\
&= \sum_{e=1}^{n_{FE}} \left\{ -\rho (\langle \mathbf{v} \rangle_e^{(m)} - \langle \mathbf{w} \rangle_e^{(m)}) \cdot \mathbf{A}_{\alpha\beta}^{(m)} \mathbf{v}_{\beta}^{(m)} + (\mathbf{F}_{\text{in}})_{\alpha}^{(m)} + \rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \mathbf{b}_{\beta}^{(m)} \right\} \\
&\quad + \sum_{e=1}^{n_{SE}} \left\{ (\mathbf{F}_{\text{in}})_{\alpha}^{(m)} + \rho^0 \overline{M}_{\alpha\beta}^0 \mathbf{b}_{\beta}^{(m)} \right\} \\
&\quad + \int_{\Gamma_{F_2}^{(m)}} N_{\alpha} \underline{\mathbf{t}}^{(m)} d\Gamma^{(m)} + \int_{\Gamma_{S_2}^0} N_{\alpha} \underline{\mathbf{t}}_n^{(m)} d\Gamma^0 \tag{4.42a}
\end{aligned}$$

(非圧縮 Newton 流体と非圧縮超弾性体)

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^{n_{FE}} \left\{ \rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \left(\frac{\delta \tilde{\mathbf{v}}}{\delta t} \right)_{\beta} \right\} + \sum_{e=1}^{n_{SE}} \left\{ \rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \left(\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} \right)_{\beta} \right\} \\
&= \sum_{e=1}^{n_{FE}} \left\{ -\rho (\langle \mathbf{v} \rangle_e^{(m)} - \langle \mathbf{w} \rangle_e^{(m)}) \cdot \mathbf{A}_{\alpha\beta}^{(m)} \mathbf{v}_{\beta}^{(m)} + (\mathbf{F}_{\text{in}})_{\alpha}^{(m)} + \rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \mathbf{b}_{\beta}^{(m)} \right\} \\
& \quad + \sum_{e=1}^{n_{SE}} \left\{ (\mathbf{F}_{\text{in}})_{\alpha}^{(m)} + \rho \overline{M}_{\alpha\beta}^{(m)} \mathbf{b}_{\beta}^{(m)} \right\} \\
& \quad + \int_{\Gamma_{F2}^{(m)}} N_{\alpha} \underline{\mathbf{t}}^{(m)} d\Gamma^{(m)} + \int_{\Gamma_{S2}^0} N_{\alpha} \underline{\mathbf{t}}_n^{(m)} d\Gamma^0
\end{aligned} \tag{4.42b}$$

となる．また，界面上の連続条件より

(非圧縮 Newton 流体と Hooke 弾性体)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\delta \tilde{\mathbf{v}}}{\delta t} \right) \Big|_{\text{Fluid}} &= \left(\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} \right) \Big|_{\text{Fluid}}^{(m+1)} \\
&= \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \right) \Big|_{\text{Solid}}^{(m+1)} \quad \text{on } \Gamma_I
\end{aligned} \tag{4.43a}$$

(非圧縮 Newton 流体と非圧縮超弾性体)

$$\left(\frac{\delta \tilde{\mathbf{v}}}{\delta t} \right) \Big|_{\text{Fluid}} = \left(\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} \right) \Big|_{\text{Solid}} \quad \text{on } \Gamma_I \tag{4.43b}$$

が成り立ち，連成系の離散化式(4.42)における界面上の加速度を求めることができる．ただし，流体の圧力修正において界面上の加速度は修正されないとする．

4.3.5 流体と固体の連成解析アルゴリズム

上述した数値計算法を含む GSMAC-ALE 有限要素法の流れ図を図 4.2 に示す．外側に位置する陽的な反復計算および内側に位置する速度と圧力の同時緩和反復計算から成る 2 重の反復計算となる．ただし，図 4.2 (b) における \tilde{D}_l は修正された速度の発散を圧力の節点平均した値を意味し， ϵ_1 は非圧縮拘束条件の収束判定基準である．

非圧縮 Newton 流体と Hooke 弾性体の連成解析の計算手順を以下に示す．非圧縮 Newton 流体の代表的な変数を $\{\mathbf{v}, p, \mathbf{w}\}$ ，Hooke 弾性体の代表的な変数を $\{\mathbf{u}\}$ とする．界面では，流体の変数 $\{\mathbf{v}\}$ と固体の変数 $\{\mathbf{u}\}$ を考える．

- (1) 時刻 t^n における固体領域の $\{\mathbf{u}^n\}$ ，流体領域の $\{\mathbf{v}^n, p^n, \mathbf{w}^n\}$ ，界面上での $\{\mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n\}$ が既知とする．
- (2) 陽的な Newmark- β 法の反復計算回数を $m = 0$ とおき，固体領域で $\{\mathbf{u}^{(0)}\} = \{\mathbf{u}^n\}$ ，流体領域で $\{\mathbf{v}^{(0)}, p^{(0)}, \mathbf{w}^{(0)}\} = \{\mathbf{v}^n, p^n, \mathbf{w}^n\}$ ，界面上で $\{\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{v}^{(0)}\} = \{\mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n\}$ とする．

- (3) 流体と固体の連成式を計算すると、固体領域で $\{\mathbf{u}^{(m+1)}\}$ 、流体領域で $\{\tilde{\mathbf{v}}, p^{(m)}, \mathbf{w}^{(m)}\}$ 、界面上で $\{\mathbf{u}^{(m+1)}, \mathbf{v}^{(m+1)}\}$ となる。
- (4) 流体領域で速度と圧力の同時緩和反復計算を行い、流体の速度 $\tilde{\mathbf{v}}$ と圧力 $p^{(m)}$ が修正される。流体領域で $\{\mathbf{v}^{(m+1)}, p^{(m+1)}, \mathbf{w}^{(m)}\}$ となり、界面上で $\{\mathbf{u}^{(m+1)}, \mathbf{v}^{(m+1)}\}$ となる。
- (5) 界面速度 $\mathbf{v}^{(m+1)}$ より、流体メッシュ速度 $\mathbf{w}^{(m+1)}$ が求まり、流体領域で $\{\mathbf{v}^{(m+1)}, p^{(m+1)}, \mathbf{w}^{(m+1)}\}$ となる。
- (6) $|\mathbf{v}^{(m+1)} - \mathbf{v}^{(m)}| \leq \epsilon_2$ ならば、固体領域で $\{\mathbf{u}^{n+1}\} = \{\mathbf{u}^{(m+1)}\}$ 、流体領域で $\{\mathbf{v}^{n+1}, p^{n+1}, \mathbf{w}^{n+1}\} = \{\mathbf{v}^{(m+1)}, p^{(m+1)}, \mathbf{w}^{(m+1)}\}$ 、界面上で $\{\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}^{n+1}\} = \{\mathbf{u}^{(m+1)}, \mathbf{v}^{(m+1)}\}$ として、時間進行する。 $|\mathbf{v}^{(m+1)} - \mathbf{v}^{(m)}| > \epsilon_2$ ならば、 $(m+1) \rightarrow (m)$ とおき、(3) から(6) までの手順を繰り返す。

非圧縮 Newton 流体と非圧縮超弾性体の連成解析の計算手順を以下に示す。非圧縮 Newton 流体の代表的な変数を $\{\mathbf{v}, p, \mathbf{w}\}$ 、非圧縮超弾性体の代表的な変数を $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, p_r\}$ とする。界面では、流体の変数 $\{\mathbf{v}\}$ と固体の変数 $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ を考える。

- (1) 時刻 t^n における固体領域の $\{\mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n, p_r^n\}$ 、流体領域の $\{\mathbf{v}^n, p^n, \mathbf{w}^n\}$ 、界面上での $\{\mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n\}$ が既知とする。
- (2) 陽的な Newmark- β 法の反復計算回数を $m = 0$ とおき、固体領域で $\{\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{v}^{(0)}, p_r^{(0)}\} = \{\mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n, p_r^n\}$ 、流体領域で $\{\mathbf{v}^{(0)}, p^{(0)}, \mathbf{w}^{(0)}\} = \{\mathbf{v}^n, p^n, \mathbf{w}^n\}$ 、界面上で $\{\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{v}^{(0)}\} = \{\mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n\}$ とする。
- (3) 流体と固体の連成式を計算すると、固体領域で $\{\mathbf{u}^{(m)}, \tilde{\mathbf{v}}, p_r^{(m)}\}$ 、流体領域で $\{\tilde{\mathbf{v}}, p^{(m)}, \mathbf{w}^{(m)}\}$ 、界面上で $\{\mathbf{u}^{(m)}, \tilde{\mathbf{v}}\}$ となる。
- (4) 固体領域で速度と圧力の同時緩和反復計算を行い、固体の速度 $\tilde{\mathbf{v}}$ と変換された圧力 $p_r^{(m)}$ が修正される。固体領域で $\{\mathbf{u}^{(m+1)}, \mathbf{v}^{(m+1)}, p_r^{(m+1)}\}$ となり、界面上で $\{\mathbf{u}^{(m+1)}, \mathbf{v}^{(m+1)}\}$ となる。
- (5) 流体領域で速度と圧力の同時緩和反復計算を行い、流体の速度 $\tilde{\mathbf{v}}$ と圧力 $p^{(m)}$ が修正される。流体領域で $\{\mathbf{v}^{(m+1)}, p^{(m+1)}, \mathbf{w}^{(m)}\}$ となり、界面上で $\{\mathbf{u}^{(m+1)}, \mathbf{v}^{(m+1)}\}$ となる。
- (6) 界面速度 $\mathbf{v}^{(m+1)}$ より、流体メッシュ速度 $\mathbf{w}^{(m+1)}$ が求まり、流体領域で $\{\mathbf{v}^{(m+1)}, p^{(m+1)}, \mathbf{w}^{(m+1)}\}$ となる。
- (7) $|\mathbf{v}^{(m+1)} - \mathbf{v}^{(m)}| \leq \epsilon_2$ ならば、固体領域で $\{\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}^{n+1}, p_r^{n+1}\} = \{\mathbf{u}^{(m+1)}, \mathbf{v}^{(m+1)}, p_r^{(m+1)}\}$ 、流体領域で $\{\mathbf{v}^{n+1}, p^{n+1}, \mathbf{w}^{n+1}\} = \{\mathbf{v}^{(m+1)}, p^{(m+1)}, \mathbf{w}^{(m+1)}\}$ 、界面上で $\{\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}^{n+1}\} = \{\mathbf{u}^{(m+1)}, \mathbf{v}^{(m+1)}\}$ として、時間進行する。 $|\mathbf{v}^{(m+1)} - \mathbf{v}^{(m)}| > \epsilon_2$ ならば、 $(m+1) \rightarrow (m)$ とおき、(3) から(7) までの手順を繰り返す。

4.3.6 提案する連成計算方法の適用範囲

高 Reynolds 数流れでない流体と固体の連成解析では、固体の時間積分における時間刻み幅の制約が厳しくなる。本計算方法では、流体の時間刻み幅は固体の時間刻み幅に合わせる必要がある。固体の時間積分に陽的な解法を用いる場合に、物質を伝わる波を要素内で捉える必要がある。そのため、固体の時間刻み幅 Δt_S は CFL(Courant-Friedrichs-Lewy) 条件

$$\frac{c_S \Delta t_S}{L_S} \leq 1 \quad (4.44)$$

から見積もることができる。ただし、 L_S は固体要素の代表長さ、 c_S は弾性体を伝播する波の速度である。線形弾性体を仮定すると、縦波と横波の速度はそれぞれ

(縦波の速度)

$$\begin{aligned} c^{(l)} &= \sqrt{\frac{\lambda_S + 2\mu_S}{\rho}} \\ &= \sqrt{\frac{E_S}{\rho} \frac{(1 - \nu_S)}{(1 + \nu_S)(1 - 2\nu_S)}} \end{aligned} \quad (4.45a)$$

(横波の速度)

$$\begin{aligned} c^{(t)} &= \sqrt{\frac{\mu_S}{\rho}} \\ &= \sqrt{\frac{E_S}{\rho} \frac{1}{2(1 + \nu_S)}} \end{aligned} \quad (4.45b)$$

となる。この波の速度を c_S と考えれば、固体解析の時間刻み幅を評価できる。密度は Young 率ほどオーダーとして固体間で異なることはないので、 c_S への影響は小さいと考えられる。Poisson 比が 0.4 より小さい場合には c_S への影響は小さい。ただし、圧縮性が小さい場合には Poisson 比が 0.5 に近くなり、縦波の速度は非常に大きくなるために、CFL 条件が厳しくなる。本研究で用いた非圧縮超弾性体解析では、縦波として伝播する圧力を陰的に時間進行することによって、厳しい CFL 条件を回避している。Young 率が 0.1~10MPa 程度であるような軟らかい固体と流体が相互作用する問題には、固体の時間刻み幅を大きく設定可能であり、計算機記憶容量も小さい本計算方法が他の計算方法より有効である。

4.4 弾性板の 2 次元渦励振問題

渦励振は、流体中の固体から放出される渦に伴う非定常な流体力による強制振動である。渦放出周波数が固体の固有振動数に接近すると、円柱の固有振動に同期して渦が放出されるロックイン現象が起こる。渦励振より高速な流れ場で生じる自励振動として、フラッ

ターが挙げられる。フラッターは、固体の運動によって流れ場が変化し、その流体力が固体へ作用するようなフィードバックによって生じる。フラッターの種類として、ねじれフラッター、曲げねじれフラッター、ギャロッピングなどが挙げられる (4.11)(4.12)。

提案した連成解析の計算方法が流体と固体の相互作用が大きい問題に対して有効であるかを検証するために、剛体角柱からの放出渦と剛体角柱に付属した弾性板が相互作用する2次元渦励振問題を扱う。解析モデルと境界条件を図4.3に示す。初期条件として、インパルスに空気が流入する。本解析では、剛体角柱に付属した弾性板を Hooke 弾性体または非圧縮超弾性体として扱う。表4.1に空気、Hooke 弾性体、非圧縮超弾性体の物性値を示す。Reynolds 数を計算すると、 $Re = L_r V_r / (\mu / \rho) \simeq 332$ である。圧縮超弾性体の Young 率は、微小変形時の $6(c_{10} + c_{01})$ で評価すると約 1.14MPa である。図4.4に示されるような要素を用いて、流速と固体変位を1次補間した場合の結果と2次補間した場合の結果を比較する。解析メッシュを図4.5に示す。メッシュAとメッシュBでは、流速と固体変位の全自由度数を同じに設定する。メッシュCは、メッシュBを弾性板の軸方向に要素を半分にしたものである。本解析では固体の時間刻み幅の制約が流体の時間刻み幅の制約より厳しくなる。固体を伝播する波を要素内で十分に捉えることができるように、時間刻み幅をメッシュAとメッシュBでは 1.0×10^{-5} s、メッシュCでは 5.0×10^{-6} s と設定する。メッシュの制御方法として、弾性板の壁面から流体領域の遠方へ線形に変化するように ALE 法のメッシュ速度を与える。同時緩和反復計算の収束判定は $\epsilon_1 = 1.0 \times 10^{-3} V_r / L_r$ 、陽的な反復計算の収束判定は $\epsilon_2 = 1.0 \times 10^{-6} V_r$ である。Newmark- β 法のパラメータは、 $\gamma = 0.6$ 、 $\beta = 0.3025$ とする。

4.4.1 本解析の問題設定

先端で曲げモーメントを与えた場合における解析に用いる弾性板の曲げ変形を動解析し、固体変位を1次補間した場合の shear locking の影響を調べる。板先端での応力は、中立面で零、板の厚さ方向に 500 Pa まで線形に変化するように与える。図4.6に弾性板先端の変位の時刻歴を示す。図4.6(b)に示される2次補間 Q_2 要素の変位解を見ると、軸方向に20要素を用いると振動数と振幅に対するメッシュ依存性の影響は非常に小さくなることがわかる。一方、図4.6(b)に示される1次補間 Q_1 要素の変位解を見ると、要素数が少ないと shear locking により固い解が得られてしまい、メッシュ依存性の影響を小さくするには軸方向に320要素を用いる必要があることがわかる。shear locking とは、変位に1次補間を用いた場合に、曲げ変形によるひずみがせん断ひずみとして過剰に評価されることが原因である数値計算上の誤差である。FFT (Fast Fourier Transform) によって厳密解に近い値であると考えられる2次補間20要素の変位解を Fourier 解析すると、固有振動数として 0.65 Hz と 3.9 Hz が得られる。

弾性板が剛体である場合の $Re = 332$ における渦放出を調べる。Reynolds 数は比較的小さく、フラッターが生じるような高速な流れ場ではない。 Q_2Q_1 要素のメッシュA と Q_1Q_0 要素のメッシュB を用いる。剛体板に作用する揚力の振動数を FFT により Fourier 解析すると、渦放出周波数 5.9Hz, 12.7Hz, 18.6Hz が得られる。メッシュA とメッシュB では、高次の周波数 18.6Hz のスペクトルの大きさに違いがあるものの、他の周波数とスペクトルは一致する。 Q_1Q_0 要素のメッシュA を用いた結果の速度分布と圧力分布を図 4.7 に示す。角柱側面近傍での速度の大きさは非常に小さく、その方向は主流と逆向きである。また、角柱側面における圧力回復も見られない。このことから、せん断層は常に角柱前縁から剥離し続け、せん断層が交互に側面に再付着することはない渦放出のパターン^(4.12) であることがわかる。

剛体角柱からの渦放出周波数と弾性板の低次の固有振動数は大きく異なる。すなわち、ロックインが生じない渦励振の範囲である。図 4.8 に流速と渦放出周波数の関係および流速と弾性体の振幅の関係を本研究で扱われる条件と共に概略的に示す。

4.4.2 弾性板が Hooke 弾性体の場合

空気と Hooke 弾性体の連成解析より、提案した計算方法を評価する。得られた結果は Wall らの結果^(4.6) と比較される。Wall らは、界面でデータを受け渡す弱連成法を用いている。Wall らが用いた要素は、流体に Q_1Q_1 要素、固体に Q_2 要素である。メッシュA とメッシュB では、固体変位の全自由度数は Wall らと同じであり、流速の全自由度数は Wall らの結果より全自由度数は多い。Wall らの解析では流体の全自由度数は約 19000 であるが、本解析では Mesh A で 20230 (速度 17920, 圧力 2310), Mesh B で 26600 (速度 17920, 圧力 8680), Mesh C で 37320 (速度 25120, 圧力 12200) である。Wall らの結果と比較することによって、計算される物理現象の定性的な評価、流体と連成した弾性板の振動数に対する定量的な評価を行う。

メッシュA とメッシュC を用いた場合の各時刻における圧力分布を図 4.9 と図 4.10 に示す。計算を開始すると、剛体の角柱から板の側面で対称な渦が放出する(図 4.9 (a) または図 4.10 (a) 参照)。図 4.9 (b) や図 4.10 (b) に示すように約 1s 経過すると流れ場は非対称となり始め、その後非対称な渦が放出されるようになる。弾性板は、図 4.9 (c) から (h) や図 4.10 (c) から (h) に示すようにその側面に作用する流体力の差によって振動するようになる。用いた要素の種類により弾性板の変形形状に違いがあるが、本計算方法によって、放出渦と弾性板との相互作用を捉えることが可能であると考えられる。弾性板先端での変位の時刻歴を Wall らの結果と共に図 4.11 に示す。本解析結果は、振動の開始時刻が異なるものの、低次の振動数は Wall らに近い値となることがわかる。この低次の振動数は、固体の固有振動数より大きい。図 4.7 に変位の時刻歴を Fourier 解析した結果を示す。2次補

間のメッシュAの変位では、Wallらと高次の振動数の影響が同じ程度であるが、低次の振動数の影響は小さい。1次補間のメッシュBの変位では、Wallらと低次の振動数の影響が同じ程度であるが、高次の振動数の影響は小さい。軸方向に要素数を増やしたメッシュCの変位では、メッシュBの変位より低次の振動数の影響が小さくなり、メッシュAの変位のように高次の振動数の影響が大きくなる。これは、メッシュBの変位では、固体要素の shear locking によって高次の振動数の影響が小さくなっていると考えられる。Wallらの解析結果は本解析結果と比べて流体の全自由度が少ないが、流速に1次、固体変位に2次補間を用いているために、メッシュAとメッシュBの特徴を有することがわかる。

4.4.3 弾性板が非圧縮超弾性体の場合

空気と非圧縮超弾性体の連成解析より、流体と固体が非圧縮拘束条件を有する場合における計算方法を評価する。連成解析における非圧縮超弾性体の全面積の保存性が検証される。

メッシュAとメッシュCを用いた場合の各時刻における圧力分布を図4.13と図4.14を示す。弾性板がHooke弾性体である場合と同様に、板側面に作用する流体力の差によって、板は振動するようになる。板の先端での変位の時刻履歴を図4.15に示す。1次補間のメッシュBの変位では、shear lockingの影響によって振幅が非常に小さくなることがわかる。軸方向に要素数を増やしたメッシュCの変位では、shear lockingの影響は小さくなり、2次補間のメッシュAの変位に近い値となる。図4.16に変位の時刻歴をFourier解析した結果を示す。メッシュBを用いた変位の周期がshear lockingで小さくなるために、振動数はメッシュAやメッシュCより大きくなることが確認できる。固体領域の全面積の履歴を図4.17に示す。固体領域の全面積の変化は 3.5×10^{-5} %以内である。本研究で提案した連成解析方法では、速度と圧力の同時緩和反復計算によって、非圧縮超弾性体の面積は良好に保存されることがわかる。提案した流体と非圧縮超弾性体の連成解析の計算方法によって、流体と固体が非圧縮拘束条件を持つ場合においても、十分に解析可能であると考えられる。

4.5 第4章の結言

GSMAC-ALE有限要素法を基にして、流体と軟らかい固体の連成問題に有効である、低容量かつ高速計算に適した陽的な反復計算方法を提案した。提案した連成解析の計算方法が流体と固体の相互作用が大きい問題に対して有効であるかを検証するために、剛体角柱に付属した弾性板の2次元渦励振問題を扱った。剛体角柱から渦が放出されると、弾性板はその側面に作用する流体力の差によって振動するようになった。本計算方法を用いるこ

とによって、弾性板の渦励振を捉えることができた。弾性板を Hooke 弾性体の場合には、2 次補間の変位解は低次の振動数の影響が Wall らの結果より小さくなるが、高次の振動数の影響が同程度となった。一方、自由度数が同じ 1 次補間の変位解は低次の振動数の影響が Wall らの結果と同じ程度であるが、固体要素の shear locking により高次の振動数の影響が小さくなった。このとき、軸方向に要素数を増やすと、高次の振動数の影響は大きくなる。弾性板が非圧縮超弾性体の場合では、shear locking への影響により自由度数が同じ 1 次補間の変位解の振幅が 2 次補間の変位解に比べて非常に小さくなった。このとき、1 次補間のメッシュにおいて軸方向に要素数を増やすと、振幅は大きくなり、2 次補間の変位解に近づく。弾性板が非圧縮超弾性体の場合では、振動する非圧縮超弾性体の面積は良好に保存された。よって、流体と固体が非圧縮拘束条件を持つ場合においても、十分に解析可能であると考えられる。ホース内部の非定常流のような実際問題を 3 次元解析することが今後の課題となる。

第4章の参考文献

- (4.1) Rugonyi, S. and Bathe, K.J., On finite analysis of fluid flows fully coupled with structural interactions, *CMES*, **2-2**, (2001), pp. 195–212.
- (4.2) 張群・久田俊明, 流体・構造連成有限要素法における連成手法に関する検討, 機論 A, **67-662**, (2001), pp. 1555–1562.
- (4.3) 石原大輔, 構造陽解法と流体準陽解法に基づく効率的流体構造強連成解法, 機論 B, **70-700**, (2004), pp. 3098–3105.
- (4.4) Ishihara, D. and Yoshimura, S., A monolithic approach for interaction of incompressible viscous fluid and an elastic body based on fluid pressure, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **64**, (2005), pp. 167–203.
- (4.5) 棚橋, 流れの有限要素法解析, **I**, (1997), 朝倉書店.
- (4.6) Wall, W.A. and Ramm, E., Fluid-structure interaction based upon a stabilized (ALE) finite element method, *Computational Mechanics (World Congress)*, New Trends and Applications, (1998), pp. 1–20.
- (4.7) Matthies, H.G. and Steindorf, J., Partitioned strong coupling algorithms for fluid-structure interaction, *Computers & Structures*, **81**, (2003), pp. 805–812.
- (4.8) Teixeira, P.R.F. and Awruch, A.M., Numerical simulation of fluid-structure interaction using the finite element method, *Computers & Fluids*, **34**, (2005), pp. 249–273.
- (4.9) Hübner, B., Walhorn, E., and Dinkler, D., A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**, (2004), pp. 2087–2104.
- (4.10) Ghattas, O. and Li, X., A variational finite element method for stationary non-linear fluid-solid interaction *Journal of Computational Physics*, **121**, (1995), pp. 347–356.
- (4.11) Blevins, R.D., Flow-induced vibration, Van Nostrand Reinhold Co., (1977).
- (4.12) 社団法人日本鋼構造協会編, 構造物の耐風工学, 東京電機大学出版, (1997).

第4章の表および図

表 4.1 計算データ

図 4.1 流体領域と固体領域

図 4.2 流体と固体の連成系を解析するための GSMAC-ALE 有限要素法アルゴリズムの流れ図

図 4.3 解析モデルと境界条件

図 4.4 流体と固体の連成系を解析するための4角形要素

図 4.5 解析メッシュ

図 4.6 弾性板先端における変位の時刻歴 (Hooke 弾性体)

図 4.7 速度ベクトルと圧力分布 ($t = 4.9$ s)

図 4.8 速度と渦放出周波数または速度と振幅の関係 (○: 本研究で扱われた条件)

図 4.9 圧力分布 (Mesh A, 流体: Q_2Q_1 要素, 固体: Q_2 要素)

図 4.10 圧力分布 (Mesh C, 流体: Q_1Q_0 要素, 固体: Q_0 要素)

図 4.11 弾性板先端における変位の時刻歴 (Hooke 弾性体)

図 4.12 弾性板の振動数 (Hooke 弾性体)

図 4.13 圧力分布 (Mesh A, 流体: Q_2Q_1 要素, 固体: Q_2Q_1 要素)

図 4.14 圧力分布 (Mesh C, 流体: Q_1Q_0 要素, 固体: Q_1Q_0 要素)

図 4.15 弾性板先端における変位の時刻歴 (非圧縮超弾性体)

図 4.16 弾性板の振動数 (非圧縮超弾性体)

図 4.17 固体領域の全面積の時刻歴

Table 4.1 Calculation data

(a) Incompressible Newtonian fluid (air)

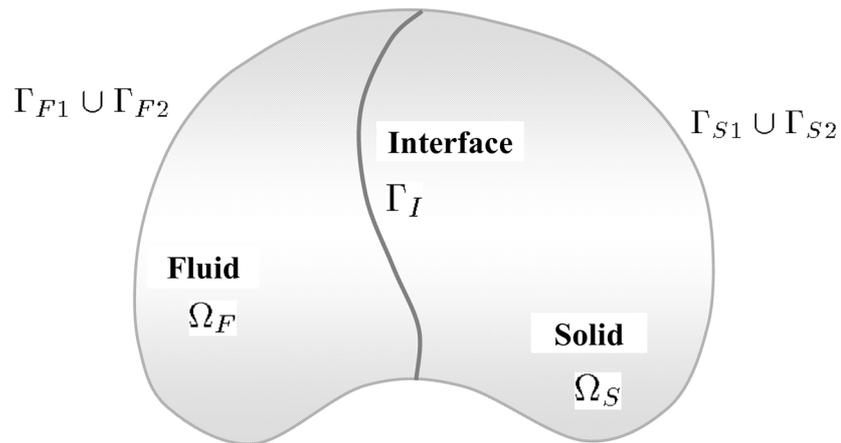
ρ	1.18 kg/m ³
μ	1.82×10^{-5} Pa

(b) Hookean elastic material

ρ^0	2.0×10^3 kg/m ³
E_S	2.0×10^5 Pa
ν_S	0.35

(c) Incompressible hyperelastic material

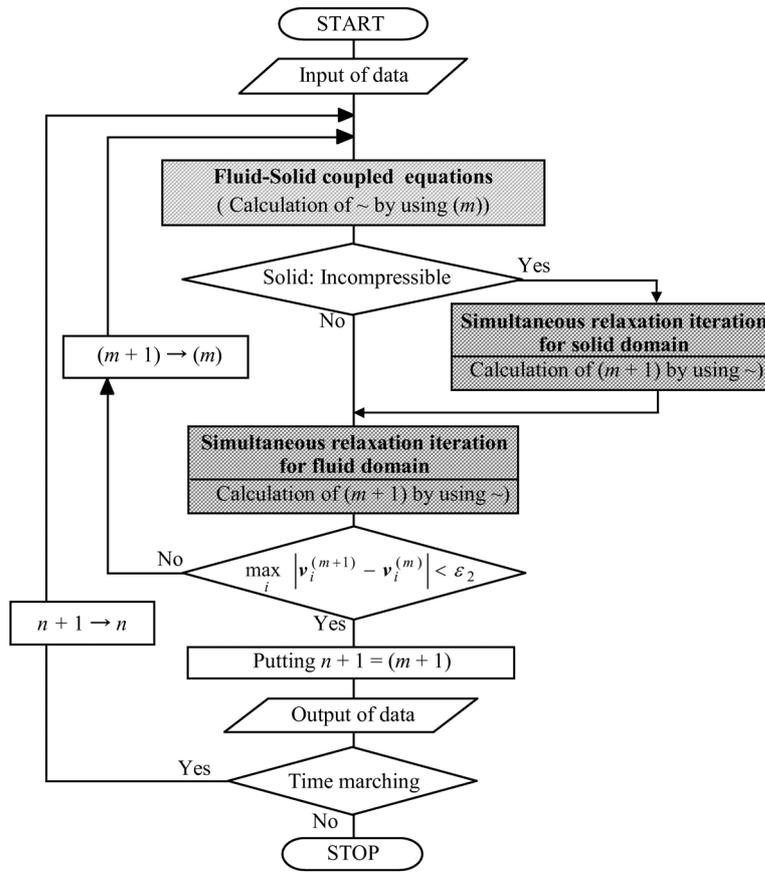
ρ	1.0×10^3 kg/m ³
c_{10}	1.81222092×10^5 Pa
c_{01}	9.95175450×10^3 Pa
c_{11}	-1.51094601×10^2 Pa
c_{20}	-2.11709610×10^3 Pa
c_{02}	0.0
c_{21}	0.0
c_{12}	0.0
c_{30}	5.00884866×10^1 Pa
c_{03}	0.0



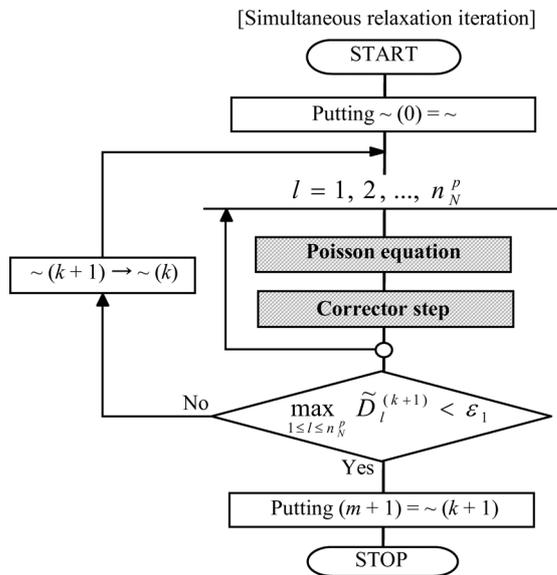
$$\partial\Omega_F = (\Gamma_{F1} \cup \Gamma_{F2}) \cup \Gamma_I \quad \text{and} \quad (\Gamma_{F1} \cup \Gamma_{F2}) \cap \Gamma_I = \phi$$

$$\partial\Omega_S = (\Gamma_{S1} \cup \Gamma_{S2}) \cup \Gamma_I \quad \text{and} \quad (\Gamma_{S1} \cup \Gamma_{S2}) \cap \Gamma_I = \phi$$

Fig.4.1 The definition of fluid domain and solid domain



(a) Main



(b) Simultaneous relaxation iteration

Fig.4.2 The flowchart of ALE GSMAC-FEM for analyzing fluid-solid coupled system

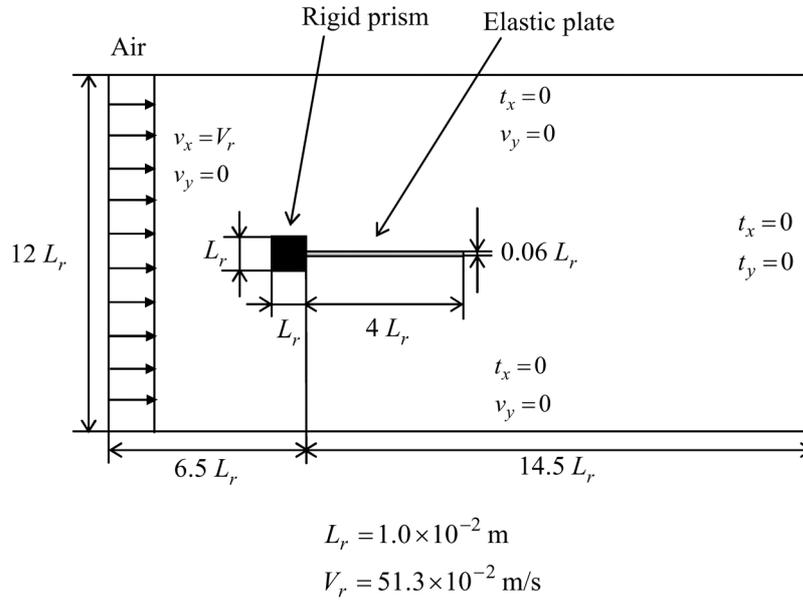


Fig.4.3 Analysis model and boundary conditions

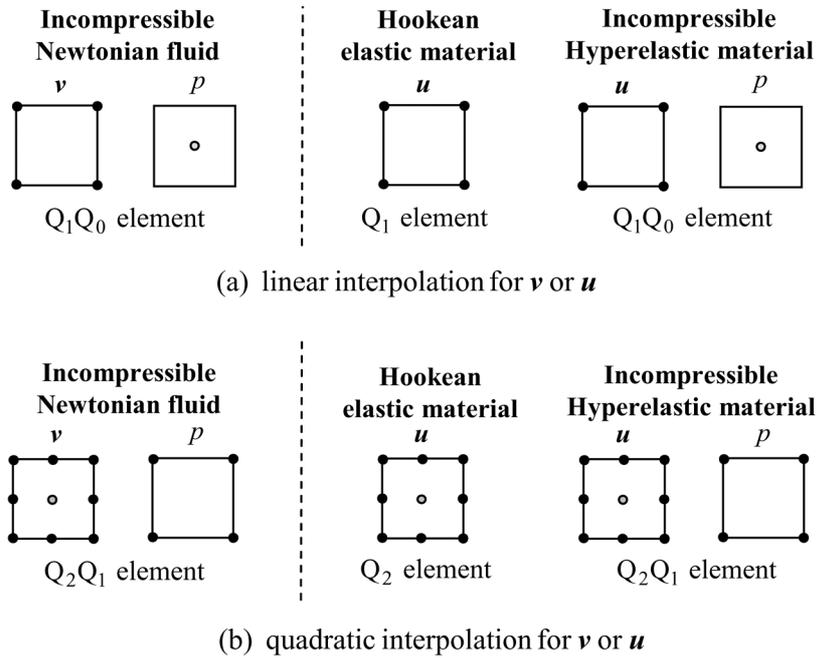
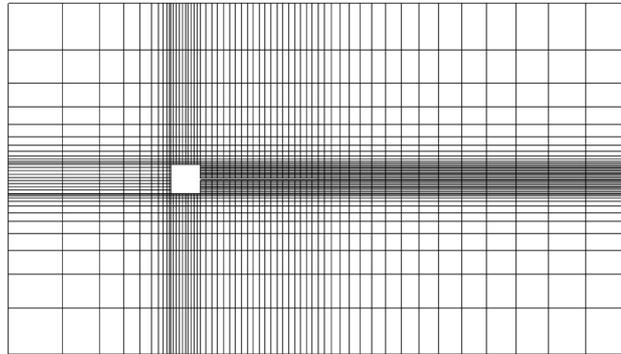
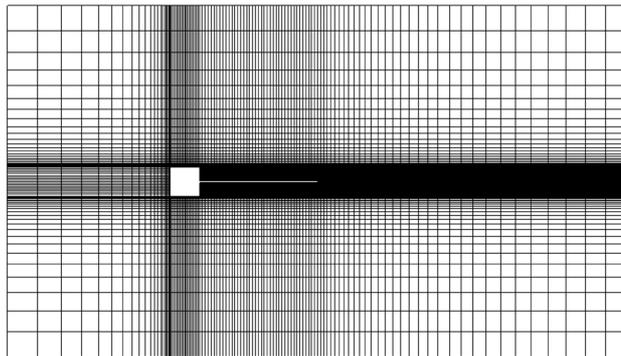


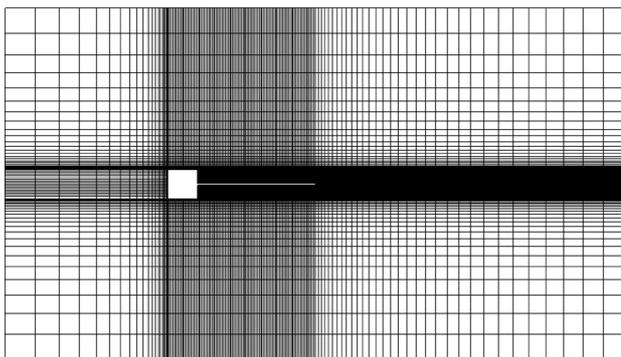
Fig.4.4 Quadrilateral elements for analyzing fluid-solid coupled analysis



(a) Mesh A (quadratic interpolation for \mathbf{v} or \mathbf{u} ;
fluid : 2170 elements, solid : 20 elements)



(b) Mesh B (linear interpolation for \mathbf{v} or \mathbf{u} ;
fluid : 8680 elements, solid : 40×2 elements)



(c) Mesh C (linear interpolation for \mathbf{v} or \mathbf{u} ;
fluid : 12200 elements, solid : 80×2 elements)

Fig.4.5 Analysis meshes

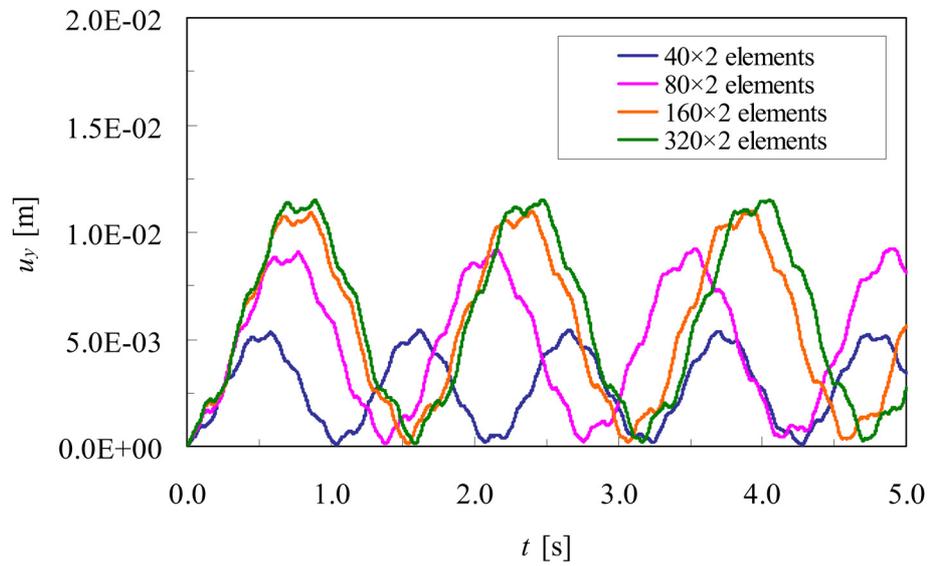
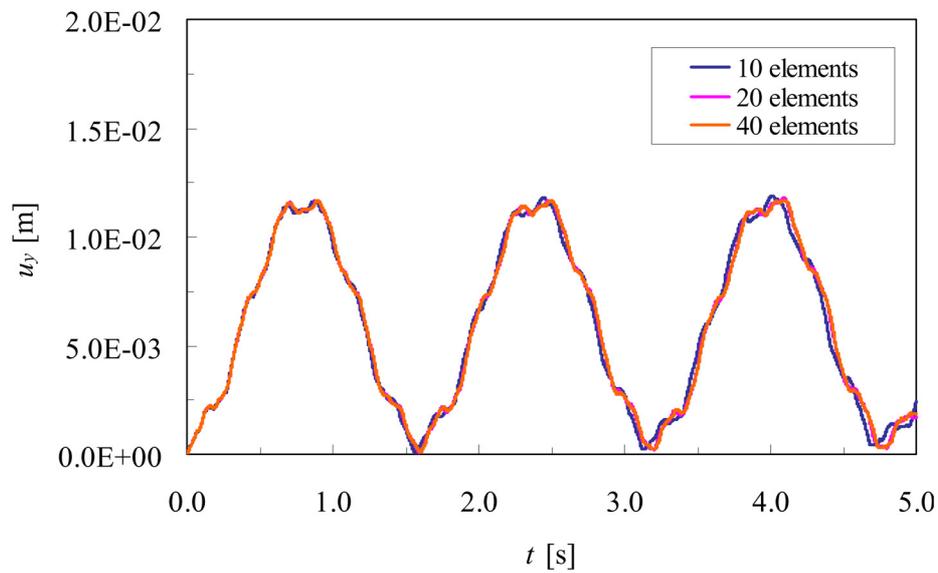
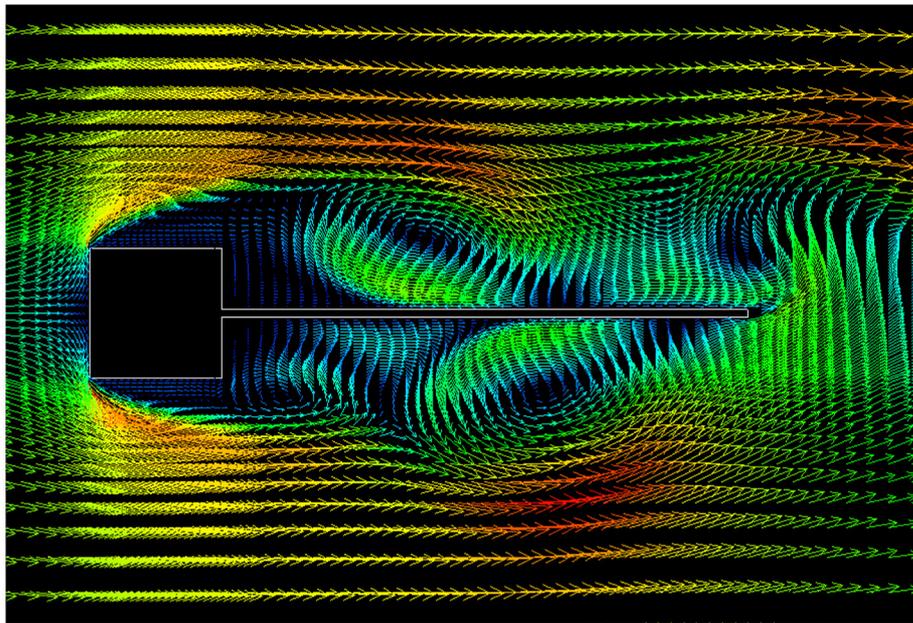
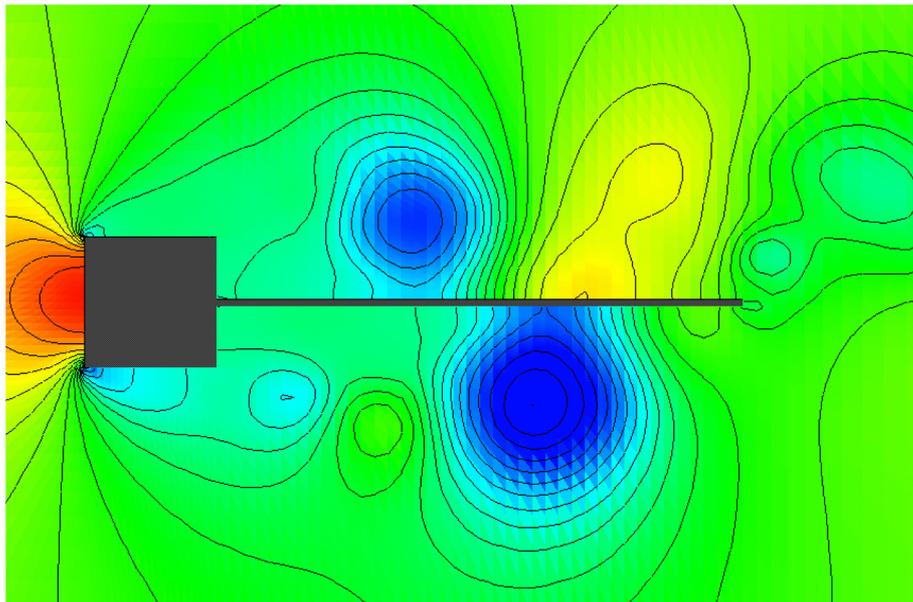
(a) Q_1 element(b) Q_2 element

Fig. 4.6 Time histories of displacement at the tip of elastic plate (Hookean elastic material)



(a) Velocity vectors



(b) Pressure contours

Fig.4.7 Velocity vectors and pressure contours ($t = 4.9$ s)

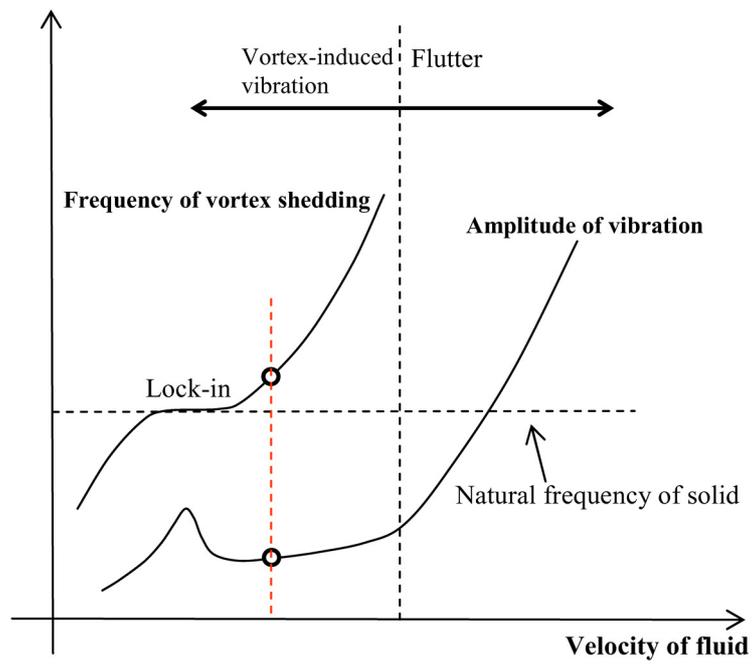


Fig.4.8 The relationship between velocity and frequency of vortex shedding, or velocity and amplitude of vibration (○: the condition treated in the present study)

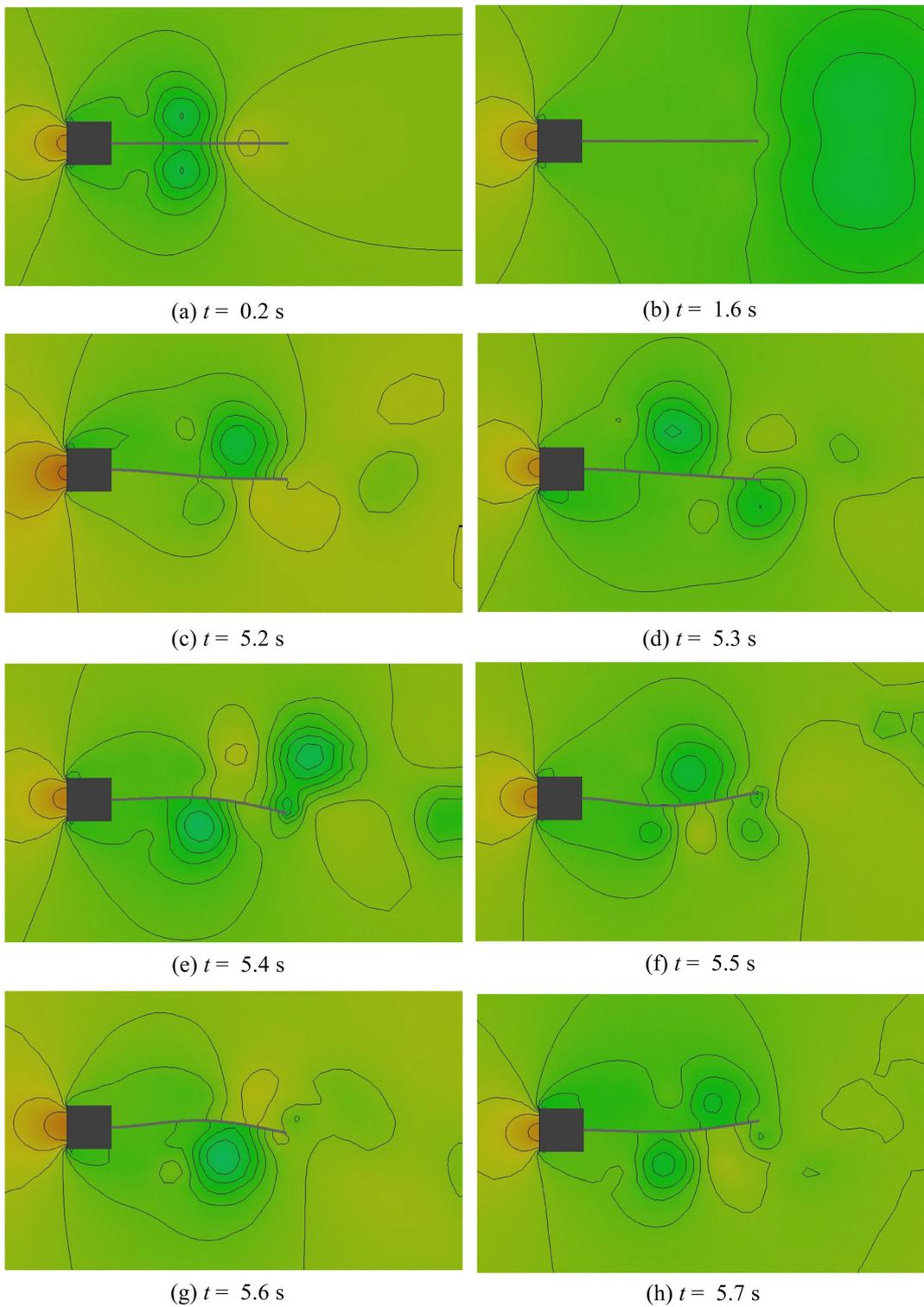


Fig.4.9 Pressure contours (Mesh A, fluid: Q_2Q_1 element, solid: Q_2 element)

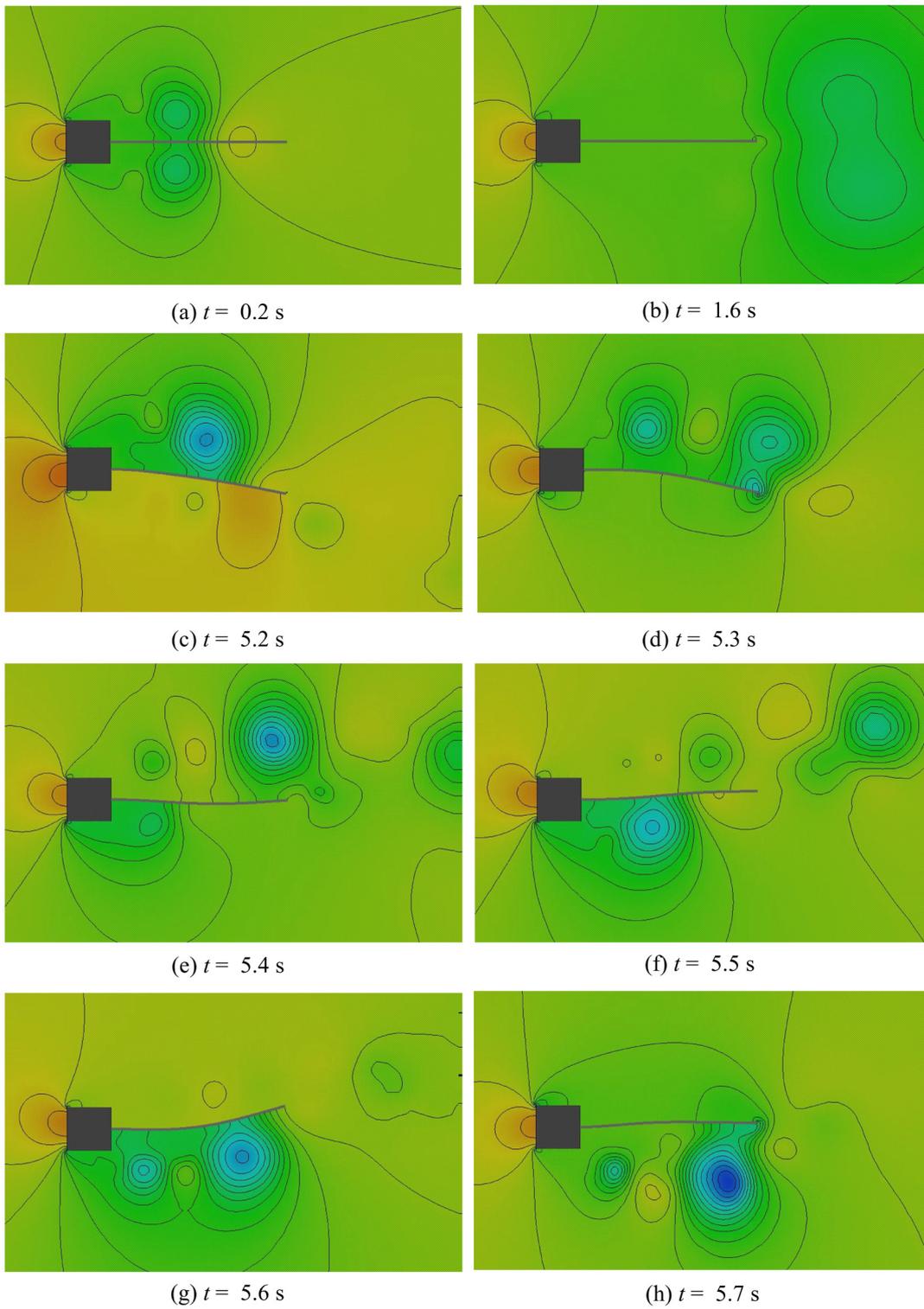


Fig.4.10 Pressure contours (Mesh C, fluid: Q_1Q_0 element, solid: Q_1 element)

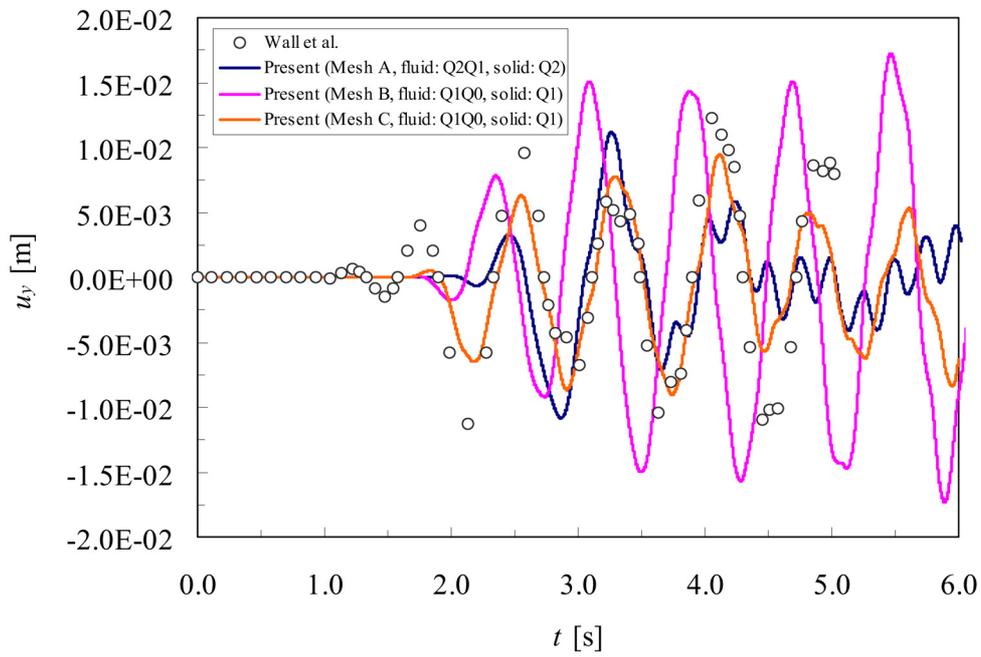


Fig.4.11 Time histories of displacement at the tip of elastic plate (Hookean elastic material)

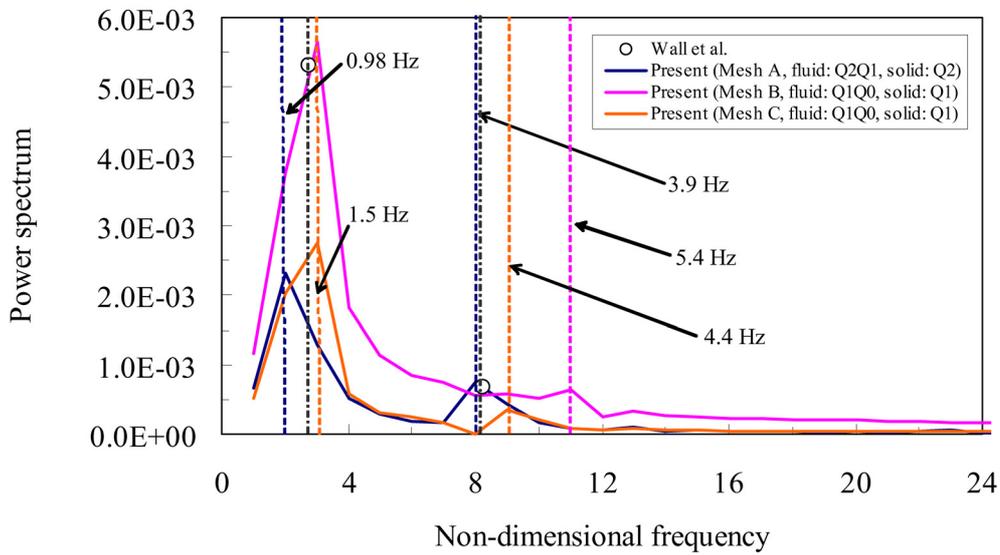


Fig.4.12 The frequencies of elastic plate (Hookean elastic material)

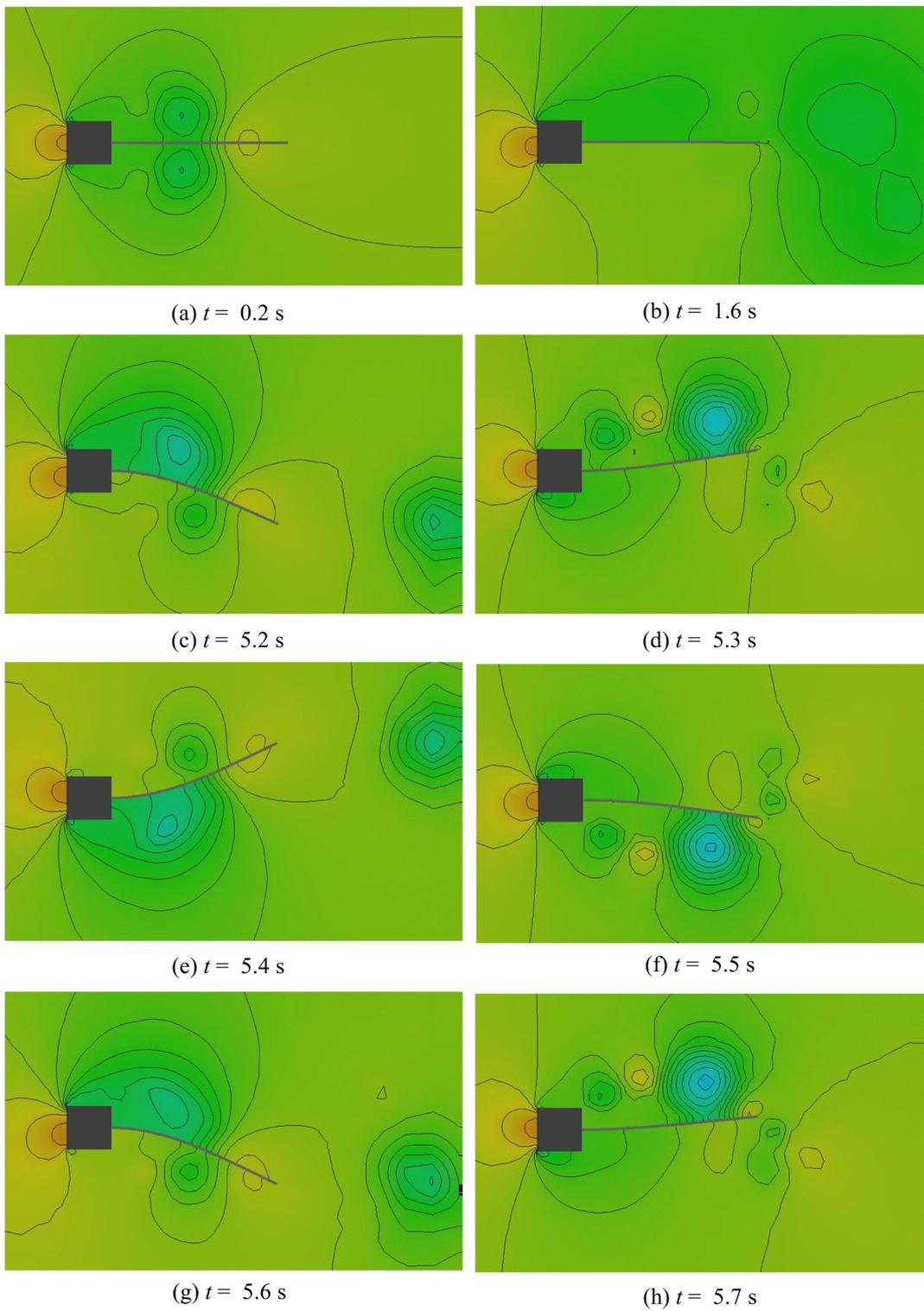


Fig.4.13 Pressure contours (Mesh A, fluid: Q_2Q_1 element, solid: Q_2Q_1 element)

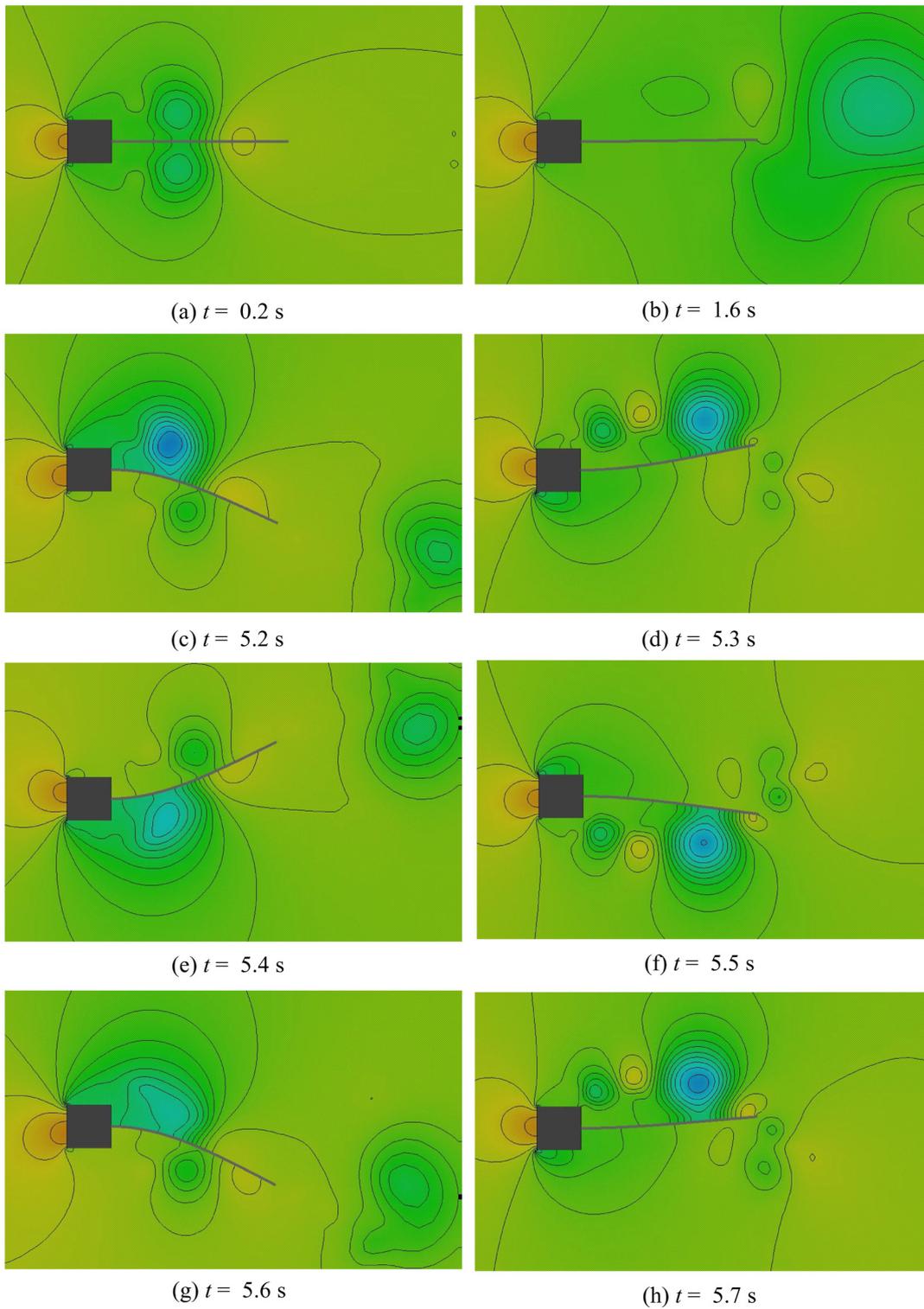


Fig.4.14 Pressure contours (Mesh C, fluid: Q_1Q_0 element, solid: Q_1Q_0 element)

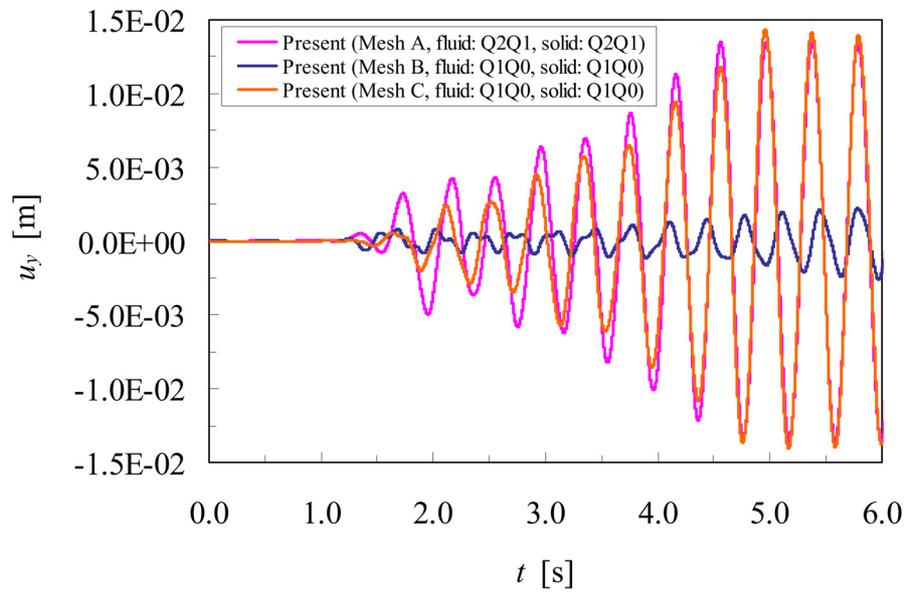


Fig. 4.15 Time histories of displacement at the tip of elastic plate (incompressible hyperelastic material)

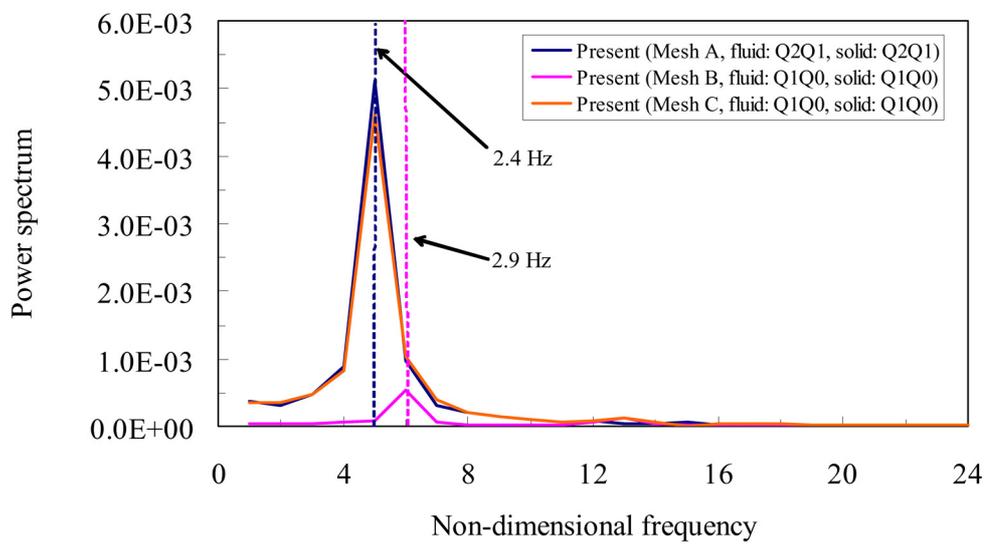


Fig. 4.16 The frequencies of displacement at the tip of elastic plate (incompressible hyperelastic material)

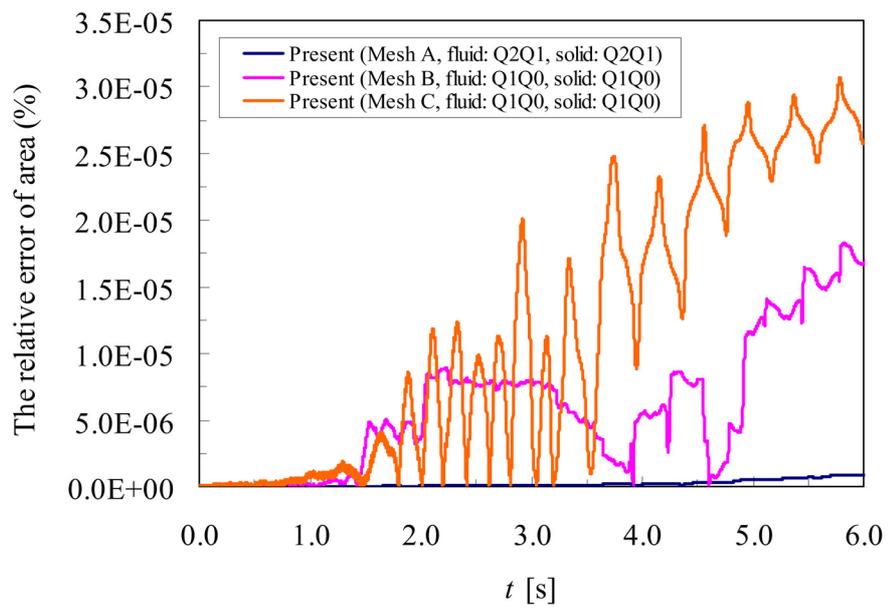


Fig.4.17 Time histories of the area of total solid domain

第5章 結言

工業製品で多く用いられるゴム製部品や軟らかい生体組織である血管壁，心臓弁，眼球網膜などは，流体力によって非常に変形しやすく，流体との相互作用は計算機負荷が大きい問題である．本研究では，軟らかい固体の固有振動数が小さいこと，強連成における流体と固体への高次要素の適用，低容量・高速計算に適した非圧縮超弾性体の動解析方法の必要性に着目した．そこで，速度と圧力の分離型の有限要素法の1つである GSMAC (Generalized-Simplified Marker And Cell) 有限要素法に基づいて，流体と軟らかい固体との連成解析が可能な計算機負荷の小さい陽的な計算方法を提案して，その有効性に対する検証を行った．以下に，本論文の構成および各章における知見を示す．

第1章では，本研究における背景，目的および論文の全体構成について述べた．

第2章では，要素形状と補間次数に制限されないように拡張された GSMAC 有限要素法の Poisson ソルバーによって cavity 内強制対流を十分解析でき，離散化 Poisson 方程式を優対角近似する方法および圧力の節点に対する速度と圧力の同時緩和法の妥当性が確認できた．2次元 cavity 内強制対流の解析において，4角形要素では Q_2Q_1 要素，3角形要素では $P_1^+P_1$ 要素と $P_2^+P_1$ 要素のように，同時緩和反復の収束性が良い補間関数の組み合わせを見つけることができた．4角形の Q_2Q_1 要素と3角形の $P_2^+P_1$ 要素による混合メッシュも用いることが可能であることも示したが，複雑形状を有する問題ではない2次元 cavity 内強制対流ではその利点を十分に示すことができなかった．それ故に，複雑形状を有する流れ場の解析に対する混合メッシュを用いた本手法の有効性を示すことが今後の課題である．2次元 cavity 内強制対流の解析の結果を考慮して，6面体要素では Q_2Q_1 要素，4面体要素では $P_1^+P_1$ 要素と $P_2^{++}P_1$ 要素を用いて，3次元 cavity 内強制対流の解析を行い，拡張した Poisson ソルバーが3次元解析へも十分に適用できることがわかった．

第3章では，「変形こう配の第3不変量が1であること」と「速度の発散が零であること」の等価性に着目して，従来用いられてきた Lagrange 未定乗数法やペナルティ法ではなく，速度と圧力の分離型の有限要素法によって非圧縮超弾性体の挙動を計算できる方法を提案し，その実用化に向けて検証を行った．まず， Q_1Q_0 要素， Q_2Q_1 要素， $P_1^+P_1$ 要素， $P_2^+P_1$ 要素 ($P_2^{++}P_1$ 要素) を用いて単純な変形問題を解析し，静的な状態の近似値は厳密値と良好に一致した．このとき，速度と圧力の分離型の有限要素法の特徴であるサイクル誤差自己調整の原理が働き，体積誤差が蓄積されるようなことはなく，体積保存が十分な

精度で成り立つことを確認できた。次に、大変形時の高分子材料が有する硬化特性を表すことができるように、要素平均値を用いた弾性定数の計算方法を導入した。作成したS字型応力ひずみ曲線は厳密値と良好に一致し、高次 Mooney-Rivlin 体の変形挙動を表すことが可能であることがわかった。最後に、特異性が存在する押し込み問題を解析し、1次要素の使用が特異点付近の圧力場の精度悪化に大きく影響を及ぼすことがわかった。今後、陽的な接触方法を導入することによって、非圧縮超弾性体の様々な動的な問題が解析できるようになると考えられる。例えば、ゴムの球を壁に当てて跳ね返すような問題などの非圧縮超弾性体の様々な動的な問題が解析も可能となる。

第4章では、流体とゴムのような軟らかい固体を解析するために、GSMAC-ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 有限要素法に基づいた陽的な流体固体連成計算方法を提案した。陽的な反復計算によって、次の時刻における流体と固体の連成系の離散化式を満足するようにして、時間進行の安定性を向上させた。流体と固体の相互作用が大きい問題に対する有効性を検証するために、剛体角柱に付属した弾性板の2次元渦励振問題を扱った。まず、弾性板が Hooke 弾性体の場合を扱った。計算を開始すると、剛体の角柱から板の側面で対称な渦が放出した。時間が経過すると、流れ場は非対称となり、非対称な渦が放出されるようになった。そして、弾性板はその側面に作用する流体力の差によって振動するようになった。このとき、本計算方法から得られた低次の振動数は Wall らの計算結果と近い値を示した。流速と固体変位に2次補間を用いた場合の変位解は、高次の振動数の影響が大きくなった。流速と固体変位に1次補間を用いた場合の変位解は、高次の振動数の影響が小さくなった。弾性板軸方向に1次要素の分割数を増やすと、2次補間の変位解のように高次の振動数の影響が大きくなった。本計算方法によって、放出渦と弾性板との相互作用を捉えることができた。次に、弾性板を非圧縮超弾性体として扱った。固体変位に1次補間を用いると、shear locking により解が固くなり、振幅が非常に小さくなった。固体変位に2次補間を用いると、shear locking を回避できることが確認できた。固体変位に1次補間を用いた場合に、弾性板の軸方向に分割数を増やすと、固体変位に2次補間を用いた解に近くなった。また、面積の時刻歴から固体領域の全体積は良好に保存されることも確認できた。提案した計算方法によって、流体と固体が非圧縮拘束条件を持つ場合においても、その連成現象を十分に解析できた。ホース内部の非定常流のような実際問題を3次元解析することが今後の課題となる。3次元解析では、計算の大規模化に伴う並列計算の導入も今後必要となると考えられる。

謝辞

本研究は、著者が慶應義塾大学工学部機械工学科および同大学院理工学研究科開放環境科学専攻に在学中に、本塾同専攻・棚橋隆彦教授の下でなされたものであります。同教授による熱心な御指導，ご鞭撻により本論文をまとめることができましたことを心より感謝し，ここに厚く御礼申し上げます。

また，本論文を作成するにあたり，数々の有益な御助言，御指導いただいた本塾大学院開放環境科学専攻・北川良和教授，野口裕久教授，同総合デザイン工学専攻・吉沢正紹教授に深く感謝し，御礼申し上げます。

著者が研究室に配属されてから今日に至るまで，数多くの先輩，同期，後輩に恵まれ，有益な御討論ならびに激励をいただきました。この場を借りて御礼申し上げます。

最後に，大学院博士課程への進学を快く認めてくれた両親に本論文をまとめられたことを報告するとともに心より感謝します。

2006年1月 橋本 学

公刊論文および口頭発表目録

公刊論文目録

1. 橋本学, 棚橋隆彦, 非圧縮超弾性体の分離型有限要素法に関する研究 (Mooney-Rivlin 体の GSMAC 有限要素法解析), 日本計算工学会論文集, **7**, 論文番号 20040016, (2005), pp.35-42.
2. 橋本学, 棚橋隆彦, GSMAC 有限要素法への高次要素の適用と評価, 日本計算工学会論文集, **7**, 論文番号 20040030, (2005), pp.149-157.
3. 橋本学, 棚橋隆彦, GSMAC 有限要素法による非圧縮超弾性体解析に関する実用化に向けた検討 (高次要素の適用と硬化特性の導入), 日本計算工学会論文集, 論文番号 20060001, (2006), pp.1-13.
4. 橋本学, 棚橋隆彦, GSMAC-ALE 有限要素法に基づいた流体固体連成解析, 日本計算工学会論文集, 論文番号 20060019, (2006), pp.1-12.

参考論文目録

1. 井門康司, 後藤喜明, 棚橋隆彦, 橋本学, GSMAC 有限要素法による磁性流体-弾性膜連成系の数値解析, 日本 AEM 学会誌, **13-4**, (2005), pp.288–293.

国際会議発表目録

1. Hashimoto, G. and Tanahashi, T., Evaluation and Application of High-order Elements to GSMAC-FEM, AFI/TFI-2004, Sendai, Japan, November 2004, pp.109–114.
2. Hashimoto, G. and Tanahashi, T., A Study of Decoupled FEM for Incompressible Hyperelastic Material (GSMAC-FEM Analysis of Mooney-Rivlin Material), ICCM 2004, Singapore, December 2004, p.65.
3. Hashimoto, G. and Tanahashi, T., GSMAC-FEM Analysis of Largely-Deformed Fluid-Structure Interface, Third M.I.T Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, Cambridge, U.S.A., June 2005, p.156.
4. Ido, Y., Goto, Y., Hashimoto, G., and Tanahashi, T., Numerical Analysis of Coupled Vibrations of Elastic Membrane and Magnetic Fluid using GSMAC Finite Element Method, ISEM 2005, Bad Gastein, Austria, September 2005, pp.40–41.

国内口頭発表目録

1. 橋本学, 棚橋隆彦, GSMAC 有限要素法による拍動流の数値解析 (知能流体システムの実現に向けて), 関東学生員第 40 回学生員卒業研究発表講演会, 東京, 2001 年 3 月, pp.239-240.
2. 橋本学, 棚橋隆彦, GSMAC 有限要素法における質量の集中化とデータの再構築, 第 15 回数値流体力学シンポジウム講演会, 東京, 2001 年 12 月, p.146.
3. 橋本学, 棚橋隆彦, 大変形する流体固体界面の GSMAC 有限要素法解析, 第 16 回数値流体力学シンポジウム講演会, 東京, 2002 年 12 月, p.161.
4. 橋本学, 棚橋隆彦, 非圧縮 Mooney-Rivlin 超弾性体の GSMAC 有限要素法に関する研究 (流体と固体の連成有限要素法解析に向けて), 第 8 回計算工学会講演会, 東京, 2003 年 5 月, pp.635-638.
5. 橋本学, 棚橋隆彦, 非圧縮超弾性体の GSMAC 有限要素法における高次要素の評価, 日本機械学会第 17 回計算力学部門講演会, 仙台, 2004 年 11 月, pp.481-482.
6. 後藤喜明, 井門康司, 棚橋隆彦, 橋本学, GSMAC 有限要素法による磁性流体-弾性膜連成系の応答解析, 平成 16 年度磁性流体連合講演会, 東京, 2004 年 12 月, pp.1-3.
7. 井門康司, 後藤喜明, 棚橋隆彦, 橋本学, GSMAC 有限要素法による磁性流体-弾性膜連成系の数値解析, 第 14 回 MAGDA コンファレンス, 東京, 2005 年 3 月, pp.136-141.
8. 橋本学, 棚橋隆彦, 非圧縮超弾性体の GSMAC 有限要素法における要素の比較と評価, 第 10 回計算工学会講演会, 東京, 2005 年 5 月, pp.35-36.
9. 橋本学, 山本秀知, 棚橋隆彦, GSMAC-ALE 有限要素法に基づいた流体構造連成解析, 日本機械学会第 18 回計算力学部門講演会, 筑波, 2005 年 11 月, pp.191-192.
10. 山本秀知, 橋本学, 棚橋隆彦, GSMAC-ALE 有限要素法に基づいた流体構造連成解析における時間進行法の比較, 第 19 回数値流体力学シンポジウム講演会, 東京, 2005 年 12 月, p.110.

その他

1. 棚橋隆彦, 橋本学, 分離型有限要素法による弾性体解析方法, 出願番号: 2004-154034 (2004年5月25日), 公開番号: 2005-338974 (2005年12月8日).
2. 棚橋隆彦, 橋本学, GSMAC 有限要素法による高次混合要素 Poisson ソルバーの数値計算手法, 出願番号: 2004 - 286430 (2004年9月30日), 公開番号: 2006-99549 (2006年4月13日).
3. Hashimoto, G. and Tanahashi, T., The Vibration of Flexible Plate Caused by Vortices using Fluid-Solid Coupled FEM, Journal of Visualization, Vol.9, No.2, (2006), pp.133 (frontispiece).