

ひずみ仮定を用いた非圧縮超弾性シェル要素の開発と  
薄肉円管の曲げ座屈解析への応用

2006 年度

田中 真人

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>緒言</b>	<b>1</b>
1.1	研究背景	1
1.2	本研究の適用範囲	3
1.3	過去の研究	5
1.3.1	非圧縮超弾性有限要素法	5
1.3.2	大ひずみシェル要素	6
1.3.3	超弾性体モデル	7
1.3.4	薄肉円管の曲げ解析	8
1.4	本論文の目的	9
1.5	本論文の構成	9
<b>第 2 章</b>	<b>非圧縮超弾性有限要素法の定式化</b>	<b>14</b>
2.1	緒言	14
2.2	超弾性体理論	15
2.2.1	変形の表現	15
2.2.2	超弾性体の定義	16
2.2.3	ひずみエネルギー関数	17
2.2.4	非圧縮超弾性体の構成式	18
2.3	非圧縮超弾性有限要素法の定式化	22
2.3.1	混合変分原理	22
2.3.2	非圧縮超弾性有限要素法の定式化	25
2.4	結言	30
<b>第 3 章</b>	<b>ひずみ仮定を用いた非圧縮超弾性シェル要素の開発</b>	<b>33</b>
3.1	緒言	33
3.2	非圧縮大ひずみシェル要素の定式化	35
3.2.1	混合変分原理	36
3.2.2	変位補間式	38
3.2.3	有限回転増分と板厚増分	38

3.2.4	超弾性構成則	41
3.2.5	有限要素離散化	43
3.3	数値解析例	45
3.3.1	単純引張り解析	45
3.3.2	Rolling-up 解析	46
3.3.3	薄肉円筒シェルの bending 解析	48
3.3.4	一様圧力を受ける円板の解析	51
3.3.5	ゴムバルーン解析	52
3.3.6	円孔付きゴム平板の引張解析	54
3.4	結言	57
<b>第 4 章</b>	<b>ひずみの主不変量を用いた Ogden 材料モデルの実装</b>	<b>60</b>
4.1	緒言	60
4.2	主不変量を用いた Ogden 材料モデルの定式化	61
4.2.1	主不変量を用いた Ogden 材料モデル [7]	61
4.2.2	未知係数 $a_K, b_K, c_{KL}$ の求め方 [9]	63
4.2.3	混合型ソリッド要素の定式化	66
4.2.4	非圧縮超弾性シェル要素の定式化	67
4.2.5	未知係数 $a_K, b_K, c_{KL}$ の取り扱い	69
4.3	数値解析例	70
4.3.1	等二軸引張り問題	70
4.3.2	Rolling-up 解析	72
4.3.3	ゴムバルーン解析	74
4.4	結言	76
<b>第 5 章</b>	<b>超弾性シェル要素による Brazier 不安定現象の解析</b>	<b>79</b>
5.1	緒言	79
5.2	Brazier 効果	80
5.3	解析手法	81
5.4	Hooke 弾性体の数値解析例	82
5.4.1	解析モデル	82
5.4.2	分岐解析と座屈後解析	82
5.5	非圧縮超弾性体の数値解析例	88
5.5.1	解析モデル	88
5.5.2	分岐解析と座屈後解析	88

5.6 結言 . . . . .	91
<b>第 6 章 結言</b>	<b>93</b>
<b>謝辞</b>	<b>95</b>
<b>付 録 A 離散法を用いた超弾性体の形状最適化解析</b>	<b>96</b>
A.1 緒言 . . . . .	96
A.2 離散法 . . . . .	97
A.3 数値解析例 . . . . .	101
A.3.1 孔の空いた超弾性平板 . . . . .	101
A.3.2 Flexible Micro Actuator(FMA) の形状最適化 . . . . .	103
A.4 結言 . . . . .	107
<b>本論文に関わる原著論文</b>	<b>110</b>

# 第1章 緒言

## 1.1 研究背景

ゴムの工業用途は広く、車両のタイヤ、船舶の防舷材、精密機器やエンジンマウントの防振、ビル・橋梁などの構造物の制振・免振部材に応用され、基礎学術面・実用面ともに活発に研究が行われている。一方で、近年の計算機の著しい進歩に伴い、有限要素法に代表される数値計算は、工業製品の設計・開発工程を支援する解析技術として実用段階にまで到達している。このことから、ゴムの工業応用分野においても CAE(Computer Aided Engineering) による工業製品の精緻な挙動予測が望まれている。工業的に使用されるゴム材料は、柔軟な弾性体で、多くの用途において大変形し、最大で数百%にも及ぶ大ひずみを生じる材料である。また、ひずみのレベルに依らず、非圧縮性に近い挙動を示し、体積剛性はせん断剛性の数千倍と言われている<sup>(1.1)</sup>。ゴムを用いた工業製品は、以上のゴム特有の力学的性質を積極的に利用したものが多く、今後ますますゴム材は産業界で利用されていくことが期待される。特に、近年、環境保護問題に伴う省資源、省エネルギー化を背景に、工業製品の軽量化が進展しており、そのため構造部材の薄肉化は多分野にわたり要求されている。このようなゴム材の薄肉構造部材の例として、タイヤ、エラストマーシール、医療チューブ等が挙げられる。

近年では、計算工学の応用分野として、医療工学やバイオメカニクスが注目を集めており、技術的・倫理的に臨床実験が不可能な生体現象を数値計算を用いて解明する方法が進展している<sup>(1.2)(1.3)</sup>。生体内の固体は軟組織を形成するものが多く、また血管壁、心臓壁、眼球網膜などは薄肉構造と見てよい。

以上のように、有限要素法に代表される計算工学では、ゴム材の工業分野や生体力学分野等において、柔軟薄肉構造物を扱える有限要素の需要が高まっている。

数値計算の中で、ゴムなどの複雑な鎖状分子構造を有する高分子材料や生体内の軟組織は、その大変形時の変形挙動をよく表す物質モデルとして、非圧縮超弾性体が用いられるのが一般的である。超弾性体は、変形やひずみの成分によって微分されることにより、共役な応力成分を生じるような弾性ポテンシャル関数が存在する物質と定義され<sup>(1.4)(1.5)</sup>、その構成方程式において高次ひずみの項が存在するため、応力 - ひずみ間の非線形性が表現できる。以上の非圧縮超弾性体を変位型有限要素法を用いて実装すると、変位解が異常に固くなる非圧縮ロッキングと呼ばれる現象が生じ、解の精度が著しく劣化することが知ら

れている<sup>(1.6)</sup>。この欠点を克服するため、超弾性構成則に対して、変位のほかに圧力を未知数とする混合型変分原理が提案されている<sup>(1.4)(1.5)(1.6)(1.7)</sup>。したがって、ゴム材や生体組織のモデル化には、混合型変分原理から導かれる混合型ソリッド要素を用いるのが望ましい。しかしながら、薄肉構造物を3次元混合型ソリッド要素を用いて解析する場合、その自由度数の多さから計算規模が大きくなり、計算効率の点からは望ましくない。また、薄肉構造物は、その構造から曲げ変形を受けることが多いが、ソリッド要素では曲げ変形モードを表すことができないために、不合理なせん断エネルギーを発生させてしまい、剛性を過大に評価するロッキング現象が現れる<sup>(1.5)</sup>。有限要素法では、このような薄肉構造物はシェル(殻)構造要素を用いてモデル化される。アイソパラメトリックシェル要素は、3次元ソリッド要素を板厚方向に縮退してつくられる構造要素であり、面外せん断変形を許し、曲げ自由度をもつ。ソリッド要素によるモデル化と比べると、総自由度数、モデル化の手間などが大幅に軽減され、解析精度も格段に向上する<sup>(1.5)</sup>。特に、Batheらによって開発されたMITC4シェル要素<sup>(1.8)(1.9)</sup>は、現在最も信頼性の高いシェル要素の一つである。以上のシェル要素は、板厚方向の自由度を消去して定式化されるため、板厚変形が無視できるぐらいの微小ひずみを前提とした構成則に、その適用範囲が限られる。非圧縮超弾性体のような大ひずみを前提とした構成則にシェル要素を適用する際には、板厚変化を考慮した大ひずみシェル要素の実装が必須となる。近年、このような大ひずみシェル要素の開発は盛んに行われている<sup>(1.10)</sup>が、いまだ共通の理論式がなく、様々な定式化が提案されている。

高精度な非圧縮超弾性シェル要素に求められる点として、以下の3点が挙げられる<sup>(1.11)</sup>。

- (1) 面外せん断変形を考慮した大ひずみシェル要素を表現するための幾何学的モデル
- (2) 非圧縮拘束条件の導入方法
- (3) 大ひずみ域まで精度良く表現できる超弾性材料モデル

上の(3)については、現在までに高精度な超弾性材料モデルとして、様々な弾性ポテンシャル関数が提案されているが<sup>(1.12)(1.13)(1.14)</sup>、その中でも、特にMooney-Rivlin体<sup>(1.12)(1.15)(1.16)</sup>とOgden体<sup>(1.12)(1.15)(1.16)</sup>が有名であり、広く使用されている。

以上の非圧縮超弾性体による薄肉構造物の解析手法は、その工業・医療用途への応用として、前述したようにゴム高分子材料や生体軟組織等の薄肉柔軟構造物の特性の評価や予測のための構造解析手法として重要である。特に、柔軟材でできた薄肉円管の曲げ解析は、曲げ管の成形限界やエラストマシール材、医療チューブの設計、また血管のモデル化などに関わる工学的に重要な課題である。ゴムチューブのような薄肉円管に純曲げを与えると、はじめ断面が楕円形に扁平化し、曲げ剛性が低下する現象がみられる。さらに曲げを与え続けると、ある曲率を超えたところから断面がつぶれるようなkink現象が観察できる。断

面の扁平化現象は Brazier<sup>(1.17)</sup> らによって理論的に解明されたが、あくまで微小ひずみの仮定に基づく予測であり、管が現実に不安定に至った前後の kink のメカニズムについては、その非線形性の強さから未だ系統的な結論を見出すに至っていない。このように薄肉柔軟構造物の挙動は、その変形のしやすさから、座屈等の強い非線形性をもった不安定現象を伴うことが多く、解析が困難である。種々の非線形解析手法と組み合わせることによって、このような解析上に現れる不安定性を除去しながら薄肉柔軟構造物の挙動を正確に解析を行うことは、工学的に重要な課題であると考えられる。

## 1.2 本研究の適用範囲

ここでは、本研究の適用範囲を明確にするため、本研究で想定するゴム高分子材料の構造と特性について概説する<sup>(1.18)(1.19)</sup>。

工業用途で使用されるゴムは、多くの場合常温下で大変形し、最大で数百%にも及ぶ大ひずみを生じる材料である。具体的な材料例として、常温下の天然ゴム NR、ジエン系合成ゴム(スチレン-ブタジエンゴム SBR、ポリブタジエンゴム BR、アクリロニトリル-ブタジエンゴム NBR、クロロプレンゴム CR など)、熱可塑性エラストマー TPE などが挙げられる。特に、ゴム手袋、コンドーム、ゴム風船など、薄膜で強度が必要なゴム製品は天然ゴムが多く使われている。天然ゴムは、引張り強さが大きく、大きな伸びを示す材料とされ、未加硫状態でも大きな引張り応力を示す。これは延伸によって容易に結晶化することと、分子量が非常に高く分布も広いことによる。天然ゴムはゴムノキの樹液に含まれる cis-ポリイソプレン  $[(C_5H_8)_n]$  を主成分とする物質であり、生体内での付加重合で生成したものである。天然ゴムの構造を Fig.1.1 に示す。天然ゴムは、樹液中では水溶液に

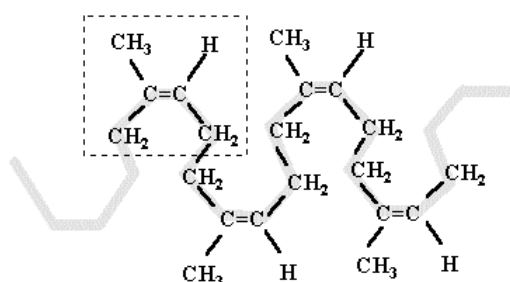


Fig.1.1 Chemical structure of Natural Rubber.<sup>(1.20)</sup>

有機成分が分散したラテックスとして存在し、これを集めて精製し凝固乾燥させたものを生ゴムという。生ゴムも弾性材料として消しゴムなどに使われるが、硫黄による加硫により架橋させると広い温度範囲で軟化しにくい弾性材料となる。硫黄の他に炭素粉末を加えて加硫すると特性が非常に改善され、その含有量によって硬さが変化する。また、天然ゴ

ムは、振動による発熱が少ないことが知られている。自動車のタイヤでは走行中の激しい振動によってゴムが発熱し、これが蓄積されて内部から高温となり、タイヤの性能を低下させることになる。大型トラック、バス、航空機のタイヤに発熱量の少ない天然ゴムが使われているのはこのためである。

適度に架橋した天然ゴムは、ひずみのレベルに依らず、以下の特異な力学特性をもつ。

- Young 率が 5 ~ 40MPa で、プラスチックや繊維の  $1/10^2 \sim 1/10^3$ ，金属の  $1/10^4 \sim 1/10^5$  と比較して非常に低い。
- 引張ると元の長さの 8 ~ 10 倍も伸びて、外力を除くと直ちに元の形状に戻る。すなわち非常に広い範囲で理想的弾性変形を示す。
- 体積変形をほとんど生じない、すなわち非圧縮性を示す。
- 応力 ひずみ関係が、過去に経験した変形量に依存する。Mullins 効果と呼ばれる。
- 応力 ひずみ関係が、速度・温度依存性を有する。
- Young 率は絶対温度に比例して増加する。
- 急激に (断熱的に) 伸張すると、ゴムの温度が上昇する。逆に急激に元の長さに戻すと、温度は下がる。
- 履歴によるエネルギー吸収性能を有する。
- 大ひずみ域において応力が硬化する現象 (ハードニング) が現れる。

このようなゴムの最も簡便な力学モデルが、上述した Mullins 効果，速度・温度依存性，エネルギー吸収性能をすべて無視し、非線形のゴム弾性体としてモデル化された超弾性体である。ゴムの弾性は、本来規則構造を持たない分子の配列が、外部からの力により規則性になり、これが元の不規則な配列に戻ろうとするときの力によるものである。熱力学的には以下のように説明される。ゴムに外力  $f$  が加わって  $\Delta x$  だけ変形したとき、ゴムは伸張によってほとんど体積変化がないことから、Helmholtz の自由エネルギーの変化  $\Delta F$  は内部エネルギーの変化  $\Delta U$ ，エントロピーの変化  $\Delta S$ ，絶対温度  $T$  と次の関係にある。

$$\Delta F = f dx = \Delta U - T \Delta S \quad (1.1)$$

上式より、応力によるエントロピーの低下が、元に戻ろうとする力による弾性となると解釈でき、したがってこのような性質をエントロピー弾性と呼ぶ。超弾性体で定義されるひずみエネルギー関数は、上述の Helmholtz の自由エネルギーである。



以上のような柔軟体の非線形挙動をよく表す物質モデルとして非圧縮性超弾性体を用いることが一般的となっているが、近年ではこのような物質モデルは生体組織のモデル化へまでその応用範囲を拡大している。生体組織では、特に、異方性が顕著にみられることから、横等方性・直交異方性超弾性モデルが用いられることが多い<sup>(1.21)</sup>。

本研究では、上述の高分子材料のうち、完全等方性非圧縮材料の薄肉構造物を対象とする。また、常温下で等温変形する静力学的な弾性変形を想定し、これを適用範囲とする。

## 1.3 過去の研究

### 1.3.1 非圧縮超弾性有限要素法

非圧縮超弾性体の有限要素法解析の初期研究として、1971年のOdenらの研究<sup>(1.22)</sup>が挙げられる。Odenらは円孔のあるエラストマー板を水平に引き伸ばし、得られた近似解がSegalらの実験結果と良好に一致することを示している。その後、DuffettらはLagrange未定乗数法を用いた研究を行っている<sup>(1.23)</sup>。Sussmanらは、線形弾性体、非圧縮超弾性体、弾塑性体の変形を統一的に扱うことができるペナルティ法である $u/p$  formulationを提案し、その有効性を示している<sup>(1.6)</sup>。山田らは、Lagrange未定乗数法の定式化と用いる要素の種類による変形能力の違いについて検証している<sup>(1.24)</sup>。Malkusらは、ペナルティ法が特殊な数値積分、すなわち次数低減選択積分を用いる場合ある種の混合要素と対応付けが可能であり、その意味で一種の混合法とみなすことができることを証明した<sup>(1.25)</sup>。渡辺らは、ゴムのねじりによって生じるkinking現象をLagrange未定乗数法とペナルティ法で解析し、前者の計算時間の効率性を示している<sup>(1.26)</sup>。さらに、渡辺らはLagrange未定乗数法とペナルティ法で数種類の要素を用いた非圧縮超弾性体の大変形問題を解析し、それらの要素の特徴を議論している<sup>(1.4)</sup>。松田らは、超弾性材料と粘塑性材料の連成解析の為に、従来用いられてきたtotal Lagrange法ではなく、updated Lagrange法により非圧縮超弾性体の変形を記述した<sup>(1.27)</sup>。孫らは、眼球網膜手術のシミュレーションとして、眼球網膜を非圧縮超弾性体、眼球内部の液体を静止流体と仮定した解析を行っている<sup>(1.28)</sup>。以上のように、非圧縮超弾性体は、ゴムなどの複雑な鎖状分子構造を有する高分子材料や生体軟組織の大変形時の変形挙動をよく表す物質モデルとして開発され、有限要素法を代表とする数値計算の中で利用されてきた。現在主流となっている非圧縮超弾性体の解析手法は、Floryによって提唱された補正変形勾配テンソル<sup>(1.29)</sup>を用いて、超弾性体構成式の偏差・体積成分の分離を行い、体積成分には圧力の未知数を用いた混合型有限要素法を用いる方法であり、大変形時に対しても良好な解析精度を示すことが知られている<sup>(1.1)(1.30)</sup>。

以上の解析モデルは、主としてソリッドのような連続体要素を想定した手法であり、柔軟薄肉構造物のモデル化には、シェル構造要素を用いるのが、総自由度数、モデル化の手

間，解析精度の観点から望ましい．

### 1.3.2 大ひずみシェル要素

古典的なシェル構造要素として有名な Reissner-Mindlin 型シェル要素は，一般に微小ひずみを前提として，次の仮定が設けられている<sup>(1.5)</sup>．

- (1) 時刻 0 において直線を仮定した各節点におけるディレクターは変形の間も直線を保つが，必ずしも中立面に垂直である必要はない．
- (2) シェルの肉厚は変形の間も変化しない．

上述の (1) の仮定により，このシェル要素に面外せん断変形を許すことになるが，低次要素の場合，従来の方に従って面外せん断ひずみを変位から内挿して求めると，曲げエネルギーに比べて面外せん断ひずみエネルギーが大きくなり，固い解が得られるいわゆる shear locking と呼ばれるロッキング現象が生じる<sup>(1.5)</sup>．shear locking の一因は面外せん断ひずみを定義する変位および回転の内挿関数の次元の問題であることは古くから知られており<sup>(1.8)</sup>，これを回避するため，Bathe らは ANS(Assumed Natural Strain) 法を用いて面外せん断ひずみ仮定場を独立に設け，これを回避した<sup>(1.8)(1.9)</sup>．ANS 法は，通常の変位内挿法とは独立に，仮定された自然ひずみ場を設ける手法であり，MITC4 シェル要素<sup>(1.8)(1.9)</sup> は，現在信頼性の高い ANS 法による 4 節点シェル要素の一つである．また，(2) の仮定は微小ひずみに基づくものであるが，超弾性解析に代表される大ひずみ解析では，板厚変化の影響を無視することはできない．そこで近年では，板厚変化を考慮した大ひずみシェル要素の開発が盛んに行われている<sup>(1.10)</sup>．そのような大ひずみシェル要素の一つとして，板厚を新たな未知数として加え，3次元型の構成則を使用したソリッドライクシェルの定式化がある<sup>(1.31)(1.32)(1.33)(1.34)</sup>．これらの要素は汎用性が高いが，板厚方向に十分な未知数を取らないと thickness locking<sup>(1.35)</sup> と呼ばれるロッキング現象（剛性を過大に評価する現象）が生じることが知られている．このような現象を回避するため，板厚方向の伸びの 2 次精度近似<sup>(1.32)(1.36)</sup> や，EAS(Enhanced Assumed Strain) 法<sup>(1.31)(1.33)</sup> などの特別な手法を用いなければならない．あわせて，ゴムや大ひずみ領域における弾塑性材料等にみられる非圧縮性を精度よく解析するためには，混合法・ペナルティ法などの手法が必要となる．

Hughes<sup>(1.37)</sup>，Parisch<sup>(1.38)</sup> らは，シェルの面内のみ平面応力条件の構成則を使用した非圧縮大ひずみシェルを定式化した．彼らが開発した非圧縮大ひずみシェル要素は，非圧縮性から生じる不定静水圧項を平面応力条件から消去し，板厚は面内ひずみの関数とみなして非圧縮条件から算出した．Sze ら<sup>(1.35)</sup> は，上記の平面応力条件は，前述の thickness locking と非圧縮性から生じる volumetric locking を回避する効果があることを示してい

る．このようにして，前述のソリッドライクシェルに比べ，要素当たりの自由度数ひいては計算コストを低く抑えることが可能となる．しかしながら，増分ステップ毎に板厚の更新は行うものの，接線剛性の構築に際して，収束計算の中で前ステップの板厚を用いているため，この方法では完全 (consistent) な接線剛性は得られない．完全な接線剛性は，Newton-Raphson 法の 2 次収束性のみならず，正確な感度や座屈固有値を得るためにも不可欠なものである．

このように，2 次元型の構成則を用いた場合，板厚の取り扱いが定式化を複雑化する．Basar ら<sup>(1.39)(1.40)</sup> は，薄肉の要素に対して Kirchhoff-Love の仮定 (面外垂直ひずみを考慮するが，面外せん断ひずみは無視する) を設けることで板厚を陰的に求めている．一方で，面外せん断ひずみを考慮したシェル要素に対して陰的に板厚を取り扱った例は筆者らの知る限りない．

### 1.3.3 超弾性体モデル

超弾性体は，高分子材料や生体軟組織の精微な挙動予測を実現するため，材料試験データを適切に表現する構成モデルとして，今日までに数多くのモデルが提案されている<sup>(1.12)(1.41)(1.42)</sup>．その中でも，特に Mooney-Rivlin 体と Ogden 体が有名であり，広く使用されている．Mooney-Rivlin 体は，ひずみの主不変量を用いてひずみエネルギー関数が構築され，その関数形が比較的単純な形で与えられることから，数値解析上実装しやすいという利点をもつ．一方，Ogden 材料モデルでは，ひずみエネルギー関数は伸張比 (ひずみの主値) を用いて構築されている．関数形が Mooney-Rivlin 体と比べ複雑になるものの，大ひずみ域に対しても，実験データと良好に一致した解を得ることから，最も精度の高いゴム材料モデルの一つとして認知されている．

しかしながら，Ogden 材料モデルを有限要素解析に用いる場合，ひずみの主値を求めるために固有値解析を全ての要素積分点において実施し，さらに構成則に適用する際に基底ベクトルを主軸方向へ変換させる必要があることから，数値解析的に高コストな手法である<sup>(1.12)(1.15)</sup>．Basar<sup>(1.11)</sup> を始めとしたいくつかの研究<sup>(1.43)(1.44)</sup> では，Ogden 材料モデルのひずみエネルギー関数を，あらかじめ，ひずみの主不変量を用いて解析的に書き直し，数値解析的に実装しやすい形に変換させた．このようにして，Basar らは，上記の固有値解析・座標変換等の数値的な操作を省き，Mooney-Rivlin 材料モデルの構成則を拡張する形で，効率的に Ogden 材料モデルを実装した．

一方，これら構成則モデルは，非圧縮性の拘束条件を導入する場合，構成則の表現形式は一意にはならない．その結果，ひずみエネルギー関数  $W$  の微分後の形が異なる場合がある．文献<sup>(1.4)</sup> においても，非圧縮超弾性体の構成則で用いる非圧縮の拘束関数の選択によって，応力テンソル・構成則テンソルの表現形式が変わり，また解の精度に差が現れ

ることが報告されている。Ogden 材料モデルにおいても、その構成則モデルの表現形式によっては、非線形方程式の解の収束が得られない不安定性がみられる。Basar らの研究では、これらの有限要素法の実装における数値解析上の安定性については詳細に議論されていない。

### 1.3.4 薄肉円管の曲げ解析

非圧縮超弾性体による薄肉構造物の非線形解析手法は、その工業・医療用途への応用として、ゴム高分子材料や生体軟組織等の薄肉柔軟構造物の特性の評価や予測のための構造解析手法として重要である。特に、柔軟材でできた薄肉円管を正確に解析することは、曲げ管の成形限界やエラストマシール材、医療チューブの設計、また血管のモデル化など、関わる工学的に重要な課題である。

ゴムチューブのような薄肉円管に純曲げを与えると、はじめ、断面が楕円化し、曲げ剛性が低下する現象がみられる。この現象は Brazier 効果と呼ばれているがさらに曲げを与え続けると、ある曲率を超えたところから断面がつぶれるような kink 現象が観察できる。この薄肉円管の曲げ問題は、1927 年になって、L.G.Brazier によって初めて研究された<sup>(1.17)</sup>。Brazier は薄肉円管を等方性弾性体と仮定し、断面の楕円化現象を解析的に研究した。Brazier によると、断面の楕円化は、変位の高次項を用いて表すことが可能で、曲げモーメントが曲率の 3 次の関数として与えられることを示した。すなわち、曲げ円管の荷重変位曲線は極大点を持ち、この点を超えると屈服座屈と呼ばれる不安定現象が発生することを示した。しかしながら、Brazier の理論は、曲率が小さいときにだけ実現象と合致し、より大きな曲率で起こる現象、すなわち kink 現象については考慮することができない。

S.A. Karamanos は、円管断面の楕円化現象を表現することのできる Tube 要素を開発し、非線形有限要素法を用いて上記の曲げ解析を行った<sup>(1.45)</sup>。彼は、円管の曲げには、2 つの不安定モードが存在することを数値解析によって明らかにした。すなわち、ovalization instability と呼ばれる断面の楕円化現象と、bifurcation instability と呼ばれる円管の kink 現象である。彼は、Brazier が示した極大点に至る前に分岐点が存在することを示し、分岐経路上の変形モードが kink 現象であることを明らかにした。また、円管の初期曲率によって、楕円化現象と kink 現象のどちらのモードが優位に現れるかを検証した。

このような円管の曲げ問題の応用的な例として、埋設管の座屈伝播の問題がある。これは kink がパイプラインに沿って伝播し、パイプ構造物の破壊を招く現象であり、杉本らによって詳細に研究された<sup>(1.46)(1.47)(1.48)</sup>。

しかしながら、上記で示した論文のいずれにおいても、座屈直後の buckling mode についての詳細な議論はしておらず、また最終的な円管の kink の発現パターンについても示

されていない。

## 1.4 本論文の目的

本研究では、薄肉円管の Brazier 不安定問題に代表される強い非線形性現象を解析するための、高精度かつ効率的な有限要素による薄肉構造の解析手法の確立を目的とする。最初に高精度な2次元超弾性構成則を導入した非圧縮超弾性シェル要素を開発する。次に開発した要素を薄肉円管の純曲げ解析を含む種々の問題に適用し、提案する解析手法の有用性を示す。最後に、Brazier 現象を非線形不安定問題としてとらえたときの kink のメカニズムについて明らかにする。

以上を通じて、柔軟薄肉構造物に対する新たな数値解析手法を提案し、その有効性に対する検証を行うことが本研究の目的である。

## 1.5 本論文の構成

第1章の序論に続き、第2章ではまず、本研究を通じて必要となる超弾性体理論と超弾性有限要素法の定式化について述べる。超弾性体の一般的な理論を示し、次いで混合法による非圧縮条件の導入法について述べる。さらに、Lagrange 未定乗数法による混合型ソリッド要素の定式化について詳述する。その際、非圧縮超弾性体構成則は偏差・体積成分に分離した形で与える。

第3章では、薄肉柔軟構造物の効率的で高精度な解析手法の確立を目的として、新たな非圧縮大ひずみシェル要素を提案する。まず混合変分原理によって板厚方向ひずみ仮定場を導入し、板厚の更新が容易に行えることを示す。これに有限回転増分も併せて考慮することによって、非圧縮超弾性解析のための大ひずみ・大回転非線形シェル要素の定式化を行う。本提案シェル要素を基本的な例題に適用した例を示し、本手法の妥当性・有用性を検証する。

第4章では、効率的な高精度超弾性モデルの構築を目的として、主不変量を用いた Ogden 材料モデルの混合型ソリッド要素および大ひずみシェル要素への実装方法を示す。また、各有限要素における構成則の新たな表現形式を示し、数値解析上の安定性について検討を行う。また、簡単な検証例題や数値解析例を示し、本手法の妥当性や有効性を検討する。

第5章では、前章までに提案した超弾性シェル要素を用いて、薄肉円管の曲げ解析を実施する。特に、分岐現象を詳細に検討し、各分岐経路における円管の変形モード、kink の発現パターンを調べる。

第6章では、各章で得られた成果を要約し、本論文の結論と今後の課題を述べる。

- (1.1) 渡部修, 超弾性体構成式と混合形変分原理における体積拘束, 日本機化学会論文集, A 編, **58**-545, pp.84-92, 1992.
- (1.2) 村上澄男, 山田宏, 田中英一, 平滑筋活性状態での血管壁の変形挙動に対する構成式, 日本機化学会論文集, A 編, **55**-513, pp.1022-1027, 1989.
- (1.3) Holzapfel, G.A., Eberlein, R., Wriggers, P., Weizsaecker, H.W., Large strain analysis of soft biological membranes: Formulation and finite element analysis, *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.*, **132**, pp.45-61, 1996.
- (1.4) 渡辺浩志, 久田俊明, 超弾性体の混合型有限要素法に関する基礎的検討, 日本機化学会論文集, A 編, **62**-595, pp.745-752, 1996.
- (1.5) 久田俊明, 野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1995.
- (1.6) Sussman, T., Bathe, K.J., A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis, *Computers & Structures*, **26**, pp. 357-409, 1987.
- (1.7) Simo, J.C., Taylor, R.L., Pister, K.S., Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **51**, pp. 177-208, 1985.
- (1.8) Bathe, K.J. and Dvorkin, E.N., A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **22**, pp.697-722, 1986.
- (1.9) Parisch, H., An investigation of a finite rotation four node assumed strain shell element, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **31**, pp.127-150, 1991.
- (1.10) Yang, H.T.Y., Saigal, S., Masud, A. and Kapania, R.K., A survey of recent shell finite elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **47**, pp.101-127, 2000.
- (1.11) Basar, Y., Itskov, M., Finite element formulation of the Ogden material model with application to rubber-like shells, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **42**, pp.1279-1305, 1998.
- (1.12) Holzapfel, G.A., *Nonlinear solid mechanics - A continuum approach for engineering*, Wiley, 2000.
- (1.13) Seki, W., Fukahori, Y., Iseda, Y., Matsunaga, T., A large deformation finite element analysis for multilayer elastomeric bearings, *Transaction of a meeting of the Rubber Division*, American Chemical Society, pp. 856-870, 1987.

- (1.14) 山下義裕, 川端李雄, 補強ゴムのひずみエネルギー密度関数の近似式, 日本ゴム協会誌, 第65巻, 第9号, pp.517–528, 1992.
- (1.15) Ogden, R.W., Non-linear elastic deformation, Ellis Horwood, Chichester, 1985.
- (1.16) Simo, J.C., Taylor, R.L., Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **85**, pp. 273–310, 1991.
- (1.17) Brazier, L.G., On Flexure of Thin Cylindrical Shells and Other Thin Sections, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **116**, pp.104–114, 1927.
- (1.18) 久保亮五, ゴム弾性, 裳華房, (1996).
- (1.19) 田中康之, 浅井治海, 新産業化学シリーズ, ゴム・エラストマー, 大日本図書, (1993).
- (1.20) ”<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/ja/6/6c/Gomust.png>”
- (1.21) Limbert, G., Middleton, J., A transversely isotropic viscohyperelastic material Application to the modeling of biological soft connective tissues, *Int. J. Solids Struct.*, **41**, pp. 4237–4260, 2004.
- (1.22) J.T. オーデン著, 山田嘉昭訳, 非線形連続体の有限要素法, **2**, 培風館, (1980).
- (1.23) Duffett, G. and Reddy, B. D., The analysis of incompressible hyperelastic bodies by the finite element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **41**, pp. 105–120, 1983.
- (1.24) Yamada, T., Kikuchi, H., A mixed finite element method for large deformation analysis of incompressible hyperelastic materials, *Theoretical and Applied Mechanics*, **39**, pp. 61–73, 1990.
- (1.25) Malkus, D.S., Hughes, T.J.R., Mixed finite element methods - reduced and selective integration techniques: a unification of concept, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **15**, pp. 63–81, 1978.
- (1.26) 渡辺浩志, 久田俊明, 超弾性有限要素法による kinking 解析, 日本機械学会論文集, A編, **59**-557, pp. 183–190, 1993.
- (1.27) 松田昭博, 渡部修, Updated Lagrange 法による超弾性体の応力速度と有限要素定式化, 機論 A, **68**-669, (2002), pp. 701–708.

- (1.28) 孫智剛, 牧野内昭武, 超弾性体と静止液体の連成解析 FEM プログラムの開発及び眼球網膜剥離手術のシミュレーションへの応用, *機論 A*, **68**-666, (2002), pp. 357–363.
- (1.29) Flory , P.J., Thermodynamic relations for high elastic materials, *Trans. Faraday Soc.*, **57**, pp. 829–838 , 1961.
- (1.30) Simo, J.C. , Hughes, T.J.R. , Computational inelasticity, Springer-Verlag, New York, 1998.
- (1.31) Brank, B., Korelc, J. and Ibrahimbegovic, A., Nonlinear shell problem formulation accounting for through-the-thickness stretching and its finite element implementation, *Computers and Structures*, **80**, pp.699–717, 2002.
- (1.32) Pimenta, P.M., Campello, E.M.B. and Wriggers, P., A fully nonlinear multi-parameter shell model with thickness variation and a triangular shell finite element, *Computational Mechanics*, **34**, pp.181–193, 2004.
- (1.33) Braun, M., Bischoff, M. and Ramm, E., Nonlinear shell formulations for complete three-dimensional constitutive laws including composites and laminates, *Computational Mechanics*, **15**, pp.1–18, 1994.
- (1.34) Betsch, P., Gruttmann, F., Stein, E., A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **130**, pp.57–79, 1996.
- (1.35) Sze, K. Y., Yaot, L. Q., A hybrid stress ANS solid-shell element and its generalization for smart structure modelling. Part I solid-shell element formulation, *Int. J. Numer. Meth. Engrng.*, **48**, pp.545–564, 2000.
- (1.36) El-Abbasi, N. and Meguid, S.A., A new shell element accounting for through-thickness deformation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **189**, pp.841–862, 2000.
- (1.37) Hughes, T.J.R. and Carnoy, E., Nonlinear finite element shell formulation accounting for large membrane strains, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, **39**, pp.69–82, 1983.
- (1.38) Parisch, H., Efficient non-linear finite element shell formulation involving large strains, *Eng. Comput.*, **3**, pp.121–128, 1986.
- (1.39) Basar, Y. and Ding, Y., Finite-element analysis of hyperelastic thin shells with large strains, *Computational Mechanics*, **18**, pp.200–214, 1996.



- (1.40) Schleck, B., Pietraszkiewicz, W. and Stumpf, H., Theory and numerical analysis of shells undergoing large elastic strains, *Int. J. Solids Structures*, **6**, pp.689–709, 1992.
- (1.41) Alexander, H., A constitutive relation for rubber-like materials, *Int. J. Engng. Sci.*, **6**, pp. 549–563, 1968.
- (1.42) Yeoh, O.H., Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates, *Rubber Chem. Technol.*, **63**, pp. 792–805, 1990.
- (1.43) Itskov, M., A generalized orthotropic hyperelastic material model with application to incompressible shells, *Ž*, **50**, pp. 1777–1799, 2001.
- (1.44) Feng, Z.-Q., Peyraut, F., He, Q.-C., Finite deformations of Ogden's materials under impact loading, *Int. J. Numer. Non-Linear Mechanics*, **41**, pp.575–585, 2006.
- (1.45) Karamanos, S.A., Bending instabilities of elastic tubes, *Int. J. Solids Struct.*, **39**, pp.2059–2085, 2002.
- (1.46) Sugimoto, N., Nonlinear Wave equations for Buckle propagation in an Elastic Pipeline, *JSME International Journal*, Ser.I, Vol.32, No.4, pp.498–507, 1989.
- (1.47) Sugimoto, N., Structure of Kink in Buckle Propagation on Elastic Pipelines, *Appl. Mech. Rev.*, No.137, pp.346–351, 1995.
- (1.48) Sugimoto, N., Steady propagation of buckle in elastic pipelines, *Elastic Wave Propagation*, (eds. MaCarthy, M. F. and Hayes, M. A.) ,pp.265–272, North-Holland, 1989.

## 第2章 非圧縮超弾性有限要素法の定式化

### 2.1 緒言

本章では，本研究を通じて必要となる超弾性体理論と超弾性有限要素法の定式化について述べる．

超弾性体は，変形やひずみの成分によって微分されることにより，共役な応力成分を生じるような弾性ポテンシャル関数が存在する物質と定義され，ゴムなどの複雑な鎖状分子構造を有する高分子材料の大変形時の変形挙動をよく表す物質モデルとして知られている<sup>(2.1)(2.2)</sup>．超弾性体は，構成方程式において高次ひずみの項が存在するために，応力とひずみの間に非線形な関係がある固体である．近年，免震建造物の積層ゴムやパソコンのキーボードなどの設計には，このような超弾性体モデルを用いた有限要素法が広く使用されている<sup>(2.3)(2.4)</sup>．また，近年，生体内の力学挙動の解析が盛んに行われており，生体内の固体は軟組織を形成するものが多く，血管壁，心臓壁，眼球網膜などは超弾性体とみなすことができる<sup>(2.5)(2.6)</sup>．

以上のように，工業的に使用される材料および生体組織のほとんどは非圧縮性に近い挙動を示し，体積剛性はせん断剛性の数千倍と言われている<sup>(2.7)</sup>．このため，変位型有限要素法では，材料を非圧縮性に近づけると，圧力などに対する解の精度が著しく劣化することが知られている<sup>(2.8)</sup>．この欠点を克服するため，超弾性構成則に対して，変位のほかに圧力を未知数とする混合型変分原理が提案されている<sup>(2.8)(2.9)</sup>．混合法の代表的なものにLagrange 未定乗数法がある<sup>(2.1)</sup>．このLagrange 未定乗数法を用いた混合要素は例えば山田らなどにより用いられている<sup>(2.11)</sup>．山田らは，Lagrange 未定乗数法の定式化と用いる要素の種類による変形能力の違いについて検証している．渡辺らはLagrange 未定乗数法による混合要素に加え，ペナルティ法による混合要素などの数種類の要素を用いた非圧縮超弾性体の大変形問題を解析しており，それらの要素の特徴を議論している<sup>(2.1)</sup>．ペナルティ法は変位のみを未知量とする変位型有限要素法ではあるが，Malkusらによって証明された<sup>(2.10)</sup>ように，特殊な数値積分，すなわち次数低減選択積分を用いる場合ある種の混合要素と対応付けが可能であり，その意味で一種の混合型有限要素法とみなすことができる．さらに渡辺らは，ゴムのねじりによって生じる kinking 現象をLagrange 未定乗数法とペナルティ法で解析し，前者の計算時間の効率性を示している<sup>(2.12)</sup>．

本研究では，非圧縮超弾性体のためのソリッド要素として，Lagrange 未定乗数法による

混合型要素を用いる．実装の際には以下の点に注意しなければならない．ひずみを偏差・体積成分に分離しないで弾性ポテンシャルを展開すると，Lagrange 未定乗数法により圧力と体積ひずみによる体積仕事をポテンシャルエネルギー停留原理に付加して得られる混合型変分原理に拡張する場合，弾性ポテンシャルの偏差・体積成分の明確な物理的区別がつかなくなる欠点がある．このため構成式自体の偏差・体積成分の分離が重要になり，1961年に Flory<sup>(2.13)</sup> の提案による体積変化の影響を補正した変形勾配テンソルに基づいた構成式の定式化と混合型変分原理への組み込みが検討されている<sup>(2.9)(2.11)</sup>．Flory の補正された変形勾配テンソルを用いると，超弾性体構成式の偏差・体積成分の分離が容易に行うことができ，また解析精度の点からも偏差・体積成分の分離を行った方が，大変形時に対しても良好な精度を示すことが知られている<sup>(2.7)(2.14)</sup>．

以上の背景をもとに，本章では，まず超弾性体の一般的な理論を示し，次いで混合法による非圧縮条件の導入法について述べる．さらに，Lagrange 未定乗数法による混合型ソリッド要素の定式化について詳述する．その際，非圧縮超弾性体構成則は偏差・体積成分に分離した形で与える．

なお， $\otimes$  はテンソル積を表し，また本節以降特に断りがない限り， $i, j$  はテンソル成分すなわち 1,2,3 の値をとるものとし，総和規約を適用する．

## 2.2 超弾性体理論

### 2.2.1 変形の表現

ゴムが示す弾性は，大ひずみ域まで及ぶことから，幾何学的非線形を考慮した変形の記述が必要となる．

有限変形でのひずみは，次式に示す変形勾配テンソル  $F$  を基にして定義される．

$$dx = F \cdot dX \quad (2.1)$$

ここで， $X$  および  $x$  はそれぞれ変形前，変形後の物質点の位置を表すベクトルであり，物質点  $X$  およびその近傍の点  $X + dX$  が現時刻  $t$  において  $x(X, t)$  および  $x + dx$  の位置へ移るとする．変形勾配テンソル  $F$  は，上式より  $dX$  から  $dx$  への線形変換 (写像) によって定義されるテンソルである． $F$  を成分表示すれば

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2.2)$$

となる．

超弾性体の定義で使われるひずみの量は，物質客観性の原理を満足させるため，次式の右 Cauchy-Green 変形テンソル  $C$  を用いる．

$$C \equiv F^T \cdot F \quad (2.3)$$

$C$  は正定値対称テンソルとなる．また， $C$  の第 1, 2, 3 不変量をそれぞれ  $I, II, III$  と表し， $C$  の主値を  $\lambda_i^2 (i = 1, 2, 3)$  と表す． $I, II, III$  はそれぞれ以下のように定義される．

$$I \equiv \text{tr}(C), \quad II \equiv \frac{1}{2}[\text{tr}(C)^2 - \text{tr}(C^2)], \quad III \equiv \det(C) = J^2 \quad (2.4)$$

ここで， $J$  は体積変化率を示し，変形勾配テンソル  $F$  を用いて次式のように表される．

$$J \equiv \det(F) \quad (2.5)$$

### 2.2.2 超弾性体の定義

ゴム材に代表される超弾性体では，負荷を受けて大きく変形した後も，内部のひずみと応力は 1 対 1 に対応し，完全に除荷すると元の状態に戻るといった性質をもつ．したがって，変形は完全に変形履歴に依存しない特徴を有する．通常，このような材料のモデリングに際して，構成式が全ひずみの解析関数となることを利用した解析法が広く用いられている．その際応力 - ひずみ関係はゴム材料実験で得られる値に適合するよう解析関数を構成する．Fig.2.1 にその実験値の概念図を示す．この図を見てもわかるように，実際の高分子材料の

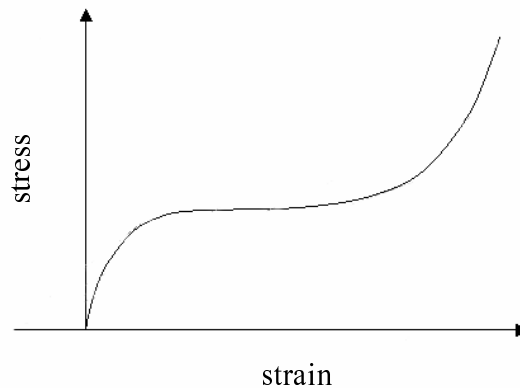


Fig.2.1 Stress-strain curve of rubber materials.

荷重変位曲線の形状は，ひずみが比較的小さい範囲では上に凸，中程では一旦平坦になり，大ひずみ領域になると下に凸になるという S 字形の特徴があり，明確な材料非線形性を示す<sup>(2.16)</sup>．このような超弾性体の性質は次のように定義される．物体が単位体積あたりのひずみエネルギー関数を持ち，それが均質な応力のない状態について，単位体積あたりのひずみエネルギーの変化割合が，応力により仕事をする割合に等しいように作られた，ひずみテンソルの解析関数であるとき，その物体を超弾性体という．ひずみエネルギー関数とは，無変形状態での単位体積に対し，弾性変形により蓄積されるひずみエネルギーとして定義される<sup>(2.1)(2.2)</sup>．以上の関係を式で表すと次式のようなになる．

$$S = \frac{\partial W}{\partial E} \quad (2.6)$$

ここで,  $W$  はひずみエネルギー関数,  $S$  は第2種 Piola-Kirchhoff 応力テンソル,  $E$  は Green-Lagrange ひずみをそれぞれ表す. Green-Lagrange ひずみと右 Cauchy-Green 変形テンソルには次式の関係がある.

$$E = \frac{1}{2}(C - I) \quad (2.7)$$

ここで,  $I$  は単位テンソルである. したがって, 式 (2.6) は,

$$S = 2 \frac{\partial W}{\partial C} \quad (2.8)$$

と書き表される.

### 2.2.3 ひずみエネルギー関数

等方性の超弾性体に対するひずみエネルギー関数  $W$  はこれまでに数多く提案されている. 代表的なものを以下に示す.

Neo-Hookean モデル (2.15)

$$W = c(I - 3) \quad (2.9)$$

ただし,  $c$  は非負の材料定数であり,  $2c$  が微小変形での横弾性係数に相当する.

Mooney-Rivlin モデル (2.15)(2.16)(2.17)

$$W = c_1(I - 3) + c_2(II - 3) \quad (2.10)$$

ただし,  $c_1, c_2$  は非負の材料定数であり,  $2(c_1 + c_2)$  が微小変形での横弾性係数に相当する.

Yeoh モデル (2.15)(2.18)

$$W = c_1(I - 3) + c_2(I - 3)^2 + c_3(I - 3)^3 \quad (2.11)$$

ただし,  $c_1, c_2, c_3$  は非負の材料定数である.

Arruda-Boyce モデル (2.15)(2.19)

$$W = \mu \left\{ \frac{1}{2}(I - 3) + \frac{1}{20\lambda_m^2}(I^2 - 9) + \frac{11}{1050\lambda_m^4}(I^3 - 27) + \frac{19}{7000\lambda_m^4}(I^4 - 81) + \frac{519}{673750\lambda_m^6}(I^5 - 243) \right\} \quad (2.12)$$

ただし,  $\mu, \lambda_m$  は材料定数である.

Alexander モデル (2.20)

$$W = c_1 \int \exp \kappa(I - 3)^2 dI + c_2 \ln \frac{(II - 3) + \gamma}{\gamma} + c_3(II - 3) \quad (2.13)$$

ただし,  $c_1, c_2, c_3, \kappa, \gamma$  は材料定数である.

Ogden モデル (2.15)(2.16)(2.17)

$$W = \sum_{r=1}^N \frac{\mu_r}{\alpha_r} (\lambda_1^{\alpha_r} + \lambda_2^{\alpha_r} + \lambda_3^{\alpha_r} - 3) \quad (2.14)$$

ただし,  $N$  は正の定数で,  $\mu_r$  および  $\alpha_r$  は,  $\mu_r \alpha_r > 0 (k = 1, 2, \dots, N)$  を満足する材料定数である.  $\sum_{r=1}^N \mu_r \alpha_r / 2$  が微小変形での横弾性係数に相当する.

式(2.9) - (2.14) 以外にも多数のひずみエネルギー関数が提案されているが<sup>(2.15)(2.21)(2.22)</sup>, 大別すると, Mooney-Rivlin 式のようにひずみの不変量で表わすか, Ogden 式のように伸張比で表わすかの2種類に分類される. これは,  $W$  が剛体回転によって影響を受けないように, 回転に依らない量, すなわち不変量が伸張比を独立変数として関数を定義する必要があるのである<sup>(2.2)</sup>.

#### 2.2.4 非圧縮超弾性体の構成式

超弾性体の定義式(2.8)には, 体積一定, すなわち非圧縮の条件は含まれていない. そこで, 超弾性体の構成モデルでは, 体積変形と等容変形を分離し, 体積変形の項に非圧縮拘束条件を課すことが一般的となっている<sup>(2.7)(2.14)</sup>. 本節では, Flory によって提唱された<sup>(2.13)</sup>, 変形勾配テンソルを体積変形/等容変形に乗算分解する手法を概説する.

いま, Flory によって提唱された, 次式の変形勾配テンソル  $\bar{F}$  を考える.

$$\bar{F} = J^{-\frac{1}{3}} F \quad (2.15)$$

Flory の変形勾配テンソル  $\bar{F}$  は, Fig.2.2 の概念図に示すように, 変形勾配テンソル  $F$  から体積変形を取り除いた変形勾配テンソルの等容変形部分であると解釈できる. したがって, 変形勾配テンソルの乗算分解は次式のようなになる.

$$F = J^{\frac{1}{3}} \bar{F} \quad (2.16)$$

ここで,

$$\det[\bar{F}] = 1 \quad (2.17)$$

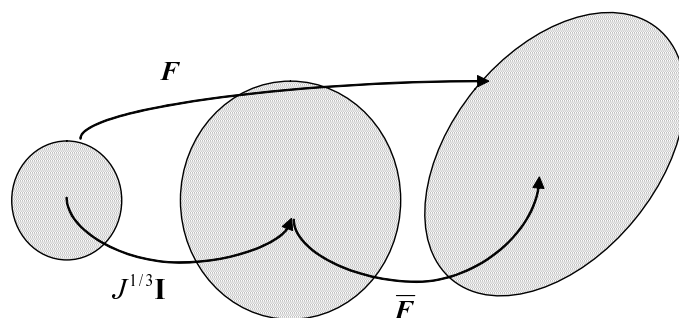


Fig.2.2 Flory's deformation gradient tensor.

である．超弾性体の構成モデルの等容変形部分は，上の Flory の変形勾配テンソル  $\bar{F}$  を用いて構築される．右 Cauchy-Green 変形テンソル，Green-Lagrange ひずみテンソルの等容変形部分は， $\bar{F}$  を用いて次式のようになる．

$$\bar{C} = \bar{F}^T \bar{F} \quad (2.18)$$

$$\bar{E} = \frac{1}{2} (\bar{C} - I) \quad (2.19)$$

また，以降の式展開のため，次の関係式を示す．

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial C} = J^{-\frac{2}{3}} \left[ I - \frac{1}{3} C \otimes C^{-1} \right] \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial J}{\partial C} = \frac{1}{2} J C^{-1} \quad (2.21)$$

ここで，式 (2.20) に関連して，次の演算子を定義する．

$$\text{DEV}[\cdot] = (\cdot) - \frac{1}{3} [C : (\cdot)] C^{-1} \quad (2.22)$$

演算子  $\text{DEV}[\cdot]$  は，大ひずみ域におけるテンソルの偏差成分をとる演算子であり，変形が微小な時，すなわち  $C$  が単位テンソル  $I$  に十分近い時には，次式がよく知られた偏差成分をとる演算子に一致する．

$$\text{dev}[\cdot] = (\cdot) - \frac{1}{3} [I : (\cdot)] I \quad (2.23)$$

演算子  $\text{DEV}[\cdot]$  は次の性質がある．

$$\text{DEV} [\text{DEV}[\cdot]] = \text{DEV}[\cdot] \quad (2.24)$$

$$\text{DEV}[\cdot + \cdot] = \text{DEV}[\cdot] + \text{DEV}[\cdot] \quad (2.25)$$

$$C : \text{DEV}[\cdot] = 0 \quad (2.26)$$

いま，ひずみエネルギー関数  $W$  が次式のように，体積変形部分  $U$  と等容変形部分  $\bar{W}$  に分解されるとする．

$$W(C) = U(J) + \bar{W}(\bar{C}) \quad (2.27)$$

このとき、超弾性体の定義式 (2.8) は、次式のように体積変形部分と等容変形部分に明確に分けて表すことができる。

$$\boldsymbol{S} = 2U' \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{C}} + 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\boldsymbol{C}}} : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{C}}}{\partial \boldsymbol{C}} \quad (2.28)$$

ここで、 $U'$  はスカラー関数  $U$  を  $J$  で 1 階微分した値である。式 (2.20), (2.21) と演算子 DEV を用いて式 (2.28) を書き直すと次式のようになる。

$$\boldsymbol{S} = JU' \boldsymbol{C}^{-1} + J^{-\frac{2}{3}} \text{DEV} \left[ 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\boldsymbol{C}}} \right] \quad (2.29)$$

構成則を非圧縮性としてモデル化する場合、式 (2.29) の体積変形部分に非圧縮条件を導入する。有限要素解析において、この非圧縮の拘束をどのように導入するかが、解析精度や解の収束性に大きく影響する。体積変形部分を変位型有限要素法で定式化した場合、非圧縮ロッキング現象と呼ばれる数値解析上の問題が発生することが知られている<sup>(2.8)</sup>。これは、非圧縮性という拘束条件が変形を厳しく制約するため、異常に固い変位解が得られる現象である。このような非圧縮ロッキング現象を回避する手法として、混合法に基づく定式化がある<sup>(2.1)(2.2)(2.8)(2.9)</sup>。混合法とは、変位場に加え、応力場、ひずみ場など複数の場を未知量として同時に解く方法を総称する。いま、非圧縮性超弾性体の構成モデルを混合法を用いて定式化することを考える。非圧縮性の物体に等方的な外力を加えると、体積が変化しないまま内部応力が生じる。例えば、非圧縮性の物体に静水圧のみが作用する場合、変形は全く生じないが内部応力は負荷した静水圧につり合うものになる。この内部応力は、物質点の運動の履歴からは定めることができないため、非決定応力と呼ばれる。このように非圧縮性の物質を超弾性体でモデル化して解析を行う場合は、変位とは別に非決定応力(不定静水圧)を独立な変数としてとる混合法が有効であることがわかる。このとき、不定静水圧を  $p$  で表すと、式 (2.29) の体積変形部分の  $U'$  は次式のように  $p$  に置き換えられる。

$$\boldsymbol{S} = Jp \boldsymbol{C}^{-1} + \bar{\boldsymbol{S}} \quad (2.30)$$

ここで、 $\bar{\boldsymbol{S}}$  は、次式のように、式 (2.29) の等容変形部分、すなわち偏差応力である。

$$\bar{\boldsymbol{S}} = J^{-\frac{2}{3}} \text{DEV} \left[ 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\boldsymbol{C}}} \right] \quad (2.31)$$

次に、構成則テンソル  $\boldsymbol{D}$  を求める。構成則テンソル  $\boldsymbol{D}$  は応力テンソル  $\boldsymbol{S}$  をさらに右 Cauchy-Green 変形テンソル  $\boldsymbol{C}$  で微分することで得られる。

$$\boldsymbol{D} = 2 \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{C}} \quad (2.32)$$

上式を成分で表すと

$$D_{ijkl} = 2 \frac{\partial S_{ij}}{\partial C_{kl}} \quad (2.33)$$



となる．さらに式 (2.8) から， $D$  は次式のようになる．

$$D = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial C \partial C} \quad (2.34)$$

$$D_{ijkl} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \quad (2.35)$$

同様に，構成則テンソルの等容変形部分  $\bar{D}$  は次式のようになる．

$$\bar{D} = 4 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{C} \partial \bar{C}} \quad (2.36)$$

$$\bar{D}_{ijkl} = 4 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{C}_{ij} \partial \bar{C}_{kl}} \quad (2.37)$$

式 (2.20) ， (2.21) と微分の連鎖則より，式 (2.36) は次式のようになる．

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \bar{D}_{DEV} - \frac{2}{3} \bar{S} \otimes C^{-1} - \frac{2}{3} C^{-1} \otimes \bar{S} \\ &\quad + \frac{2}{3} J^{-\frac{2}{3}} \left( 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{C}} : C \right) \left[ I_{C^{-1}} - \frac{1}{3} C^{-1} \otimes C^{-1} \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

ここで， $I_{C^{-1}}$  は4階のテンソルで，定義を次式のように成分で示す．

$$(I_{C^{-1}})_{ijkl} \equiv \frac{1}{2} \left[ C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} + C_{il}^{-1} C_{jk}^{-1} \right] \quad (2.39)$$

また，4階のテンソル  $\bar{D}_{DEV}$  は次式のように定義される．

$$\begin{aligned} \bar{D}_{DEV} &= 4J^{-\frac{4}{3}} \left[ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{C} \partial \bar{C}} + \frac{1}{9} (C : \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{C} \partial \bar{C}} : C) C^{-1} \otimes C^{-1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} C^{-1} \otimes \left( \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{C} \partial \bar{C}} : C \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{C} \partial \bar{C}} : C \right) \otimes C^{-1} \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

以上より，式 (2.27) ， (2.34) - (2.40) と微分の連鎖則より，構成則テンソル  $D$  は次式のように導かれる．

$$D = \bar{D} + 4p \frac{\partial^2 J}{\partial C \partial C} \quad (2.41)$$

上の構成則の導出で必要となる不変量の微分は，次式のように計算される．

$$\frac{\partial I}{\partial C} = I, \quad \frac{\partial II}{\partial C} = II - C, \quad \frac{\partial III}{\partial C} = III C^{-1} \quad (2.42)$$

なお，ひずみエネルギー関数の等容変形部分  $\bar{W}(\bar{C})$  は，2.2.3 節で示した種々のひずみエネルギー関数において，右 Cauchy-Green 変形テンソル  $C$  のかわりに  $\bar{C}$  を代入すればよい．

## 2.3 非圧縮超弾性有限要素法の定式化

### 2.3.1 混合変分原理

本節では前節で述べた非圧縮超弾性体についての混合型有限要素法の定式化を示す。まず、混合法の指導原理である混合変分原理を概説する。混合変分原理では、満たすべき付帯条件を Lagrange 未定乗数法により全ポテンシャルに付加してから変分を行う。ここでは、満たすべき付帯条件として非圧縮性を導入し、Lagrange 未定乗数が前節で示した不定静水圧  $p$  に等しいことを示す。

一般の仮想仕事式は、次式のように系の全ポテンシャルエネルギー関数  $\Phi$  を変分し、停留させることによって得られる。

$$\Phi = \int_V (W + Q)dV + \int_{S_t} R dS \quad (2.43)$$

$$\delta\Phi = 0 \quad (2.44)$$

ここで、 $V$  は解析対象が占める体積、 $S_t$  は表面力が作用する解析対象の境界、 $R$ 、 $Q$  はそれぞれ表面力、体積力のポテンシャルを表し、総じて外力のポテンシャルとする。ポテンシャル  $R$ 、 $Q$  は、変位ベクトル  $\mathbf{u}$ 、表面力ベクトル  $\tilde{\mathbf{t}}$ 、体積力ベクトル  $\mathbf{g}$ 、密度  $\rho_0$  を用いて次式のように与えられる。

$$R = -\tilde{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u}, \quad Q = -\rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \quad (2.45)$$

$W$  は前節で示した超弾性体のひずみエネルギー関数である。混合変分原理によれば、次式のように、非圧縮性  $J = 1$  という付帯条件を Lagrange 未定乗数法によって式 (2.43) の全ポテンシャルエネルギー式に加味して変分すれば、非圧縮超弾性体のための混合型仮想仕事式を得ることができる。

$$\hat{\Phi} = \Phi + \int_V \lambda(J - 1)dV \quad (2.46)$$

$$\delta\hat{\Phi} = 0 \quad (2.47)$$

式 (2.47) の計算を進めると、

$$\begin{aligned} & \int_V \left( \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \right) \delta C_{ij} dV - \int_{S_t} \tilde{t}_i \cdot \delta u_i dS - \int_V \rho_0 g_i \cdot \delta u_i dV \\ & + \int_V \delta \lambda (J - 1) dV = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

となる。ここで、式 (2.48) の第1項に式 (2.49) を代入し、ガウスの発散定理を用いて部分積分すると、式 (2.50) が得られる。

$$\delta C_{ij} = 2 \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned}
& \int_V \left( \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \right) \cdot 2 \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial X_j} \delta u_k dV \\
&= \int_S 2N_j \left( \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \right) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \cdot \delta u_k dS - \int_V \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ 2 \left( \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \right) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \right] \cdot \delta u_k dV
\end{aligned} \tag{2.50}$$

ここで、 $N_i$  は解析対象の境界  $S$  の外向単位法線ベクトルの成分である。式 (2.50) をもとの式 (2.48) に代入すると、次式のようになる。

$$\begin{aligned}
& \int_V \left[ 2 \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \right) + \rho_0 g_k \right] \cdot \delta u_k dV \\
& - \int_{S_t} \left[ 2N_j \left( \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \right) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial X_i} - \tilde{t}_k \right] \cdot \delta u_k dS + \int_V (J - 1) dV = 0
\end{aligned} \tag{2.51}$$

上式が任意の  $\delta u_k$ ,  $\delta \lambda$  に対して成立するためには

$$2 \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \right) + \rho_0 g_k = 0 \quad : V \text{ 内} \tag{2.52}$$

$$2N_j \left( \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \right) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial X_i} - \tilde{t}_k = 0 \quad : S_t \text{ 上} \tag{2.53}$$

$$J - 1 = 0 \quad : V \text{ 内} \tag{2.54}$$

でなければならない。ここで上式と次式で示される一般の弾性体の平衡方程式、力学的境界条件式を比較してみる。

$$\frac{\partial}{\partial X_j} S_{ji} \frac{\partial x_k}{\partial X_i} + \rho_0 g_k = 0 \quad : V \text{ 内} \tag{2.55}$$

$$N_j S_{ij} \frac{\partial x_k}{\partial X_i} - \tilde{t}_k = 0 \quad : S_t \text{ 上} \tag{2.56}$$

比較の結果、次式のような関係式が得られることがわかる。

$$S_{ij} = 2 \left( \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \right) \tag{2.57}$$

または

$$\mathbf{S} = 2 \left( \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} + J \lambda \mathbf{C}^{-1} \right) \tag{2.58}$$

すなわち、非圧縮超弾性体の第2種 Piola-Kirchhoff 応力は式 (2.58) のように定義されることがわかる。ここで、式 (2.58) と (2.30) を比較し、Lagrange 未定乗数の物理的な意味について考察を行う。前節で述べたように非圧縮の物体では物質点の運動履歴からは定めることができない非決定応力 (不定静水圧)  $p$  を導入した。式 (2.58), (2.30) より Lagrange 未定乗数  $\lambda$  と不定静水圧  $p$  の間には次式の関係が成立することがわかる。

$$\lambda = -\frac{p}{2} \tag{2.59}$$

すなわち，Lagrange 未定乗数は圧力の一種として考えることができる．また，式 (2.58)，(2.30) より式 (2.58) のひずみエネルギー関数  $W$  は等容変形部分  $\bar{W}$  に置き換えて考えると，前節の非圧縮超弾性体の構成モデルと一致する．近年では，このように，体積変形部分と等容変形部分を分離して定式化することが一般的になっている<sup>(2.7)(2.14)</sup>．これは，構成則の物理的な解釈が明瞭となるとともに，数値的安定性も高くなるためである．したがって，ここでも，これ以降式 (2.58) のひずみエネルギー関数  $W$  は  $\bar{W}$  に置き換えて，定式化をすすめていく．

いま，式 (2.48) に  $\Psi = J - 1$  という関数（これを非圧縮条件の関数という． $J - 1$  はその 1 例である．）を定義して代入させると，任意の  $\delta u_k$ ， $\delta \lambda$  に対して式 (2.48) が成り立つことから，次式のような仮想仕事式が得られる．

$$\int_V \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial C_{ij}} \right) \delta C_{ij} dV = \delta R \quad (2.60)$$

$$\int_V \delta \lambda \Psi dV = 0 \quad (2.61)$$

なお， $\delta R$  は外力の合計を表わすものとする．式 (2.60) が非圧縮超弾性体に対する仮想仕事式であり，混合型有限要素法はこの式から定式化される．ただし，式 (2.60)，(2.61) を見てもわかるように，この仮想仕事式は変位  $\delta u$  に関して非線形となる．よってこの問題は非線形問題となり，導かれる混合型の有限要素法も当然非線形有限要素法としての扱いを受けなければならない．非線形有限要素法は通常 Newton-Raphson 法を使って解析される．本研究でも Newton-Raphson 法を適用するために，式 (2.60)，(2.61) を時間微分して，接線剛性マトリクスの誘導を行う．そこで式 (2.60)，(2.61) を時間微分した式を示すと次式のようになる．

$$\int_V \left\{ \left( \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \lambda \frac{\partial^2 \Psi}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \right) \dot{C}_{kl} \delta C_{ij} + \dot{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial C_{ij}} \delta C_{ij} + \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial C_{ij}} \right) (\delta C_{ij})' \right\} dV = \delta \dot{R} \quad (2.62)$$

$$\int_V \delta \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial C_{kl}} \dot{C}_{kl} dV = 0 \quad (2.63)$$

ここで，式 (2.62)，(2.63) に式 (2.64) - (2.68) をそれぞれ代入させると，最終的に式 (2.62)，(2.63) が得られる。

$$(\delta C_{ij})' = 2\delta F_{ki} \dot{F}_{kj} \quad (2.64)$$

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{2} \dot{C}_{ij} \quad (2.65)$$

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2} \delta C_{ij} \quad (2.66)$$

$$S_{ij} = 2\left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial C_{ij}}\right) \quad (2.67)$$

$$D_{ijkl} = 4\left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \lambda \frac{\partial^2 \Psi}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}}\right) \quad (2.68)$$

$$\int_V (\delta E_{ij} D_{ijkl} \dot{E}_{kl} + \delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} + \delta E_{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial C_{ij}} \dot{\lambda}) dV = \delta \dot{R} \quad (2.69)$$

$$\int_V 2\delta \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial C_{kl}} \dot{E}_{kl} dV = 0 \quad (2.70)$$

式 (2.69) の左辺第 1 項は初期変位項，第 2 項は初期応力項と呼ばれる。

### 2.3.2 非圧縮超弾性有限要素法の定式化

ここでは，混合型の非圧縮超弾性有限要素法を定式化するため，式 (2.69)，(2.70) を離散化してマトリクス表示する。

まず式 (2.69) の初期変位項をマトリクス表示する。

いま

$$\{E\} = \left\{ E_{11} \quad E_{22} \quad E_{33} \quad 2E_{12} \quad 2E_{23} \quad 2E_{31} \right\} \quad (2.71)$$

$$[\bar{D}] = \begin{bmatrix} \bar{D}_{1111} & \bar{D}_{1122} & \bar{D}_{1133} & \bar{D}_{1112} & \bar{D}_{1123} & \bar{D}_{1131} \\ \bar{D}_{2211} & \bar{D}_{2222} & \bar{D}_{2233} & \bar{D}_{2212} & \bar{D}_{2223} & \bar{D}_{2231} \\ \bar{D}_{3311} & \bar{D}_{3322} & \bar{D}_{3333} & \bar{D}_{3312} & \bar{D}_{3323} & \bar{D}_{3331} \\ \bar{D}_{1211} & \bar{D}_{1222} & \bar{D}_{1233} & \bar{D}_{1212} & \bar{D}_{1223} & \bar{D}_{1231} \\ \bar{D}_{2311} & \bar{D}_{2322} & \bar{D}_{2333} & \bar{D}_{2312} & \bar{D}_{2323} & \bar{D}_{2331} \\ \bar{D}_{3111} & \bar{D}_{3122} & \bar{D}_{3133} & \bar{D}_{3112} & \bar{D}_{3123} & \bar{D}_{3131} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

ただし

$$\bar{D}_{ijkl} = \frac{1}{2}(D_{ijkl} + D_{ijlk}) \quad (2.73)$$

とマトリクスを定義する。このとき，式 (2.69) の初期変位項は次式のように表される。

$$\delta E_{ij} D_{ijkl} \dot{E}_{kl} = \{\delta E\}^T [\bar{D}] \{\dot{E}\} \quad (2.74)$$

ここで，Green-Lagrange ひずみ速度のマトリクス表示化を考える．

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial X_j} \right) \quad (2.75)$$

より，Green-Lagrange ひずみ速度マトリクスは次式のように与えられる．

$$\{\dot{E}\} = [Z_1] \left\{ \frac{\partial \dot{u}}{\partial X} \right\} \quad (2.76)$$

ただし

$$\left\{ \frac{\partial \dot{u}}{\partial X} \right\} = \left\{ \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial X_1} \quad \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial X_2} \quad \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial X_3} \quad \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial X_1} \quad \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial X_2} \quad \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial X_3} \quad \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial X_1} \quad \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial X_2} \quad \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial X_3} \right\}^T \quad (2.77)$$

および

$$[Z_1] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 0 & 0 & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} & 0 & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & 0 & 0 & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_3} & 0 & 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

とマトリクスを定義した．

ここで要素内の変位の離散化について考える．本研究では，混合型ソリッド要素として，変位場については8節点，Lagrange 未定乗数については要素内一定の混合要素を用いた．すなわち，以上のように離散化された変位のマトリクスを表示すると次式ようになる．

$$\{\dot{u}\} = \left\{ \dot{u}_1^{(1)} \quad \dot{u}_2^{(1)} \quad \dot{u}_3^{(1)} \quad \dot{u}_1^{(2)} \quad \dot{u}_2^{(2)} \quad \dot{u}_3^{(2)} \quad \dots \quad \dot{u}_1^{(8)} \quad \dot{u}_2^{(8)} \quad \dot{u}_3^{(8)} \right\}^T \quad (2.79)$$

そこで変位場の有限要素補間を

$$\dot{u}_i = N^{(k)} \dot{u}_i^{(k)} \quad (2.80)$$

で表せば

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j} = \frac{N^{(k)}}{\partial X_j} \dot{u}_i^{(k)} \quad (2.81)$$

であるから，この関係をマトリクスで表した次式を導くことができる．

$$\left\{ \frac{\partial \dot{u}}{\partial X} \right\} = [Z_2] \{\dot{u}\} \quad (2.82)$$

ただし,

$$[\bar{D}] = \begin{bmatrix} \frac{N^{(1)}}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{N^{(2)}}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{N^{(8)}}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ \frac{N^{(1)}}{\partial X_2} & 0 & 0 & \frac{N^{(2)}}{\partial X_2} & 0 & 0 & \frac{N^{(8)}}{\partial X_2} & 0 & 0 \\ \frac{N^{(1)}}{\partial X_3} & 0 & 0 & \frac{N^{(2)}}{\partial X_3} & 0 & 0 & \frac{N^{(8)}}{\partial X_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N^{(1)}}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{N^{(2)}}{\partial X_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{N^{(8)}}{\partial X_1} \\ 0 & \frac{N^{(1)}}{\partial X_2} & 0 & 0 & \frac{N^{(2)}}{\partial X_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{N^{(8)}}{\partial X_2} \\ 0 & \frac{N^{(1)}}{\partial X_3} & 0 & 0 & \frac{N^{(2)}}{\partial X_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{N^{(8)}}{\partial X_3} \\ 0 & 0 & \frac{N^{(1)}}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{N^{(2)}}{\partial X_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{N^{(8)}}{\partial X_1} \\ 0 & 0 & \frac{N^{(1)}}{\partial X_2} & 0 & 0 & \frac{N^{(2)}}{\partial X_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{N^{(8)}}{\partial X_2} \\ 0 & 0 & \frac{N^{(1)}}{\partial X_3} & 0 & 0 & \frac{N^{(2)}}{\partial X_3} & 0 & 0 & 0 & \frac{N^{(8)}}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

と置いた. 式 (2.76) と (2.82) より次式の関係が得られる.

$$\{\dot{E}\} = [B]\{\dot{u}\} \quad (2.84)$$

ただし

$$[B] = [Z_1][Z_2] \quad (2.85)$$

以上で Green-Lagrange ひずみ速度のマトリクス表示化は完了したが, 同じようにして Green-Lagrange ひずみの変分量をマトリクス表示すると次式のようなになる.

$$\{\delta E\} = [B]\{\delta u\} \quad (2.86)$$

以上より, 式 (2.84), (2.86) を用いて式 (2.74) を書き換えると結局次式のようなになる.

$$\delta E_{ij} D_{ijkl} \dot{E}_{kl} = \{\delta u\}^T [B]^T [\bar{D}] [B] \{\dot{u}\} \quad (2.87)$$

以上より, 初期変位項をマトリクス表示すると次式のようなになる.

$$\int_V \delta E_{ij} D_{ijkl} \dot{E}_{kl} dV = \sum_e \left[ \{\delta u\}^T \int_{V_e} [B]^T [\bar{D}] [B] dV \{\dot{u}\} \right] \quad (2.88)$$

次に, 式 (2.69) の第2項, すなわち初期応力項のマトリクス表示を行う.

いま

$$\{F\} = \left\{ F_{11} \quad F_{12} \quad F_{13} \quad F_{21} \quad F_{22} \quad F_{23} \quad F_{31} \quad F_{32} \quad F_{33} \right\}^T \quad (2.89)$$

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} [S] & [0] & [0] \\ [0] & [S] & [0] \\ [0] & [0] & [S] \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

ただし

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

と置くと

$$\delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} = \{\delta F\}^T [\Sigma] \{\dot{F}\} \quad (2.92)$$

とマトリクス表示できる．

また  $\{\dot{F}\}$  と  $\{\frac{\partial \dot{u}}{\partial X}\}$  は等価であるため次式が成り立つ．

$$\{\dot{F}\} = [Z_2] \{\dot{u}\}^T \quad (2.93)$$

同様に

$$\{\delta F\} = [Z_2] \{\delta u\}^T \quad (2.94)$$

以上から，初期応力項をマトリクス表示すると次式のようになる．

$$\int_V \delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} dV = \sum_e \left[ \{\delta u\}^T \int_{V_e} [Z_2]^T [\Sigma] [Z_2] dV \{\dot{u}\} \right] \quad (2.95)$$

次に，式 (2.69) の第3項をマトリクス表示する．先程述べたように Lagrange 未定乗数は要素内一定としたため，

$$\{\tilde{D}\} = 2 \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial C_{11}} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial C_{22}} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial C_{33}} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial C_{12}} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial C_{23}} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial C_{31}} \right\}^T \quad (2.96)$$

と置くことにより

$$2\delta E_{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial C_{ij}} \dot{\lambda} = \{\delta E\}^T \{\tilde{D}\} \dot{\lambda} \quad (2.97)$$

が得られる．よって式 (2.69) の第3項は次式のようにマトリクス表示される．

$$\int_V 2\delta E_{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial C_{ij}} \dot{\lambda} dV = \sum_e \left[ \{\delta u\}^T \int_{V_e} [B]^T \{\tilde{D}\} dV \dot{\lambda} \right] \quad (2.98)$$



次に付帯条件にあたる式 (2.70) のマトリクス表示を考える．まず式 (2.84) , (2.96) より次式が成り立つことがわかる．

$$2\frac{\partial\Psi}{\partial C_{kl}}\dot{E}_{kl} = \{\tilde{D}\}^T\{\dot{E}\} \quad (2.99)$$

$$\int_V 2\delta\lambda\frac{\partial\Psi}{\partial C_{kl}}\dot{E}_{kl}dV = \sum_e \left[ \delta\lambda \int_{V_e} \{\tilde{D}\}^T[B]dV\{\dot{u}\} \right] \quad (2.100)$$

以上のマトリクス式をまとめると

$$\begin{aligned} \sum_e \{\delta u\}^T \left[ \int_{V_e} [B]^T[\tilde{D}][B]dV + \int_{V_e} [Z_2]^T[\Sigma][Z_2]dV \right] \{\dot{u}\} \\ + \sum_e \left[ \{\delta u\}^T \int_{V_e} [B]^T\{\tilde{D}\}dV\lambda \right] = \{\delta u\}^T\{\dot{R}\} \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\sum_e \left[ \delta\lambda \int_{V_e} \{\tilde{D}\}^T[B]dV\{\dot{u}\} \right] = \lambda \cdot 0 \quad (2.102)$$

となる．ただし式 (2.101) 中の  $\{\dot{R}\}$  は外力を適当な節点に配布して離散化した外力ベクトルのことである．式 (2.101) , (2.102) をさらに1つのマトリクスに表示すると

$$\begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} = \left\{ u_1^{(1)} \quad u_2^{(1)} \quad u_3^{(1)} \quad u_1^{(2)} \quad u_2^{(2)} \quad u_3^{(2)} \quad \cdots \quad u_1^{(8)} \quad u_2^{(8)} \quad u_3^{(8)} \quad \lambda \right\}^T \quad (2.103)$$

と置けば

$$\sum_e \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta\lambda \end{Bmatrix}^T \int_{V_e} \begin{bmatrix} [K_1] & [H] \\ [H]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix} dV \quad (2.104)$$

ただし

$$[K_1] = [B]^T[\tilde{D}][B] + [Z_2]^T[\Sigma][Z_2] \quad (2.105)$$

$$[H] = [B]^T\{\tilde{D}\} \quad (2.106)$$

となることができる．よって最終的に，非圧縮超弾性体の接線剛性マトリクス  $\mathbf{K}$  は次式のようになる．

$$\mathbf{K} = \sum_e \int_{V_e} \begin{bmatrix} [K_1] & [H] \\ [H]^T & [0] \end{bmatrix} dV \quad (2.107)$$

最後に内力計算について考える．まず，速度をとる前の仮想仕事式 (2.60), (2.61) を離散化してマトリクス表示する．

$$\{S\} = \left\{ S_{11} \quad S_{22} \quad S_{33} \quad S_{12} \quad S_{23} \quad S_{31} \right\}^T \quad (2.108)$$

を使えば，式 (2.67), (2.71), (2.86) より次式のようになる．

$$\sum_e \left[ \{\delta u\}^T \int_{V_e} [B]^T \{S\} dV \right] = \{\delta u\}^T \{Q\} \quad (2.109)$$

$$\sum_e \left[ \delta \lambda \int_{V_e} \Psi dV \right] = 0 \quad (2.110)$$

なお， $\{Q\}$  は節点ごとに離散化された内力ベクトルである．上式をさらに1つのマトリクスに表示すると，式 (2.103) を用いて

$$\sum_e \left[ \begin{array}{c} \left\{ \delta u \right\}^T \\ \delta \lambda \end{array} \int_{V_e} \left\{ \begin{array}{c} [B]^T \{S\} \\ \Psi \end{array} \right\} dV \right] = \begin{array}{c} \left\{ \delta u \right\}^T \\ \delta \lambda \end{array} \left\{ \begin{array}{c} Q \\ 0 \end{array} \right\} \quad (2.111)$$

となる．よって内力ベクトルは次式のように表される．

$$\left\{ \begin{array}{c} Q \\ 0 \end{array} \right\} = \sum_e \left[ \int_{V_e} \left\{ \begin{array}{c} [B]^T \{S\} \\ \Psi \end{array} \right\} dV \right] \quad (2.112)$$

以上のようにして求められた接線剛性マトリクス  $K$  と内力ベクトル  $\{Q\}$  を用いて，Newton-Raphson 法により混合型の仮想仕事式 (2.60), (2.61) を解くことができる．

## 2.4 結言

本章では，本研究を通じて必要となる超弾性体理論と超弾性有限要素法の定式化について詳細に述べた．本章で得られた結論を以下に示す．

1. 本研究において必要となる超弾性体の定義について概説し，従来までに提案されているひずみエネルギー関数の例を示した．
2. 非圧縮超弾性体の構成則モデルを，不定静水圧の項を導入することによって，体積変形と等容変形に分離した形で示した．
3. 混合型有限要素法の基礎方程式である混合型仮想仕事の原理を混合変分原理から導出し，これを基にした定式化を詳細に示した．特に，変位8節点，圧力要素内一定の混合型ソリッド要素の定式化について示した．また，混合変分原理から導かれる構成則の形から，Lagrange 未定乗数が不定静水圧と等価であることを示した．

- (2.1) 渡辺浩志, 久田俊明, 超弾性体の混合型有限要素法に関する基礎的検討, 日本機会学会論文集, A 編, **62**-595, pp.745–752, 1996.
- (2.2) 久田俊明, 野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1995.
- (2.3) 吉田純司, 安部雅人, 藤野陽三, 高減衰積層ゴム支承の3次元有限要素解析法, 土木学会論文集, No.717/I-61, pp.37–52, 2002.
- (2.4) Lau, J.H., Jeans A.H., Nonlinear analysis of elastomeric keyboard domes, *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **56**-4, pp.751–755, 1989.
- (2.5) 村上澄男, 山田宏, 田中英一, 平滑筋活性状態での血管壁の変形挙動に対する構成式, 日本機会学会論文集, A 編, **55**-513, pp.1022–1027, 1989.
- (2.6) Holzapfel, G.A., Eberlein, R., Wriggers, P., Weizsaecker, H.W., Large strain analysis of soft biological membranes: Formulation and finite element analysis, *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.*, **132**, pp.45–61, 1996.
- (2.7) 渡部修, 超弾性体構成式と混合形変分原理における体積拘束, 日本機会学会論文集, A 編, **58**-545, pp.84–92, 1992.
- (2.8) Sussman, T., Bathe, K.J., A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis, *Computers & Structures*, **26**, pp. 357–409, 1987.
- (2.9) Simo, J.C., Taylor, R.L., Pister, K.S., Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **51**, pp. 177–208, 1985.
- (2.10) Malkus, D.S., Hughes, T.J.R., Mixed finite element methods - reduced and selective integration techniques: a unification of concept, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **15**, pp. 63–81, 1978.
- (2.11) Yamada, T., Kikuchi, H., A mixed finite element method for large deformation analysis of incompressible hyperelastic materials, *Theoretical and Applied Mechanics*, **39**, pp. 61–73, 1990.
- (2.12) 渡辺浩志, 久田俊明, 超弾性有限要素法による kinking 解析, 日本機会学会論文集, A 編, **59**-557, pp. 183–190, 1993.
- (2.13) Flory, P.J., Thermodynamic relations for high elastic materials, *Trans. Faraday Soc.*, **57**, pp. 829–838, 1961.

- (2.14) Simo, J.C. , Hughes, T.J.R. , Computational inelasticity, Springer-Verlag, New York, 1998.
- (2.15) Holzapfel, G.A. , Nonlinear solid mechanics - A continuum approach for engineering, Wiley, 2000.
- (2.16) Ogden, R.W. , Non-linear elastic deformation, Ellis Horwood, Chichester, 1985.
- (2.17) Simo , J.C., Taylor , R.L. , Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **85**, pp. 273–310 , 1991.
- (2.18) Yeoh , O.H. , Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates, *Rubber Chem. Technol.*, **63**, pp. 792–805 , 1990.
- (2.19) Arruda, E.M. , Boyce, M.C. , A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **41**, pp. 389–412 , 1993.
- (2.20) Alexander , H. , A constitutive relation for rubber-like materials, *Int. J. Engng. Sci.*, **6**, pp. 549–563 , 1968.
- (2.21) Seki , W. , Fukahori , Y. , Iseda , Y. , Matsunaga , T. , A large deformation finite element analysis for multilayer elastomeric bearings, *Transaction of a meeting of the Rubber Division*, American Chemical Society, pp. 856–870 , 1987.
- (2.22) 山下義裕 , 川端李雄 , 補強ゴムのひずみエネルギー密度関数の近似式, 日本ゴム協会誌, 第 65 巻 , 第 9 号 , pp.517–528 , 1992.

## 第3章 ひずみ仮定を用いた 非圧縮超弾性シェル要素の開発

### 3.1 緒言

近年、板厚変化を考慮した大ひずみシェル要素の開発が盛んに行われている。これらの要素は、エアバック、タイヤチューブ、医療用チューブ、エラストマーシート、塑性加工用金属など、変形量の大きい薄肉構造物解析で必須とされ、これまでも様々な定式化が提案されている<sup>(3.1)</sup>。そのような大ひずみシェル要素の一つとして、板厚を新たな未知数として加え、3次元型の構成則を使用したソリッドライクシェルの定式化がある<sup>(3.2)(3.3)(3.4)(3.17)</sup>。これらの要素は汎用性が高いが、板厚方向に十分な未知数を取らないと thickness locking<sup>(3.6)</sup> と呼ばれるロッキング現象（剛性を過大に評価する現象）が生じることが知られている。このような現象を回避するため、板厚方向の伸びの2次精度近似<sup>(3.3)(3.7)</sup> や、EAS(Enhanced Assumed Strain) 法<sup>(3.2)(3.4)</sup> などの特別な手法を用いなければならない。あわせて、ゴムや大ひずみ領域における弾塑性材料等にみられる非圧縮性を精度よく解析するためには、混合法・ペナルティ法などの手法が必要となる。

Hughes<sup>(3.8)</sup>、Parisch<sup>(3.9)</sup> らは、シェルの面内のみ平面応力条件の構成則を使用した非圧縮大ひずみシェルを定式化した。彼らが開発した非圧縮大ひずみシェル要素は、非圧縮性から生じる不定静水圧項を平面応力条件から消去し、板厚は面内ひずみの関数とみなして非圧縮条件から算出した。Size ら<sup>(3.6)</sup> は、上記の平面応力条件は、前述の thickness locking と非圧縮性から生じる volumetric locking を回避する効果があることを示している。このようにして、前述のソリッドライクシェルに比べ、要素当たりの自由度数ひいては計算コストを低く抑えることが可能となる。しかしながら、増分ステップ毎に板厚の更新は行うものの、接線剛性の構築に際して、収束計算の中で前ステップの板厚を用いているため、この方法では完全 (consistent) な接線剛性は得られない。完全な接線剛性は、Newton-Raphson 法の2次収束性のみならず、正確な感度や座屈固有値を得るためにも不可欠なものである。

このように、2次元型の構成則を用いた場合、板厚の取り扱いが定式化を複雑化する。Basar ら<sup>(3.10)(3.11)</sup> は、薄肉の要素に対して Kirchhoff-Love の仮定（面外垂直ひずみを考慮するが、面外せん断ひずみは無視する）を設けることで板厚を陰的に求めている。一方

で、面外せん断ひずみを考慮したシェル要素に対して陰的に板厚を取り扱った例は筆者らの知る限りない。

本研究では、ANS(Assumed Natural Strain)法を用いて板厚方向ひずみを独立に定義し、非圧縮大ひずみシェル要素を定式化する。本定式化では、Hughes, Parishらと同様に、面内に平面応力条件を使用しており、容易に板厚を陰的に求めることが可能である。ANS法は、通常の変位内挿法とは独立に、仮定された自然ひずみ場を設ける手法であり、MITC4シェル要素(Batheら<sup>(3.12)(3.13)</sup>)は、現在信頼性の高いANS法による4節点シェル要素の一つである。通常の変位内挿法では、曲げエネルギーに比べて面外せん断ひずみエネルギーが大きくなり、固い解が得られるいわゆる shear locking と呼ばれるロッキング現象が生じる。shear locking の一因は面外せん断ひずみを定義する変位および回転の内挿関数の次元の問題であることは古くから知られており、Batheらは、ANS法によって、面外せん断ひずみ仮定場を独立に設け、これを回避した。

本シェル要素では、上記面外せん断ひずみ仮定場に加え、新たに板厚方向ひずみ仮定場を設ける。板厚方向ひずみ場を独立に内挿して求めることによって板厚の更新が容易になる。結果的に本定式化による板厚方向ひずみ場は、板厚方向に一定と仮定され、その値は中立面において非圧縮条件から算出される。さらに板厚は、以上のように仮定された板厚方向ひずみから求めることができる。

本手法による大ひずみ・大回転解析では、板厚や有限回転の更新は定義に基づき厳密に行い、接線剛性マトリクスも定式化に consistent な(完全な)ものを用いる。また構成則は、Hughes, Parishらを用いた2次元型の超弾性構成則を使用し、本研究ではひずみエネルギー関数として Mooney-Rivlin 体モデルを用いる。

以上の定式化により、本提案大ひずみシェル要素は以下の特徴を有する。

- MITC4シェル要素等の古典的な微小ひずみ4節点シェル要素(1節点当たり並進変位自由度3, 回転自由度2)と同程度の自由度数及び板厚変化以外は同等の幾何学的モデルで実装できる。
- 従来までに開発されてきた大ひずみシェル要素と比べ、解析精度を損なうことなく、計算コストを低く抑えることができる。
- 面外せん断ひずみを考慮しながら板厚の更新を陰的に行うことができる。
- 計算の大規模化に伴う並列計算の導入

また、本研究では、板厚方向ひずみを要素の中心点で評価し、要素内一定と仮定しているため、本提案要素の適用限界は、そのような仮定が適用できる範囲、すなわち板厚変化が要素内一定と考えられる範囲に限られる。

本章では、まず混合変分原理によって板厚方向ひずみ仮定場を導入し、板厚の更新が容易に行えることを示す。これに有限回転増分も併せて考慮することによって、非圧縮超弾性解析のための大ひずみ・大回転非線形シェル要素の定式化を行う。最後に、本提案シェル要素を基本的な例題に適用した例を示し、本手法の妥当性・有用性を検証する。

### 3.2 非圧縮大ひずみシェル要素の定式化

本節では、混合変分原理によって面外せん断ひずみ・板厚方向ひずみ仮定場を導入した大ひずみシェル要素の定式化について解説する。

ここでは、埋め込み座標系におけるテンソル成分を用いた定式化を行う。本章で用いる記号の定義を以下に記す。

$r^i$	埋め込み座標系の $i$ 成分
$N_k$	形状関数 (2次元4節点低次要素)
$I$	単位テンソル
$\mathbf{X}, {}^t\mathbf{x}$	時刻0を基準配置とする時刻0および $t$ における位置ベクトル
${}^t\mathbf{u}$	時刻0を基準配置とする時刻 $t$ における変位ベクトル
$\mathbf{u}$	時刻0を基準配置とする時刻 $t$ から $t'$ における変位増分ベクトル
$\mathbf{G}_i, {}^t\mathbf{g}_i$	時刻0を基準配置とする時刻0および $t$ における共変基底ベクトル $\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial r^i}, {}^t\mathbf{g}_i = \frac{\partial {}^t\mathbf{x}}{\partial r^i}$
$\mathbf{G}^i, {}^t\mathbf{g}^i$	時刻0を基準配置とする時刻0および $t$ における反変基底ベクトル $\mathbf{G}^i = \frac{\mathbf{G}_j \times \mathbf{G}_p}{\mathbf{G}_i \cdot (\mathbf{G}_j \times \mathbf{G}_p)}, {}^t\mathbf{g}^i = \frac{{}^t\mathbf{g}_j \times {}^t\mathbf{g}_p}{{}^t\mathbf{g}_i \cdot ({}^t\mathbf{g}_j \times {}^t\mathbf{g}_p)}$ ここで $(i, j, p) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$
${}^t g_{ij}, {}^t g^{ij}$	時刻0を基準配置とする時刻 $t$ における計量テンソル, すなわち ${}^t g_{ij} = {}^t \mathbf{g}_i \cdot {}^t \mathbf{g}_j, {}^t g^{ij} = {}^t \mathbf{g}^i \cdot {}^t \mathbf{g}^j$
$G_{ij}, G^{ij}$	基準配置における計量テンソル, すなわち $G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j, G^{ij} = \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j$
${}^t_0 \mathbf{E}$	時刻0を基準配置する時刻 $t$ における Green-Lagrange ひずみテンソル
${}^t_0 E_{ij}$	${}^t_0 \mathbf{E}$ の共変成分, すなわち ${}^t_0 \mathbf{E} = {}^t_0 E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j$
${}^t_0 \mathbf{E}^*$	時刻0を基準配置する時刻 $t$ における仮定された Green-Lagrange ひずみテンソル

${}^t_0E^*_{ij}$	${}^t_0E^*$ の共変成分, すなわち ${}^t_0E^* = {}^t_0E^*_{ij} G^i \otimes G^j$
${}^t_0C$	時刻 0 を基準配置する時刻 $t$ における右 Cauchy-Green 変形テンソル
${}^t_0C^*$	時刻 0 を基準配置する時刻 $t$ における仮定された右 Cauchy-Green 変形テンソル, ${}^t_0C^* = 2{}^t_0E^* + I$
$F$	時刻 0 を基準配置とする時刻 0 から $t$ における変形勾配ベクトル
${}^t_0S$	時刻 0 を基準配置する時刻 $t$ における第 2 種 Piola-Kirchhoff 応力テンソル
${}^t_0S^{ij}$	${}^t_0S$ の反変成分, すなわち ${}^t_0S = {}^t_0S^{ij} G_i \otimes G_j$
$D$	ひずみテンソル・応力テンソル間の関係を記述する 4 階のテンソル, すなわち ${}^t_0S = D : {}^t_0E$ 以後, 弾性テンソルと呼ぶ
${}^t_0h$	時刻 0 を基準配置とする時刻 $t$ における板厚
$V$	時刻 0 を基準配置とする時刻 0 における体積
$J$	体積率 (= $\det F$ )

また, 本節以降特に断りがない限り,  $i, j, p, q, r, s, u, v$  はテンソル成分すなわち 1,2,3 の値を,  $k, l, m$  は節点番号すなわち 1,2,3,4 の値を, 添え字  $\alpha, \beta$  は面内成分すなわち 1,2 の値をとるものとし, 総和規約を適用する.

### 3.2.1 混合変分原理

Bathe ら (3.12)(3.13) が開発した MITC4 シェル要素における面外せん断ひずみは, 従来通り変位の内挿関数を微分して求めるのではなく, あるサンプリング点の面外せん断ひずみと再定義した内挿関数から新たに求められる. Bathe らはこのような面外せん断ひずみ仮定場を設けることによって Shear locking を回避した. 本研究で提案するシェル要素は, 上記面外せん断ひずみ仮定場に加え, さらに板厚方向ひずみ仮定場を設けることによって大ひずみシェル要素の定式化を行う. この場合の停留すべき系のトータルポテンシャルエネルギーは, 次のように Lagrange 未定乗数を用いて仮定ひずみ場に対する拘束条件を付加する形で書くことができる. なお, 式 (3.1) では非圧縮性の拘束条件も付加している.

$$\begin{aligned} \Phi = & \int_V W({}^t_0C^*) dV - 2 \int_V \lambda_{13} ({}^t_0E^*_{13} - {}^t_0E_{13}) dV \\ & - 2 \int_V \lambda_{23} ({}^t_0E^*_{23} - {}^t_0E_{23}) dV \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \int_V \lambda_{33} ({}^t E_{33}^* - {}^t E_{33}) dV \\
& - \int_V \lambda_{III} (III({}^t C^*) - 1) dV - R
\end{aligned} \tag{3.1}$$

ただし

$${}^t E_{13}^* = \frac{1}{2}(1+r^2){}^t E_{13}^A + \frac{1}{2}(1-r^2){}^t E_{13}^C \tag{3.2a}$$

$${}^t E_{23}^* = \frac{1}{2}(1+r^1){}^t E_{23}^D + \frac{1}{2}(1-r^1){}^t E_{23}^B \tag{3.2b}$$

$${}^t E_{33}^* = {}^t E_{33}^M \tag{3.2c}$$

である．ここで， $\Phi$  は全ポテンシャル， $W$  はひずみエネルギー関数， $III$  は  ${}^t C^*$  の第3不変量， $R$  は外力ポテンシャル， $\lambda_{13}, \lambda_{23}, \lambda_{33}, \lambda_{III}$  は Lagrange 未定乗数である．式 (3.1) 右辺第2,3,4項は，式 (3.2) で定義される面外せん断ひずみ仮定場・板厚方向ひずみ仮定場と，従来の方法により変位および内挿関数から得られる面外せん断ひずみ・板厚方向ひずみを関係付ける拘束条件式であり，式 (3.1) 右辺第5項は非圧縮拘束条件式である．式 (3.1)(3.2) より， ${}^t C^*$ ， ${}^t E^*$  は面外成分を仮定しており，面内成分についてはそれぞれ  ${}^t C^* = {}^t C$ ， ${}^t E^* = {}^t E$  が成り立つ．サンプリング点 A,B,C,D,M の位置を Fig.3.1 に示す．ここで文献 (3.14) に従い，付加した拘束条件が過剰にならないように Lagrange 未定乗数を次のように定義する． $\delta(\cdot)$  を Dirac-delta 関数とすれば，

$$\lambda_{13} = \lambda^A \delta(r^1) \delta(1-r^2) + \lambda^C \delta(r^1) \delta(1+r^2) \tag{3.3a}$$

$$\lambda_{23} = \lambda^D \delta(r^2) \delta(1-r^1) + \lambda^B \delta(r^2) \delta(1+r^1) \tag{3.3b}$$

$$\lambda_{33} = \lambda^M \delta(r^1) \delta(r^2) \tag{3.3c}$$

となる． $\delta\Phi = 0$  として  $\Phi$  を停留させる条件を求めると，以下の3式が得られる．

$$\begin{aligned}
{}^t E_{13}^{*A} &= {}^t E_{13}^A, {}^t E_{13}^{*C} = {}^t E_{13}^C, \\
{}^t E_{23}^{*D} &= {}^t E_{23}^D, {}^t E_{23}^{*B} = {}^t E_{23}^B, \\
{}^t E_{33}^{*M} &= {}^t E_{33}^M
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\int_V 2 \left( \frac{\partial W}{\partial {}^t C_{ij}^*} - \lambda_{III} \frac{\partial III}{\partial {}^t C_{ij}^*} \right) \delta {}^t E_{ij}^* dV = \delta R \tag{3.5}$$

$$III({}^t C^*) = 1 \tag{3.6}$$

ここで式 (3.4) は仮定ひずみと変位から内挿されたひずみとの関係式，式 (3.5) は混合型の仮想仕事式，式 (3.6) は非圧縮条件式をそれぞれ表す．なお，式 (3.5) を導くにあたっては，あらかじめ式 (3.4) の関係式を式 (3.1) に代入し不要な Lagrange 未定乗数を消去している．

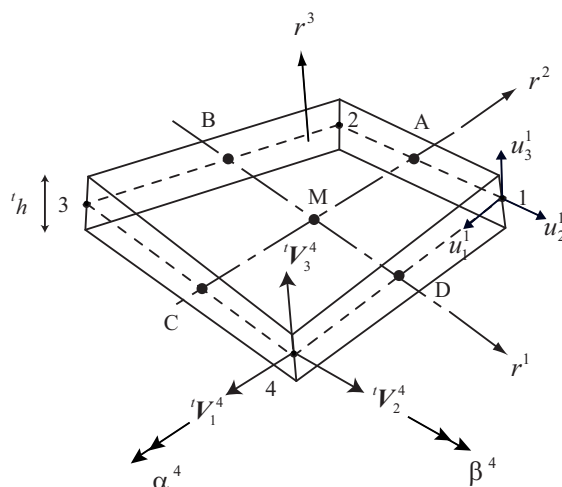


Fig.3.1 Four-node isoparametric shell element.

### 3.2.2 変位補間式

Fig.3.1 に時刻  $t$  におけるシェル要素の形状を示す. Fig.3.1 より, 時刻  $t$  における要素内の任意の点の位置ベクトル  ${}^t\mathbf{x}$  は形状関数  $N_k$  を用いて

$${}^t\mathbf{x} = N_k(r^1, r^2){}^t\mathbf{x}^k + \frac{r^3}{2}{}^t h N_k(r^1, r^2){}^t\mathbf{V}_3^k \quad (3.7)$$

で表される. また, 時刻  $t$  から  $t' (= t + \Delta t)$  までの変位増分ベクトル  $\mathbf{u}$  は, ディレクターベクトル  ${}^t\mathbf{V}_3^k$  に対する時刻  $t'$  までの有限回転テンソル  ${}^{t'}_t\mathbf{R}$ , 時刻  $t$  から  $t'$  までの板厚増分  $\Delta h$  を用いて次のように書くことができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = N_k(r^1, r^2)\mathbf{u}^k &+ \frac{r^3}{2}{}^t h N_k(r^1, r^2)({}^{t'}_t\mathbf{R} - \mathbf{I}){}^t\mathbf{V}_3^k \\ &+ \frac{r^3}{2}\Delta h N_k(r^1, r^2){}^{t'}_t\mathbf{R}{}^t\mathbf{V}_3^k \end{aligned} \quad (3.8)$$

ここで  ${}^{t'}_t\mathbf{R}$  については次節で詳しく定義する.

### 3.2.3 有限回転増分と板厚増分

本節では, 各増分ステップ間の有限回転量および板厚の更新について示す. なお, 変位の3次以上の項は接線剛性を導く線形化の際消滅するため, ここでは2次項までを考える.

いま, 軸性ベクトルが  ${}^{t'}_t\boldsymbol{\theta}^k$  である反対称テンソル  ${}^{t'}_t\boldsymbol{\Phi}^k$  を定義する. 反対称テンソル  ${}^{t'}_t\boldsymbol{\Phi}^k$  と軸性ベクトル  ${}^{t'}_t\boldsymbol{\theta}^k$  は次式のような関係がある.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} {}^{t'}_t\boldsymbol{\Phi}^k {}^t\mathbf{V}_3^k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} {}^{t'}_t\boldsymbol{\theta}^k \times {}^t\mathbf{V}_3^k = {}^t\dot{\mathbf{V}}_3^k \quad (3.9)$$

このとき，有限回転テンソル  ${}^t_t R$  は，幾何学的関係から次式のように厳密に求めることができる (3.15)。

$${}^t_t R = I + h_1(\omega) {}^t_t \Phi^k + h_2(\omega) ({}^t_t \Phi^k)^2 \quad (3.10)$$

ここで

$$h_1(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega}, h_2(\omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2, \omega = \left| {}^t_t \theta^k \right| \quad (3.11)$$

$\omega$  が微小のとき， $\sin \omega, \sin(\omega/2)$  を Taylor 展開すると次式が成り立つ。

$${}^t_t R = I + {}^t_t \Phi^k + \frac{1}{2!} ({}^t_t \Phi^k)^2 + \dots \quad (3.12)$$

いま，軸性ベクトル  ${}^t_t \theta^k$  はシェルのディレクターベクトル  ${}^t V_3^k$  に直交する面内の2つのベクトル  ${}^t V_1^k, {}^t V_2^k$  に分解されると定義すると次式が成り立つ。

$${}^t_t \theta^k = \alpha^{kt} V_1^k + \beta^{kt} V_2^k \quad (3.13)$$

この場合  ${}^t_t R$  は  ${}^t_t \theta^k$  のまわりの  $\sqrt{(\alpha^k)^2 + (\beta^k)^2}$  だけの有限回転を表している。回転が微小なときには，ディレクター  ${}^t V_3^k$  の  ${}^t V_1^k, {}^t V_2^k$  のまわりの回転角をそれぞれ  $\alpha^k, \beta^k$  とみなすことができ，ディレクター自身のまわりの回転は考慮されない。

次に板厚とその増分量を考える。いま， ${}^t_0 C$  の第3不変量  $III({}^t_0 C)$  は次式のように式展開できる。

$$III({}^t_0 C) = \det {}^t_0 C = \frac{[{}^t g_1 {}^t g_2 {}^t g_3]^2}{[G_1 G_2 G_3]^2} \quad (3.14)$$

なお， $[ ]$  は，スカラー3重積を表す。ここで，

$$\begin{aligned} {}^t g &= [{}^t g_1 {}^t g_2 {}^t g_3]^2 = \det [{}^t g_{ij}] = \varepsilon^{ijp} g_{i1} g_{j2} g_{p3} \\ G &= [G_1 G_2 G_3]^2 = \det [G_{ij}] = \varepsilon^{ijp} G_{i1} G_{j2} G_{p3} \end{aligned} \quad (3.15)$$

とおく。なお， $\varepsilon^{ijp}$  は交代記号である。このとき，非圧縮条件式 (3.6) は次式のようになる。

$$\frac{{}^t g}{G} = 1 \quad (3.16)$$

3.2.1 節式 (3.2)，(3.6) より，式 (3.16) は Fig.3.1 の点 M において成立する。よって時刻  $t$  の板厚  ${}^t h$  は，

$${}^t h = \frac{2\sqrt{G}}{[{}^t g_1 {}^t g_2 {}^t d]} \Big|_{\substack{r^1=0 \\ r^2=0 \\ r^3=0}} \quad (3.17)$$

で与えられる．ここで，

$${}^t\mathbf{g}_3 = \frac{1}{2} {}^t h {}^t \mathbf{d} \quad (3.18)$$

の係数を用いた． ${}^t \mathbf{d}$  は要素内の任意の点のディレクターベクトルであり、形状関数  $N_i$  を用いて次式のように表される．

$${}^t \mathbf{d} = N_k {}^t \mathbf{V}_3^k \quad (3.19)$$

なお、 ${}^t \mathbf{d}$  は、要素内の任意の点における補間されたディレクターベクトルであり、初期形状が曲面の場合や、あるいは大変形により各節点におけるディレクターの方向が異なる時には、 $0 < |{}^t \mathbf{d}| \leq 1$  であり、単位ベクトルとはならない．この現象は、通常の板厚が変化しない微小ひずみ問題においても生じ、計算に用いられる実効板厚が低めに見積もられる．本要素での式 (3.17) による板厚の更新は、それを補正する役割を果たしている．曲面の曲率が小さい場合等は、 ${}^t \mathbf{d}$  を  $\frac{{}^t \mathbf{d}}{|{}^t \mathbf{d}|}$  と正規化してもよい．なお、本シェル要素では、板厚変化は面内ひずみの影響が支配的であるとの仮定の下、式 (3.17) より板厚を算出するにあたっては、面外せん断項を次式のように無視する．

$${}^t g_{\alpha 3} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_3 \approx 0 \quad (3.20)$$

時刻  $t$  の板厚  ${}^t h$  を式 (3.17)、(3.20) を用いて求めるとき、点 M においては式 (3.8) の第 2,3 項すなわち回転項は消滅するため、 ${}^t h$  は並進変位自由度  $u^k$  のみの関数とみなすことができる． $u^k$  が微小なとき、時刻  $t'$  の板厚  ${}^{t'} h$  に関して次式のような Taylor 展開が成り立つ．

$${}^{t'} h = {}^t h + \boldsymbol{\pi}^k \cdot \mathbf{u}^k + \mathbf{u}^l \cdot \boldsymbol{\Pi}^{lm} \cdot \mathbf{u}^m + \dots \quad (3.21)$$

ここで  $\boldsymbol{\pi}^k, \boldsymbol{\Pi}^{lm}$  はそれぞれ Taylor 展開の際に現れる係数ベクトル、係数テンソルである．それぞれの具体的な成分表示は、以下に示す通りである．

時刻  $t'$  の板厚  ${}^{t'} h$  を次式に示す．

$${}^{t'} h = \frac{2\sqrt{G}}{[{}^{t'} \mathbf{g}_1 {}^{t'} \mathbf{g}_2 {}^{t'} \mathbf{d}]} \quad (3.22)$$

いま、板厚  ${}^{t'} h$  は Fig.3.1 のサンプリング点 M で評価されるため、 ${}^{t'} \mathbf{g}_i$  は次式の  ${}^{t'} \mathbf{g}_i^M$  に置き換えられる．

$${}^{t'} \mathbf{g}_i^M = \frac{\partial N_k^M}{\partial r^i} {}^t \mathbf{x}^k + \frac{\partial N_k^M}{\partial r^i} \mathbf{u}^k \quad (3.23)$$

なお、添え字 M はその諸量がサンプリング点 M で評価されたことを示すものとし、 $\frac{\partial N_k^M}{\partial r^i}$  は次式のように置いた．

$$\frac{\partial N_k^M}{\partial r^i} = \left. \frac{\partial N_k}{\partial r^i} \right|_{\substack{r^1=0 \\ r^2=0}} \quad (3.24)$$

以上より,  ${}^t g_{ij} = {}^t \mathbf{g}_i \cdot {}^t \mathbf{g}_j$ ,  ${}^t d = {}^t \mathbf{d} \cdot {}^t \mathbf{d}$  と式 (3.20) を用いて式 (3.22) を書き直すと次式のようになる。

$${}^t h = 2\sqrt{\frac{G^M}{{}^t d^M}} \frac{1}{\sqrt{{}^t g_{11}^M {}^t g_{22}^M - ({}^t g_{12}^M)^2}} \quad (3.25)$$

式 (3.25) より板厚  ${}^t h$  は並進変位自由度  $\mathbf{u}^k$  の関数であることがわかり, これを Taylor 展開すれば係数ベクトル  $\boldsymbol{\pi}^k$ , テンソル  $\boldsymbol{\Pi}^{lm}$  はそれぞれ以下の式になる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}^k &= -2\sqrt{\frac{G^M}{{}^t d^M}} ({}^t g_{11}^M {}^t g_{22}^M - ({}^t g_{12}^M)^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad \left[ {}^t g_{22}^M \frac{\partial N_k^M}{\partial r^1} {}^t \mathbf{g}_1^M + {}^t g_{11}^M \frac{\partial N_k^M}{\partial r^2} {}^t \mathbf{g}_2^M \right. \\ &\quad \left. - {}^t g_{12}^M \left( \frac{\partial N_k^M}{\partial r^1} {}^t \mathbf{g}_2^M + \frac{\partial N_k^M}{\partial r^2} {}^t \mathbf{g}_1^M \right) \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi}^{lm} &= -3 ({}^t g_{11}^M {}^t g_{22}^M - ({}^t g_{12}^M)^2)^{-1} \boldsymbol{\pi}^l \otimes \boldsymbol{\pi}^m \\ &\quad -2\sqrt{\frac{G^M}{{}^t d^M}} ({}^t g_{11}^M {}^t g_{22}^M - ({}^t g_{12}^M)^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad \left[ {}^t g_{22}^M \frac{\partial N_l^M}{\partial r^1} \frac{\partial N_m^M}{\partial r^1} \mathbf{I} + {}^t g_{11}^M \frac{\partial N_l^M}{\partial r^2} \frac{\partial N_m^M}{\partial r^2} \mathbf{I} \right. \\ &\quad + 2 \frac{\partial N_l^M}{\partial r^1} {}^t \mathbf{g}_1^M \otimes \frac{\partial N_m^M}{\partial r^2} {}^t \mathbf{g}_2^M + 2 \frac{\partial N_l^M}{\partial r^2} {}^t \mathbf{g}_2^M \otimes \frac{\partial N_m^M}{\partial r^1} {}^t \mathbf{g}_1^M \\ &\quad - \left( \frac{\partial N_l^M}{\partial r^1} {}^t \mathbf{g}_2^M + \frac{\partial N_l^M}{\partial r^2} {}^t \mathbf{g}_1^M \right) \otimes \left( \frac{\partial N_m^M}{\partial r^1} {}^t \mathbf{g}_2^M + \frac{\partial N_m^M}{\partial r^2} {}^t \mathbf{g}_1^M \right) \\ &\quad \left. - {}^t g_{12}^M \left( \frac{\partial N_l^M}{\partial r^1} \frac{\partial N_m^M}{\partial r^2} + \frac{\partial N_l^M}{\partial r^2} \frac{\partial N_m^M}{\partial r^1} \right) \mathbf{I} \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

### 3.2.4 超弾性構成則

本節では, Mooney-Rivlin 体を用いた 2次元型の超弾性構成則について述べる。面内に関して, シェルの平面応力条件を用いて, 構成則を 2次元化する。このような 2次元型の構成則を用いれば, 文献<sup>(3.6)</sup>にも記されているように, volumetric locking を回避する効果がある。なお, 面外については面外せん断ひずみおよび応力に関するせん断剛性は有している。

本シェル要素における超弾性構成則は, 式 (3.5) の混合型の仮想仕事式から得られる。式 (3.5) より, 第 2 種 Piola-Kirchhoff 応力テンソル  ${}^t_0 \mathbf{S}$  は次式のように与えられる。

$${}^t_0 S^{ij} = 2 \left( \frac{\partial W}{\partial {}^t_0 C_{ij}^*} - \lambda_{III} \frac{\partial III}{\partial {}^t_0 C_{ij}^*} \right) \quad (3.28)$$

式(3.28)のLagrange未定乗数 $\lambda_{III}$ は、非圧縮性から生じる不定静水圧 $p$ であり、 $p = \lambda_{III}$ の関係が成り立つ。いま、不定静水圧 $p$ を次式の平面応力条件から消去する。

$${}^tT^{33} = 0 \quad (3.29)$$

ここで、 ${}^tT^{ij}$ はCauchy応力テンソル ${}^tT$ の反変成分、すなわち ${}^tT = {}^tT^{ij}g_i \otimes g_j$ である。Cauchy応力テンソル ${}^tT$ と第2種Piola-Kirchhoff応力テンソル ${}^t_0S$ の関係は次式のようにならされる。

$${}^tT = J^{-1}F_0^t S F^T \quad (3.30)$$

非圧縮のとき、すなわち $J = 1$ のとき、式(3.30)より ${}^tT^{ij} = {}^t_0S^{ij}$ が成り立つ。したがって、平面応力条件式(3.29)は次式に置き換えられる。

$${}^t_0S^{33} = 0 \quad (3.31)$$

式(3.28),(3.31)より不定静水圧 $p$ は次式のように表される。

$$p = -\frac{1}{{}^t_0g^{33}} \frac{\partial W}{\partial {}^t_0C_{33}^*} \quad (3.32)$$

ここで、

$$\frac{\partial III}{\partial {}^t_0C_{ij}^*} = {}^t_0g^{ij} \quad (3.33)$$

の関係を用いた。 ${}^t_0g^{ij}$ は ${}^t_0g^{ij} = {}^t_0g^i \cdot {}^t_0g^j$ であり、 ${}^t_0C^{*-1}$ の反変成分、すなわち ${}^t_0C^{*-1} = {}^t_0g^{ij}G_i \otimes G_j$ である。なお、 ${}^t_0g^{ij}$ の面外せん断成分・板厚方向成分については、ひずみ仮定場と同様に、Fig.3.1を参照して、サンプリング点A,B,C,D,Mの値を先に求め、式(3.4)と同じように内挿して求めるものとする。

ここでは、ひずみエネルギー関数 $W$ として次式のMooney-Rivlin体を用いる。

$$W({}^t_0C^*) = c_1(I - 3) + c_2(II - 3) \quad (3.34)$$

ここで、 $I, II$ は ${}^t_0C^*$ の第1,2不変量、 $c_1, c_2$ は材料定数である。

${}^t_0S^{ij}$ および弾性テンソル $D^{ijpq} = \partial_0^t S^{ij} / \partial_0^t E_{pq}^*$ のそれぞれの具体的な成分表示については以下の通りである。

いま、応力テンソル $S$ を正規直交基底ベクトル $e_i$ によって成分分解する。すなわち $S = \tilde{S}^{ij}e_i \otimes e_j$ とおく。このとき、3.2.4節よりMooney-Rivlin則を用いた非圧縮大ひずみシェルの応力テンソルは次式のように書き表される。

$$\tilde{S}^{ij} = 2c_1 \left( \delta^{ij} - \frac{{}^t\tilde{g}^{ij}}{{}^t\tilde{g}^{33}} \right) + 2c_2 \left( \delta^{ij}I - \tilde{g}_{ij} - \frac{{}^t\tilde{g}^{ij}}{{}^t\tilde{g}^{33}} \tilde{g}_{\alpha\alpha} \right) \quad (3.35)$$

ここで、以下の式を用いた．

$$I = {}^t\tilde{g}_{ii} \quad (3.36)$$

$$II = \frac{1}{2} (\delta^{ir} \delta^{jst} \tilde{g}_{ri} {}^t\tilde{g}_{sj} - \delta^{ir} \delta^{jst} \tilde{g}_{ij} {}^t\tilde{g}_{rs}) \quad (3.37)$$

$${}^t\tilde{g}^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ipr} \varepsilon^{jqst} \tilde{g}_{pq} {}^t\tilde{g}_{rs} \quad (3.38)$$

$\delta^{ij}$  は Kronecker の Delta である．なお、 ${}^t\tilde{g}_{ij}$  は正規直交基底ベクトル  $e_i$  によって成分分解した右 Cauchy-Green 変形テンソル  $C = {}^t\tilde{g}_{ij} e_i \otimes e_j$  の成分であり、次式の基底変換から求められる．

$${}^t\tilde{g}_{ij} = {}^t g_{rs} (\mathbf{G}^r \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{G}^s \cdot \mathbf{e}_j) \quad (3.39)$$

式 (3.35) を  ${}^t\tilde{g}_{pq}$  で微分すると、弾性テンソル  $\tilde{D}^{ijpq}$  が求まる．

$$\tilde{D}^{ijpq} = 2 \frac{\partial \tilde{S}^{ij}}{\partial {}^t\tilde{g}_{pq}} \quad (3.40)$$

式 (3.36),(3.37),(3.38) より式 (3.40) を計算すると次式のようになる．

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{ijpq} = & 4(c_1 + {}^t\tilde{g}_{\alpha\alpha} c_2) \left[ \frac{{}^t\tilde{g}^{ij} {}^t\tilde{g}_{uv} \varepsilon^{3pu} \varepsilon^{3qv} - \frac{1}{{}^t\tilde{g}^{33}} \frac{\partial {}^t\tilde{g}^{ij}}{\partial {}^t\tilde{g}_{pq}}}{({}^t\tilde{g}^{33})^2} \right] + \\ & 4c_2 \left[ \varepsilon^{riq} \varepsilon^{rjp} - \frac{1}{{}^t\tilde{g}^{33}} (\delta^{pqt} \tilde{g}^{ij} + \delta^{ijt} \tilde{g}^{pq}) \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

3.2.4 節では応力テンソルの反変成分  ${}^t_0 S = {}^t_0 S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j$ 、弾性テンソルの反変成分  $D = D^{ijpq} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_p \otimes \mathbf{G}_q$  が用いられているが、これは次のように求めることができる．

$${}^t_0 S^{ij} = {}^t_0 \tilde{S}^{pq} (\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{e}_p) (\mathbf{G}^j \cdot \mathbf{e}_q) \quad (3.42)$$

$$D^{ijpq} = \tilde{D}^{rsuv} (\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{e}_r) (\mathbf{G}^j \cdot \mathbf{e}_s) (\mathbf{G}^p \cdot \mathbf{e}_u) (\mathbf{G}^q \cdot \mathbf{e}_v) \quad (3.43)$$

### 3.2.5 有限要素離散化

本節では、上で定式化した非圧縮大ひずみシェルの接線剛性マトリクス  $K$  を求める．本シェル要素では外力と釣り合う内力 (等価節点力) の算出においては、式 (3.10)、(3.17) から求められる回転テンソル・板厚を使用するが、接線剛性を導くにあたっては式 (3.12)、(3.21) を用いる．

式 (3.5) の仮想仕事式を増分分解するために、応力成分、ひずみ変分成分を次のように時刻  $t$  での成分 (既知項) と  $t' - t = \Delta t$  における増分 (未知項) に分解する．

$${}^{t'}_0 S^{ij} = {}^t_0 S^{ij} + {}_0 S^{ij} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}
 \delta_0^t E_{ij}^* &= \delta(t_0 E_{ij}^* + {}_0 E_{ij}^*) \\
 &= \delta_0 E_{ij}^* \\
 &= \delta_0 E_{Lij}^* + \delta_0 E_{NLij}^*
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

ここで、 ${}^t_0 S^{ij}, {}^t_0 E_{ij}^*$  は、それぞれ時刻 0 を基準配置とする時刻  $t'$  における第 2 種 Piola-Kirchhoff 応力テンソル  ${}^t_0 S$  の反変成分と仮定された Green-Lagrange ひずみテンソル  ${}^t_0 E^*$  の共変成分である。また、 ${}_0 E_{Lij}^*, {}_0 E_{NLij}^*$  はそれぞれ  ${}_0 E_{ij}^*$  の線形部分と非線形部分を表す。式 (3.44), (3.45) を式 (3.5) に代入し既知項を右辺に移すと

$$\begin{aligned}
 \int_V {}_0 S^{ij} \delta_0 E_{ij}^* dV + \int_V {}^t_0 S^{ij} \delta_0 E_{NLij}^* dV \\
 = {}^t \delta R - \int_V {}^t_0 S^{ij} \delta_0 E_{Lij}^* dV
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

が得られる。式 (3.46) 左辺の線形化 ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) を行い、 ${}^t_0 \dot{S}^{ij} = {}_0 C^{ijpq} \dot{E}_{pq}^*$  の構成則を用いると

$$\begin{aligned}
 \text{式 (3.46) 左辺} \rightarrow \\
 \int_V {}_0 C^{ijpq} {}_0 E_{Lpq}^* \delta_0 E_{Lij}^* dV + \int_V {}^t_0 S^{ij} (\delta_0 E_{NLij}^*) dV
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

を得、上式を離散化することで、接線剛性マトリクス  $K$  が求められる。

いま、consistent な接線剛性を求めるために、式 (3.8) の  $\mathbf{u}$  へ式 (3.12), (3.21) を代入すると次式を得る。

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_{ex1} + \mathbf{u}_{ex2} + \mathbf{u}_{ex3} \tag{3.48}$$

ここで、 $\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_{ex1}$  は  $\mathbf{u}$  の 1 次の項、 $\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_{ex2}, \mathbf{u}_{ex3}$  は  $\mathbf{u}$  の 2 次の項であり、それぞれ以下の式のように置ける。式 (3.49c), (3.49d), (3.49e) は大ひずみシェル要素のために拡張された項である。

$$\mathbf{u}_s = N_k \mathbf{u}^k + \frac{r^3}{2} {}^t h N_k \left\{ -\alpha^{kt} \mathbf{V}_2^k + \beta^{kt} \mathbf{V}_1^k \right\} \tag{3.49a}$$

$$\mathbf{u}_R = \frac{r^3}{2} {}^t h N_k \frac{-1}{2} \left\{ (\alpha^k)^2 + (\beta^k)^2 \right\} {}^t \mathbf{V}_3^k \tag{3.49b}$$

$$\mathbf{u}_{ex1} = \frac{r^3}{2} \boldsymbol{\pi}^l \cdot \mathbf{u}^l N_k {}^t \mathbf{V}_3^k \tag{3.49c}$$

$$\mathbf{u}_{ex2} = \frac{r^3}{2} \boldsymbol{\pi}^l \cdot \mathbf{u}^l N_k \left\{ -\alpha^{kt} \mathbf{V}_2^k + \beta^{kt} \mathbf{V}_1^k \right\} \tag{3.49d}$$

$$\mathbf{u}_{ex3} = \frac{r^3}{2} \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}^m \cdot \boldsymbol{\Pi}^{mn} \cdot \mathbf{u}^n \right) N_k {}^t \mathbf{V}_3^k \tag{3.49e}$$

Green-Lagrange ひずみ増分の線形部と非線形部を、式 (3.49a), (3.49b), (3.49c), (3.49d), (3.49e) を用いて、次式のように置く。

$${}_0 \dot{E}_{Lij}^{*s} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_s}{\partial r^i} \cdot {}^t \mathbf{g}_j + {}^t \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_s}{\partial r^j} \right) \tag{3.50a}$$



$$\delta_0 E_{Lij}^{*s} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}_s}{\partial r^i} \cdot {}^t \mathbf{g}_j + {}^t \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}_s}{\partial r^j} \right) \quad (3.50b)$$

$${}_0 \dot{E}_{Lij}^{*ex1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{ex1}}{\partial r^i} \cdot {}^t \mathbf{g}_j + {}^t \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{ex1}}{\partial r^j} \right) \quad (3.50c)$$

$$\delta_0 E_{Lij}^{*ex1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}_{ex1}}{\partial r^i} \cdot {}^t \mathbf{g}_j + {}^t \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}_{ex1}}{\partial r^j} \right) \quad (3.50d)$$

$$(\delta_0 E_{NLij}^{*s})' = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}_s}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_s}{\partial r^j} + \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_s}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}_s}{\partial r^j} \right) \quad (3.50e)$$

$$(\delta_0 E_{NLij}^{*ex1})' = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}_{ex1}}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{ex1}}{\partial r^j} + \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{ex1}}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}_{ex1}}{\partial r^j} \right) \quad (3.50f)$$

$$(\delta_0 E_{NLij}^{*s,ex1})' = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}_s}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{ex1}}{\partial r^j} + \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_s}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}_{ex1}}{\partial r^j} \right) \quad (3.50g)$$

$$(\delta_0 E_{NLij}^{*R})' = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_R)}{\partial r^i} \cdot {}^t \mathbf{g}_j + {}^t \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_R)}{\partial r^j} \right) \quad (3.50h)$$

$$(\delta_0 E_{NLij}^{*ex2})' = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_{ex2})}{\partial r^i} \cdot {}^t \mathbf{g}_j + {}^t \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_{ex2})}{\partial r^j} \right) \quad (3.50i)$$

$$(\delta_0 E_{NLij}^{*ex3})' = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_{ex3})}{\partial r^i} \cdot {}^t \mathbf{g}_j + {}^t \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_{ex3})}{\partial r^j} \right) \quad (3.50j)$$

したがって接線剛性マトリクス  $K$  は、次式のように求められる。

$$K = K_L^{s,ex1} + K_{NL}^{s,ex1} + K_{NL}^{R,ex2,ex3} \quad (3.51)$$

ここで、 $K_L^{s,ex1}$  は式 (3.50a),(3.50b),(3.50c),(3.50d) が寄与する項、 $K_{NL}^{s,ex1}$  は式 (3.50e),(3.50f),(3.50g) が寄与する項、 $K_{NL}^{R,ex2,ex3}$  は式 (3.50h),(3.50i),(3.50j) が寄与する項をそれぞれ表す。

### 3.3 数値解析例

本節では、前節で示した非圧縮超弾性シェル要素を用い、いくつかの基本的な例題を実施し、本要素の妥当性・有用性を検証する。

#### 3.3.1 単純引張り解析

Fig.3.2 に示す板の引張り解析を実施する。本解析は単純な引張り問題であるが、板厚の変化を大きく伴う解析である。1 辺の長さが 10.0mm、板厚 0.1mm の正方形板を  $x$  方向に荷重  $P$  で一様に引っ張る。材料定数  $c_1, c_2$  は、それぞれ 0.3, 0.15MPa とし、1 要素で解析を行う。

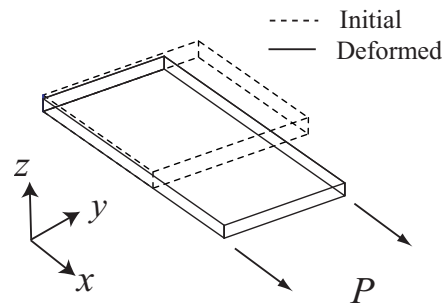


Fig.3.2 Stretching of a plate.

解析結果を Fig.3.3 に示す．荷重  $P$  に対する  $x, y, z$  各方向の垂直ひずみ (Green-Lagrange ひずみ) をそれぞれ示した．また，参照解として混合型のソリッド要素の解を併記した．Fig.3.3 より，本シェル要素の解とソリッド要素の解が完全に一致していることがわかる．

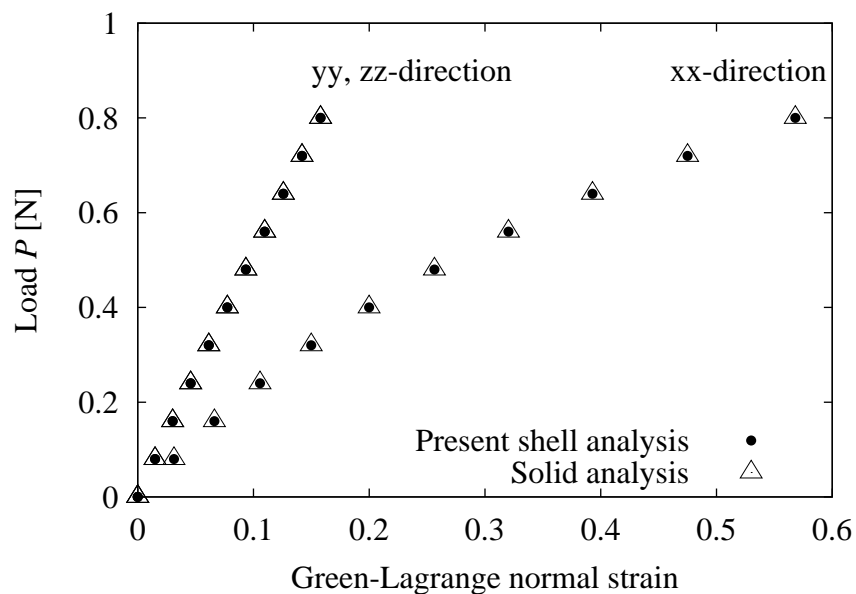


Fig.3.3 Load-normal strain curve, stretching of a plate.

### 3.3.2 Rolling-up 解析

Fig.3.4 に示すように，片端を固定支持した部材の他端にモーメント  $M$  を負荷する，板の rolling up 解析を行った．非常に大きな変位と回転を伴うが，純曲げ問題であるため板厚の変化は無視できる．したがって，本解析は微小ひずみ・大変位問題となる．板の長さ

を 10.0mm , 幅を 1.0mm , 板厚を 0.1mm , 材料定数  $c_1, c_2$  をそれぞれ 0.3, 0.15MPa とし , Fig.3.4 のように 20 要素で解析を行う .

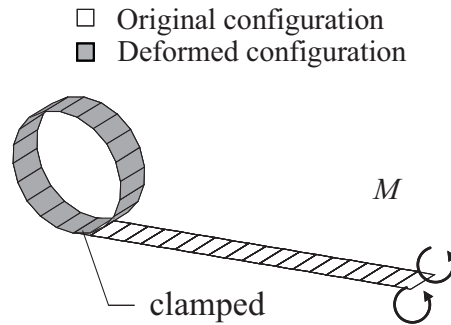


Fig.3.4 Rolling up of a plate.

解析結果を Fig.3.5 に示す . 微小ひずみ・有限変位問題であるため , 本材料モデルは Young 率  $E = 6(c_1 + c_2)$  , Poisson 比  $\nu = 0.5$  の物性値をもつ Hooke 弾性体モデルに相当する (3.14) . 以上から , Fig.3.5 には , 上記の物性値をもつ MITC4 シェルの解を参照解として併記した . 両者の良好な一致がみられ , 有限変位問題における本提案シェル要素の妥当性を確認できた .

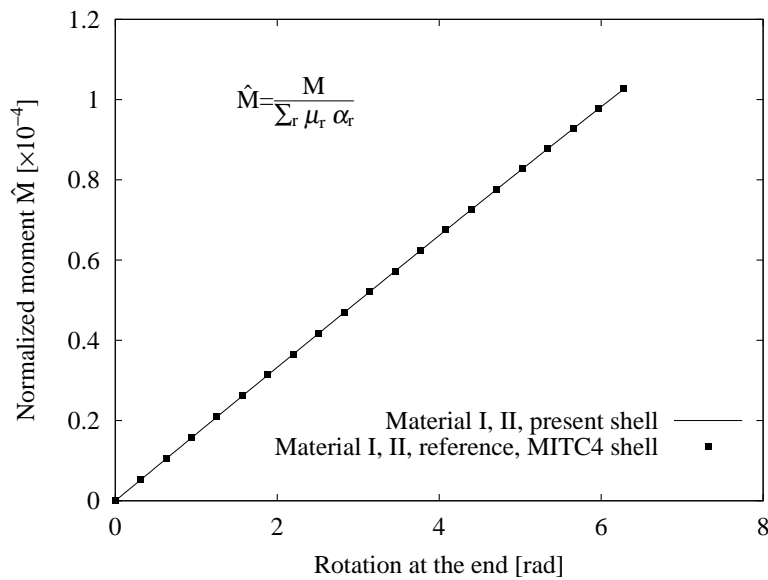


Fig.3.5 Moment-rotation curve, rolling up of a plate.

また , 本解析では , 接線剛性の完全性を確認するため , Table 3.1 で解の収束性 , Table 3.2 で解の感度を検証した . Table 3.1 は , Newton-Raphson 法による解の収束状況を示す . なお , 荷重ステップは 50 とし , 最終ステップでの値を示した . Table 3.1 より , 本解析で

は提案シェル要素が2次収束性を示し, consistent な接線剛性の効果が現れていることがわかる.

**Table 3.1** Values of normalized Euclidean norm of the residual.

Iteration number	Normalized norm
1	1.0
2	$0.603 \times 10^{-1}$
3	$0.309 \times 10^{-6}$
4	$0.373 \times 10^{-10}$
5	$0.103 \times 10^{-12}$

Table 3.2 は, 材料定数  $c_1 = \bar{c}_1(1 + \alpha_c)$  に対する回転角  $\omega$  の感度  $\frac{\partial \omega}{\partial \alpha_c}$  を示す. 感度解析で求めた値と, 参照解として直接有限差分法 (DFDM) で求めた値を示した. Table 3.2 より, 本提案シェル要素で求めた感度は, DFDM の値と比べ 0.0064% 程度の誤差におさまり, 十分な精度を示すことがわかった.

**Table 3.2** Comparison of rotation gradient with respect to material parameter  $c_1$ .

	Sensitivity analysis	DFDM
$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha_c}$	- 4.3585	- 4.3588 [ $\times 10^{-6}$ rad/Pa]

$\alpha_c$ : perturbation,  $c_1 = \bar{c}_1(1 + \alpha_c)$

### 3.3.3 薄肉円筒シェルの bending 解析

Fig.3.6 に示すように, 薄肉円筒シェルの両端に線荷重  $f$  を与えたときの変形を解析した. 本解析は, 大変位・大回転に加え, 板厚の変化を伴う大ひずみ問題となる. 文献<sup>(3.10)</sup>を参照し, 円筒の半径  $R$  を 10.0mm, 幅を 1.0mm, 板厚  $h$  を 0.5mm, 材料定数  $c_1, c_2$  をそれぞれ 5.5, 0.0MPa とした. 変形の対称性から, Fig.3.6 の AB 間の 1/4 対称モデルを用い, 周方向に 20 分割, 幅は 1 分割の 20 要素で解析を行う. なお, Fig.3.6 中の  $v_A, v_B$  はそれぞれ点 A, B における変位を表す.

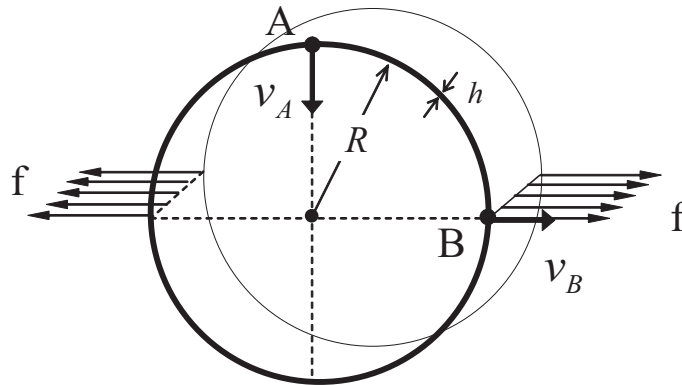


Fig.3.6 Bending of a cylindrical shell.

Fig.3.7 に各伸び率  $\frac{v_B}{R}$  における変形図を示す．また，Fig.3.8 に点 A,B における変位と荷重の関係を示す．

また，本解析においても，Table 3.3 で解の収束性，Table 3.4 で感度を検証した．Table 3.3 は，Newton-Raphson 法による解の収束状況を示し，荷重ステップは 50，最終ステップでの値を示した．Table 3.4 は，材料定数  $c_1 = \bar{c}_1(1 + \alpha_c)$  に対する点 B の変位  $v_B$  の感度  $\frac{\partial v_B}{\partial \alpha_c}$  を示す．感度解析で求めた値と，参照解として DFDM で求めた値を示した．DFDM と比べ 0.003% 程度の誤差におさまった．Fig.3.8，Table 3.3,3.4 より，板厚変化が伴うような大変形・大变位問題においても，本提案シェル要素は十分な収束性と精度を示すことがわかる．

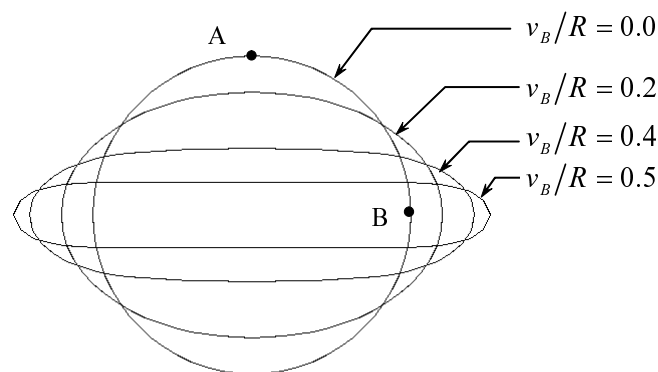


Fig.3.7 Deformed configurations, bending of a cylindrical shell.

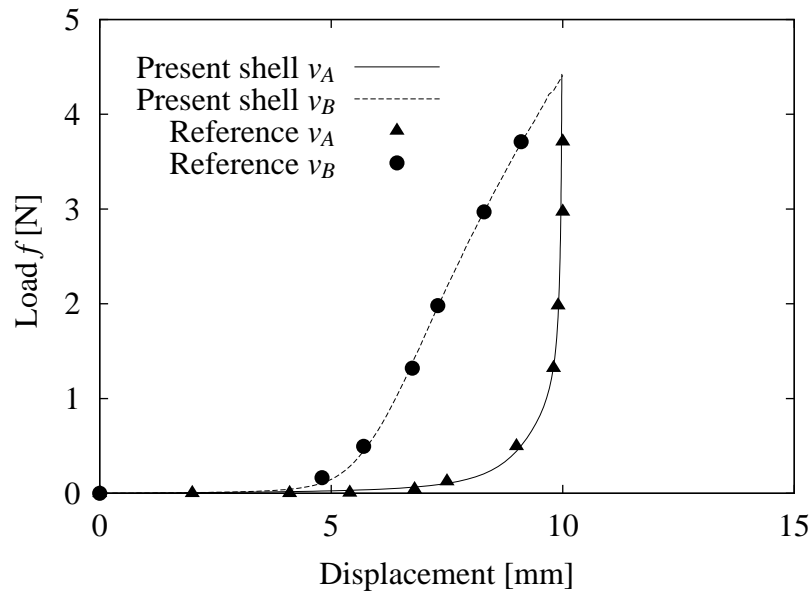


Fig.3.8 Load-displacement curve, bending of a cylindrical shell.

Table 3.3 Values of normalized Euclidean norm of the residual.

Iteration number	Normalized norm
1	1.0
2	$0.197 \times 10^{-5}$
3	$0.155 \times 10^{-11}$
4	$0.105 \times 10^{-16}$

Table 3.4 Comparison of displacement gradient with respect to material parameter  $c_1$ .

	Sensitivity analysis	DFDM
$\frac{\partial v_B}{\partial \alpha_c}$	- 0.62375	- 0.62373 [ $\times 10^{-9} \text{m/Pa}$ ]

$\alpha_c$ : perturbation,  $c_1 = \bar{c}_1(1 + \alpha_c)$

## 3.3.4 一様圧力を受ける円板の解析

Fig.3.9 に示すような半径 7.5mm , 板厚 0.5mm の周囲を支持した円板に下から一様に圧力を負荷する . 材料定数  $c_1$  ,  $c_2$  はそれぞれ 80,20MPa とし , Fig.3.9 のように 108 要素で解析を行う . 圧力は従動力として与え , 接線剛性マトリクスに荷重補正マトリクスを付加する . 変形の対称性から円板の 1/4 をモデル化し , 解析を実施した . Fig.3.9 に各圧力値における変形図を示す . Fig.3.10 に円板の中心点における変位と圧力との関係を示す . 参照解として文献<sup>(3.17)</sup> の値を併記した .

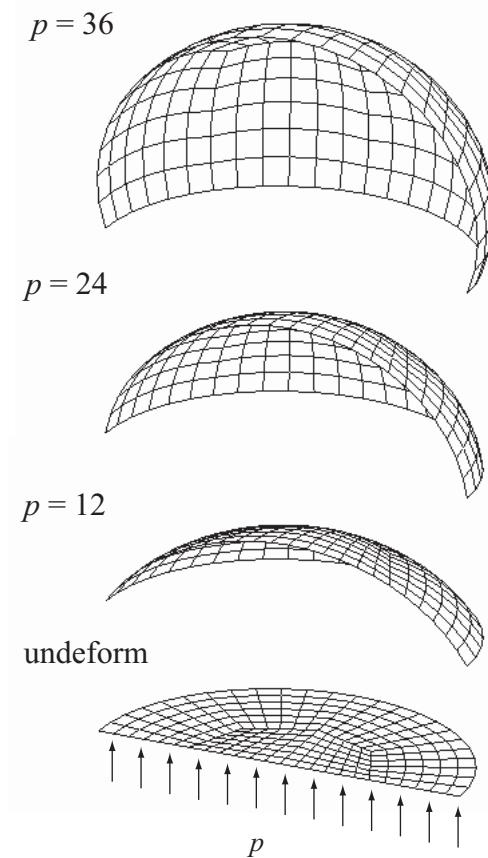


Fig.3.9 Sequence of deformed configurations

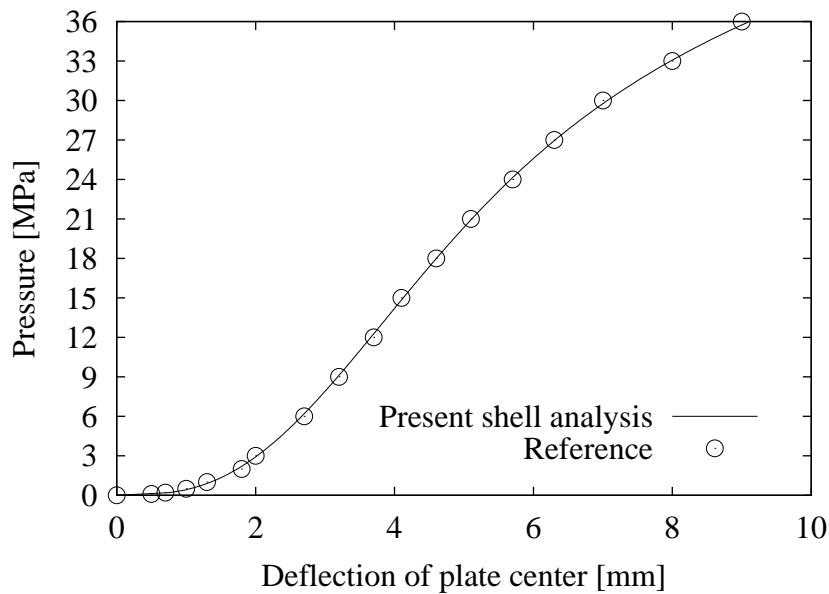


Fig.3.10 Plot of pressure versus deflection at plate center

Fig.3.10 より，本解析結果と参照解の良好な一致がみられ，従動力下における大変形問題に対する本提案シェル要素の妥当性を確認できた．

### 3.3.5 ゴムバルーン解析

半径  $R = 5.0\text{mm}$ ，板厚  $t = 0.1\text{mm}$  のゴムの球を内部から一様に圧力を負荷し膨張させる問題を考える．Fig.3.11 に示すように，変形の対称性から球の  $1/8$  対称モデルを用いる．圧力は従動力として与え，接線剛性マトリクスに荷重補正マトリクスを付加する．材料定数は， $c_1 = 0.3\text{MPa}$  とし， $c_2$  は  $0.$ ， $0.03$ ， $0.063$ ， $0.15$ ， $0.3\text{MPa}$  と変え，各材料定数の比率  $c_2/c_1$  に応じた荷重 変位関係の変化をみる．なお，本問題では，変形の途中で圧力が極大値を示すため，非線形解法として弧長法を用いた．Fig.3.12 にそれぞれ各材料定数による球の伸張比  $\lambda = r/R$  ( $r$  は変形後の半径) と圧力  $p$  の関係を示す．Fig.3.12 の解析結果は，文献<sup>(3.16)</sup> の解析解と完全に一致し，本非線形問題に対する提案手法の妥当性を確認できた．Fig.3.12 より，荷重 変位関係は， $c_2/c_1 = 0.21$  のときを境に， $c_2/c_1$  が大きい値のときは単調増加，小さい値のときは座屈現象が現れることがわかる． $c_2/c_1 = 0.21$  のときは途中で傾きが  $0$  になる変曲点を  $1$  点持ち， $0.21 > c_2/c_1 > 0.$  のときは極大点・極小点をそれぞれ  $1$  点づつ持つ座屈現象がみられ， $c_2/c_1 = 0.$  のとき，すなわち Neo-Hookean 体のときは極大点を経た後，単調に減少していく様子がみられた．このような座屈現象の物



理的な解釈は、ゴムバルーンが膨らむとき、一度吹き込みが始まると極値を迎えた点で飛び移りが起こり、変形が容易に進むことを意味する。この問題は、材料物性によって荷重変位関係が変化する材料非線形問題であることがわかる。

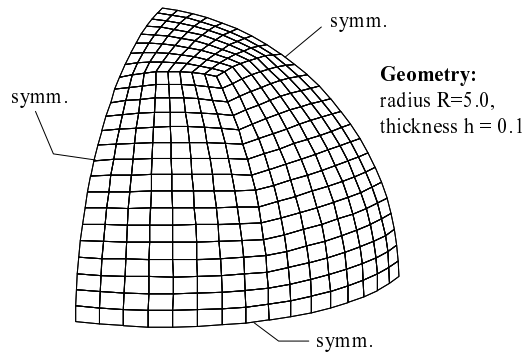


Fig.3.11 Inflation of spherical balloons.

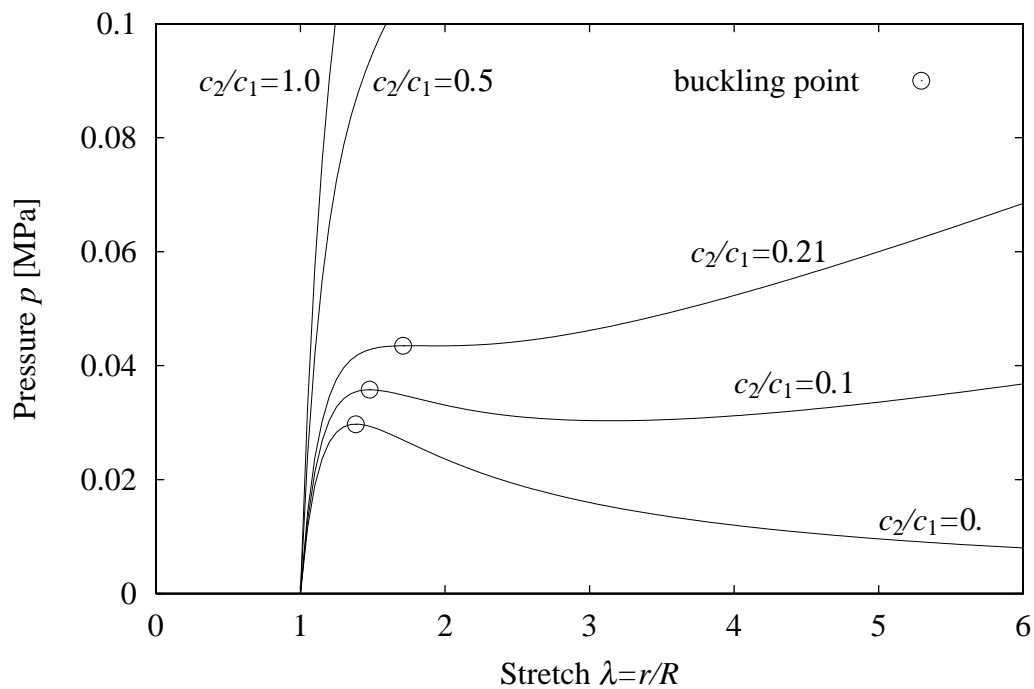


Fig.3.12 Plot of pressure versus stretch of balloons.

## 3.3.6 円孔付きゴム平板の引張解析

最後に、真中に孔の空いたゴム平板の引張解析を実施する。この問題は、孔の周りに局所的な不安定現象が現れる大変形問題で、Parisch<sup>(3.9)</sup> や Betsch<sup>(3.17)</sup> らによって解かれている。Fig.3.13 に示すような半径  $R = 3.0\text{mm}$ 、一辺の辺の長さ  $2L = 20\text{mm}$ 、板厚  $t = 0.1\text{mm}$  の孔空き平板を一様荷重  $F$  で引っ張る。材料定数  $c_1, c_2$  はそれぞれ  $25.0, 7.0\text{MPa}$  とした。変形の対称性から円板の  $1/4$  をモデル化し、解析を実施した。

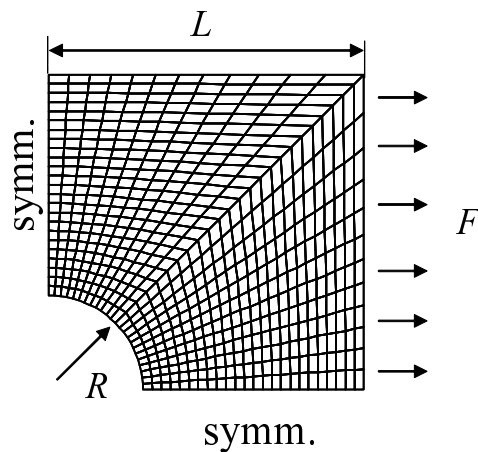


Fig.3.13 Analysis model of stretching of a plate with a hole.

Fig.3.14 に解析結果を示す。引張り荷重  $F$  と端辺の変位  $u$  の関係を示し、参照解として文献<sup>(3.17)</sup> の値を併記した。また、変形の様子と変形後の板厚の分布を Fig.3.15 に示す。解析結果は、文献<sup>(3.17)</sup> の解析解と完全に一致し、本非線形問題に対する提案手法の妥当性を確認できた。

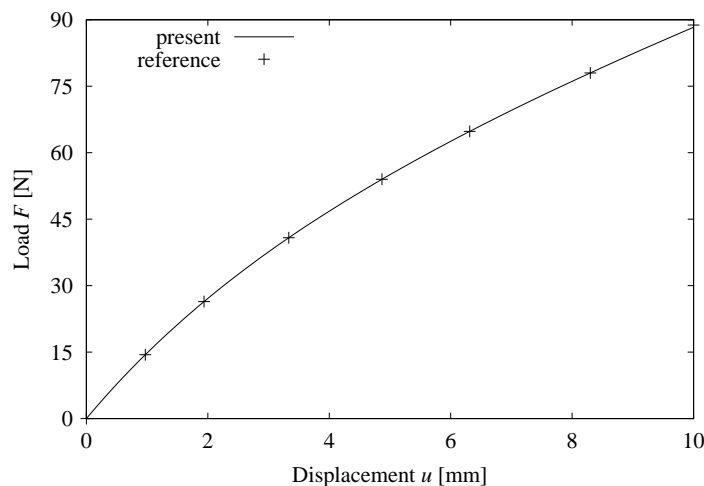
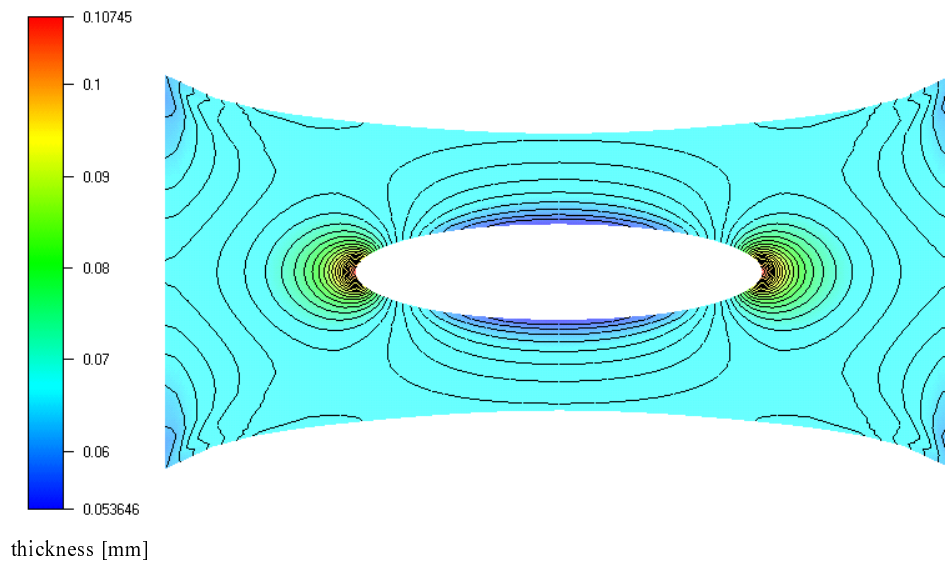
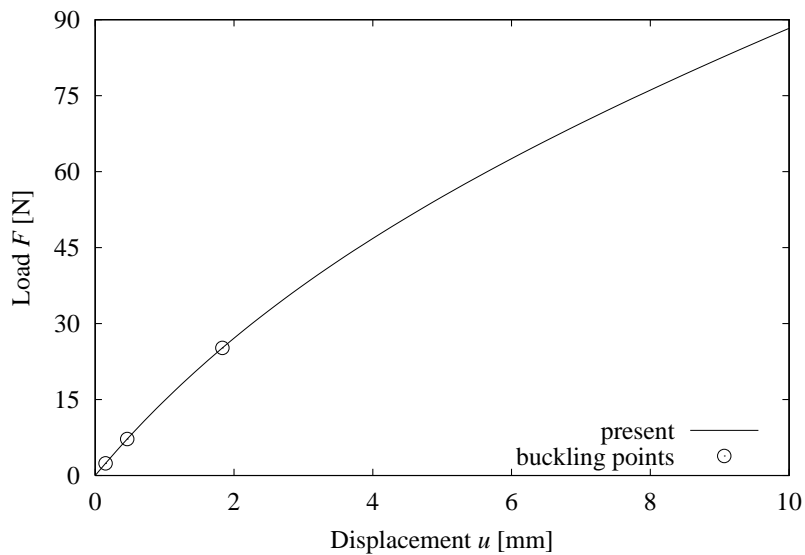


Fig.3.14 Applied load  $F$  versus displacement  $u$  of stretching of a plate with a hole.



**Fig.3.15** Deformed configuration with thickness distributions of stretching of a rubber sheet.

さらに、本解析において、座屈後解析により分岐点を探索した結果が Fig.3.16 である。



**Fig.3.16** Buckling points of stretching of a plate with a hole.

Fig.3.16 より、変形中複数の分岐点が現れ、荷重  $F = 1.78\text{N}$  という変形の初期において一番初めの分岐点が得られることがわかる。荷重  $F = 1.78\text{N}$  の分岐点における変形モー

ドを Fig.3.17 に示す .

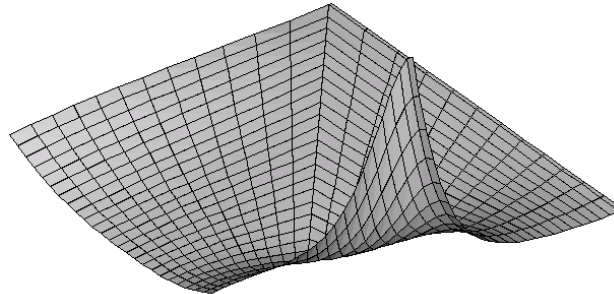


Fig.3.17 Buckling mode of stretching of a rubber sheet.

Fig.3.17 より , 孔の周りの一部が面外方向にたわむ分岐モードであることがわかる . ここで , Fig.3.17 の分岐モードを初期不正として与え , 再び同様の解析を行った . なお , 非線形解法として弧長法を用いた . 荷重 変位曲線は , Fig.3.14 と全く同じ応答であったが , Fig.3.18 のように変形モードが変化した . Fig.3.18 は , Fig.3.17 の分岐モードを初期不正として与えたときの変形図である .

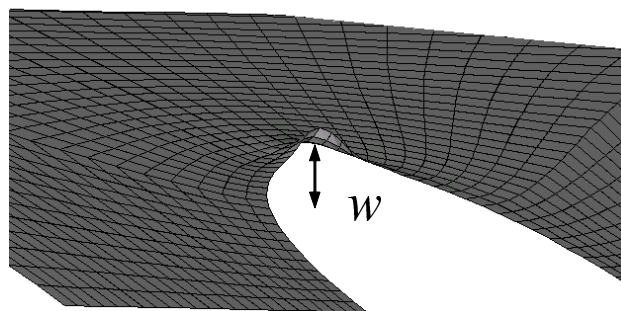


Fig.3.18 Deformed configuration with imperfection of buckling mode of stretching of a rubber sheet.

Fig.3.17 より , 初期不正によって誘導された分岐経路上の変形モードは , 面外方向にたわむことがわかる . Fig.3.19 に , 孔の周りの最大のたわみ量  $w$  と荷重  $F$  の関係を示す . 参照解として文献<sup>(3.17)</sup>の値を併記した .

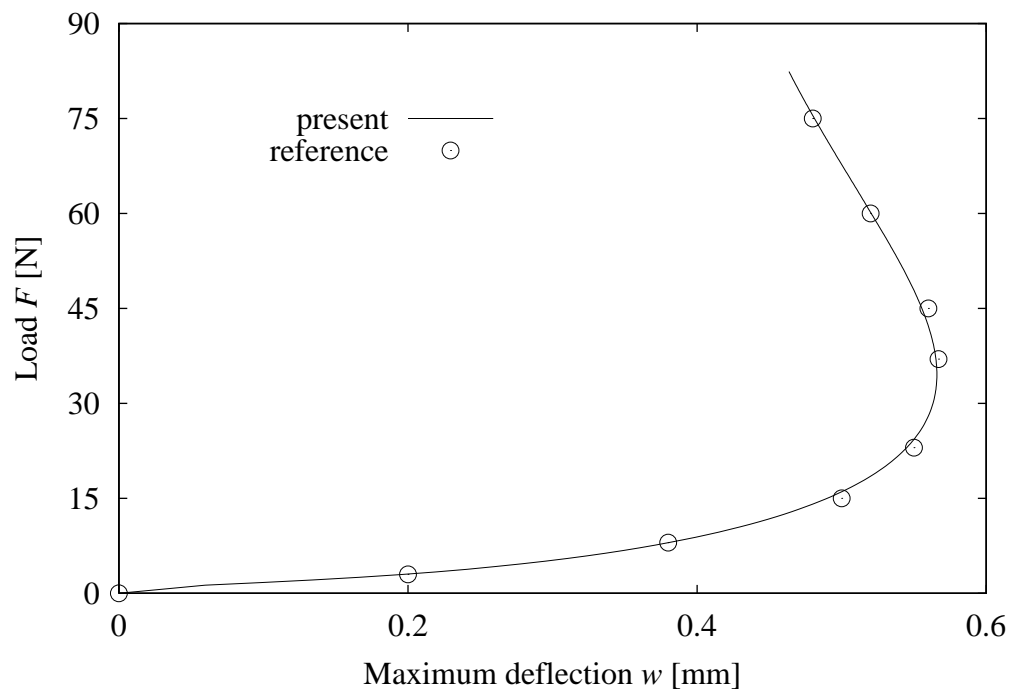


Fig.3.19 Plot of maximum out-of-plane deflections obtained in the post-buckling analysis.

Fig.3.19より，円孔付きのゴムシートを引っ張ったときに現れる，孔の周りのしわの発生メカニズムを検証する非線形解析において，本提案手法が有効に働くことが確認できた．

### 3.4 結言

本論文では，ひずみ仮定場を用いて，非圧縮超弾性解析のための大ひずみシェル要素を開発した．本シェル要素では面外せん断ひずみと板厚方向ひずみを要素内で仮定し，またシェルの面内平面応力条件から不定静水圧項を消去した．本定式化によって，新たに自由度を設けることなく，微小ひずみ要素と同じ変位・回転自由度のみで，非圧縮大ひずみシェル要素を実装することが可能となる．本論文では，上記の定式化に加え，基本的な解析例を通じて本手法の妥当性を確認した．

- (3.1) Yang, H.T.Y., Saigal, S., Masud, A. and Kapania, R.K., A survey of recent shell finite elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **47**, pp.101–127, 2000.
- (3.2) Brank, B., Korelc, J. and Ibrahimbegovic, A., Nonlinear shell problem formulation accounting for through-the-thickness stretching and its finite element implementation, *Computers and Structures*, **80**, pp.699–717, 2002.
- (3.3) Pimenta, P.M., Campello, E.M.B. and Wriggers, P., A fully nonlinear multi-parameter shell model with thickness variation and a triangular shell finite element, *Computational Mechanics*, **34**, pp.181–193, 2004.
- (3.4) Braun, M., Bischoff, M. and Ramm, E., Nonlinear shell formulations for complete three-dimensional constitutive laws including composites and laminates, *Computational Mechanics*, **15**, pp.1–18, 1994.
- (3.5) Betsch, P., Gruttmann, F., Stein, E., A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, **130**, pp.57–79, 1996.
- (3.6) Sze, K. Y., Yaot, L. Q., A hybrid stress ANS solid-shell element and its generalization for smart structure modelling. Part I solid-shell element formulation, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **48**, pp.545–564, 2000.
- (3.7) El-Abbasi, N. and Meguid, S.A., A new shell element accounting for through-thickness deformation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, **189**, pp.841–862, 2000.
- (3.8) Hughes, T.J.R. and Carnoy, E., Nonlinear finite element shell formulation accounting for large membrane strains, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.*, **39**, pp.69–82, 1983.
- (3.9) Parisch, H., Efficient non-linear finite element shell formulation involving large strains, *Eng. Comput.*, **3**, pp.121–128, 1986.
- (3.10) Basar, Y. and Ding, Y., Finite-element analysis of hyperelastic thin shells with large strains, *Computational Mechanics*, **18**, pp.200–214, 1996.
- (3.11) Schieck, B., Pietraszkiewicz, W. and Stumpf, H., Theory and numerical analysis of shells undergoing large elastic strains, *Int. J. Solids Structures*, **6**, pp.689–709, 1992.

- (3.12) Bathe, K.J. and Dvorkin, E.N., A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **22**, pp.697–722, 1986.
- (3.13) Parisch, H., An investigation of a finite rotation four node assumed strain shell element, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **31**, pp.127–150, 1991.
- (3.14) 久田俊明, 野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, pp.63,210–228, 1995.
- (3.15) Noguchi, H., Hisada, T., Sensitivity Analysis in Post-Buckling Problems of Shell Structures, *Comp. & Struct.*, **47**, No.4/5, pp.699–710, 1993.
- (3.16) Wempner, G., Mechanics of solids with applications to thin bodies, Sijthoff & Noordhoff, pp.512–515, 1981.
- (3.17) Betsch, P., Gruttmann, F., Stein, E., A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains, *Comp. Methods. Appl. Mech. Engng.*, **130**, pp.57–79, 1996.

## 第4章 ひずみの主不変量を用いた Ogden 材料モデルの実装

### 4.1 緒言

2章で述べたように，ゴムなどの高分子材料は，非圧縮超弾性体の仮定の下でしばしばモデル化され，今日までに様々なモデルが提案されている<sup>(4.1)(4.2)(4.3)(4.4)</sup>．その中でも，特に Mooney-Rivlin 体と Ogden 体が有名であり，広く使用されている．Mooney-Rivlin 体は，ひずみの主不変量を用いてひずみエネルギー関数が構築され，その関数形が比較的単純な形で与えられることから，数値解析上実装しやすい．一方，Ogden 材料モデルでは，ひずみエネルギー関数は伸張比（ひずみの主値）を用いて構築され，関数形が Mooney-Rivlin 体と比べ複雑になるものの，大ひずみ域に対しても，実験データと良好に一致した解を得ることから，最も精度の高いゴム材料モデルの一つとして認知されている．Ogden 材料モデルを有限要素解析に適用した例は，文献等<sup>(4.5)(4.6)</sup>がある．Ogden 材料モデルを用いて接線剛性を導く際，ひずみの主値が重根となった場合に，接線剛性が singularity になる問題がある．文献<sup>(4.5)</sup>では，関数の極限値を求める l'Hospital の定理を用いて，singularity-free な接線剛性を定式化した．また，文献<sup>(4.6)</sup>では，摂動法を用いて，主値が重根となった際の接線剛性の singularity を回避している．しかしながら，これらの方法は，ひずみの主値に対応した固有ベクトルを基底ベクトルとした成分を用いて構成則を計算しているため，全ての要素積分点において基底ベクトルの変換を実施しなければならず，数値解析的に高コストな手法である．Basar<sup>(4.7)</sup>を始めとしたいくつかの研究<sup>(4.8)(4.9)(4.10)</sup>では，Ogden 材料モデルのひずみエネルギー関数を，あらかじめ，ひずみの主不変量を用いて解析的に書き直し，上記の座標変換等の数値的な操作を省いた，basis-free と呼ばれる定式化を導いている．これらの手法は，Mooney-Rivlin 材料モデルの構成則を拡張する形で定式化され，効率的な Ogden 材料モデルの実装を可能とした．

一方，これら構成則モデルは，非圧縮性の拘束条件を導入する場合，構成則の表現形式は一意にはならない．それらの構成則モデルは互いに数学的には等価であるにも拘わらず，構成則の表現形式によっては，非線形方程式の解の収束が得られない不安定性がみられる．Basar らの研究では，これらの有限要素法の実装における数値解析上の安定性については詳細に議論されていない．そこで，本論文では，主不変量を用いた Ogden 材料モデルの



混合型ソリッド要素および大ひずみシェル要素への実装方法を示したあと、各有限要素における構成則の新たな表現形式を示し、数値解析上の安定性について検討を行う。また、簡単な検証例題や数値解析例を示し、本手法の妥当性や有効性を検討する。

以下本文中で、 $\otimes$  はテンソル積を表し、また本節以降特に断りがない限り、 $i, j$  はテンソル成分すなわち 1, 2, 3 の値を、添え字  $\alpha, \beta$  は面内成分すなわち 1, 2 の値をとるものとし、総和規約を適用する。

## 4.2 主不変量を用いた Ogden 材料モデルの定式化

### 4.2.1 主不変量を用いた Ogden 材料モデル<sup>(4.7)</sup>

Ogden 材料モデルは、非圧縮性ゴム状物質に対する等方性弾性ポテンシャル  $W$  として、次式のように定義される。

$$W = \sum_{r=1}^N \frac{\mu_r}{\alpha_r} (\lambda_1^{\alpha_r} + \lambda_2^{\alpha_r} + \lambda_3^{\alpha_r} - 3) \quad (4.1)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (4.2)$$

ただし、 $N$  は正の定数で、 $\mu_r$  および  $\alpha_r$  は、 $\mu_r \alpha_r > 0 (k = 1, 2, \dots, N)$  を満足する材料定数である。ここで、 $\lambda_i$  は右ストレッチテンソル  $U (= C^{1/2})$ 、ただし  $C$  は右 Cauchy-Green 変形テンソル) の主値である。上式で、 $N = 2$ 、 $\mu_1 = 2c_1$ 、 $\alpha_1 = 2$ 、 $\mu_2 = -2c_2$ 、 $\alpha_2 = -2$  のとき、次式の Mooney-Rivlin 材料モデルの式に帰着する。

$$W = c_1(I - 3) + c_2(II - 3) \quad (4.3)$$

$$III = 1 \quad (4.4)$$

ただし、 $c_1, c_2$  は Mooney 定数、 $I, II, III$  は  $C$  の第 1, 2, 3 主不変量である。式 (4.2)、(4.4) は非圧縮条件を示す。ここで、後の式展開の利便性を考え、式 (4.1)、(4.2) を次式のように  $C$  の主値  $\Lambda_i = \lambda_i^2$  を用いて書き換える。

$$W = \sum_{r=1}^N \frac{\mu_r}{\alpha_r} (\Lambda_1^{\alpha_r/2} + \Lambda_2^{\alpha_r/2} + \Lambda_3^{\alpha_r/2} - 3) \quad (4.5)$$

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 = 1 \quad (4.6)$$

上の Ogden 式は、 $C$  の主値を用いるため、超弾性体の定義にしたがって応力テンソル、構成則テンソルを求める際には、固有値解析を全ての積分点において実施し、さらに基底ベクトルを主軸方向へ変換させる数値的な操作を行わなければならない。

Basar<sup>(4.7)</sup> らは、次式のように、 $\Lambda_i$  を主不変量  $I, II, III$  の関数として表した。

$$\Lambda_i = \Lambda_i(I, II, III) \quad (4.7)$$

上式から，式 (4.5) の Ogden 材料モデルの構成則を主不変量の関数として書き直せる．一般に，Ogden 材料モデルの応力テンソル・構成則テンソルは，主値に対応した固有ベクトルを基底とした座標系に変換してから求める必要がある．以上のように構成則をあらかじめ主不変量を用いて表しておけば，Mooney-Rivlin 材料モデルのときと同じように主不変量の微分計算を考えればよく， $C$  から主値を求める固有値解析と固有ベクトルを基底とした座標系への座標変換という数値的な操作を省くことができる．

まず，超弾性体の定義より，第2種 Piola-Kirchhoff 応力テンソル  $S$ ，構成則テンソル  $D$  はそれぞれ次式のように与えられる．

$$S = 2 \frac{\partial W}{\partial C} \quad (4.8)$$

$$D = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial C \partial C} \quad (4.9)$$

$W$  は  $\Lambda_i$  の関数であるから，微分の連鎖則より，式 (4.8)，(4.9) はそれぞれ次式のようになる．

$$S = 2 \frac{\partial W}{\partial \Lambda_i} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial C} \quad (4.10)$$

$$D = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \Lambda_i \partial \Lambda_j} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial C} \otimes \frac{\partial \Lambda_j}{\partial C} + 4 \frac{\partial W}{\partial \Lambda_i} \frac{\partial^2 \Lambda_i}{\partial C \partial C} \quad (4.11)$$

ここで，式 (4.7) より， $W$  は主不変量  $I, II, III$  の関数でもあることから，式 (4.10)，(4.11) を次式のように書き直すことを考える．

$$S = 2 \left( a_I \frac{\partial I}{\partial C} + a_{II} \frac{\partial II}{\partial C} + a_{III} \frac{\partial III}{\partial C} \right) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} D = 4 & \left( b_I \frac{\partial^2 I}{\partial C \partial C} + b_{II} \frac{\partial^2 II}{\partial C \partial C} + b_{III} \frac{\partial^2 III}{\partial C \partial C} \right. \\ & + c_{I I} \frac{\partial I}{\partial C} \otimes \frac{\partial I}{\partial C} + c_{II II} \frac{\partial II}{\partial C} \otimes \frac{\partial II}{\partial C} + c_{III III} \frac{\partial III}{\partial C} \otimes \frac{\partial III}{\partial C} \\ & \left. + c_{I II} \frac{\partial I}{\partial C} \otimes \frac{\partial II}{\partial C} + c_{I III} \frac{\partial I}{\partial C} \otimes \frac{\partial III}{\partial C} + c_{II III} \frac{\partial II}{\partial C} \otimes \frac{\partial III}{\partial C} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

ただし， $a_K, b_K, c_{KL} (K, L = I, II, III)$  は式 (4.10)，(4.11) から式 (4.12)，(4.13) へ変換する際に求められる未知係数である．ここで， $a_I = b_I = c_1, a_{II} = b_{II} = c_2, a_{III} = b_{III} = 0, c_{KL} = 0$  のとき，式 (4.12)，(4.13) は Mooney-Rivlin 材料モデルに帰着する．

4.2.2 未知係数  $a_K, b_K, c_{KL}$  の求め方<sup>(4.9)</sup>

式 (4.7) は、次式の特性方程式の根として導かれる。

$$\Lambda^3 - I\Lambda^2 + II\Lambda - III = 0 \quad (4.14)$$

$\Lambda_i$  の条件  $\Lambda_1 \neq \Lambda_2 \neq \Lambda_3$ ,  $\Lambda_1 > \Lambda_2 = \Lambda_3$ ,  $\Lambda_1 < \Lambda_2 = \Lambda_3$ ,  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3$  によって、式 (4.14) の解が異なるため、それぞれの場合について以下に示す。

いま、次の4つの関数を定義する。

$$f(I, II, III) = I^2 - 3II \quad (4.15)$$

$$g(I, II, III) = 27III^2 + 4II^3I^2II^2 + 4I^3III - 18IIIII \quad (4.16)$$

$$h(I, II, III) = \frac{2I^3}{27} - \frac{III}{3} + III \quad (4.17)$$

$$w(I, II, III) = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[ \frac{2I^3 - 9III + 27III}{2(I^2 - 3II)^{3/2}} \right] \quad (4.18)$$

このとき、上の4つの  $\Lambda_i$  の条件について、以下のように場合分けを行う。

(1)  $f = 0$  のとき、 $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3$

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \frac{1}{3}I \quad (4.19)$$

(2)  $f \neq 0, g = 0, h > 0$  のとき、 $\Lambda_1 > \Lambda_2 = \Lambda_3$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{3} \left[ I + 2\sqrt{I^2 - 3II} \right] \quad (4.20)$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_3 = \frac{1}{3} \left[ I - \sqrt{I^2 - 3II} \right] \quad (4.21)$$

(3)  $f \neq 0, g = 0, h < 0$  のとき、 $\Lambda_1 < \Lambda_2 = \Lambda_3$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{3} \left[ I - 2\sqrt{I^2 - 3II} \right] \quad (4.22)$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_3 = \frac{1}{3} \left[ I + \sqrt{I^2 - 3II} \right] \quad (4.23)$$

(4)  $f \neq 0, g \neq 0$  のとき、 $\Lambda_1 \neq \Lambda_2 \neq \Lambda_3$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{3}I + \frac{2}{3}\sqrt{I^2 - 3II} \cos w \quad (4.24)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{3}I + \frac{2}{3}\sqrt{I^2 - 3II} \cos\left(\frac{2}{3}\pi - w\right) \quad (4.25)$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{3}I + \frac{2}{3}\sqrt{I^2 - 3II} \cos\left(\frac{2}{3}\pi + w\right) \quad (4.26)$$

式(4.19) ~ (4.26) より, 上の4つの条件それぞれに対して,  $(\partial\Lambda_i)/(\partial\mathbf{C})$ ,  $(\partial^2\Lambda_i)/(\partial\mathbf{C}\partial\mathbf{C})$  と  $(\partial K)/(\partial\mathbf{C})$ ,  $(\partial^2 K)/(\partial\mathbf{C}\partial\mathbf{C})$ ,  $(K = I, II, III)$  の間の関係を導き, 式(4.10), (4.11) へ代入すると, 未知係数  $a_K, b_K, c_{KL}$  を決定することができる. それぞれの場合の  $a_K, b_K, c_{KL}$  を以下に示す. なお, 具体的な計算方法は文献<sup>(4.7)</sup>の通りである.

まず, 次の関数を定義する.

$$\begin{aligned}\bar{\omega}(\Lambda) &= \sum_r \frac{\mu_r}{\alpha_r} (\Lambda^{\alpha_r/2} - 1), \\ W &= \bar{\omega}(\Lambda_1) + \bar{\omega}(\Lambda_2) + \bar{\omega}(\Lambda_3) \\ \bar{\omega}'(\Lambda) &= \frac{d\bar{\omega}}{d\Lambda} = \sum_r \frac{\mu_r}{2} \Lambda^{(\alpha_r/2)-1}, \\ \bar{\omega}''(\Lambda) &= \frac{d^2\bar{\omega}}{d\Lambda^2} = \sum_r \frac{\mu_r}{2} \left(\frac{\alpha_r}{2} - 1\right) \Lambda^{(\alpha_r/2)-2}\end{aligned}\quad (4.27)$$

$$\begin{aligned}D_1 &= (\Lambda_1 - \Lambda_2)(\Lambda_1 - \Lambda_3), \\ D_2 &= (\Lambda_2 - \Lambda_3)(\Lambda_2 - \Lambda_1), \\ D_3 &= (\Lambda_3 - \Lambda_1)(\Lambda_3 - \Lambda_2)\end{aligned}\quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \bar{\omega}'(\Lambda_1) - \bar{\omega}'(\Lambda_2) - (\Lambda_1 - \Lambda_2)\bar{\omega}''(\Lambda_2), \\ \Omega_2 &= \bar{\omega}''(\Lambda_1) - \bar{\omega}''(\Lambda_2)\end{aligned}\quad (4.29)$$

このとき,  $a_K, b_K, c_{KL}$  は  $\Lambda_i$  の条件により, 以下のように表される.

(1)  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3$  のとき

$$\begin{aligned}a_I &= \bar{\omega}'(\Lambda), a_{II} = a_{III} = 0, \\ b_I &= \bar{\omega}'(\Lambda) + 2\Lambda\bar{\omega}''(\Lambda), b_{II} = -\bar{\omega}''(\Lambda), b_{III} = 0, \\ c_{II} &= \bar{\omega}''(\Lambda), \\ c_{IIII} &= c_{IIII} = c_{IIII} = c_{IIII} = c_{IIII} = 0\end{aligned}\quad (4.30)$$

(2)  $\Lambda_1 > \Lambda_2 = \Lambda_3$  または  $\Lambda_1 < \Lambda_2 = \Lambda_3$  のとき

$$\begin{aligned}a_I &= [\bar{\omega}'(\Lambda_1) - \bar{\omega}'(\Lambda_2)] \frac{\Lambda_1^2}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2} + \bar{\omega}'(\Lambda_2) \\ a_{II} &= -[\bar{\omega}'(\Lambda_1) - \bar{\omega}'(\Lambda_2)] \frac{\Lambda_1}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2} \\ a_{III} &= [\bar{\omega}'(\Lambda_1) - \bar{\omega}'(\Lambda_2)] \frac{\Lambda_1}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_I &= \Omega_1 \frac{\Lambda_1^2}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2} + \bar{\omega}'(\Lambda_2) + \bar{\omega}''(\Lambda_2)(\Lambda_1 + \Lambda_2) \\
 b_{II} &= -\Omega_1 \frac{\Lambda_1}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2} - \bar{\omega}''(\Lambda_2) \\
 b_{III} &= \Omega_1 \frac{1}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2} \\
 c_{I I} &= \Omega_1 \frac{-4\Lambda_1^3\Lambda_2}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^5} + \Omega_2 \frac{\Lambda_1^4}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^4} + \bar{\omega}''(\Lambda_2) \\
 c_{II II} &= \Omega_1 \frac{-2\Lambda_1(\Lambda_1 + \Lambda_2)}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^5} + \Omega_2 \frac{\Lambda_1^2}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^4} \\
 c_{III III} &= \Omega_1 \frac{-4}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^5} + \Omega_2 \frac{1}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^4} \\
 c_{I II} &= \Omega_1 \frac{\Lambda_1^2(\Lambda_1 + 3\Lambda_2)}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^5} + \Omega_2 \frac{-\Lambda_1^3}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^4} \\
 c_{I III} &= c_{II II} \\
 c_{II III} &= \Omega_1 \frac{(3\Lambda_1 + \Lambda_2)}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^5} + \Omega_2 \frac{-\Lambda_1^3}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^4}
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

(3)  $\Lambda_1 \neq \Lambda_2 \neq \Lambda_3$  のとき

$$\begin{aligned}
 a_I &= b_I = \sum_{i=1}^3 \frac{\bar{\omega}'(\Lambda_i)\Lambda_i^2}{D_i}, \\
 a_{II} &= b_{II} = -\sum_{i=1}^3 \frac{\bar{\omega}'(\Lambda_i)\Lambda_i}{D_i}, \\
 a_{III} &= b_{III} = \sum_{i=1}^3 \frac{\bar{\omega}'(\Lambda_i)}{D_i} \\
 c_{I I} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\Lambda_i^2}{D_i^2} \left[ \bar{\omega}''(\Lambda_i)\Lambda_i^2 + 2\frac{\bar{\omega}'(\Lambda_i)(3III - \Lambda_i II)}{D_i} \right] \\
 c_{II II} &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{D_i^2} \left[ \bar{\omega}''(\Lambda_i)\Lambda_i^2 + 2\frac{\bar{\omega}'(\Lambda_i)(III - \Lambda_i^3)}{D_i} \right] \\
 c_{III III} &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{D_i^2} \left[ \bar{\omega}''(\Lambda_i) + 2\frac{\bar{\omega}'(\Lambda_i)(I - 3\Lambda_i)}{D_i} \right] \\
 c_{I II} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\Lambda_i}{D_i^2} \left[ -\bar{\omega}''(\Lambda_i)\Lambda_i^2 + \frac{\bar{\omega}'(\Lambda_i)(\Lambda_i^2 I - 3III)}{D_i} \right] \\
 c_{I III} &= c_{II II} \\
 c_{II III} &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{D_i^2} \left[ -\bar{\omega}''(\Lambda_i)\Lambda_i + \frac{\bar{\omega}'(\Lambda_i)(3\Lambda_i^2 I - II)}{D_i} \right]
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

なお，一般に  $a_K, b_K$  は， $\Lambda_i$  が 2 重根，3 重根のときは  $a_K \neq b_K$  となる．また，上の (1)

~(4) の場合分けの計算を実際に行う際は、式  $f = 0, g = 0$  の判定基準として、それぞれ  $|f| < 1.0 \times 10^{-12}, |g| < 1.0 \times 10^{-6}$  とおいたとき、最もゼロ割、オーバーフローなどの計算実行エラーを回避する傾向にあった。

### 4.2.3 混合型ソリッド要素の定式化

以上の主不変量を用いた Ogden 材料モデルの構成則を等容変形、体積変形に分離した形で混合型ソリッド要素へ適用した例は筆者らの知る限りない。そこで本節では、主不変量を用いた Ogden 材料モデルの混合型ソリッド要素への実装方法を示す。

混合法の場合、新たな未知数として不定静水圧  $p$  を導入し、次式のように等容変形、体積変形に分離して第2種 Piola-Kirchhoff 応力テンソル、構成則テンソルを定義する (4.11)(4.12)(4.13)。

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} + 2p \frac{\partial III}{\partial \mathbf{C}} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{D} = 4\bar{\mathbf{D}} + 4p \frac{\partial^2 III}{\partial \mathbf{C} \partial \bar{\mathbf{C}}} \quad (4.34)$$

ここで、 $\bar{W}, \bar{\mathbf{C}}$  は、それぞれひずみエネルギー  $W$ 、右 Cauchy-Green 変形テンソル  $\mathbf{C}$  から体積変形を除いた  $\bar{W}, \bar{\mathbf{C}}$  の偏差部分である。このとき、 $\bar{W}$  は  $\bar{\mathbf{C}}$  の関数となり、 $\bar{\mathbf{C}}$  は次式のように定義される。

$$\bar{\mathbf{C}} = III^{-\frac{1}{3}} \mathbf{C} \quad (4.35)$$

また、式 (4.34) 中の  $\bar{\mathbf{D}}$  は  $(\partial^2 \bar{W}) / (\partial \bar{\mathbf{C}} \partial \bar{\mathbf{C}})$  のテンソル値テンソル関数で、次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}} &= \bar{\mathbf{D}}_{DEV} - \frac{2}{3} \bar{\mathbf{S}} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \frac{2}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{S}} \\ &+ \frac{2}{3} J^{-\frac{2}{3}} \left( 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbf{C} \right) \left[ \mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

ただし、以下に定義されるテンソルを用いる。

$$\bar{\mathbf{S}} = 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} \quad (4.37)$$

$$(\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}})_{ijkl} \equiv \frac{1}{2} \left[ C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} + C_{il}^{-1} C_{jk}^{-1} \right] \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}_{DEV} &= 4J^{-\frac{4}{3}} \left[ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{C}} \partial \bar{\mathbf{C}}} + \frac{1}{9} (\mathbf{C} : \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{C}} \partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right. \\ &\left. - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes (\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{C}} \partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbf{C}) - \frac{1}{3} (\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{C}} \partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbf{C}) \otimes \mathbf{C}^{-1} \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

以上より，式 (4.5) の Ogden 体の第 2 種 Piola-Kirchhoff 応力テンソル，構成則テンソルを主不変量を用いて導く場合は，それぞれ次式の計算が必要となる．

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{C}} = \bar{a}_I \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{C}} + \bar{a}_{II} \frac{\partial \bar{II}}{\partial \bar{C}} + \bar{a}_{III} \frac{\partial \bar{III}}{\partial \bar{C}} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{C} \partial \bar{C}} &= \bar{b}_I \frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial \bar{C} \partial \bar{C}} + \bar{b}_{II} \frac{\partial^2 \bar{II}}{\partial \bar{C} \partial \bar{C}} + \bar{b}_{III} \frac{\partial^2 \bar{III}}{\partial \bar{C} \partial \bar{C}} \\ &+ \bar{c}_{I I} \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{C}} + \bar{c}_{II II} \frac{\partial \bar{II}}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{II}}{\partial \bar{C}} + \bar{c}_{III III} \frac{\partial \bar{III}}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{III}}{\partial \bar{C}} \\ &+ \bar{c}_{I II} \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{II}}{\partial \bar{C}} + \bar{c}_{I III} \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{III}}{\partial \bar{C}} + \bar{c}_{II III} \frac{\partial \bar{II}}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{III}}{\partial \bar{C}} \end{aligned} \quad (4.41)$$

ここで， $\bar{I}$ ， $\bar{II}$ ， $\bar{III}$  は  $\bar{C}$  の第 1，2，3 主不変量である．また， $\bar{a}_K$ ， $\bar{b}_K$ ， $\bar{c}_{KL}$  は，前節で導いた未知係数  $a_K$ ， $b_K$ ， $c_{KL}$  の計算で， $\Lambda_i$  の代わりに  $\bar{C}$  の主値  $\bar{\Lambda}_i$  を用いることで求められる．なお，式 (4.33) ~ (4.41) の中で，以下のテンソルの計算を用いる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial C} &= I, \quad \frac{\partial II}{\partial C} = II - C, \quad \frac{\partial III}{\partial C} = III C^{-1}, \\ \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{C}} &= I, \quad \frac{\partial \bar{II}}{\partial \bar{C}} = \bar{II} - \bar{C}, \quad \frac{\partial \bar{III}}{\partial \bar{C}} = \bar{III} \bar{C}^{-1}, \\ \frac{\partial \bar{C}}{\partial C} &= III^{-\frac{1}{3}} \left[ I - \frac{1}{3} C \otimes C^{-1} \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

#### 4.2.4 非圧縮超弾性シェル要素の定式化

ここでは，主不変量を用いた Ogden 材料モデルの構成則を，著者らが開発した新たな非圧縮超弾性シェル要素<sup>(4.15)</sup>へ適用した例を示す．文献<sup>(4.15)</sup>のシェル要素は，既往の大ひずみシェル要素<sup>(4.7)</sup>の定式化とは異なり，板厚方向にひずみ仮定場を設けることで，面外せん断ひずみを考慮しながら板厚を陰的かつ効率的に取り扱っている．本シェル要素では，構成則の導出に平面応力条件と非圧縮条件を用いる．非圧縮性から生じる不定静水圧  $p$  は，シェルの平面応力条件により消去される．

まず，非圧縮条件  $III = 1$  より， $C$  の板厚方向の成分  $C_{33}$  を消去する．主不変量  $I$ ， $II$ ， $III$  は，成分  $C_{ij}$  を用いると

$$I = C_{ii} \quad (4.43)$$

$$II = \frac{1}{2}(C_{ii}C_{jj} - C_{ij}C_{ji}) \quad (4.44)$$

$$III = \varepsilon_{ijk}C_{1i}C_{2j}C_{3k} \quad (4.45)$$

と表される．ただし， $\varepsilon_{ijk}$  は交代記号である．したがって，式 (4.45) より  $C_{33}$  は

$$C_{33} = -\frac{R}{S} \quad (4.46)$$

と表され,  $C_{33}$  を除いて主不変量  $I, II, III$  を構成し直すと次式のようになる.

$$I' = P - \frac{R}{S} \quad (4.47)$$

$$II' = Q - \frac{PR}{S} \quad (4.48)$$

$$III' = 1 \quad (4.49)$$

ただし

$$P = C_{\alpha\alpha} \quad (4.50)$$

$$Q = \frac{1}{2}(C_{\alpha\alpha}C_{\beta\beta} - C_{\alpha\beta}C_{\beta\alpha}) - C_{3\alpha}C_{\alpha 3} \quad (4.51)$$

$$R = \varepsilon_{ij\alpha}C_{i1}C_{j2}C_{\alpha 3} - 1 \quad (4.52)$$

$$S = \varepsilon_{\alpha\beta 3}C_{\alpha 1}C_{\beta 2} \quad (4.53)$$

である. 以上のように修正された主不変量  $I', II', III'$  を用いて, Ogden 体の第2種 Piola-Kirchhoff 応力テンソルを求めると次式のようになる.

$$\mathbf{S} = 2 \left( a_I \frac{\partial I'}{\partial \mathbf{C}} + a_{II} \frac{\partial II'}{\partial \mathbf{C}} + a_{III} \frac{\partial III'}{\partial \mathbf{C}} \right) + 2p \frac{\partial III}{\partial \mathbf{C}} \quad (4.54)$$

なお上式では, 付録で示した  $I', II', III'$  の  $\mathbf{C}$  による微分の計算式を用いる.

ここで,  $C_{33}$  は  $I', II', III'$  に関して独立した変数であるため,  $(\partial I')/(\partial C_{33}) = 0$ ,  $(\partial II')/(\partial C_{33}) = 0$ ,  $(\partial III')/(\partial C_{33}) = 0$  となる. したがって, 平面応力条件  $S^{33} = 0$  から  $p = 0$  が導かれる. 以上より, 式 (4.54) は次式のように書き直される.

$$\mathbf{S} = 2 \left[ a_I \left( \frac{\partial I'}{\partial \mathbf{C}} - \frac{\mathbf{C}^{-1}}{S} \right) + a_{II} \left( \frac{\partial II'}{\partial \mathbf{C}} - P \frac{\mathbf{C}^{-1}}{S} \right) \right] \quad (4.55)$$

また, 構成則テンソル  $\mathbf{D}$  は次式のようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = & 4 \left( b_I \frac{\partial^2 I'}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} + b_{II} \frac{\partial^2 II'}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \right. \\ & \left. + c_{I I} \frac{\partial I'}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I'}{\partial \mathbf{C}} + c_{II II} \frac{\partial II'}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial II'}{\partial \mathbf{C}} + c_{I II} \frac{\partial I'}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial II'}{\partial \mathbf{C}} \right) \end{aligned} \quad (4.56)$$

上式では, 次式の  $I', II', III'$  の  $\mathbf{C}$  による微分の計算式を用いる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I'}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial I}{\partial \mathbf{C}} - \frac{\mathbf{C}^{-1}}{S}, \\ \frac{\partial II'}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial II}{\partial \mathbf{C}} - P \frac{\mathbf{C}^{-1}}{S} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial III'}{\partial \mathbf{C}} &= 0 \\
\frac{\partial^2 I'}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial^2 I}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \\
&\quad - \left( \frac{\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}}{S} - \frac{\frac{\partial S}{\partial \mathbf{C}} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \frac{\partial S}{\partial \mathbf{C}}}{S^2} \right) \\
\frac{\partial^2 II'}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial^2 II}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \\
&\quad - P \left( \frac{\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}}{S} - \frac{\frac{\partial S}{\partial \mathbf{C}} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \frac{\partial S}{\partial \mathbf{C}}}{S^2} \right) \\
&\quad - \left( \frac{\partial P}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\mathbf{C}^{-1}}{S} + \frac{\mathbf{C}^{-1}}{S} \otimes \frac{\partial P}{\partial \mathbf{C}} \right) \\
\frac{\partial^2 III'}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} &= 0
\end{aligned} \tag{4.57}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_{ij}^{-1}}{\partial C_{kl}} &= \frac{1}{2} (C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} + C_{il}^{-1} C_{jk}^{-1}) \\
\frac{\partial S}{\partial C_{kl}} &= \varepsilon_{3ik} \varepsilon_{3jl} C_{ij} \\
\frac{\partial P}{\partial C_{kl}} &= \delta_{kl} - \delta_{3k} \delta_{3l}
\end{aligned} \tag{4.58}$$

である。ただし、 $\delta_{kl}$  は Kronecker の delta である。なお、 $a_K, b_K, c_{KL}$  は、4.2.1 節で導いた未知係数と同様のものを用いる。

#### 4.2.5 未知係数 $a_K, b_K, c_{KL}$ の取り扱い

4.2.1 節より、未知係数  $a_K, b_K, c_{KL}$  は、 $\Lambda_i$  の条件によって 4 通りの表現があり、非圧縮条件式 (4.6) まで考慮すると、 $\Lambda_i$  が 2 重根、3 重根のときは一般に  $a_K \neq b_K$  であることを導いた。一方、 $W$  を主不変量  $I, II, III$  の関数として、未知係数  $a_K, b_K, c_{KL}$  を考慮した場合、次の関係式が恒等的に成り立つ。

$$\begin{aligned}
a_I &= \frac{\partial W}{\partial I}, a_{II} = \frac{\partial W}{\partial II}, a_{III} = \frac{\partial W}{\partial III}, \\
b_I &= \frac{\partial W}{\partial I}, b_{II} = \frac{\partial W}{\partial II}, b_{III} = \frac{\partial W}{\partial III}, \\
c_{I I} &= \frac{\partial^2 W}{\partial I \partial I}, c_{II II} = \frac{\partial^2 W}{\partial II \partial II}, c_{III III} = \frac{\partial^2 W}{\partial III \partial III}, \\
c_{I II} &= \frac{\partial^2 W}{\partial I \partial II}, c_{I III} = \frac{\partial^2 W}{\partial I \partial III}, c_{II III} = \frac{\partial^2 W}{\partial II \partial III}
\end{aligned} \tag{4.59}$$

式 (4.59) より, 明らかに  $a_K = b_K$  が成り立つ.

一般に, Ogden 体の構成則モデルは, 非圧縮性まで考慮した場合, 構成則の形は一意にはならない. (例えば, 式 (4.6) より, ひずみエネルギー関数  $W$  の表現は一意にはならない.) その結果, ひずみエネルギー関数  $W$  の微分後の形が異なる場合がある. 文献<sup>(4.12)</sup>においても, 非圧縮超弾性体の構成則で用いる非圧縮の拘束関数の選択によって, 応力テンソル・構成則テンソルの表現形式が変わり, また解の精度に差が現れることが報告されている. 応力テンソル・構成則テンソルを求める際に現れる未知係数  $a_K, b_K$  も, 恒等式 (4.59) によって  $a_K = b_K$  が得られる一方, 文献<sup>(4.7)</sup>の方法に従って非圧縮条件下で求めた場合,  $a_K \neq b_K$  の結果が得られるという, 非圧縮性から生じる表現形式の多様性がみられる. したがって, 本研究において, 未知係数  $a_K, b_K, c_{KL}$  の表現形式によって, 解にどのような影響を及ぼすかを検証する.

### 4.3 数値解析例

本節では, 前節で定式化した混合型ソリッド要素および超弾性シェル要素を用いていくつかの基本的な例題を実施し, 本要素の妥当性・有用性を検証する. また, 未知係数  $a_K, b_K, c_{KL}$  の表現形式によって, 解にどのような影響を及ぼすかを検証する. 以下, 3通りの未知係数  $a_K, b_K, c_{KL}$  を考え, それぞれを case1, 2, 3 と呼ぶことにする. case1 は, Basar<sup>(4.7)</sup>らが用いた未知係数であり, 本研究では新たに case2, 3 の未知係数  $a_K, b_K$  の表現形式を提案する.

case1  $a_K, b_K, c_{KL}$ , すなわち  $a_K \neq b_K$  のとき (Basar らの方法)

case2  $a_K, b_K = a_K, c_{KL}$ , すなわち  $b_K$  の代わりに  $a_K$  を用いるとき (本研究の提案 1)

case3  $a_K = b_K, b_K, c_{KL}$ , すなわち  $a_K$  の代わりに  $b_K$  を用いるとき (本研究の提案 2)

#### 4.3.1 等二軸引張り問題

Fig.4.1 に示すような板の等二軸引張り問題を考える. 1 辺の長さが 1.0mm, 板厚 0.1mm の正方形板を  $x, y$  方向に等荷重  $P$  で一様に引っ張る.

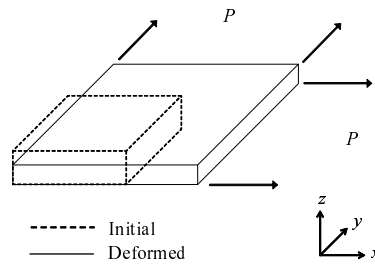


Fig.4.1 Equal biaxial tension.

この問題は、Ogden によって2種類のゴムの材料試験が行われ<sup>(4.16)</sup>，それぞれ以下の材料定数を同定し，実験値と良好な一致を得た．各ゴム材料名を Material I, II と置き，以下にそれぞれの Ogden 体の材料定数を示す．

$$\begin{aligned} \text{Material I} \quad N &= 3, \\ \alpha_1 &= 1.3, \alpha_2 = 5.0, \quad \alpha_3 = -2.0, \\ \mu_1 &= 6.3MPa, \mu_2 = 0.012MPa, \mu_3 = -0.1MPa \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Material II} \quad N &= 3, \\ \alpha_1 &= 0.8, \alpha_2 = 6.0, \quad \alpha_3 = 0.5, \\ \mu_1 &= 3.0MPa, \mu_2 = 0.016MPa, \mu_3 = 2.0MPa \end{aligned}$$

Material I, II の各材料定数に対して，前節で定式化した混合型ソリッド要素，非圧縮超弾性シェル要素を用いて解析を行う．解析結果を Fig.4.2 に示す．伸張比  $\lambda$  に対する板の面内応力 (Cauchy 応力) を示した．また，参照解として文献<sup>(4.16)</sup> の値を併記した．なお，未知係数  $a_K, b_K, c_{KL}$  の case1, 2, 3 のいずれを用いた場合にも，同じ解が得られた．Fig.4.2 より，本ソリッド要素，シェル要素の解が参照解と一致し，両者とも正解を得ていることがわかる．

次に，本解析による解の収束状況を Table 4.3.1 に示す．本解析は，非線形解法として Newton-Raphson 法を用いた．Table 4.3.1 では，各未知係数  $a_K, b_K, c_{KL}$  の case1, 2, 3 に対する荷重増分ごとの反復回数を示し，解の収束状況をみた．なお，荷重増分を 10step で解析した結果である．収束条件は  $ETOL=1 \times 10^{-15}$  である．Table 4.3.1 より，未知係数 case2, 3 では良好な収束性が確認できるが，case1 は2次収束が得られないことがわかる．

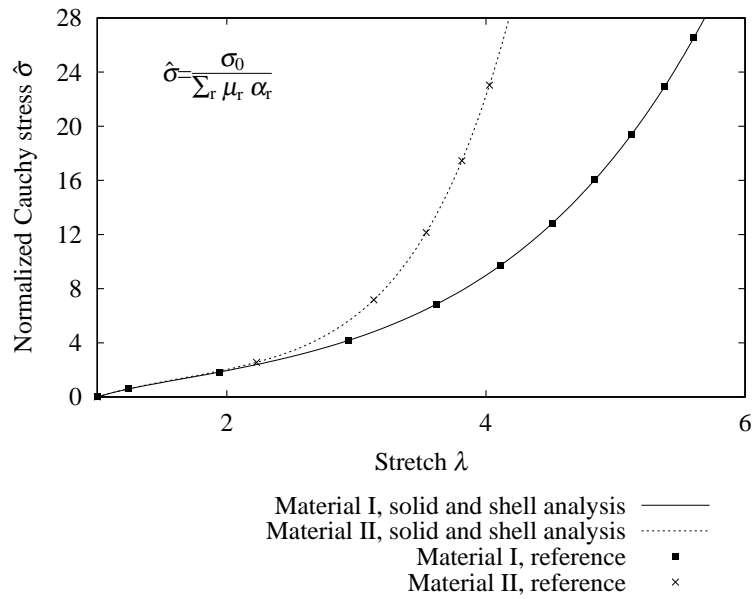


Fig.4.2 Curves of stress vs stretch in equal biaxial tension.

Table 4.1 Iteration number of each increment of unknown coefficients case1,2,3 in equal biaxial tension.

step	iteration number		
	case1	case2	case3
1	13	3	3
2	13	3	3
3	12	3	3
4	12	3	3
5	11	3	3
6	10	3	3
7	10	3	3
8	9	3	3
9	9	3	3
10	9	3	3

### 4.3.2 Rolling-up 解析

Fig.4.3 に示すように、片端を固定支持した部材の他端にモーメント  $M$  を負荷する、板の rolling up 問題を考える。本問題は、4.2.4 節の超弾性シェル要素を用いて解析した。非常に大きな変位と回転を伴うが、純曲げ問題であるため板厚の変化は無視できるため、本

解析は微小ひずみ・大変位問題となる．板の長さを 10.0mm，幅を 1.0mm，板厚を 0.1mm とし，Material I, II の各材料定数を用いて解析を行う．

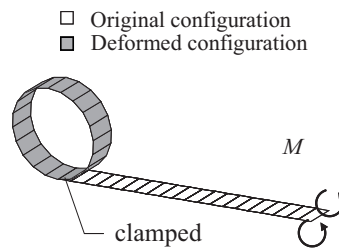


Fig.4.3 Rolling up of a plate.

解析結果を Fig.4.4 に示す．微小ひずみ・有限変位問題であるため，本材料モデルは Young 率  $\sum_{r=1}^N 3\mu_r \alpha_r / 2\text{MPa}$ ，Poisson 比  $\nu = 0.5$  の物性値をもつ Hooke 弾性体モデルに相当する．以上から，Fig.4.4 には，上記の物性値をもつ MITC4 シェルの解を参照解として併記した．両者の良好な一致がみられ，有限変位問題における本シェル要素の妥当性を確認できた．

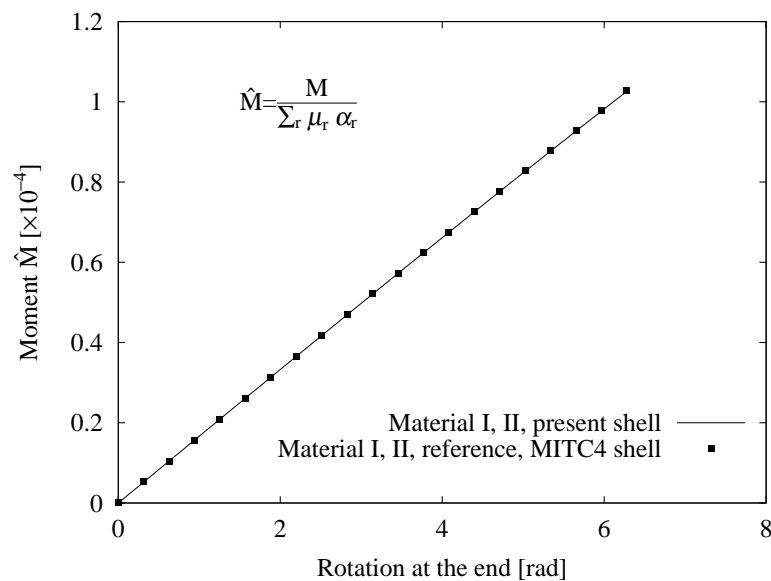


Fig.4.4 Moment-rotation curve, rolling up of a plate.

また，本解析による解の収束状況を Table 4.2 に示す．Table 4.2 では，各未知係数  $a_K$ ， $b_K$ ， $c_{KL}$  case1, 2, 3 に対する荷重増分ごとの反復回数を示し，解の収束状況をみた．なお，荷重増分を 10step で解析した結果である．収束条件は  $\text{ETOL} = 1 \times 10^{-15}$  である．Table 4.2 より，未知係数 case3 のみが収束し，case1, 2 は途中で発散し解が得られなかった．

**Table 4.2** Iteration number of each increment of unknown coefficients case1,2,3 in rolling up analysis.

step	iteration number		
	case1	case2	case3
1	12	9	9
2	14	9	9
3	14	9	9
4	13	9	9
5	13	9	9
6	13	10	9
7	Divergence	18	9
8		Divergence	9
9			9
10			9

以上より, 未知係数  $a_K, b_K, c_{KL}$  として case3 が最も良好な収束性を示すことがわかる.

### 4.3.3 ゴムバルーン解析

半径 5.0mm, 板厚 0.1mm のゴムの球を内部から一様に圧力を負荷し膨張させる問題を考える. 本問題は, 4.2.4 節の超弾性シェル要素を用いて解析し, Fig.4.5 に示すように, 変形の対称性から球の 1/8 対称モデルを用いる. Material I, II の各材料定数を用いて解析を行う. 圧力は従動力として与え, 接線剛性マトリクスに荷重補正マトリクスを付加する. 本問題では, 変形の途中で圧力が極大値を示すため, 非線形解法として弧長法を用いた. Fig.4.6, 4.7 の物理的な解釈は, ゴムバルーンが膨らむとき, 一度吹き込みが始まると極値を迎えた点で飛び移りが起こり, 変形が容易に進むことを意味する. また, Fig.4.6, 4.7 より, 材料物性によって圧力の極値が変化する材料非線形問題であることがわかる.

Fig.4.6, 4.7 より, 本解析結果と参照解の良好な一致がみられ, 従動力下における非線形問題に対する本手法の妥当性を確認できた. なお, Fig.4.6, 4.7 は未知係数  $a_K, b_K, c_{KL}$  の case3 の結果であり, 収束条件 ETOL= $1 \times 10^{-10}$  下で, 各増分 step に必要な反復回数は 4,5 回と安定的な収束状況を示した. case1, 2 では途中で発散し, 解が得られなかった.

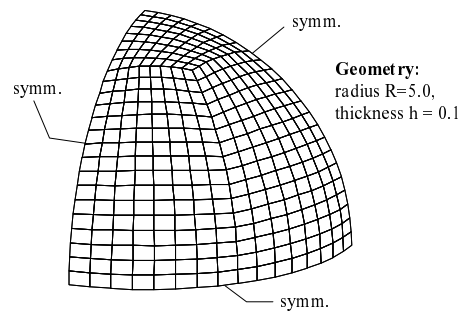


Fig.4.5 Inflation of spherical balloons.

Fig.4.6, 4.7 に Material I, II それぞれの球の伸張比  $\lambda$  と圧力  $p$  の関係を示す。参照解として文献<sup>(4.16)</sup>の値を併記した。

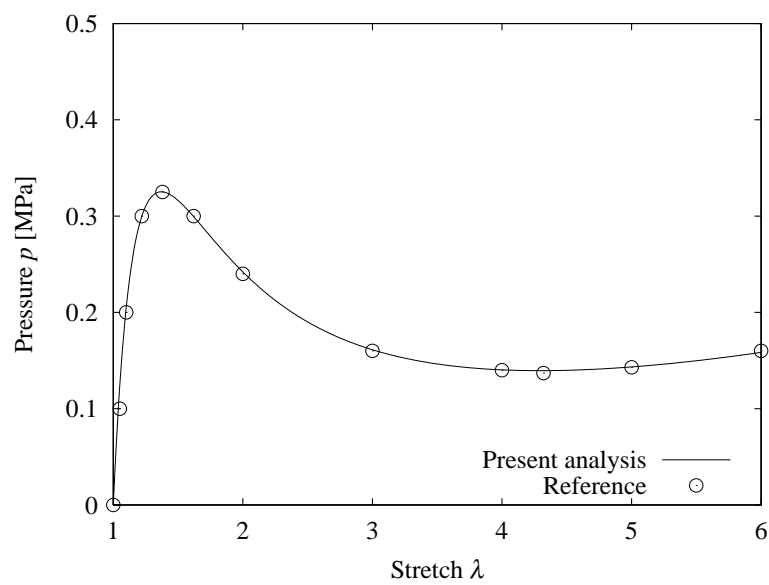


Fig.4.6 Curve of pressure vs stretch of Material I.

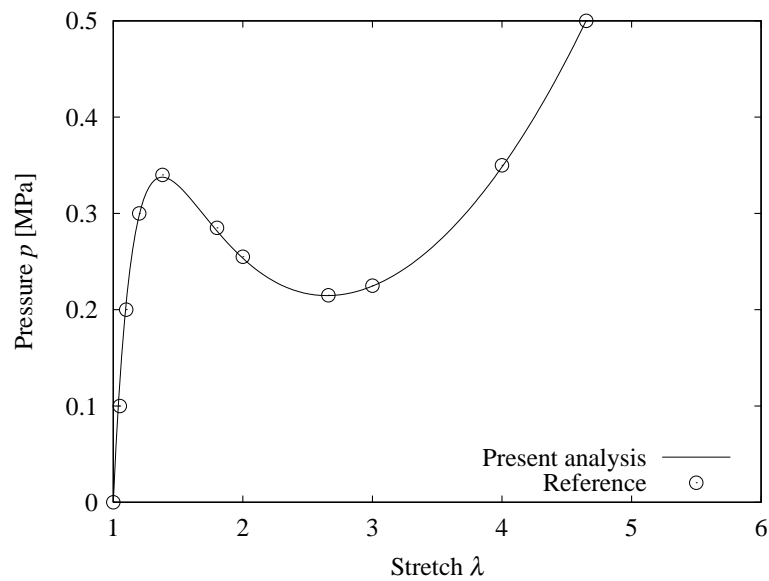


Fig.4.7 Curve of pressure vs stretch of Material II.

#### 4.4 結言

本章では、主不変量を用いた Ogden 材料モデルの新たな混合型ソリッド要素および大ひずみシェル要素の定式化を示した。本手法により、Mooney-Rivlin 材料モデルを拡張する形で Ogden 材料モデルの構成則を構築することが可能となり、固有値解析、主軸への座標変換などの数値計算を省略することができる。また、構成則を導く際に現れる未知係数の表現形式の選択によって、解の収束状況が変化することを示し、本手法の数値解析上の安定性について検討した。なお、本研究では、 $a_K = b_K, b_K, c_{KL}$ 、すなわち  $a_K$  の代わりに  $b_K$  を用いたときの本提案手法が最も良好な収束状況を示すことがわかった。



- (4.1) Alexander, H., A constitutive relation for rubber-like material, *Int. J. Engng. Sci.*, **6**, pp.549–563, 1968.
- (4.2) Yeoh, O.H., Characterization of elastic properties of carbon black filled rubber vulcanizates, *Rubber chem. and Technol.*, **63-5**, pp.792–805, 1990.
- (4.3) Holzapfel, G.A., : Nonlinear Solid Mechanics - A Continuum Approach for Engineering, *Wiley*, 2000.
- (4.4) Ogden, R.W., Nonlinear Elastic Deformations, *Dover*, New York, 1997.
- (4.5) Arnold, S.M., Saleeb, A.F., Tan, H.Q., Zang, Y., Explicit robust schemes for implementation of a class of principal value-based constitutive models : symbolic and numeric implementation, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **37**, pp. 1931–1944, 1994.
- (4.6) Miehe, C., Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden-type large-strain elastic materials, *Eur. J. mech., A Solids*, **14**, pp.697–720, 1995
- (4.7) Basar, Y., Itskov, M., Finite element formulation of the Ogden material model with application to rubber-like shells, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **42**, pp.1279–1305, 1998.
- (4.8) Itskov, M., A generalized orthotropic hyperelastic material model with application to incompressible shells, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **50**, pp. 1777–1799, 2001.
- (4.9) Feng, Z.-Q., Peyraut, F., He, Q.-C., Finite deformations of Ogden's materials under impact loading, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **41**, pp.575–585, 2006.
- (4.10) Dui, G., Wang, Z., Ren, Q., Explicit formulations of tangent stiffness tensors for isotropic materials, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **69**, pp.665–675, 2007.
- (4.11) Simo, J.C., Hughes, T.J.R., Computational Inelasticity, *Springer-Verlag*, New York, pp.336–373, 1998.
- (4.12) 渡辺浩志, 久田俊明, 超弾性体の混合型有限要素法に関する基礎的検討, 日本機械学会論文集, A 編, **62-595**, pp.745–752, 1996.
- (4.13) 久田俊明, 野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, pp.192–209, 1995.
- (4.14) 田中真人, 野口裕久, ひずみ仮定を用いた非圧縮超弾性シェル要素の開発とその評価, 日本計算工学会論文集, 掲載決定.

- (4.15) Tanaka, T., Noguchi, H, Instability analysis of thin-walled structures using incompressible hyperelastic shell elements, III European Conference on Computational Mechanics (ECCM 2006), Lisbon, Paper No. 2253, 2006.
- (4.16) Needleman, A., Inflation of spherical rubber balloons, *Int. J. Solids Structures*, **13**, pp.409–421, 1977.

## 第5章 超弾性シェル要素による Brazier 不安定現象の解析

### 5.1 緒言

ゴムチューブのような薄肉円管に純曲げを与えると、はじめ、断面が楕円化し、曲げ剛性が低下する現象がみられる。この現象は Brazier 効果と呼ばれているがさらに曲げを与え続けると、ある曲率を超えたところから断面がつぶれるような kink 現象が観察できる。この薄肉円管の曲げ問題は、1927 年になって、L.G.Brazier によって初めて研究された<sup>(5.1)</sup>。Brazier は薄肉円管を等方性弾性体と仮定し、断面の楕円化現象を解析的に研究した。Brazier によると、断面の楕円化は、変位の高次項を用いて表すことが可能で、曲げモーメントが曲率の 3 次の関数として与えられることを示した。すなわち、曲げ円管の荷重変位曲線は極大点をもち、この点を超えると屈服座屈と呼ばれる不安定現象が発生することを示した。しかしながら、Brazier の理論は、曲率が小さいときにだけ実現象と合致し、より大きな曲率で起こる現象、すなわち kink 現象については考慮することができない。

S.A. Karamanos は、円管断面の楕円化現象を表現することのできる Tube 要素を開発し、非線形有限要素法を用いて上記の曲げ解析を行った<sup>(5.2)</sup>。彼は、円管の曲げには、2 つの不安定モードが存在することを数値解析によって明らかにした。すなわち、ovalization instability と呼ばれる断面の楕円化現象と、bifurcation instability と呼ばれる円管の kink 現象である。彼は、Brazier が示した極大点に至る前に分岐点が存在することを示し、分岐経路上の変形モードが kink 現象であることを明らかにした。また、円管の初期曲率によって、楕円化現象と kink 現象のどちらのモードが優位に現れるかを検証した。

このような円管の曲げ問題の応用的な例として、埋設管の座屈伝播の問題がある。これは kink がパイプラインに沿って伝播し、パイプ構造物の破壊を招く現象であり、杉本らによって詳細に研究された<sup>(5.3)(5.4)(5.5)</sup>。

しかしながら、上記で示した論文のいずれにおいても、座屈直後の buckling mode についての詳細な議論はしておらず、また最終的な円管の kink の発現パターンについても示されていない。このような kink が発生する前後の円管の挙動を正確に解析することは、曲げ管の成形限界やエラストマシール材の設計などに関わる工学的に重要な課題であると考

えられる。

そこで、本章では、前章までに開発した超弾性シェル要素を用いて上記の薄肉円管の曲げ解析を実施する。特に、分岐現象を詳細に検討し、各分岐経路における円管の変形モード、kink の発現パターンを調べる。

本章では、まず Brazier 効果と解析手法について述べた後、Brazier の解を参照に Hooke 弾性体の解析を実施し、本解析手法の妥当性を検証する。その後、材料を Ogden 体に変えて同様の解析を行い、ゴムチューブの曲げ解析の実施とその検討を行う。

## 5.2 Brazier 効果

薄肉円管を曲げたとき、曲率が増加するにつれて断面が円形から楕円形へと変形する。断面が楕円につぶれると断面 2 次モーメントの減少に伴って曲げ剛性は低下する。この非線形現象を Brazier 効果と呼ぶ。Brazier は変分法に基づいて、上記の現象に対する曲げ

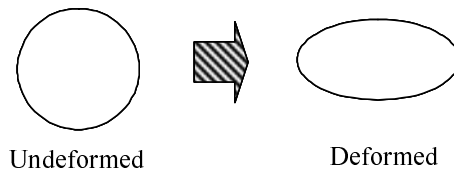


Fig.5.1 Deformed and Undeformed tube cross-section.

モーメントと曲率の関係式を導いた。Brazier は、円管を等方性弾性体と仮定し、まず次式のように、曲げを受ける円管の単位長さ当たりの全ポテンシャルエネルギーを導いた<sup>(5.1)</sup>。

$$U = \frac{E}{2} \pi r^3 t c^2 \left[ 1 - \frac{3 r^4 c^2 (1 - \nu^2)}{4 t^2} \right] \quad (5.1)$$

ここで、 $E$  は Young 率、 $\nu$  は Poisson 比、 $r$  は断面の初期半径、 $t$  は円管の板厚、 $c$  は円管の軸の曲率である。式 (5.1) より、 $U$  を  $c$  に関して微分をとれば、次式のように円管に加わる曲げモーメント  $M$  を得ることができる。

$$M = \frac{dU}{dc} = \frac{E}{2} \pi r^3 t \left[ 2c - \frac{3 r^4 c^3 (1 - \nu^2)}{t^2} \right] \quad (5.2)$$

ここで、曲率  $c$  と円管端部の回転角  $\alpha$  の関係を次式に示す。

$$c = 2 \frac{\alpha}{l} \quad (5.3)$$

ここで、 $l$  は円管の長さである。式 (5.3) は、Fig.5.2 に示すように、幾何学的に導かれる関係式である。

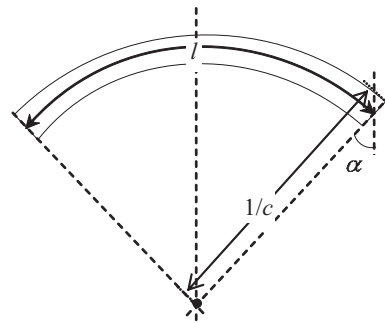


Fig.5.2 Relationship between curvature  $c$  and rotation at the end of a tube  $\alpha$ .

Fig.5.3 は、式 (5.2) , (5.3) から導かれる円管端部の曲げモーメントと回転角の関係を示す。Fig.5.3 より、点 A において、曲げモーメントの極大点を得ることがわかる。点 A におけるモーメントを臨界モーメントと呼び、 $\hat{M}$  と表す。臨界モーメント  $\hat{M}$  は、式 (5.2) から次式のように導かれる。

$$\hat{M} = \frac{2\sqrt{2}}{9} \frac{E\pi r t^2}{\sqrt{1-\nu^2}} \quad (5.4)$$

このように、Brazier の式 (5.2) によって、断面の楕円化現象を解析することが可能となる。

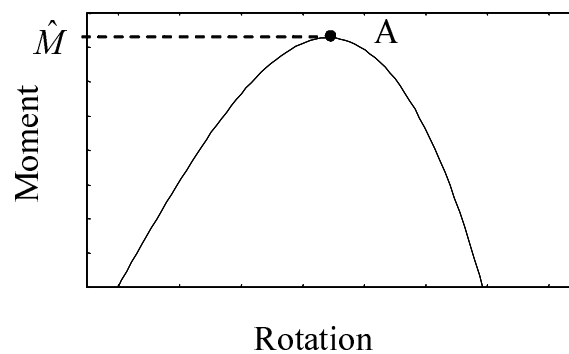


Fig.5.3 Relationship between moment and rotation at the end of a tube of Brazier's solution.

### 5.3 解析手法

本節では、薄肉円管の曲げ問題における座屈前後の非線形解析手法について述べる。本問題は、板厚の変化を無視した Hooke 弾性体による MITC4 シェル要素<sup>(5.6)(5.7)</sup>を用いて

解析を実施する．ここでは，座屈点の探索方法と座屈モードの抽出方法を述べる．

本解析では，座屈後解析手法として弧長増分法<sup>(5.8)</sup>を用いる．弧長増分法は，座屈後の解の経路を追う手法として有効であるが，座屈点の判別は行うことができない．そこで，座屈点において，接線剛性マトリクス  $K({}^t\mathbf{u}) = \partial Q/\partial \mathbf{u}$  が次式のように singular になることを利用する．

$$\det(\mathbf{K}({}^t\mathbf{u})) = 0 \quad (5.5)$$

実際には，増分解析の過程で， $\det(\mathbf{K})$  の値が厳密に 0 になることは稀であるため，座屈点の前後で， $\det(\mathbf{K})$  の正負符号が反転する性質を利用する．すなわち，座屈点の判定だけを行うのであれば， $\det(\mathbf{K})$  のチェックだけすればよい．また，本解析では，座屈モードの抽出方法として scaled corrector 法<sup>(5.9)(5.10)</sup>を用いる．scaled corrector 法は，Newton-Raphson 法の残差ベクトルが固有モード  $\phi$  の替わりになる可能性があることを利用した手法で，固有値解析を使用しない効率的なモード抽出方法である．座屈点の分類については， $\phi$  と荷重モード  $f_{ref}$  の内積の値  $\phi^T f_{ref}$  から判別する．すなわち， $\phi^T f_{ref} \neq 0$  のとき，その点は極限点と分類され， $\phi^T f_{ref} = 0$  のとき，その点は分岐点と分類される．

## 5.4 Hooke 弾性体の数値解析例

本節では，まず本解析手法の妥当性を確かめるため，Brazier によって導かれた理論解を参照に，Hooke 弾性体による薄肉円管の曲げ解析を実施する．

### 5.4.1 解析モデル

本解析で用いる解析モデルと材料定数，寸法を Fig.5.4 と Table5.4.1 にそれぞれ示す．ここでは，Young 率，Poisson 比を材料定数としてもつ Hooke 弾性体を用い，板厚の変化は考慮しない．Fig.5.4(a) に薄肉円管の全体図を示す．板厚に対して円管の全長が十分大きくなるように寸法を定めた．解析に際しては，変形の対称性から，Fig.5.4(b) のように 1/2 モデルを用いた．また，Fig.5.4(b) に示すように，円管端部に剛体の蓋を置き，その剛体の蓋を回転させることによって円管に純曲げを与える．この解析条件は，変形の間，円管端部の断面は保持されたままであることを示す．なお，本解析では，座屈後解析として，前節で述べた弧長増分法を用いる．

### 5.4.2 分岐解析と座屈後解析

Fig.5.5 に本解析結果を示す．Fig.5.5(a) より，モーメント荷重が  $6.3 \times 10^6 \text{ Nmm}$  に達するまでは，本解析結果は Brazier の解と同じ挙動を示すが，Brazier が評価した臨界モー

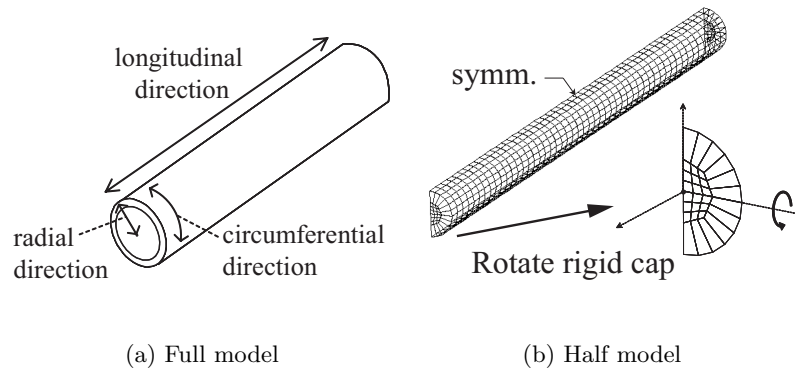
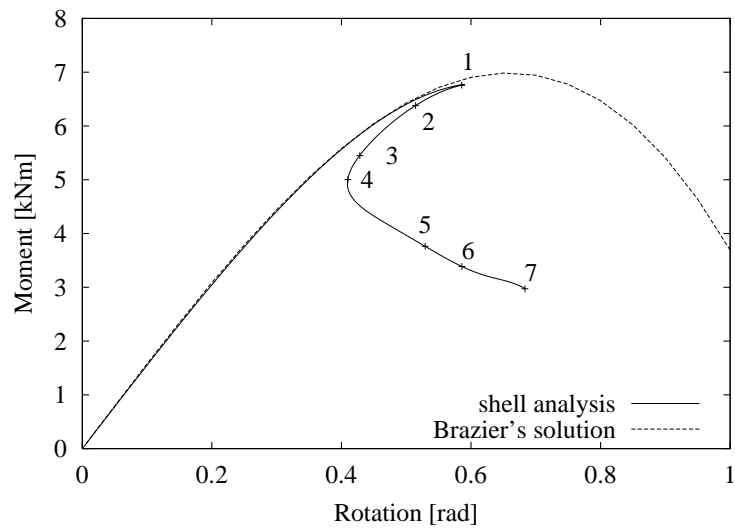


Fig.5.4 Analysis model.

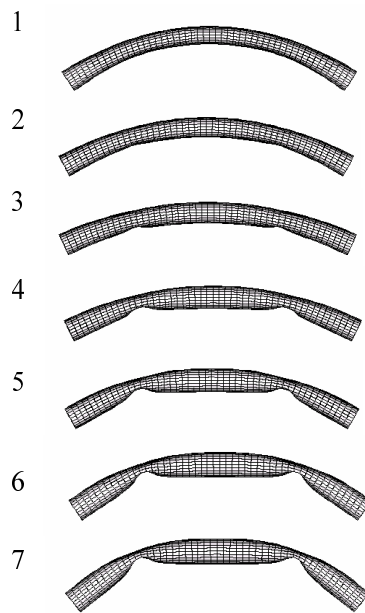
Table 5.1 Material and geometrical properties.

Young's modulus	200GPa
Poisson's ratio	0.3
Radius	15mm
Thickness	1.5mm
Longitudinal length	400mm

メント  $\hat{M}$  に至る前に, snap-back と呼ばれる変位が戻りながら荷重が減少していく現象が起きることがわかる. その理由として, 円管の長手方向において, 折曲がる側に圧縮が働き, 座屈現象が生じるからだと考えられる. 実際の現象では, Fig.5.5(a) に示すように, 点 1 から 6 まで変形はジャンプする. Fig.5.5(b) の変形の履歴を見るように, 本解析モデルを初期不正のない理想体とモデル化した場合, Kink は 2 点, 対称位置に起こる. 本解析は, 解析モデルで示したように両端を把持した計算結果であるが, Fig.5.6 に示すように本解析条件とほぼ同じ条件で tube を曲げると, 実現象でも 2 点, 対称位置で kink が生じる. 本解析で求めた変形図が定性的に正しいことがわかる.



(a) Moment-rotation curve



(b) Deformed configurations

Fig.5.5 Deformed configurations of a bending tube.





Fig.5.6 The shape of a tube bending test.

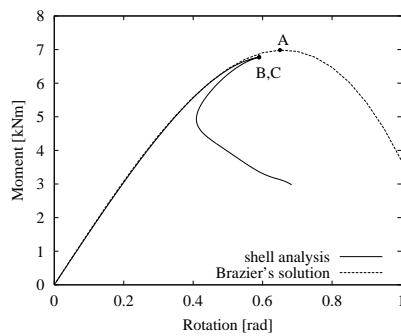
Fig.5.7 に座屈点の探索結果を示す．Brazier が算定した極限点 A に至るより前に，2つの座屈点 B，C が現れることがわかった．2つの座屈点 B，C はその差が 0.003% 未満と非常に近接しているが，始めに分岐点 B，次に極限点 (戻り点) C が現れることが，Table 5.4.2 の座屈モードと荷重モーメントの直交性からわかった．このように，その点から複数の分岐経路が枝分かれして発生する座屈点のことを頂上分岐 (Hilltop branching) と呼ぶ<sup>(5.11)</sup>．Fig.5.8 に座屈点 B，C における座屈モードをそれぞれ示す．Fig.5.8 より，座屈点 B は非対称モード，座屈点 C は対称モードであることがみてとれる．scaled corrector 法を用いた分岐解析手法を用いて，分岐経路 (2 次経路) 上の平衡点を求めた．その結果を Fig.5.9 に示す．また，分岐経路上の変形図を Fig.5.10 に示す．分岐点 B から分岐した経路上では，Fig.5.10 で示すような片折れの変形モードを示すことがわかった．以上から，主経路上では 2 つの kink は対称位置に生じ，2 次経路上では 1 つの kink が片折れの状態で発生することがわかる．初期不正のない理想体の場合では，2 つの kink が起こる変形モードが優位であるが，実際の現象では片折れの変形モードを見ることも多い．これは円管に初期不正が加わることによって，2 次経路に変形が誘起されるからだと考えられる．

**Table 5.2** Classification into limit point and buckling point.

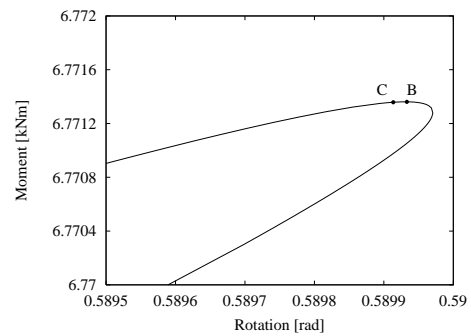
	point B		point C	
	$\alpha_\phi$	$M_{\mathbf{f}_{ref}}$	$\alpha_\phi$	$M_{\mathbf{f}_{ref}}$
Right end	$4.8564 \times 10^{-4}$	-1.	$-3.5497 \times 10^{-4}$	-1.
Left end	$4.8562 \times 10^{-4}$	1.	$3.5501 \times 10^{-4}$	1.
	$\phi^T \mathbf{f}_{ref} = -1.9221 \times 10^{-8} \approx 0$		$\phi^T \mathbf{f}_{ref} = 7.0998 \times 10^{-4} \neq 0$	

$\alpha_\phi$  : rotation value of the buckling mode  $\phi$  at the end

$M_{\mathbf{f}_{ref}}$  : moment value of the mode vector  $\mathbf{f}_{ref}$  at the end



(a) Moment-rotation curve



(b) Enlarged around the buckling points

**Fig.5.7** Buckling points on moment-rotation curve.

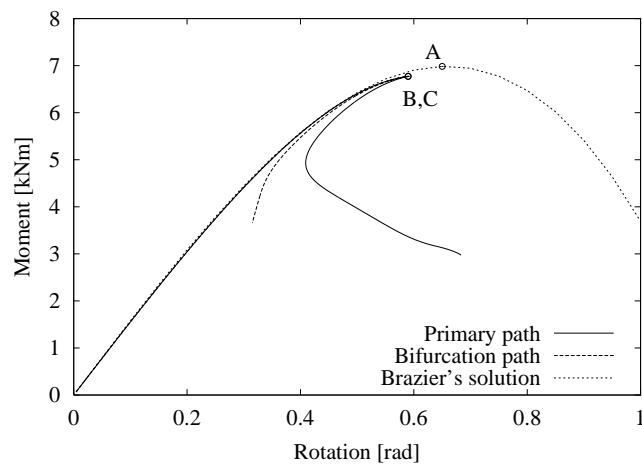


(a) Buckling mode at point B

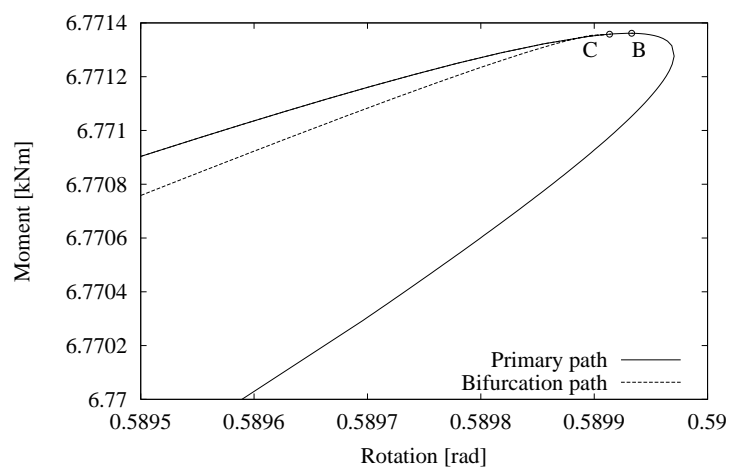


(b) Buckling mode at point C

**Fig.5.8** Buckling modes.



(a) Moment-rotation curve



(b) Enlarged around the buckling points *B,C*

**Fig.5.9** Primary and bifurcation equilibrium path.



**Fig.5.10** Deformed configuration along bifurcation path.

## 5.5 非圧縮超弾性体の数値解析例

次に、本節では、材料を非圧縮超弾性体の Ogden 材料モデルに変えて、薄肉円管の曲げ解析を実施する。ここでは、前章までに開発した非圧縮超弾性シェル要素を用いる。したがって、前節とは違い、板厚の変化は考慮する。

### 5.5.1 解析モデル

解析モデル、解析手法等は前節に示した通りである。また、寸法は前節と同様に Table 5.4.1 の半径、板厚、円管の長さを用いる。本解析では、前章で示した Ogden 材料モデルを用い、材料定数は以下に示す通りである。

$$\begin{aligned} N &= 3, \\ \alpha_1 &= 1.3, \quad \alpha_2 = 5.0, \quad \alpha_3 = -2.0, \\ \mu_1 &= 6.3\text{MPa}, \quad \mu_2 = 0.012\text{MPa}, \quad \mu_3 = -0.1\text{MPa} \end{aligned}$$

また、本節では、Ogden 材料モデルを用いた非圧縮超弾性シェル要素の参照解として、前節で用いた Hooke 弾性体モデルの MITC4 シェル要素 (板厚の変化はなし) の解を併せて載せる。このとき、材料物性は、Poisson 比  $\nu = 0.5$ 、Young 率  $E$  は微小変形時での相当式

$$E = \sum_{r=1}^N 3 \frac{\mu_r \alpha_r}{2} = 12.675\text{MPa} \quad (5.6)$$

を用いる。

### 5.5.2 分岐解析と座屈後解析

Fig.5.11 に Hooke 弾性体モデルと Ogden 体モデルの解析結果を示す。Fig.5.11 より、座屈点に至る前までは両者の良好な一致が見られる。本問題は、座屈に至る前までは、純曲げ問題であるため、ひずみは微小である。したがって、微小変形時での相当式 (5.6) を用いることで、Hooke 弾性体と Ogden 体はほとんど等価な挙動を示す。座屈点近傍からは、Hooke 弾性体モデルの方が固い解を示している。これは Hooke 弾性体モデルが板厚の変化を無視した MITC4 シェル要素を用いて解析を行ったためで、板厚方向の剛性が剛体である分変形の柔軟性が損なわれ、その結果、板厚の変化を考慮した Ogden 体のシェル要素の解より固くなったと考えられる。Fig.5.12 に最終的に得られた Hooke 弾性体モデルと Ogden 材料モデルの変形図を示す。Fig.5.12(a) と Fig.5.12(b) を比較すると、両者とも 2 つの kink が現れているが、その発現位置に大きな差が見られる。Ogden 体の解析で得られた kink の位置が Hooke 弾性体より内側に現れていることが確認できる。両者は、板厚の変

化の有無などシェルの幾何学的モデルが異なるため、変形モードに差が現れたと考えられる。Fig.5.13 に座屈点の探索結果を示す。Fig.5.13 より、Ogden 体モデルの解析においては、3つの座屈点を確認できる。Fig.5.14 に各座屈点における座屈モードを示す。Fig.5.14 と Table5.5.2 の座屈モードと荷重モーメントの直交性から、snap back 現象が生じる極限点を経た後、2つの分岐点が現れることがわかる。

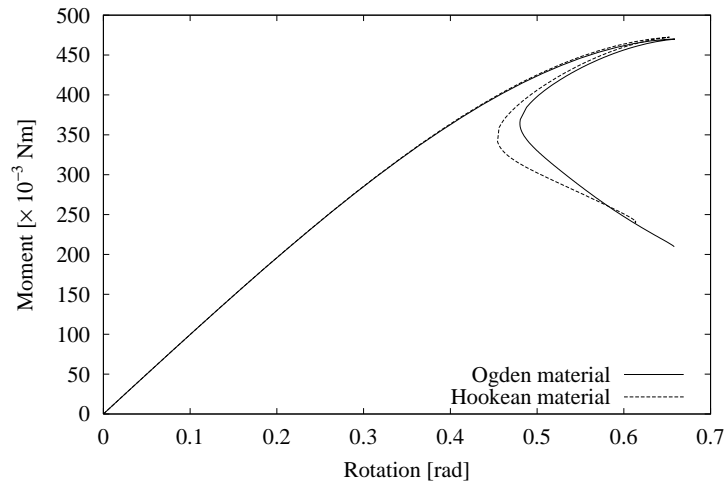


Fig.5.11 Moment-rotation curve of tube bending.



(a) Hookean model



(b) Ogden model

Fig.5.12 Deformed configurations of tube bending.

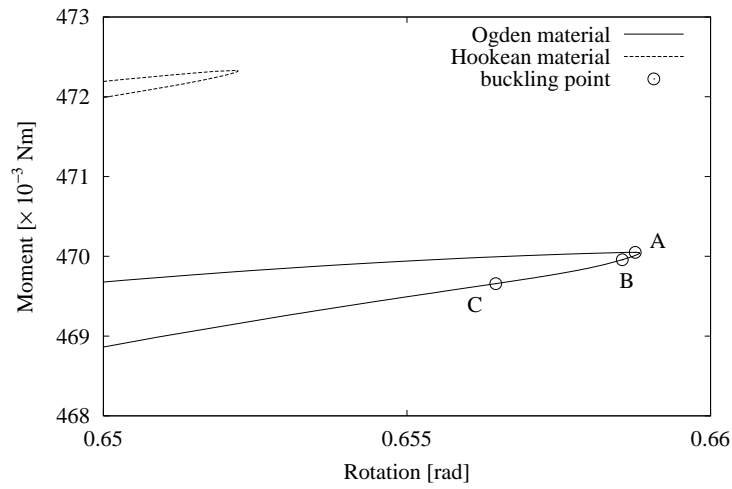


Fig.5.13 Enlarged moment-rotation curve around buckling points.



(a) Buckling mode at point A



(b) Buckling mode at point B



(c) Buckling mode at point C

Fig.5.14 Buckling modes of tube bending of Ogden material.

**Table 5.3** Classification into limit point and buckling point.

	point A		point B		point C	
	$\alpha_\phi$	$M_{\mathbf{f}_{ref}}$	$\alpha_\phi$	$M_{\mathbf{f}_{ref}}$	$\alpha_\phi$	$M_{\mathbf{f}_{ref}}$
Right end	$3.2653 \times 10^{-4}$	-1.	$-4.5530 \times 10^{-4}$	-1.	$-9.4553 \times 10^{-5}$	-1.
Left end	$3.2654 \times 10^{-4}$	1.	$4.5534 \times 10^{-4}$	1.	$9.4570 \times 10^{-5}$	-1.
	$\phi^T \mathbf{f}_{ref} = 6.5307 \times 10^{-4} \neq 0$		$\phi^T \mathbf{f}_{ref} = 4.46108 \times 10^{-8} \approx 0$		$\phi^T \mathbf{f}_{ref} = 1.6816 \times 10^{-8} \approx 0$	

$\alpha_\phi$  : rotation value of the buckling mode  $\phi$  at the end

$M_{\mathbf{f}_{ref}}$  : moment value of the mode vector  $\mathbf{f}_{ref}$  at the end

## 5.6 結言

本章では、前章までに開発した超弾性シェル要素を用いて薄肉円管の曲げ解析を実施した。まず、板厚の変化を無視した Hooke 弾性体による解析を実施し、Brazier の解との比較を行った。解析の結果、Brazier の解による屈服点より以前に互いに非常に近接した 2 つの座屈点があり、始めに分岐点が現れ、次に snap back 現象が生じる極限点が現れる事が明らかになった。座屈後解析も実施し、主経路上では 2 つの kink は対称位置に生じ、分岐経路上では 1 つの kink が片折れの状態で発生することがわかった。次に、材料を Ogden 体に変えて同様の解析を行い、板厚の変化を考慮したゴムチューブの曲げ解析を実施した。Hooke 弾性体の解析結果とは異なり、snap back 現象が生じる極限点を経た後、2 つの分岐点が現れることがわかった。また、Ogden 体の解析においても 2 つの kink が対称位置に生じることが観察されたが、kink の位置が Hooke 弾性体より内側に現れることが確認できた。

- (5.1) Brazier, L.G., On Flexure of Thin Cylindrical Shells and Other Thin Sections, *Proc. R. Soc. London*, Ser. A, **116**, pp.104–114, 1927.
- (5.2) Karamanos, S.A., Bending instabilities of elastic tubes, *Int. J. Solids Struct.*, **39**, pp.2059–2085, 2002.
- (5.3) Sugimoto, N., Nonlinear Wave equations for Buckle propagation in an Elastic Pipeline, *JSME International Journal*, Ser.I, Vol.32, No.4, pp.498–507, 1989.
- (5.4) Sugimoto, N., Structure of Kink in Buckle Propagation on Elastic Pipelines, *Appl. Mech. Rev.*, No.137, pp.346–351, 1995.
- (5.5) Sugimoto, N., Steady propagation of buckle in elastic pipelines, *Elastic Wave Propagation*, (eds. MaCarthy, M. F. and Hayes, M. A.) ,pp.265–272, North-Holland, 1989.
- (5.6) Bathe, K.J. and Dvorkin, E.N., A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **22**, pp.697–722, 1986.
- (5.7) Chapelle, D. and Bathe, K.J., The finite element analysis of shells - fundamentals, *Springer*, (2003)
- (5.8) Riks, E., An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, *Int. J. Solids Structures*, **15**, pp.521–551, 1979.
- (5.9) Noguchi, H. and Hisada, T., Sensitivity Analysis in Post-Buckling Problems of Shell Structures, *Comp. & Struct.*, Vol.47, No.4/5, pp.699–710, 1993.
- (5.10) Noguchi, H. and Hisada, T., Development of a New Branch-Switching Algorithm in Nonlinear FEM using Scaled Corrector, *JSME International Journal*, Vol.37, No.3, 1994.
- (5.11) Fujii, F. and Okazawa, S., Pinpointing Bifurcation Points and Branch-Switching, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.123, pp.179–189, 1997.



## 第6章 結言

本研究では、薄肉柔軟構造物の高精度かつ汎用的な解析手法の確立を目的として、新たな非圧縮超弾性シェル要素の提案、高精度な超弾性モデルの検討、および上記開発手法を用いた柔軟薄肉構造物の不安定解析と構造最適化解析への適用、を行った。以下に、本論文の各章で得られた知見について示す。

第1章では、本研究における背景、目的および論文の全体構成について述べた。

第2章では、本研究において必要となる超弾性体の定義について概説し、従来までに提案されているひずみエネルギー関数の例を示した。また、非圧縮超弾性体の構成則モデルを、不定静水圧の項を導入することによって、体積変形と等容変形に分離した形で示した。さらに、混合型有限要素法の基礎方程式である混合型仮想仕事の原理を混合変分原理から導出し、これを基にした定式化を詳細に示した。特に、変位8節点、圧力要素内一定の混合型ソリッド要素の定式化について示した。また、混合変分原理から導かれる構成則の形から、Lagrange 未定乗数が不定静水圧と等価であることを示した。

第3章では、ひずみ仮定場を用いて、非圧縮超弾性解析のための大ひずみシェル要素を開発した。本シェル要素では面外せん断ひずみと板厚方向ひずみを要素内で仮定し、またシェルの面内平面応力条件から不定静水圧項を消去した。本定式化によって、新たに自由度を設けることなく、微小ひずみ要素と同じ変位・回転自由度のみで、非圧縮大ひずみシェル要素を実装することが可能となる。本論文では、上記の定式化に加え、基本的な解析例を通じて本手法の妥当性を確認した。

第4章では、主不変量を用いた Ogden 材料モデルの混合型ソリッド要素および大ひずみシェル要素の定式化を示した。本手法により、Mooney-Rivlin 材料モデルを拡張する形で Ogden 材料モデルの構成則を構築することが可能となり、固有値解析、主軸への座標変換などの数値計算を省略することができる。また、構成則を導く際に現れる未知係数の表現形式の選択によって、解の収束状況が変化することを示し、本手法の数値解析上の安定性について検討した。なお、本研究では、 $a_K = b_K, b_K, c_{KL}$ 、すなわち  $a_K$  の代わりに  $b_K$  を用いたときの提案手法が最も良好な収束状況を示すことがわかった。

第5章では、前章までに開発した超弾性シェル要素を用いて薄肉円管の曲げ解析を実施した。まず、板厚の変化を無視した Hooke 弾性体による解析を実施し、Brazier の解との比較を行った。解析の結果、Brazier の解による屈服点より以前に互いに非常に近接した

2つの座屈点があり、それぞれ分岐点と、snap back現象が生じる極限点であることが明らかになった。このような極限点と分岐点が一致する臨界点はHilltop分岐点と呼ばれる。座屈後解析も実施し、主経路上では2つのkinkは対称位置に生じ、分岐経路上では1つのkinkが片折れの状態が発生することがわかった。次に、材料をOgden体に変えて同様の解析を行い、板厚の変化を考慮したゴムチューブの曲げ解析を実施した。本解析においてもHilltop分岐点が確認でき、snap back現象が生じる極限点と、2つの分岐点が近接して現れることがわかった。また、Ogden体の解析においても2つのkinkが対称位置に生じることが観察されたが、kinkの位置がHooke弾性体より内側に現れることを示した。今後残された課題としては、以下の点が挙げられる。

- 異方性超弾性体の構成則の導入
- 自己接触の導入
- 計算の大規模化に伴う並列計算の導入

生体組織等は異方性が顕著に見られるため、異方性超弾性体の構成則の導入が必要となる。また、柔軟構造物はその大変形挙動時において、自己接触を伴うことが多いため、このような非線形境界条件の実装は応用上必要となる。さらに、生体組織やゴム工業品の精細なモデル化には大規模な計算量が必要となり、この場合の対処として並列計算の導入が望ましい。以上の機能を、本研究で提案した要素へ導入することによって、より実用的な解析手法の確立が期待される。

## 謝辞

本研究は、著者が慶應義塾大学理工学部システムデザイン工学科および同大学院理工学研究科開放環境科学専攻に在学中に、本塾同専攻・野口裕久教授の下でなされたものであります。卒業研究より6年間に渡る同教授から賜った熱心な御指導、ご鞭撻により本論文をまとめることができましたことを心より感謝し、ここに厚く御礼申し上げます。

本塾大学院開放環境科学専攻・三田彰教授、同総合デザイン工学専攻・吉沢正紹教授、志澤一之教授には、本論文の審査をお引き受け頂くと共に、多くの有益な御助言を賜りました。この場を借りて御礼申し上げます。

本研究の一部は、文部科学省21世紀COEプログラム「知能化から生命化へのシステムデザイン」によるものであることを記し、ここに謝意を示します。

また、特定非営利活動法人非線形CAE協会の皆様、株式会社メカニカルデザインの皆様、棚橋隆彦教授を始めとする多くの方々から、示唆に富んだ御意見を賜り、またCAEを学ぶ貴重な機会を与えてもらいました。ここに感謝の意を表します。

著者が研究室に配属されてから今日に至るまで、只野裕一氏(慶應義塾大学理工学部機械工学科助手)、増田佐知子氏(横浜雙葉中学高等学校教諭)、石原嘉一氏(株式会社三菱総合研究所)、李成健君、張智謙氏、橋本学氏を始めとする数多くの先輩、同期、後輩に恵まれ、有益な御討論ならびに激励をいただきました。皆様方からのご支援は、研究生活をより実り多きものとしてくれました。心から感謝致します。

それ以外にも、9年間にも渡る慶應義塾での生活を支えて頂いた先生方、友人のおかげで今日の私があることは言うまでもなく、この場を借りて改めて深謝致します。

末筆ながら、私が本研究室そして慶應義塾で充実した生活を送ることができたのは、長きに渡って学業に専念する機会を与えてくれた両親、家族の理解と支援のおかげです。多大な迷惑をかけたにもかかわらず、最後まで見守ってくれた家族に心から感謝致します。

2007年2月 田中 真人

# 付録A 離散力法を用いた 超弾性体の形状最適化解析

## A.1 緒言

有限要素法は、その使用用途として、従来からの特性の評価や予測のための構造解析に加え、最近では感度解析や構造解析の逆問題となる構造最適化解析としても定着しつつある。本章では、構造最適化技術の中でも、形状最適化問題に着目し、ゴムのような柔軟薄肉構造物の形状最適化解析を行う。

実際の開発現場では、最適化設計によって最適形状を得ることは難しく、目的に対してより適した形状をひとまず最適形状として製品開発をすることが多い。そこで現在多くの研究者が、より信頼性における最適化手法を考案し、目的の最適形状に近づけようと努力している。最適化手法の中でも現在信頼の置かれている手法の一つとして、感度を用いる感度解析手法がある<sup>(A.1)</sup>。感度とは、設計変数（例えば断面などの寸法）が構造物に与える影響の度合いを表し、感度が大きいほど、その設計変数が構造体に与える影響が大きいということを意味する。そのような設計変数を感度の大きさに従って動かすことで、より最適な形状を得ようという手法が感度解析手法である。しかし、解析モデルによっては、感度が極端に高すぎたり低すぎたりすることがあり、そのような場合は、応力集中が起きやすいガタガタとした境界の形状（境界の「波打ち現象」）に収束してしまうことが多い。これらの問題を解決するために、「力法 (traction method)」が畔上らによって提案された<sup>(A.2)(A.3)</sup>。この手法は、滑らかな形状を得るためにスムージングマトリックスとして線形剛性マトリックスの逆行列を利用しており、設計変数のばらつきや解の収束性などの問題を解決し、また全節点を移動させて再メッシュの手間を省く手法である。この手法は、現在広く認知されているが、畔上らによって提唱された力法では、連続体のままで定式化しており、有限要素解析に組み込むためには、別途離散化する作業が必要となり、汎用的ではない。また、その応用範囲は主に線形問題に限定され、非線形問題においてはあまり検討されていない。そこで、野口らは、上の力法を離散的な観点から拡張し、一般非線形問題に適用した<sup>(A.4)</sup>。野口らが開発した力法は、完全に離散化された形で定式化されており、畔上らによる力法が表面力として定式化されているのに対し、体積力として定式化されていることから非線形有限要素解析に取り組みやすい。そこで、野口らの力法を畔上らの手

法として区別して、「離散力法 (discrete force method)」と呼ぶ。文献<sup>(A.5)</sup>では、この離散力法が、流体構造練成解析の中の最適化問題に適用されており、良好な最適結果を導いている。

本章では、離散力法をゴムのような強い非線形性を示す柔軟薄肉構造物の最適化問題に適用し、本手法の妥当性・有用性を確認する。ここでは、柔軟構造体モデルとして超弾性体を用い、形状最適化問題として円孔板の孔形の最適化問題、マニピュレータの形状最適化問題を実施し、得られた最適化結果について報告する。

## A.2 離散力法

本節では、感度解析の概要を示した後、離散力法の定式化について述べる<sup>(A.6)</sup>。

設計変数を  $b_j (j = 1, 2, \dots, N)$  とすると、時刻  $t_i$  での内力ベクトル  $Q_i$  は、負荷経路非依存であれば同時刻での変位  $U_i$  と  $b_j$  の関数とみなせる。したがって外力ベクトルを  $F_i$  とすると平衡方程式は

$$Q_i(U_i(b_j), b_j) = F_i \quad (\text{A.1})$$

のように表すことができる。ただし、以下を含め、簡単のため外力は設計変数  $b_j$  に無関係であるものとする。

感度解析の最も直接的な方法は有限差分法 (Finite Difference Method, 略して FDM) である。FDM では式 (A.1) における設計変数  $b_j$  に微小な変動  $\delta b_j$  を加えた非線形方程式

$$Q_i(U_i(b_j + \Delta b_j), b_j + \Delta b_j) = F_i \quad (\text{A.2})$$

を  $U(b_j + \Delta b_j)$  について実際に解き

$$Q_i(U_i(b_j + \Delta b_j), b_j + \Delta b_j) = F_i \quad (\text{A.3})$$

のように変位感度を近似的に評価する。応力感度についても同様である。この方法では有限要素解析を通常の 1 回に加えて  $b_j$  の総数に当たる  $N$  回繰り返さねばならないので、実用規模の非線形解析では計算機環境を限界まで使う場合が多いことを考えると実用的とはいえない。このことが種々の感度解析手法が研究されているゆえんであるが、有限要素解析を  $N + 1$  回実行すると計算時間とコストが常識的な範囲内にある場合には、FDM は最も簡単な方法である。次に微分法 (differentiation method) による感度解析手法を述べる。設計変数  $b_j$  の変分  $\delta b_j$  に起因する式 (A.1) の変分をとると

$$\frac{\partial Q_i}{\partial U_i} \cdot \delta U_i + \frac{\partial Q_i}{\partial b_j} \delta b_j = 0 \quad (\text{A.4})$$

を得る．ここで式 (A.1) の時間微分をとると  $(\partial Q_i / \partial U_i) \dot{U}_i = \dot{F}_i$  となることから明らかであるが， $\partial Q_i / \partial U_i$  は接線剛性マトリクスにほかならず，

$$\mathbf{K} = \frac{\partial Q_i}{\partial U_i} \quad (\text{A.5})$$

と置ける．よって式 (A.4) より

$$\delta U_i = -\mathbf{K}^{-1} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial b_j} \delta b_j \quad (\text{A.6})$$

あるいは

$$\frac{dU_i}{db_j} = -\mathbf{K}^{-1} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial b_j} \quad (\text{A.7})$$

のように変位感度が求められる．上式は非線形問題においてよく知られる感度評価式となる．

式 (A.6) の解釈を Fig.A.1 に示す．Fig.A.1 より，2つのベクトル 1, 2 の大きさが近似

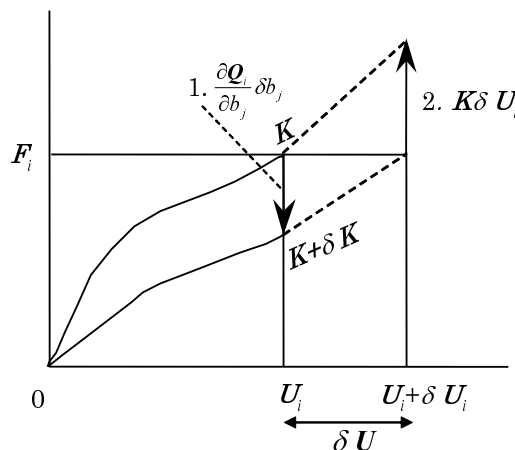


Fig.A.1 Interpretation of sensitivity analysis.

的に等しく，方向が逆であることが， $(\partial Q_i / \partial b_j) \delta b_j = -\mathbf{K} \delta U_i$ ，ひいては式 (A.6) に対応していることがわかる．

感度解析手法を新たに構成する目的は，既述のように有限要素法の繰返し計算を避けるところにある．非線形問題において，式 (A.1) の解法として Newton-Raphson 法が用いられ，収束解  $U_i$  が得られた時点での接線剛性  $\mathbf{K}$  の前進分解が行われていれば，これを利用して式 (A.6)，(A.7) が効率良く計算できる．したがって非線形問題におけるポイントは，Fig.A.1 のベクトル 1 に相当する  $\partial Q_i / \partial b_j$  の評価をいかに行うかにある． $\partial Q_i / \partial b_j$  の評価は，解析的には，

$$\frac{\partial Q_i}{\partial b_j} = \sum_e \iiint \left( \frac{\partial_0^t \mathbf{B}_L^T}{\partial b_j} \cdot {}^t \hat{\mathbf{S}} |\mathbf{J}| + {}_0^t \mathbf{B}_L^T \frac{\partial_0^t \hat{\mathbf{S}}}{\partial b_j} |\mathbf{J}| + {}_0^t \mathbf{B}_L^T \cdot {}^t \hat{\mathbf{S}} \frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial b_j} \right) dr_1 dr_2 dr_3 \quad (\text{A.8})$$

となる．ここで

$$dV^e = |\mathbf{J}| dr_1 dr_2 dr_3 \quad (\text{A.9})$$

ただし

${}^t\hat{\mathbf{S}}$  : 時刻 0 の配置を基準とする時刻  $t_i$  での第 2 種 Piola-Kirchhoff 応力テンソル  ${}^t\mathbf{S}$  のベクトル表示

${}^t\mathbf{B}_L^T$  : 同じく時刻 0 の配置を基準とする時刻  $t_i$  での Green-lagrange ひずみテンソル変分  ${}^t\mathbf{E}$  と要素の節点変位変分  $\delta\mathbf{u}_i$  を関係付けるマトリクス

$r_1, r_2, r_3$  : 自然座標

$|\mathbf{J}|$  : ヤコビアン

$V^e$  : 時刻 0 の配置での要素体積領域

である．上式では，アイソパラメトリック要素の自然座標系上へ積分領域を変換することにより，たとえ  $b_j$  が初期形状に関するものであっても被積分関数のみ  $b_j$  で微分すればよいように工夫している．一方， $\partial Q_i / \partial b_j$  は有限差分法により，

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_i}{\partial b_j} &\approx \frac{Q_i(\mathbf{U}_i, b_j + \Delta b_j) - Q_i(\mathbf{U}_i, b_j)}{\Delta b_j} \\ &= \sum_e \left\{ \int_{V^e + \Delta V^e} ({}^t\mathbf{B}_{L0}^{Tt} \cdot \hat{\mathbf{S}})_{b_j + \Delta b_j} dV - \int_{V^e} ({}^t\mathbf{B}_{L0}^{Tt} \cdot \hat{\mathbf{S}})_{b_j} dV \right\} / \Delta b_j \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

のように微小な摂動量  $\Delta b_j$  を実際に与えて近似的に評価することもできる．式 (A.8) に基づく方法を直接微分法 (Direct Differentiation Method, 略して DDM), 式 (A.10) に基づく方法を半解析微分法 (Semi-analytical Differentiation Method, 略して SDM) と呼ぶ．

次に，離散力法について概説する (A.4) ．

目的関数を  $\pi$  とすると，離散化された Lagrange 関数  $L$  は次のように表すことができる．

$$L(\mathbf{U}, \mathbf{w}, \Lambda, \mathbf{b}) = \pi - \mathbf{w}^T \cdot \{ \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{b}) - \mathbf{F} \} + \Lambda(v - V) \quad (\text{A.11})$$

ここで， $\mathbf{Q}$  は内力ベクトル， $\mathbf{F}$  は外力ベクトル， $\mathbf{U}$  は変位ベクトル， $v$  は現在の体積， $V$  は与えられた時刻 0 の体積， $\mathbf{w}$  は等式の制約条件に対する Lagrange 未定乗数， $\Lambda$  は不等式の制約条件に対する Lagrange 未定乗数， $\mathbf{b}$  は設計変数ベクトルである．式 (A.11) の変分をとることにより，次のような方程式が得られる．

$$\delta L = \delta \mathbf{U}^T \cdot \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{U}} - \left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}} \right)^T \cdot \mathbf{w} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta \mathbf{w}^T \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{Q}) \\
& + \delta \Lambda (v - V) \\
& + \delta \mathbf{b}^T \cdot \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial(\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{F})}{\partial \mathbf{b}} - \frac{\partial(\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{Q})}{\partial \mathbf{b}} + \Lambda \frac{\partial v}{\partial \mathbf{b}} \right\} \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

式 (A.12) の停留条件  $\delta L = 0$  から，次のような  $\delta U$ ， $\delta \mathbf{w}$ ， $\delta \Lambda$  についての方程式が得られる．

$$\left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial U} \right)^T \cdot \mathbf{w} = \frac{\partial \pi}{\partial U} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{cases} \Lambda (v - V) = 0 \\ v - V \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

式 (A.14) は非線形平衡方程式で最適化が行われる前にすでに計算されている．その際に，接線剛性  $\partial \mathbf{Q} / \partial U$  が三角分解されているので，式 (A.13) が容易に計算され，Lagrange 未定乗数  $\mathbf{w}$  が得られる．式 (A.15) は体積に関する制約条件式である．

もし，式 (A.13) ~ (A.15) が満足されているなら，Lagrange 関数の変分は次のように置き換えられる．

$$\delta L = \delta \mathbf{b}^T \cdot \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial(\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{F})}{\partial \mathbf{b}} - \frac{\partial(\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{Q})}{\partial \mathbf{b}} + \Lambda \frac{\partial v}{\partial \mathbf{b}} \right\} \quad (\text{A.16})$$

最急降下法の場合，設計変数の変更量  $\Delta \mathbf{b}$  は次のように Lagrange 関数の導関数に平行なベクトルとして定められる．

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{b} & = -\alpha \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{b}} \\
& = \alpha \cdot \left\{ -\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{b}} - \frac{\partial(\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{F})}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial(\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{Q})}{\partial \mathbf{b}} - \Lambda \frac{\partial v}{\partial \mathbf{b}} \right\} \quad (\text{A.17})
\end{aligned}$$

ここで， $\alpha$  は適当な正の数である．式 (A.17) を式 (A.16) に代入すると，Lagrange 関数は  $\mathbf{b}$  の変分に対して常に減少することが容易に示される．

$$\begin{aligned}
\Delta L & \equiv \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{b}} \right)^T \cdot \Delta \mathbf{b} \\
& = \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{b}} \right)^T \cdot \left( -\alpha \frac{\partial L}{\partial \mathbf{b}} \right) = -\alpha \left| \frac{\partial L}{\partial \mathbf{b}} \right|^2 < 0 \quad (\text{A.18})
\end{aligned}$$

畔上氏によって提案された力法に従って，形状勾配関数ベクトルを

$$\mathbf{L}_G(\mathbf{b}) \equiv \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial(\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{F})}{\partial \mathbf{b}} - \frac{\partial(\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{Q})}{\partial \mathbf{b}} + \Lambda \frac{\partial v}{\partial \mathbf{b}} \quad (\text{A.19})$$



のように定義すると、離散法における設計変数の変更量  $\Delta \mathbf{b}_{DFM}$  は以下の方程式を解くことにより得られる。

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{U}} \cdot \Delta \mathbf{b}_{DFM} = -\alpha \mathbf{L}_G(\mathbf{b}) \quad (\text{A.20})$$

$$\Delta \mathbf{b}_{DFM} = \alpha \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{U}} \right\}^{-1} \cdot \{-\mathbf{L}_G(\mathbf{b})\} \quad (\text{A.21})$$

ここで、接線剛性は、スムージングの効果を持ったフィルタとして作用する。このように離散法は、形状勾配関数ベクトル  $\mathbf{L}_G(\mathbf{b})$  を仮想的な外力とみなして接線剛性マトリクスに作用させ、そうして求めた変位を新たな設計変数の変更量  $\mathbf{b}_{DFM}$  として採用する。式 (A.21) より、新たな設計変数の変更量はすべての節点に関わるものとなり、自動的に内部の節点の位置も決まる。これにより、要素のつぶれや再分割の手間を省くことができるという利点をもつ。また、もし接線剛性が正定値なら、Lagrange 関数は  $\mathbf{b}_{DFM}$  に対して常に減少することが次式のように容易に示される。

$$\begin{aligned} \Delta L &= \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{b}} \right)^T \cdot \Delta \mathbf{b}_{DFM} \\ &= \alpha \mathbf{L}_G(\mathbf{b})^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{U}} \right\}^{-1} \cdot \{-\mathbf{L}_G(\mathbf{b})\} \\ &= -\frac{1}{\alpha} \Delta \mathbf{b}_{DFM}^T \cdot \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{U}} \cdot \Delta \mathbf{b}_{DFM} \\ &< 0 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

### A.3 数値解析例

本研究では、節で述べた離散法を、ゴムのような強い非線形性を示す柔軟構造体の形状最適化問題に適用する。柔軟構造体モデルとして超弾性体を用い、形状最適化問題としていくつかの解析を実施し、得られた最適化結果について報告する。

まず、解析解の知られている最適化問題に適用することによって離散法の妥当性を検証し、次いで応用例としてマニピュレータの最適化問題を実施する。

#### A.3.1 孔の空いた超弾性平板

いま、孔の空いた無限平板に 2 軸方向から外力を加える問題を考える。このとき、最適化問題を、式 (A.23) のように外力仕事が増小になると設定した場合、最適な孔の形は楕円形となり、その短軸と長軸の比が式 (A.24) のように与えられた外力の比になることが Kristensen によって明らかにされている<sup>(A.7)</sup>。

$$\min \pi = \int_{\Gamma_s} \sigma_i u_i d\Gamma$$

$$\text{subject to } v - V = 0 \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{b}{a} \quad (\text{A.24})$$

ここで  $\sigma_i, u_i$  はそれぞれ外力, 変位ベクトルの成分であり,  $\Gamma$  は対象領域の境界,  $\Gamma_s$  は外力が作用する境界,  $v$  は現時刻の体積,  $V$  は時刻 0 の体積をそれぞれ表す. この最適化問題は, 単純な問題であるにも拘わらず, 最適解として孔形を正確に楕円形として得ることが難しく, 得られた孔の形状がガタガタとした波打ち現象が生じてしまう問題がある. 例えば, 文献<sup>(A.8)</sup>では B-spline 法を用いてこの問題を解決している. ここでは, 離散法を用いてこの問題の解決を図る.

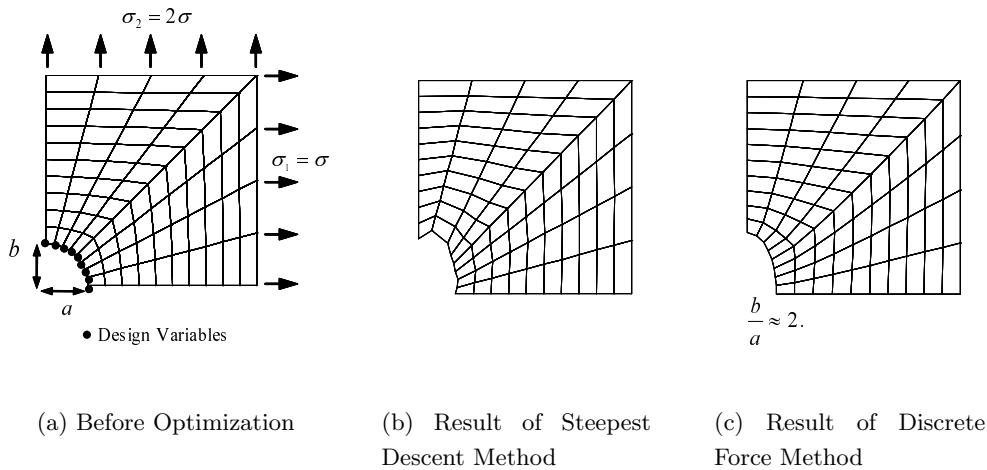


Fig.A.2 Optimal shape of hyperelastic plate with a hole.

最適化の結果は, 材料に依存しないことから, この問題を超弾性材料に適用する. なお, 最適化を行うにあたって, Fig.A.2(a)のように, 初期形状を一辺 1.0 の正方形平板に半径 0.2 の孔を開けた形状をとり, 擬似的に無限平板と仮定した. また変形の対称性から 1/4 モデルを用いる. また, 1 軸方向, 2 軸方向に与える外力を 1:2 の比になるように与えた. この場合, 式 (A.24) は, 孔の最適形状として  $b/a = 2$  を与える. 本解析では,  $c_1 = 0.3$ ,  $c_2 = 0.15$  の材料定数をもつ Mooney-Rivlin 体を用いる. 以上の最適化問題を最急降下法, 離散法を用いて求める. 設計変数は, Fig.A.2(a) に示すように孔の周りの節点座標とする. なお, この問題を離散法で解く場合, 境界  $\Gamma_s$  を固定して解いた. 最急降下法, 離散法で得られた孔形の最適化結果をそれぞれ Fig.A.2(b), Fig.A.2(c) に示す. Fig.A.3 に離散法, 最急降下法で得られた孔の座標値をプロットした. Fig.A.2(b), Fig.A.2(c) をみればわかるように, 最急降下法で得られた孔の形状は, ガタガタとした形状となり, 楕

円形とは程遠い結果となった。一方、離散法で得た孔の形はほぼ楕円形となり、短軸と長軸の比も外力値の比 2 にほぼ一致し、良好の結果を得たといえる。

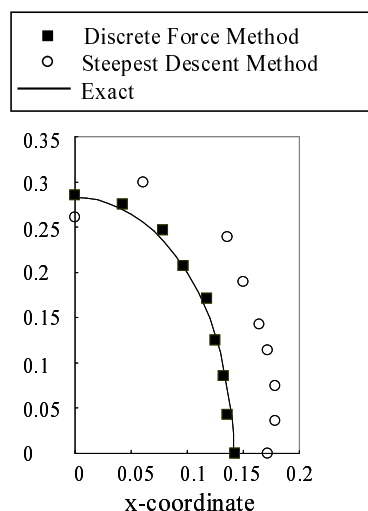


Fig.A.3 Plots of nodal coordinates of hole.

以上より、解析解の知られている問題に対して離散法が有効であることがわかった。

### A.3.2 Flexible Micro Actuator(FMA)の形状最適化

ここでは、離散法を用いて、次のフレキシブルマイクロアクチュエータ(以下FMA)の形状最適化問題を解く。FMAは複雑な機械の内部や体内など、人間の手が届かない狭所で作業を行うマイクロマニピュレータとして研究が進められてきた<sup>(A.1)</sup>。FMAは繊維強化ゴムを使い、Fig.A.4のような構造をもつ。FMAはゴムチューブの内部に3つの圧力室を持つ柔軟なアクチュエータであり、3つの圧力室の圧力を独立に制御することにより、3自由度の運動を行うことができる。例えば、並列に配置してロボット手を構成すると、従来の剛体メカニズムでは困難であった果実などの不定形なもの、ガラスなど割れやすいものの取り扱いが可能となる。実用化に当たっては、断面形状が長手方向に一定であり、かつ均質な材料で構成されていれば、押し出し加工で成形できるため製造コスト、手間の面で効率化を図ることができ、また小型化も容易になる。しかし、FMAを均質な材料で製作するとFig.A.5のように湾曲すると同時に半径方向にも膨張しひずみが大きくなり、強度の観点からも好ましくない。また、並列に配置して利用する場合、隣り合うFMA同士で干渉し動作に支障をきたす。このため、現在では周方向に繊維強化することで異方性を持たせ、この問題を解決している。

本研究では、半径方向の膨張が少なくかつ先端の曲がり角が大きくなるような断面形状

の最適化を行う．こうすることで，FMA を均質な材料のみで製作可能となる．材料モデルは，文献<sup>(A.1)</sup>に則り，次式のような高次 Mooney-Rivlin 体を用いる．

$$W = c_1(I - 3) + c_2(II - 3) + c_3(I - 3)^3 \tag{A.25}$$

ただし，材料定数  $c_1, c_2, c_3$  はそれぞれ  $0.24\text{MPa}$ ， $7.9 \times 10^{-3}\text{MPa}$ ， $5.7 \times 10^{-3}\text{MPa}$  である．また，寸法は Fig.A.4 に示す通りである．

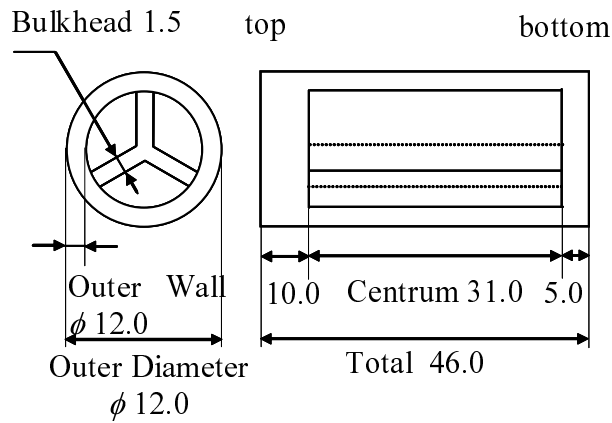


Fig.A.4 Model of FMA.

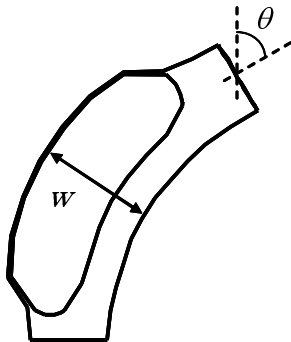


Fig.A.5 Deformation before Optimization.

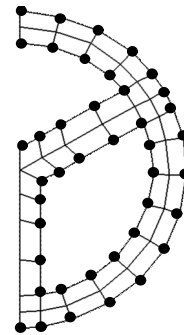


Fig.A.6 Cross-Section of FMA.

本解析では，圧力室に内圧を与えて変形させるため，構造の変形に依存する非保存力の荷重を考える必要がある．この場合は，圧力を従動力として与え，接線剛性マトリクスに荷重補正マトリクスを付加する．一般に従動力を伴う解析で感度を計算するときは，次式の平衡方程式から変位増分ひいては変位感度を求める．

$$Q(u, b) = F(u, b) \tag{A.26}$$

このとき， $F$  は  $u, b$  の関数なので， $b_j$  について式 (A.26) の変分は以下ようになる．

$$\frac{\partial Q(\mathbf{u}, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} + \frac{\partial Q(\mathbf{u}, \mathbf{b})}{\partial b_j} \delta b_j = \frac{\partial F(\mathbf{u}, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} + \frac{\partial F(\mathbf{u}, \mathbf{b})}{\partial b_j} \delta b_j \quad (\text{A.27})$$

式 (A.27) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b_j} \approx & -\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{Q}(\mathbf{u}, b_1, \dots, b_j + \delta b_j, \dots, b_m) - \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{b}) \\ & - \mathbf{F}(\mathbf{u}, b_1, \dots, b_j + \delta b_j, \dots, b_m) + \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{b})) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

解析にあたっては，Fig.A.4 の 3 つの圧力室のうち，1 つが加圧されたとし，変形の対称性を考慮し 1/2 モデルを用いた．Fig.A.6 は 1/2 モデルの断面のメッシュ図であり，黒点で示された節点座標を設計変数とした．設計変数の変更は FMA の構造が 60 ° 毎の面に関して対称であるため，その対称性を保つように行った．

ここで最適化問題を次式のように定式化する．

$$\begin{aligned} \min \pi &= w \\ \text{subject to } \theta &= 60 \text{ degree at } 0.3\text{MPa} \\ s - S &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

ここで， $w$  は Fig.A.5 に示すように，変形後の FMA の断面の直径で，どのくらい断面が膨張したかの指標を示す． $\theta$  は変形後の FMA の傾きである．また， $s, S$  はそれぞれ変形前，変形後の FMA の断面積である．式 (A.29) より，本最適化問題は次のように言い換えることができる．すなわち，圧力 0.3MPa を負荷したときに FMA の先端の曲がり角度が 60 ° になるように，また変形中 FMA の断面積が一定となるように制約を加えながら，断面方向の膨張を抑える最適な FMA の断面形状を探索する．本解析では，式 (A.29) の 2 つの制約条件を目的関数に penalty 法で加味した，次式の拡張された目的関数を用いる．

$$\min \pi^* = w + r_1(\theta - 60) + r_2(s - S) \quad (\text{A.30})$$

ここで， $r_1, r_2$  はそれぞれ penalty 変数である．

最適化の収束状況を Fig.A.7 に示す．横軸を反復回数，縦軸を目的関数の値とした．Fig.A.7 に示す極小解をそれぞれ離散法，最急降下法の最適解とした．

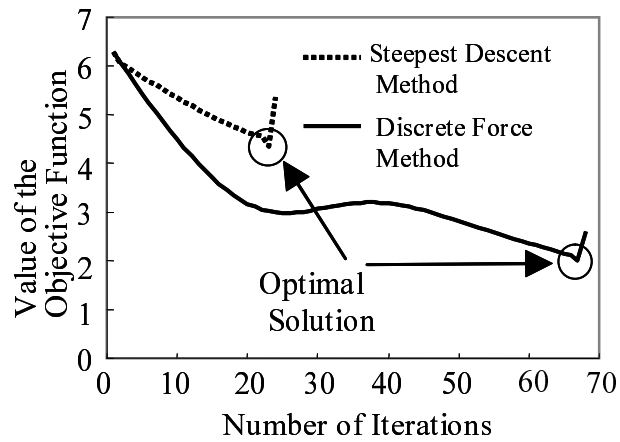


Fig.A.7 Convergence of the each optimization procedure.

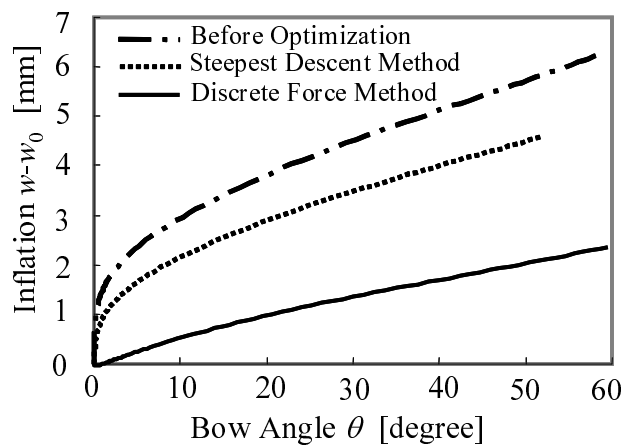


Fig.A.8 Relation of inflation and bow angle.

圧力室を加圧した際の先端の曲がり角  $\theta$  と断面方向の膨らみ  $w$  との関係を Fig.A.8 に示す。ただし  $w_0$  は変形前状態の FMA の直径である。この図で従来型の FMA と離散力法で最適化された FMA とを同じ先端の曲がり角において比較してみると、最適化された FMA の方が半径方向の膨らみが小さくなっていることがわかる。比較のため、最急降下法による結果も合わせて載せた。離散力法で最適化された FMA の方が半径方向の膨らみが押さえられていることがわかる。離散力法と最急降下法による最適化の結果得られた FMA の断面を Fig.A.9 に示す。Fig.A.9 には、それぞれ変形前と変形後の FMA の断面を示した。また、Fig.A.10 に従来型の FMA と離散力法、最急降下法で最適化された FMA が半径方

向に 2mm 程度膨らんだ時の変形図を示す．これらの図から同じ胴部の膨らみでより先端の曲がり角が大きくなっており，最適化の効果が現れていることがよくわかる．

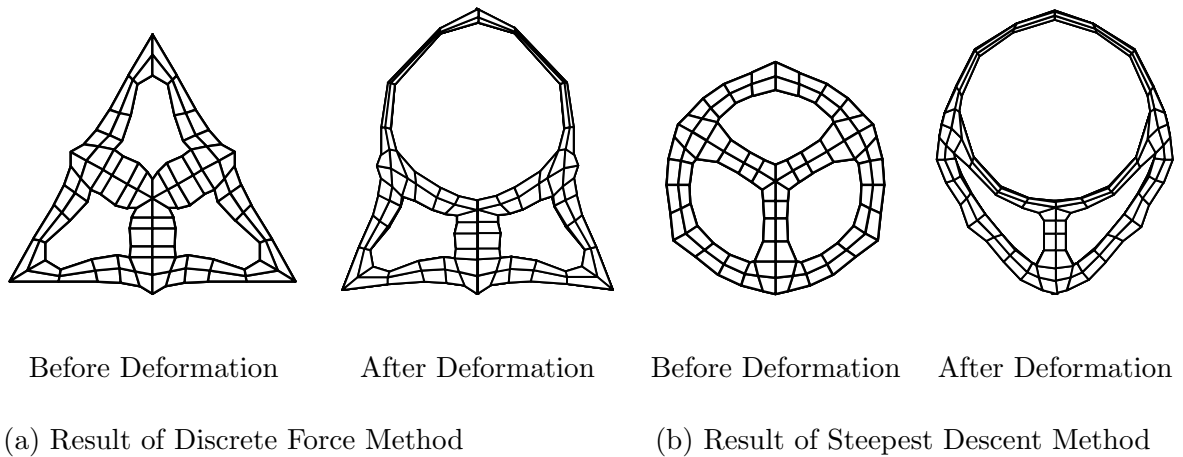
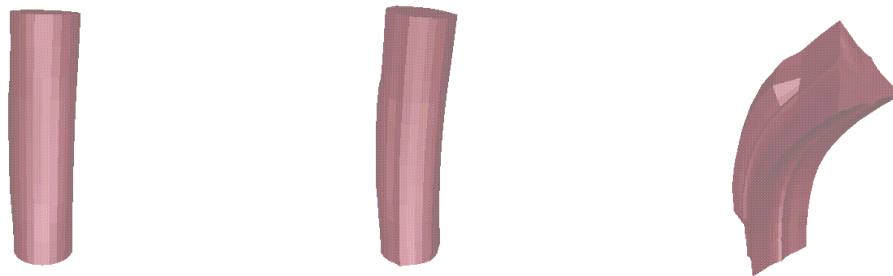


Fig.A.9 Optimized Cross-Section of FMA



(a) Before Optimization    (b) Steepest Descent Method    (c) Discrete Force Method

Fig.A.10 Deformations with about 2mm Inflation in the Radial Direction.

#### A.4 結言

本章では，まず非線形問題に適用できる離散力法を提示した．この離散力法を超弾性円孔板の最適化問題に適用して，非線形最適化問題に有効であることを示した．次いで超弾性有限要素法と離散力法により，繊維強化することなく半径方向の膨らみを押さえ，かつ

先端の曲がり角が大きくなるように FMA 断面の最適設計を行った。離散法で得られた最適断面形状は、最急降下法で求めた形状より良好な結果を得ることができた。



- (A.1) Takagi, K., Hisada T., Development of a New Flexible Microactuator Using Finite Element Method, *Theory. Appl. Mech.*, **45**, pp.9–14, 1996.
- (A.2) Azegami, H., Wu, Z. C., Domain Optimization Analysis in Linear Elastic Problems, *JSME International, Series A*, **39-2**, pp.272–278, 1996.
- (A.3) Ihara, H., Azegami, H., Shimoda, M., Solution to Shape Optimization Problems Considering Material Nonlinearity, *Computer Aided Optimization Design of Structures VI*, WIT Press, Southampton, pp.87–95, 1999.
- (A.4) Noguchi, H., Nonlinear Generalized Discrete Force Method for Shape Optimization, *Proc.CJK-OSM 2*, pp.603–608, 2002.
- (A.5) Umeda, H., Noguchi, H., Shape Optimization for Bluff Body Placed in Fluid Flow, *Proc.CJK-OSM 2*, pp.791–796, 2002.
- (A.6) 久田俊明, 野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, pp.361–366, 1995.
- (A.7) Kristensen, E.S., Madsen, N.F., On the Optimum Shape of Fillets in Plates Subjected to Multiple In-plane Loading Cases, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **10**, pp.1007–1019, 1976.
- (A.8) Braibant, V., Fleury, C., Shape Optimal Design using B-Splines, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **44**, pp.247–267, 1984.

## 本論文に関わる原著論文

### 第 3 章

田中真人, 野口裕久, ひずみ仮定を用いた非圧縮超弾性シェル要素の開発とその評価, 日本計算工学会論文集, 論文番号 20070002, 2007.

### 第 5 章

M. Tanaka, H. Noguchi, Brazier Instability Analysis by Nonlinear Finite Element Method, Theoretical and Applied Mechanics Japan, **55**, pp.31–40, 2006.

### 付録 A

M. Tanaka, H. Noguchi, Structural Shape Optimization of Hyperelastic Material by Discrete Force Method, Theoretical and Applied Mechanics Japan, **53**, pp.83–91, 2004.