

連続変数量子情報処理に向けた
光の重ね合わせコヒーレント状態の生成
および純粋化に関する研究

鈴木 重成

2006 年度

本論文の構成と内容

光のコヒーレント状態を量子力学的に重ね合わせたもの (CSS) は光を用いた量子情報処理を実現する上で重要なリソースであり、近年その生成に向けた研究が行われている。そのような中、実験的な不完全性を考慮しつつ現実的な CSS 生成スキームについての知見を与えること、その不完全性による影響を補償するための現実的なスキームを提案することが必要である。そこで、2 種類の CSS 生成スキームについて解析を行い、いずれが現実的な条件下で有利であるかを明らかにした。また、現在すでに実用化されている技術を用いて、現実的に生成される CSS を純粋化できるプロトコルを提案した。一方、高いスクイーピングレベルと純粋度を備えた直交位相スクイーズド状態の生成は、CSS を生成する上でも、さまざまな量子情報処理を実現する上でも欠くことができないが、従来用いられてきた非線形光学結晶 KNbO_3 では十分な特性を得ることができなかった。そこで、 KNbO_3 に代わり擬似位相整合の KTiOPO_4 を用いることで、高純粋度・高レベルの直交位相スクイーズド状態を生成した。

第 1 章は序論であり、特に光を用いた量子情報処理についての研究状況について概観し、CSS の必要性について言及する。そして、これを生成するための問題点を指摘し、本研究の目的や意義について明らかにする。

第 2 章では、本論文の理論的な背景について述べる。特に、第 3 章ならびに第 4 章で必要となる量子光学の理論や記述を与え、様々な光の量子状態について紹介する。

第 3 章では、2 種類の CSS 生成スキームに関して実験的な不完全性を考慮した解析を行う。その中で、現実的と考えられる条件下においていずれのスキームがより有利であるかを明らかにする。

第 4 章では、現在手に入る技術を用いて実現可能な CSS 純粋化プロトコルを提案する。これにより、線形ロスにより破壊され混合状態に陥った CSS を純粋化することが可能であることを示す。

第 5 章では、従来の KNbO_3 に代わり擬似位相整合 KTiOPO_4 を非線形光学結晶として用いる直交位相スクイーズド状態の生成実験について述べる。これにより、従来と比較し高いスクイーピングレベルと純粋度が達成できることを述べる。

第 6 章は結論であり、上に挙げた研究において得られた成果を総括する。

目次

第1章	序論	1
1.1	量子エンタングルメント	3
1.2	量子情報処理 (quantum information processing)	4
1.2.1	量子暗号鍵配布 (QKD: quantum key distribution)	4
1.2.2	量子テレポーテーション (quantum teleportation)	6
1.2.3	量子計算 (quantum computation)	7
1.3	光を用いる量子情報処理	9
1.3.1	QKD	9
1.3.2	量子テレポーテーション	9
1.3.3	量子計算	10
1.4	連続変数を用いる量子情報処理	10
1.4.1	QKD	10
1.4.2	量子テレポーテーション	11
1.4.3	量子計算	11
1.4.4	エンタングルメント抽出と非ガウス操作の必要性	12
1.4.5	高レベルなスクイズド状態の必要性	13
1.5	コヒーレント状態を用いた量子情報処理	14
1.5.1	コヒーレント光による通信と量子情報処理	14
1.5.2	コヒーレント状態を用いる量子計算	15
1.6	コヒーレント重ね合わせ状態 (CSS)	15
1.6.1	CSS の定義	15
1.6.2	CSS の意義: Schrödinger の猫状態として	16
1.7	CSS を手に入れるために	16
1.7.1	CSS 生成スキーム	16
1.7.2	CSS 生成に向けた研究例	17
1.7.3	CSS の生成にあたっての課題	19
1.7.4	CSS 純粋化の必要性	21
1.7.5	純粋度の高いスクイズングの必要性	22
1.8	スクイズング	22
1.8.1	直交位相スクイズングに関する過去の研究例	22
1.8.2	860 nm 波長帯のメリット	23
1.8.3	860 nm 波長帯におけるスクイズング	24
1.8.4	良質なスクイズングを実現する上での課題	24

1.9	研究の目的と本論文の構成	26
1.9.1	目的	26
1.9.2	本論文の構成	26
第2章	解析で用いる計算式の導出	37
2.1	電磁場の量子化と直交位相振幅	37
2.1.1	古典的な電磁場のハミルトニアンと運動方程式	38
2.1.2	電磁場の正準量子化	42
2.1.3	直交位相振幅	44
2.1.4	単一モードの電磁波と表記の簡略化	45
2.2	直交位相固有状態	46
2.3	ウィグナー関数	46
2.3.1	定義	47
2.3.2	その性質	47
2.4	色々な量子状態	49
2.4.1	光子数状態 (photon number state)	49
2.4.2	コヒーレント状態 (coherent state)	52
2.4.3	スクイズド状態 (squeezed state)	55
2.4.4	重ね合わせコヒーレント状態 (CSS: coherent state superposition)	60
2.5	光学素子	65
2.5.1	ビームスプリッター (beam-splitter)	66
2.5.2	フォトディテクター (photo-detector)	68
2.5.3	ホモダイン検波	68
2.6	実験における不完全性の表現	70
2.6.1	線形ロス (伝搬ロス)	70
2.6.2	不完全なフォトディテクター (検出口ロス)	71
2.6.3	ホモダイン検波におけるモードミスマッチ	72
2.6.4	ビームスプリッターによるモデル	72
2.7	まとめ	73
第3章	実験的な不完全性を考慮した CSS 生成スキームの検討	77
3.1	擬似 CSS 生成スキーム	78
3.1.1	SS スキーム	79
3.1.2	PS スキーム	79
3.1.3	SS スキームと PS スキームの等価性	79
3.1.4	擬似 CSS と CSS の類似性	80
3.2	実験上の不完全性を考慮した解析	82
3.2.1	SS スキームについての解析	82
3.2.2	PS スキームについての解析	85
3.2.3	まとめ	88

3.3	非古典性を確保するための実験条件	89
3.3.1	状態の非古典性と光子数統計	89
3.3.2	状態の非古典性を保つための条件	90
3.4	実験的なパラメータによるモード純度の表現	94
3.5	まとめ	96
第4章	ホモダイン検波を用いる CSS 純粋化プロトコルの提案	101
4.1	ロスによる CSS のデコヒーレンス	101
4.2	提案するプロトコル	103
4.3	一般的な部分測定による純粋化	103
4.4	ホモダイン検波を用いる純粋化	106
4.4.1	完全なホモダイン検波を用いる場合	107
4.4.2	ホモダイン検波におけるロスの影響	112
4.5	CSS 増幅プロトコルについて	114
4.5.1	CSS と CSM の混合を入力とした場合	115
4.5.2	純粋化プロトコルと増幅プロトコルの組み合わせについて	117
4.6	まとめ	118
第5章	PPKTP を用いるスクイーズド状態の生成	123
5.1	スクイージングに関する理論	123
5.1.1	光パラメトリック増幅によるスクイーズド状態の生成	123
5.1.2	OPO により生成されるスクイーズド状態	125
5.1.3	LO 光に対する位相揺らぎの影響	127
5.1.4	スクイーズド状態の純粋度	127
5.2	擬似位相整合	128
5.3	セットアップ	129
5.3.1	概略	129
5.3.2	各種ビーム	130
5.3.3	光源ならびに周辺装置	132
5.3.4	非線形光学結晶 (PPKTP)	133
5.3.5	光パラメトリック発振器 (OPO)	134
5.3.6	音響光学変調器 (AOM: acousto-optic modulator)	137
5.3.7	モードクリーニング共振器 (MCC)	139
5.3.8	検出/測定系	139
5.4	ロック機構	140
5.4.1	共振器の共振周波数	140
5.4.2	LO 光とスクイーズド光の相対位相	141
5.5	実験方法	142
5.5.1	ホモダイン検波のバランス	142
5.5.2	ポンプ光と OPO のモードマッチ	142
5.5.3	共振器内部ロスの測定	143

5.5.4	パラメトリックゲインの測定	144
5.5.5	ホモダイン効率の測定	145
5.5.6	スクイーミング/アンタイスクイーミングレベルの測定	146
5.6	実験結果	147
5.6.1	共振器内部ロス (BLIRA の影響について)	147
5.6.2	パラメトリックゲイン	148
5.6.3	最適なポンプ光パワーにおける量子ノイズレベル	148
5.6.4	量子ノイズレベルのポンプ光パワー依存性	150
5.6.5	-3 dB 程度のスクイーミングにおける状態の純粋度	150
5.7	考察	153
5.8	まとめ	154
第 6 章	結論	159
6.1	実験的な不完全性を考慮した CSS 生成スキームの検討 (第 3 章)	159
6.2	ホモダイン検波を用いる CSS 純粋化プロトコルの提案 (第 4 章)	159
6.3	PPKTP を用いるスクイーズド状態の生成 (第 5 章)	160
6.4	総括と今後の展望	160
6.4.1	総括	160
6.4.2	今後の展望	161

第1章 序論

ここ数十年にわたり，量子情報処理に関する研究が盛んに行われている．量子情報処理とは，古典力学的には有り得ない状態や現象を積極的に利用する情報処理であり，現状の古典的な情報処理では不可能とされていた処理を可能にすると言われている．

この量子情報処理における情報の担い手として，すでに光はなくてはならないものとなっている．量子情報処理に用いられる光として現在主流なのは，量子力学的な性質が顕著な単一光子状態であるが，古典的な通信において用いられているコヒーレント状態にも捨てがたい利点がある．それは，長距離伝送において不可避な線形ロスが存在してもデコヒーレンス (情報の劣化) を起こさないという点である．よって，このコヒーレント状態と量子情報処理を組み合わせることができれば，その実用化に向けて寄与するところは大きいはずである．これに関連して， $|+\alpha\rangle + e^{i\varphi} |-\alpha\rangle$ で表現されるようなコヒーレント状態の量子力学的な重ね合わせ (CSS: coherent state superposition) を補助的なリソースとして用いることにより，コヒーレント状態による量子情報処理を実行する手法が提案されている [1]．

一方，量子情報処理のプロトコルには，離れた場所にある二者 (またはそれ以上) によるエンタングルメント状態 (もつれ合い状態) の共有を必要とするものが多くある．しかしながら，こうした状態のエンタングルメント (もつれ合い) は，状態を伝送する中で避けることのできない雑音や損失の存在により容易に失われてしまう．そして，ガウス型の状態¹を用いる量子情報処理において，古典通信と局所操作 (LOCC: local operation and classical communication) を用いてエンタングルメントを回復させるには非ガウス操作²が必須である [2-4]．この非ガウス操作の結果生じる状態の典型例として，先に挙げた CSS がある．

そして，CSS を生成する方法としては，単一光子状態をスクイズする [5]，またはスクイズド状態から光子を引く [6] というものがある．これら2つのスキームは数学的に等価であるが [7]，実験的なプロセスは異なるため，どちらがより有利であるかは実験的な不完全性を考慮に入れて検討する必要がある．

また，CSS は大変に脆弱な状態であり，その生成ならびに伝搬の過程で避けることのできない線形損失により，すぐに混合状態となってしまう．CSS を量子情報処理に応用するためには，このような混合状態から，より純粋な CSS を取り出す手立ても必要である．こうした要求に対し，現在すでに提案されているプロトコル [8] は，ほぼ完全な光子数識別測定に加え，純粋な CSS を補助状態として必

¹直交位相振幅の分布がガウス型であるような状態．コヒーレント状態やスクイズド状態など．

²直交位相振幅の分布をガウス型から非ガウス型にするような操作．光子を加減する操作など．

要とする．しかしながら，こうした測定や状態を現在の技術で用意することは不可能である．よって，現段階において利用可能な技術(ホモダイン検波など)や入手できる状態(あまり純粋でないCSS)を用いて，CSSを純粋化することのできるプロトコルの考案が必要であると思われる．

さらに，先に挙げた擬似的なCSS生成スキームは，いずれもスクイーピングの操作を必要とする．特に，CSSのように非ガウス型の統計を持つ状態を生成するにあたっては，入力状態に線形ロスをもたらすことは極力避けなければならない．すなわち，純粋度の高いスクイーピングの操作が要求される．それに加えて，光(とりわけ連続変数)を用いる量子情報処理プロトコルの多くは，高い純粋度とスクイーピングレベルを備えたスクイーズド状態をリソースとして必要とする [9]．こうしたことから，高い純粋度とスクイーピングレベルを持ったスクイーズド状態を生成する技術は，現在考えられている量子情報処理プロトコルを実現するためには必須である．

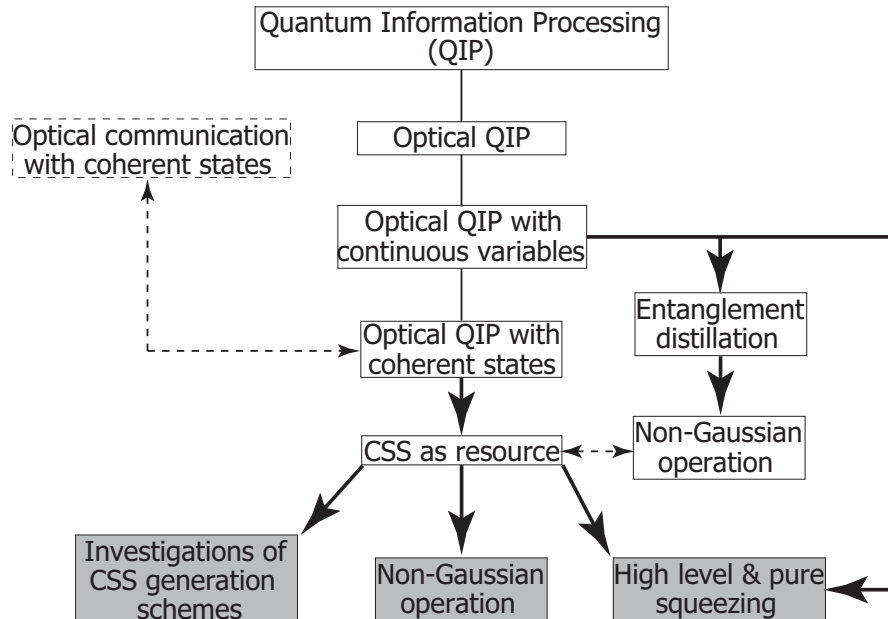


Figure 1.1: Motivation for this study.

本章では，まず本研究の背景を概観する．ここで，量子情報処理についての現状把握から，非ガウス操作，CSSそして良質なスクイーピングの必要性について述べる．続いて，CSSの定義や特徴について簡単に触れた後，それを生成・純粋化する際の課題について記す．さらに，スクイーピングレベルならびに純粋度の高いスクイーズド状態を得るにあたっての課題についても述べる．最後に，本研究の目的と意義，そして本論文の構成について述べる．

1.1 量子エンタングルメント

量子情報処理についての説明に先立ち、その基盤となる量子エンタングルメント (quantum entanglement, もつれ合い) について説明する。

量子エンタングルメントとは、複数の部分系からなる全系の状態を、それぞれの部分系の波動関数に分けて記述できないことをいう。また、そのような状態をエンタングルド状態 (entangled state, もつれ合い状態) という。たとえば、部分系 A の状態 $|\psi_A\rangle_A$ と系部分 B の状態 $|\psi_B\rangle_B$ がもつれ合っていない場合、全系の状態 $|\psi\rangle_{AB}$ は直積の形で

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi_A\rangle_A \otimes |\psi_B\rangle_B \quad (1.1)$$

のように書ける。

しかし、エンタングルド状態は Eq. (1.1) のようにには書けない。この典型例としては、全スピンの向きがエンタングルした状態

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B \} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\leftarrow\rangle_A |\rightarrow\rangle_B - |\rightarrow\rangle_A |\leftarrow\rangle_B \} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\otimes\rangle_A |\odot\rangle_B - |\odot\rangle_A |\otimes\rangle_B \} \end{aligned} \quad (1.2)$$

または位置 x や運動量 p_x がエンタングルした状態

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{AB} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_x(x) |x\rangle_A |x\rangle_B dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_{p_x}(p_x) |p_x\rangle_A |-p_x\rangle_B dp_x \end{aligned} \quad (1.3)$$

が挙げられる。ここで、 $|\uparrow\rangle$ および $|\downarrow\rangle$ は z 軸に沿って、また、 $|\rightarrow\rangle$ および $|\leftarrow\rangle$ は x 軸に沿って、さらに $|\otimes\rangle$ および $|\odot\rangle$ は y 軸に沿って、それぞれ + 向きおよび - 向きのスピンを持つ状態である。これらのスピン固有状態には以下のような関係がある。

$$\begin{aligned} |\rightarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \}, & |\leftarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle \}, \\ |\otimes\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle + i |\downarrow\rangle \}, & |\odot\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle - i |\downarrow\rangle \} \end{aligned} \quad (1.4)$$

また、 $|x\rangle$ は位置の、 $|p_x\rangle$ は運動量の固有状態である。これらには以下のような関係がある。

$$|p_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left[\frac{ixp_x}{\hbar}\right] |x\rangle \quad (1.5)$$

ここで, Eq. (1.2) に3通り, Eq. (1.3) に2通りもの表現を用いたのは, これらの状態が古典的には考えられないような性質を持つことを敢えて表現したかったからである. たとえば, Eq. (1.2) で表されるような状態の部分系 A に対して x 成分のスピンの (左右矢印に対応) を測定して状態が $|\leftarrow\rangle$ に確定したとすると, 部分系 B の状態は $(|\uparrow\rangle$ や $|\otimes\rangle$ といった状態にはならず) 必ず $|\rightarrow\rangle$ になる. また, Eq. (1.3) で表されるような状態の部分系 A に対して位置 x を測定して状態を $|x=0\rangle$ に確定させると, それに伴って部分系 B の状態も (決して $|p=0\rangle$ などではなく) $|x=0\rangle$ になる. つまり, エンタングルした系の部分系に対して何らかの測定をして波動関数を収縮させた場合, 部分系 B の波動関数は “部分系 A に対して行われた測定に影響される形で” 収縮する.

このように状態がエンタングルしていると, 部分系の一つに対して行った測定の影響は, 部分系 A と部分系 B がどんなに離れていても, 他方にも瞬時に伝わってしまう. こうした, 因果律に反するかに見える現象を予言した量子力学は Einstein, Podolsky ならびに Rosen により疑問を投げかけられることとなる [11]. そして, それに因んで Eqs. (1.2)-(1.3) に表されるような状態は EPR 状態と呼ばれる.

1.2 量子情報処理 (quantum information processing)

量子情報処理とは, 量子力学的な状態や現象を取り入れた情報処理のことである. これにより, 盗聴が原理的に不可能な暗号通信を実現したり (一部はすでに実用化されている), 現在の古典的な計算では事実上不可能な (つまり解くのに天文学的な時間を要する) 問題を高速に解けるようになることが期待されている.

ここに挙げた量子力学的な状態や現象の中核となるのは, 重ね合わせ状態と先に述べた量子エンタングルメントである.

1.2.1 量子暗号鍵配布 (QKD: quantum key distribution)

現在広く用いられている公開鍵暗号は, 暗号文を解読するのに天文学的な時間がかかること, すなわち計算量的安全性により成立している. つまり, 暗号化鍵ならびに暗号文が盗聴者により知られてしまっても, その暗号文を平文に戻すための復号化鍵を求めることが事実上不可能であればよいという考え方に基づいている. 例えば, 公開鍵暗号の代表例である RSA (Rivest, Shamir, Adleman) 暗号では, 大きな整数の因数分解に有効なアルゴリズムが存在しない³ことが, 盗聴者による復号化鍵の生成を事実上不可能にしている. こうした因数分解の困難さに基づく計算量的安全性は, 後に述べるような量子計算が実現されてしまうと成立しなくなってしまう.

³古典的な計算の範疇では存在しないと考えられてはいるが, その証明はされていない.

それに対し、量子暗号は秘密鍵を用いる“ワンタイム・パッド”暗号の考え方に基づいている。この“ワンタイム・パッド”暗号は、盗聴者には知られていない暗号鍵(秘密鍵)を用いて暗号化ならびに復号化を行うこと、さらに暗号鍵を再利用しないことにより安全性を確保する。秘密鍵を構成するランダムな文字列は“絶対に盗聴されることなく”配布されなければならないが、この部分を保証するのが量子力学の観測理論である。この観測理論の中では量子ビットの複製は不可能であることが示されている(no-cloning theorem)ため、量子ビットからなる暗号鍵を送受信者に知られることなく盗聴することは物理的に不可能である。そして、盗聴されていたことが分かりさえすれば、その時に配布した暗号鍵を廃棄することで、常に暗号鍵を秘密鍵たらしめることが可能になる。このように量子力学の性質を利用した暗号鍵配布を量子暗号鍵配布(QKD)という。

現在考えられている QKD プロトコルは、主に BB84 [12], B92 [13] ならびに E91 [14] の 3 つである。このうち、BB84 プロトコルに準拠したシステムはすでに製品化されている⁴。

BB84 これは Bennett と Brassard により 1984 年に発表されたプロトコルであることから BB84 プロトコルと呼ばれている。ここでは、縦と横、 $+45^\circ$ と -45° に偏光した、計 4 種類の単一光子を用いる。

まず送信者が、4 種類の偏光状態をランダムに送信し、受信者もランダムに 2 種類の基底(縦横または $\pm 45^\circ$) を選択して測定を行う。次に、送受信者間で古典的な通信を行い、送受信に用いた基底が縦横か $\pm 45^\circ$ いずれであるかの情報を交換する。この後、用いた基底が両者で一致していた時の観測値のみを取り出し、両者はそれぞれのワンタイム・パッドを作成する。こうして作成されたワンタイムパッドを用いて、送信者は平文を暗号化し、受信者に送る。受信者は、先のプロセスで作成されたワンタイム・パッドを用いて送信者から送られてきた暗号文を解読する。

ここで、盗聴者がいなければ両者はまったく同じワンタイム・パッドを共有しているはずである。つまり、送信者により暗号化された文は、受信者側で誤りなく解読できる。しかし盗聴者がいれば、ワンタイム・パッド中の各ビットについて、 $1/4$ の確率で誤りが生じる。たとえば、ワンタイム・パッドが 20 ビットあれば、どこかのビットが誤っている確率(すなわち盗聴者を発見できる確率)は $1 - (3/4)^{20} = 0.996$ と高い値になる。このようにして、BB84 プロトコルでは盗聴者の存在を知ることができる。

B92 これは Bennett により 1992 年に発表されたプロトコルであることから B92 プロトコルと呼ばれている。このプロトコルでは、2 つの非直交な状態を用いる。たとえば、“0”として縦偏光状態(90° 偏光)を、“1”として斜め偏光状態(-45° 偏光)を用いる。

まず、送信者は縦偏光状態と斜め偏光状態をランダムに送信し、受信者は縦偏光フィルターと斜め偏光フィルターをランダムに用いて光子検出を行う。たとえば、

⁴米 MagiQ Technologies 社の MagiQ QPNTM やスイス id Quantique 社の id 3000 Clavis。

受信者側で斜め偏光フィルターを用いて光子をブロックできれば，送られてきた光子は縦偏光つまり0だったことになる．反対に，縦偏光フィルターを用いて光子をブロックできれば，送られてきた光子は斜め偏光つまり1だったことになる．この後，送受信者間で古典的な通信を行い，受信者は何番目のビットにおいて光子をブロックできたか送信者に伝えることで，ワнтаム・パッドを作成できる．

ここで，縦偏光が来たにもかかわらず斜め偏光フィルターで光子をブロックできない確率，斜め偏光が来たにもかかわらず縦偏光フィルターで光子をブロックできない確率は，それぞれ $1/2$ である．受信者は偏光フィルターをランダムに選択することを考えると，送信者が送ったビットが受信者に届く確率は $1/4$ となるが，誤ったビットを受信者が受け取ってしまうことはない．もちろん，盗聴者が存在していれば偏光状態が擾乱され，誤ったビットを受信者が得ることになる．すると，BB84の時と同じようにして盗聴者を発見することができる．

E91 これは Ekert により 1991 年に発表されたプロトコルであることから E91 プロトコルと名づけられている．偏光と位相を制御された単一光子状態を送信者から受信者へ送る BB84 や B92 と異なり，このプロトコルでは両者がエンタングルした量子状態 (EPR 対) を受け取る．ここで言う EPR 対は，パラメトリック下方変換により生成された光子対でも，先の Eq. (1.2) で表現したようなスピン0に結合した粒子の対でもよい．

まず，EPR 対が送受信者それぞれに送られ，送信者と受信者は送られてきた状態に対し，それぞれ何種類かの基底で測定する．次に，両者は測定に用いた基底を公開し，異なる基底を用いていた場合についての測定結果を照合する．ここで，両者の測定結果がベルの不等式の一つである CHSH (Clauser, Horne, Shimony, Holt) 不等式 [15] を破っているか確認する．その測定結果が CHSH 不等式を破っていたら，同じ基底を用いていた場合の測定結果をワнтаム・パッドとして採用する．

ここで盗聴者が存在せず，送信者と受信者で同じ基底を用いた場合，二者の測定結果の間には強い相関が存在し，それは CHSH の不等式 [15] を破る．一方，盗聴者が EPR 対のいずれかを観測してしまうと，送信者側と受信者側における状態も収縮する．その結果，送受信者が同じ基底で測定を行っても，CHSH 不等式を破るほどの相関は得られなくなってしまう．こうして，盗聴者の存在を知ることができる．

その他 光の振幅といった連続変数を使って符号化を行うプロトコルも考えられている．そして，情報の担い手としては，コヒーレント状態を用いるもの [16]，スクイーズド状態を用いるもの [17,18]，それらのいずれかを用いるもの [19] がある．

1.2.2 量子テレポーテーション (quantum teleportation)

量子テレポーテーションは，EPR 状態，ベル測定，古典通信ならびにユニタリー変換を用いて，量子状態を送信者から遠く離れた受信者へと転送するプロトコル

である。

このプロトコルでは、まずエンタングルした状態を送受信者の間で共有する。そして送信者は、送信したい状態を手元の EPR 状態と混ぜ合わせ、それに対してベル測定と呼ばれる測定を行って波束を収縮させる。このとき、受信者側の EPR 状態も同時に波束が収縮することになる。その後、送信者は古典的な通信手段を用いて、ベル測定の結果を受信者に伝える。その結果に応じて、受信者は(波束の収縮した)EPR 状態に対しユニタリーな操作を施すことで、送信者がもともと持っていた量子状態を再現することができる。

また、エンタングルメントの生成やベル測定といった量子情報処理にとって重要な技術を含むことから、量子テレポーテーションは量子情報処理の中核技術と捉えることもできる [9, 20]。実際、後に述べる量子計算における演算ゲートを構成するコンポーネントとしての応用も見込まれている [21–24]。

量子テレポーテーションのアイデアは Bennett らにより 1993 年に発表された [25]。実験的な実証は Bouwmeester らにより 1997 年に [26]、続いて Boschi らにより 1998 年に [27] それぞれ発表された。Bouwmeester や Boschi らの実験をはじめとして、現在も多くの量子テレポーテーションに関する実験が光を用いて行われているが [28–35]、核スピン [36] や原子 [37, 38] における量子テレポーテーションに成功した例もある。

1.2.3 量子計算 (quantum computation)

量子力学に特有な重ね合わせ状態の利用を通じた高度の並列処理により、従来の古典的な計算機では事実上解くことが不可能な問題を高速に解くことが可能になることが知られている [20, 39, 40]。そうした問題の一つは因数分解 [41]、もう一つは探索問題である [42]。これらアルゴリズムの内容については本論文では触れないが、Ekert と Jozsa によるレビュー [43] や、文献 [20, 39, 40] をはじめとする多くの教科書でも解説されている。

量子計算機の本格的な研究は、1985 年に Deutsch が量子チューリングマシンならびに量子回路を定式化した [44] のに始まる。その後、1992 年に Deutsch と Jozsa により量子アルゴリズムの有効性が示された [45]。そして、1994 年に Shor が大きな数の因数分解を圧倒的な速さで実行する量子計算のアルゴリズムを発見した [41]。さらに、1997 年には Grover によって検索アルゴリズムが発表され [42]、多くの応用が見出された。

Shor のアルゴリズム [41]

因数分解の問題を古典的な計算機で解く場合、計算時間は桁数に対して指数関数的に増加する。すなわち、桁数の大きな数を因数分解することは、その処理に天文学的な時間がかかることを意味する。現在用いられている公開鍵暗号の安全性も、こうした事実により保証されている。

たとえば，ある整数 N を因数分解することを考える．整数 N は因数 p, q を持つとすると， $N = pq$ と書けるから， p か q の一方は \sqrt{N} より小さい．最も初歩的な因数分解の方法は， N を 1 から \sqrt{N} までの数で割り算することである．つまり， \sqrt{N} 回サブルーチンと呼び出さなくてはならないわけだが，この数を N の桁数 $n \sim \log_{10} N$ で表すと， $\sqrt{N} = 10^{n/2}$ となる．かくして，計算量は桁数 n に対して指数関数的に増加する．

しかしながら，Shor のアルゴリズムを用いると， n についての多項式時間⁵で因数分解を行えるようになる．これは，現在用いられている公開鍵暗号の安全性が根底から覆されることを意味する．

Grover のアルゴリズム [42]

ランダムに情報が並んだデータベースから，ある符号のついた 1 つのデータを探すことも，先の因数分解ほどではないが大変である．(こうした問題の分かりやすい例としては， N 件のデータが並んだ電話帳において，ある電話番号からその番号の持ち主の名前を探すといったものがある．この検索は，名前から電話番号を探す問題に比べ，はるかに時間がかかる．電話帳は，名前については構造を持ったデータベースとなっている，すなわち“あいうえお”または“abc”順に並んでいるのに対し，電話番号については何らの構造も持っていないからである．)

古典的な計算機で N 個のデータベースから特定の 1 個のデータを探すには平均 $N/2$ 回の試みが必要になる．しかしながら，量子検索アルゴリズムを用いることにより， N 個のデータベースからの検索は平均 \sqrt{N} 回の試みで成功することを Grover が示した．

計算の実行時間の短縮という観点から見れば，Grover のアルゴリズムには Shor のアルゴリズムほどのインパクトはない．しかしながら，NP 完全問題⁶ や構造を持つデータベースでの応用等，幅広い分野への拡張の可能性を持っているという点で注目されるべきものである．

物理的な実現方法

物理的な実現方法は，光のみを用いるスキーム [1, 23, 46–51] のみならず，共振器電気力学 [52]，イオントラップ [53]，NMR [54]，量子ドット [55] を用いるスキームが考えられている．このうち，実験的に最も進んでいるのが NMR によるもので，1998 年に発表されたいくつかの実験的な研究 [56, 57] の後，実際に因数分解を行うことにも成功している [58]．また，単一光子状態を用いたスキームでは，C-NOT ゲートの動作が確認されている [59]．さらに，実験的な取り組みは共振器電気力

⁵ n についての多項式で表されるような計算時間．

⁶ NP (Non-deterministic Polynomial time) 問題の一種．NP 問題とは，普通の (決定性) テューリングマシンによって多項式時間で解くことはできないが，ひとたび解が与えられた際には多項式時間で検算できる範疇の問題である．

学 [60]，イオントラップ [61, 62]，量子ドット [63] を用いるスキームについても行われている。

1.3 光を用いる量子情報処理

量子力学が予言した現象，特に量子情報処理の根幹をなすものは，光を用いた実験により実証されてきた [64]。具体的には，波動と粒子の二重性 [65, 66]，識別不可能性 (indistinguishability) [67–70]，非局所性 (量子エンタングルメント) [71–75] が挙げられる。そうした歴史的な背景から，光を用いて量子情報処理を実現しようとするのは大変に自然なことであると思われる。また，現在すでに光を用いた情報通信が広く用いられていることから分かるように，情報を長距離伝送するにあたって光 (特にコヒーレント光) は理想的な担い手であると言える。

1.3.1 QKD

これについては 1.2.1 節で述べたように，すでに商用化されている BB84 [12] をはじめ，もっぱら光を用いたスキームが提案されてきた。E91 [14] については，必ずしも光を用いる前提で提案されているわけではなくスピンを用いることも十分に考えられるが，EPR 状態を遠くまで伝送することを考慮すれば，time-bin (光子到着時間) エンタングルメントや [28, 76] 偏光状態のエンタングルメント [71–75] を用いることが現実的であると考えられる。

1.3.2 量子テレポーテーション

1.2.2 節で触れたように，量子テレポーテーションについての実験的な研究は光を用いるものが多い。

こうした量子テレポーテーションには，EPR 状態として偏光がエンタングルした光子対を用いるもの [26, 27] と，直交位相振幅がエンタングルしたビームの対を用いるもの [29–35] がある。前者は EPR 状態としてパラメトリック下方変換により生成される偏光もつれ合い光子対を，ベル測定には光子検出を，ユニタリー変換には偏光の回転と位相シフトを用いる。このタイプの実験は，量子テレポーテーション自体の実証 [26, 27] に始まり，通信波長帯における長距離のテレポーテーションが 2003 年 Marcikic らにより発表されるに至っている [28]。

後者は，EPR 状態として 2 モードスクイズド状態 (直交位相スクイズした 2 本のビームを位相 $\pi/2$ ずらして 50:50 ビームスプリッターで合波したものを)，ベル測定にはホモダイン検波を，ユニタリー変換には変位 (displacement) 操作を用いる。こうした量子テレポーテーションは，1998 年 Braunstein と Kimble により提案され [77]，古澤らにより実証された [29]。それ以降，やはり多くの研究例が報告されるに至っている [30–35]。

1.3.3 量子計算

量子計算それ自体に関しては, 1.2.3 節で述べたように, 光を用いるスキームが他のスキームと比較して有利であるとは決して言えない. しかしながら, 光を用いる他の量子情報処理プロトコルや古典的な光通信システムとの組み合わせを考えれば, 光を用いた量子計算スキームも十分研究に値するものと思われる.

光を用いた量子計算についての本格的な研究は, 1988 年に山本らが [46], 1989 年に Milburn が, それぞれ単一光子状態と Kerr 効果を用いたフレッドキングゲートについて論じた [47] ところに遡ることができる. 彼らが提案したスキームでは, 単一光子の光が π だけ位相シフトするくらいの強力な Kerr 効果が必要だが, そのような媒質は現在の技術では到底実現できるものではない. そのため, 比較的長い間, 光による量子計算は無理だと考えられてきた.

しかしながら, 線形光学素子, 単一光子状態ならびに単一光子検出を用いて, 確率的に任意の量子ゲートを構築できることを Knill らが示した [49]. このスキームは大変に込み入ったセットアップを必要とするものであったが, このうちの C-NOT ゲートについては, 2003 年 O'Brien らにより実験的な実証が行われるに至った [59].

上に挙げた Knill らのスキームでは光の離散変数 (偏光: 縦/横) を用いて情報をエンコードするが, 一方で, 連続変数に情報をエンコードするスキームも提案されている. こうしたスキームでは, 符号をコヒーレント状態にエンコードする [1, 23, 48, 50, 51, 78].

1.4 連続変数を用いる量子情報処理

量子情報処理では, スピン ($|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle$), 光子数 ($|0\rangle, |1\rangle$), 偏光 ($|H\rangle, |V\rangle$) といった離散的な固有値に対応する固有状態をビット ($|0\rangle_L, |1\rangle_L$) に見立てるプロトコルが多い. 光を用いるものでは, もっぱら単一光子状態の光に対して, その偏光や位相を操作する. その一方で, コヒーレント状態やスクイーズド状態の光を用い, その直交位相振幅という連続固有値に着目したプロトコルも多くある [23, 48, 50, 77–83].

連続変数の領域における量子情報処理には, 離散変数を用いる通常の量子情報処理には見られない利点も存在する. たとえば, EPR 状態の生成や測定を通じたフィードフォワード操作は, 離散変数の領域で行うより連続変数の領域で行う方が簡単である [83].

本節では, 光の連続変数 (直交位相振幅) を用いる量子情報処理について紹介する.

1.4.1 QKD

理論的に提案されているものとしては, コヒーレント状態を用いるもの [16], スクイーズド状態を用いるもの [17, 18], それらのいずれを用いてもよいもの [19] がある. そのうち, Grosshans と Grangier により考えられたスキーム [19] にもとづ

き，コヒーレント状態を用いて QKD を行う実験も，Grosshans らにより行われている [84] .

1.4.2 量子テレポーテーション

研究動向については，すでに 1.3.2 節で述べたが，ここでは連続変数を用いる量子テレポーテーションの特徴について触れる．連続変数における量子テレポーテーションでは，リソースとなる EPR 状態の生成とベル測定を高効率かつ容易に行うことができるという利点がある [83] .

EPR 状態としては Eq. (1.3) で表現したような状態を用いる．ただ，位置 x と運動量 p_x といった物理量の代わりに，光電場の直交位相振幅のうち位相の $\pi/2$ だけ異なる 2 つの成分 x_θ と $y_\theta \equiv x_{\theta+\pi/2}$ を用いる⁷ . このような EPR 状態 $|\text{EPR}\rangle_{\text{AB}}$ は，理想的には (c を定数として)

$$\begin{aligned} |\text{EPR}\rangle_{\text{AB}} &= c \int dx_\theta |x_\theta\rangle_{\text{A}} |x_\theta\rangle_{\text{B}} \\ &= c \int dy_\theta |y_\theta\rangle_{\text{A}} |-y_\theta\rangle_{\text{B}} \end{aligned} \quad (1.6)$$

と表現される．そして，この状態は x_θ の固有状態 $|x_\theta\rangle$ と y_θ の固有状態 $|y_\theta\rangle$ を 50:50 ビームスプリッターで合波することにより作ることができる．

このような直交位相振幅そのものを生成することは不可能であるが，それに比較的近いものは直交位相スクイーズド状態⁸として用意することができる．直交位相スクイーズド状態は，そのレベル(スクイージングレベル)が高いほど理想的な直交位相振幅の固有状態に近づく．

1.4.3 量子計算

連続変数における量子計算は，まだ理論的な研究の段階にあるが [23, 48, 50, 78, 80] , 任意の量子計算を行うためにはビームスプリッター，変位 (displacement) , 位相シフター，スクイージング，三次の非線形過程の 5 つがあればよいことが知られている [48, 85, 86] . このうちの三次の非線形過程としては， $\exp [i\gamma\hat{x}^3]$ で表現されるような三次の位相ゲートを実現することにより，任意の量子計算を行えることが Gottesman らにより示されている [23, 24] .

この三次の位相ゲートは量子テレポーテーションに類した操作を 4 回連続して行うことで実現できることも知られている [23, 24, 78] . このゲートは，2 つのスクイーズド状態から構成される EPR 状態，変位 (displacement) 操作，光子数識別測定，スクイージング (任意の状態に対する) 操作，量子非破壊相互作用，何らかのガウス型操作から構成される．最初の操作は，EPR 状態の片方に対する変位操作

⁷直交位相振幅については第 2 章で述べる．

⁸ x_θ または y_θ が比較的確定した状態である．これについても詳しくは第 2 章で述べる．

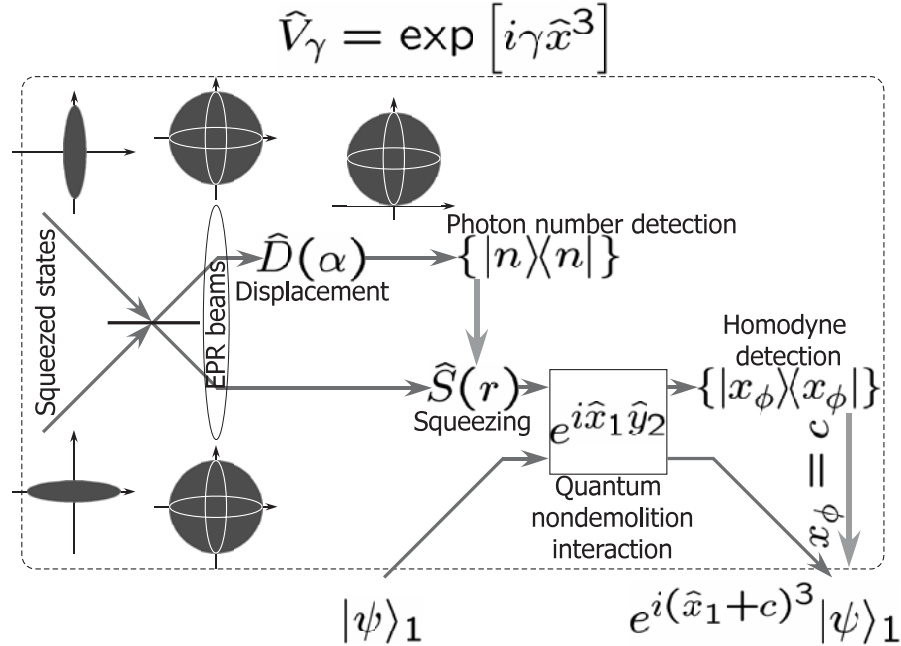


Figure 1.2: Schematic diagram of the cubic phase gate based on the measurement induced nonlinearity [24]. $x = x_\theta$ and $y = x_{\theta+\pi/2}$ in the quantum nondemolition interaction part are the quadrature components.

である．2番目の操作は，光子数識別測定の結果によりフィードフォワードされるスクイーミングの操作である．ここで，真空ではない任意の状態に対するスクイーミングは，スクイーズされた真空，ホモダイン測定，その測定結果によりフィードフォワードされる変位操作を組み合わせることにより実現可能である [78]．3番目の操作は，量子非破壊相互作用である．これは，2番目の操作に出てきたスクイーミングの操作とビームスプリッターにより実現可能である [78]．最後の操作は，何らかのガウス型操作である．最初のEPR状態に対する変位操作，2番目および3番目にあるような，測定結果によりフィードフォワードされる操作は，いずれも量子テレポーテーションの要素を含んでいる．これに加え，最後のガウス操作に量子テレポーテーションを充てるとすれば，4段の量子テレポーテーションに類した操作と光子数識別測定により，三次の位相ゲートを構成できるという見方ができる [87-89]．こうした応用に向けて，連続した2回の量子テレポーテーションも実現されている [35]．

1.4.4 エンタングルメント抽出と非ガウス操作の必要性

量子情報処理の根幹をなすエンタングルメントは，信号光が伝搬する際に受けるノイズや損失の影響により弱まってしまう．こうして弱まったエンタングルメントを LOCC(局所操作と古典通信)により回復させ，プロトコルの性能を確保するためには，エンタングルメント抽出 (entanglement distillation) と呼ばれる操作

を行わなければならない。

前にも述べたように、連続変数を用いた量子情報処理プロトコルでは、主にガウス型の状態が用いられる。また、エンタングルした状態の光に対して作用することの多い熱的なノイズや線形損失も、やはりガウス型の作用である。つまり、エンタングルメント抽出を行う対象の状態も、その中に埋もれた信号も、ともにガウス型ということになる。ここで残念なことに、ガウス型の状態からガウス型の状態を抽出するのは、ガウス操作だけでは不可能であることが証明されている [2–4]。

よって、エンタングルメント抽出ひいては連続変数における量子情報処理のプロトコルを効率的に実行するためには、非ガウス操作が必要になる。この非ガウス操作とは、ガウス型の状態から非ガウス型の状態を生じさせるような操作であるが、その典型的かつ究極的な例として CSS の生成がある。

1.4.5 高レベルなスクイズド状態の必要性

すでに 1.3.2 節で触れたように、量子テレポーテーションをはじめとした連続変数における量子情報処理プロトコルでは、EPR 状態として 2 モードスクイズド状態を用いる。つまり、スクイズド状態の光は、連続変数における量子情報処理を行う上で欠くことのできないリソースである [29, 30, 77, 90–95]。

ここで用いられるスクイズド状態は、いわば直交位相固有状態⁹の代用品であるため、原理的にスクイーピングの度合いは大きければ大きいほどよい。こうしたプロトコルの性能は、リソースとなるスクイズド状態の“スクイーピングレベル”により直接的に決まってしまうことが多い [33, 77]。たとえば、 n 段の量子テレポーテーションを用いてコヒーレント状態を転送する場合、転送後の状態と転送前の状態のフィデリティ¹⁰は以下のように表される [29, 96, 97]。

$$F(n, r) = \frac{1}{1 + ne^{-2r}} \quad (1.7)$$

ここで、 r はスクイーピングパラメータと呼ばれ、やはりスクイーピングの度合いを表す量である。

これによれば、スクイーピングパラメータ $r = 0.69$ (スクイーピングレベル -6.0 dB 相当¹¹) のスクイズド状態はコヒーレント状態を 0.8 という高いフィデリティで転送することができる。あるいは、コヒーレント状態に対して連続した 4 回のテレポーテーションを可能にする。これと 1.4.3 節で述べた内容から、この -6.0 dB は意義のある数字であることが分かる。さらに、 $r = 0.55$ (-4.8 dB 相当) のスクイズド状態は量子テレポーテーションによるスクイズド状態の転送を可能にする [34]。

⁹第 2 章で説明する。

¹⁰2 つの量子状態がどれだけ似ているかを表す指標 ($0 \leq F \leq 1$) で、この値が大きいほど 2 つの量子状態が似ていることを表す。定義は第 2 章の Eq. (2.61) による。

¹¹スクイーピングレベルのデシベル表示については第 5 章で触れる。

それに加えて，量子稠密符号化 (quantum dense coding) [90–95] により伝送できる情報量 I も，信号の平均光子数を n_s とし，やはり

$$I(n_s, r) = \ln[1 + n_s e^{2r}] \quad (1.8)$$

のようにスクイーミングパラメータ (またはスクイーミングレベル) によって決まってしまう [92, 94] .

こうした事例からも分かるように，より高いスクイーミングレベルを達成することは，連続変数における量子情報処理を行ううえで欠かすことができない .

1.5 コヒーレント状態を用いた量子情報処理

コヒーレント状態を用いる量子情報処理スキームも提案されている [1, 51, 98] . これは，振幅の異なる2つのコヒーレント状態を用いて符号化を行うという意味では離散変数的であるとも言えるが，基本的にはコヒーレント振幅という連続変数を用いている .

1.5.1 コヒーレント光による通信と量子情報処理

光を用いた通信システムでは，コヒーレント状態の光を情報の担い手にすることが多い . コヒーレント状態の光は，長距離伝送において不可避な線形ロスが存在してもデコヒーレンス (情報の劣化) を起こさないため，情報の担い手として大変重要である . このような通信において，伝送路のポテンシャルを最大限に引き出す上で，このコヒーレント状態を量子光学の領域で適切に制御することは重要である [99, 100] .

また，量子情報処理の分野でも，1.4.1 節で触れたようにコヒーレント状態を用いる QKD が実験的に実現され [84]，また 1.3.2 節で触れたように連続変数を用いる量子テレポーテーションにおいてコヒーレント状態の転送が実証されている [29] . こうしたことから，コヒーレント状態は量子情報処理においても一定の地位を占めていくと考えられる . そしてこのことは，量子光学的な手法でコヒーレント状態を取り扱うことが，光を用いた量子情報処理を実現する上で大変重要であることを意味している .

コヒーレント状態を量子光学の領域で制御する上では，ガウス型の状態を量子力学的に重ね合わせたものを生成し，さらに制御することが必要となる . 実際，これに類した状態を補助的なリソースとして用いることにより，任意の量子計算を実現させるためのゲートを構築できることが知られている [23, 48, 50, 51] . (その実験的な側面については文献 [24] を参照されたい .) そして，こうした重ね合わせ状態の典型的な例が CSS (コヒーレント状態の量子力学的な重ね合わせ) であり，それを用いる量子情報処理の Protokol も多く研究されている [1, 22, 98, 101–105, 107] .

1.5.2 コヒーレント状態を用いる量子計算

コヒーレント状態を用いる量子情報処理プロトコルとして、コヒーレント状態の振幅に情報を載せる、すなわち $|0\rangle_L \equiv |-\alpha\rangle$ ならびに $|1\rangle_L \equiv |+\alpha\rangle$ のように符号化した上で量子計算を行うスキームが提案された [51, 108]。残念なことにこのスキームは量子計算機の内部 (in-line) に強い非線形過程を必要とするため、これを計算機外 (off-line) に出す試みがなされた。この結果考えられたスキーム [1, 98] は、量子計算を行うのに必要な一連の演算を決定論的に実行することを可能にする [1]。任意の演算ゲートを構築するために必要とされるのは、線形光学素子、光子数識別測定、ホモダイン検波、信号としてのコヒーレント状態、そして補助的な状態としての CSS である。

1.6 コヒーレント重ね合わせ状態 (CSS)

本節では、先に出てきた CSS (coherent state superposition) について、その定義ならびに意義について簡単に述べる。

1.6.1 CSS の定義

CSS は次の Eq. (1.9) により定義される “2 つのコヒーレント状態の量子力学的な重ね合わせ” である。

$$|\text{CSS}(\varphi, \alpha)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N(\varphi, \alpha)}} (|+\alpha\rangle + e^{i\varphi} |-\alpha\rangle) \quad (1.9)$$

ここで、 $|\pm\alpha\rangle$ は振幅が $\pm\alpha$ のコヒーレント状態を表す。また、 φ は重ね合わせの位相、 $N(\varphi, \alpha)$ は

$$N(\varphi, \alpha) = 2(1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos \varphi) \quad (1.10)$$

で表される規格化因子である。こうした重ね合わせ状態は、観測されることにより初めて $|+\alpha\rangle$ または $|-\alpha\rangle$ のいずれかに落ち着く¹²。このような状態を生成することは、一般的には簡単なことではない。

この CSS と似て非なる状態として、2 つのコヒーレント状態の “古典的な混合” がある。こちらでも、 $|+\alpha\rangle$ または $|-\alpha\rangle$ のいずれであるかは観測者にとっては未知である。しかし、どちらであるのかは状態が生成された段階で決まっているという点が重ね合わせ状態である CSS とは異なる。こうした古典的な混合は、 $|+\alpha\rangle$ または $|-\alpha\rangle$ といった状態をランダムに生成するだけで得ることができる。さて、このコヒーレント状態の混合 (CSM: coherent state mixture) は、CSS のようにケツ

¹² $|\pm\alpha\rangle$ を固有状態とする消滅演算子 \hat{a} は可観測量ではないため、これは厳密には正確な表現でないことに注意されたい。

トベクトルで表すことはできない．よって，密度演算子を使って Eq. (1.11) のように表現することになる．

$$\hat{\rho}_{\text{CSM}}(\alpha) \equiv \frac{1}{2} (|+\alpha\rangle\langle+\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|) \quad (1.11)$$

ここで，Eq. (1.9) で定義した CSS を密度演算子で表現しなおしてみると，

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha) &\equiv |\text{CSS}(\varphi, \alpha)\rangle\langle\text{CSS}(\varphi, \alpha)| \\ &= \frac{1}{N(\varphi, \alpha)} \{ |+\alpha\rangle\langle+\alpha| + |-\alpha\rangle\langle+\alpha| \\ &\quad + |+\alpha\rangle\langle-\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha| \} \end{aligned} \quad (1.12)$$

となる． $|\mp\alpha\rangle\langle\pm\alpha|$ といった，密度行列の非対角項に相当する成分の有無が，CSS と CSM の性質を大変異なったものにする．こうした CSS の性質については，第2章でさらに詳しく述べる．

1.6.2 CSS の意義: Schrödinger の猫状態として

CSS には，先に述べたような量子コンピューティングのリソースとして以外にも重要な側面がある．それは，シュレーディンガーの猫状態 [109] を物理的に実現したものの一つという面である．CSS を構成する2つのコヒーレント状態 $\{|+\alpha\rangle, |-\alpha\rangle\}$ は α の値が大きければ，ホモダイン検波を用いることにより検出器からの出力電流としてマクロに識別することが可能である．つまり CSS は“マクロに識別可能な状態を量子力学的に重ね合わせたもの”であり，シュレーディンガーの猫状態の一種とみなすことができる．そのため，CSS は純粋に物理的な興味の対象としても，その実現が長年待ち望まれてきた [1, 22, 51, 98, 101–107] ．

1.7 CSS を手に入れるために

ここでは，実験的に CSS を得るために行われている過去ならびに現在の研究例を紹介する．その中から，本研究で取り組むべき課題を明らかにしていく．

まず， Q 値の高い共振器に閉じ込められた場については，すでに CSS は生成されている．こうした実験的な成果は，マイクロ波の領域においては Brune らにより [129]，光の領域においては Monroe らにより [130]，それぞれ 1996 年に発表された．しかしながら，量子情報処理への応用に必要とされる CSS は，共振器内部の場ではなく伝搬する光の場において実現されなければならない．それゆえ，ここでは伝搬モードの光における CSS に的を絞った議論を行う．

1.7.1 CSS 生成スキーム

CSS は，直交位相振幅の確率分布が非ガウス型であり，このような状態を生成するためには高次の非線形過程が必要である．さらに，その位相空間上における

確率分布は等方的ではない．このような状態を決定論的に生成するには，カー媒質にコヒーレント光を入力するといった方法も考えられてはいるが [110]，実現には単一光子レベルでの強い非線形光学効果と低損失を両立できる媒質を必要とするため，現在の技術ではほとんど実現不可能であると見られている [111]．

そこで，CSS そのものの決定論的な生成を諦めて，CSS に近い状態を確率論的に得るということも認めることにする．すると，大変よい（つまり CSS に対するフィデリティの非常に高い状態を生成できる）スキームがすでに 2 種類提案されている．そのうちの一つは，Lund らにより提案された，単一光子状態をスクイーズするものである [5]．そしてもう一つは，Dakna らにより提案された，スクイーズド状態から一光子を差し引くものである [6]．本論文では，前者を SS スキーム (squeezing the single photon state)，後者を PS スキーム (photon subtraction) と呼ぶことにする．

SS スキームでは，決定論的・位相依存あり・ガウス型の操作 (スクイージング) を，位相依存のない非ガウス型の状態 (単一光子状態) に施すことにより CSS に近い状態を得る．それに対して PS スキームは，確率論的・位相依存なし・非ガウス型の操作 (光子検出) を，位相依存のあるガウス型の状態 (スクイーズド状態) に施すことにより同様の状態を得る．これら 2 つのスキームは，数学的には等価であることも分かっている [7]．

1.7.2 CSS 生成に向けた研究例

実験的な CSS 生成の試みは複数のグループにより近年活発に行われており，PS スキームによるものはすでに実現されている．

まず，PS スキームの原理実証的ともいえる実験が“非ガウス型操作 (non-Gaussian operation)”として Grangier のグループにおいて行われ，2004 年に発表された [112]．彼らは，モード同期 Ti:Sapphire レーザーから出力される中心波長 850 nm のフェムト秒パルス光源とし，Fig. 1.3 に示すセットアップを用いて実験を行った．レー

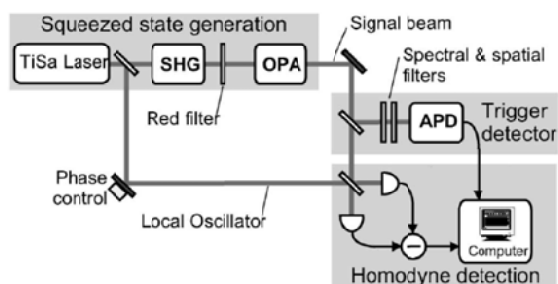


Figure 1.3: Simplified setup of the experiment by Grangier group in 2004 [112]. TiSa Laser: Ti:Sapphire femtosecond pulse laser at 850 nm, SHG: second harmonic (pump beam for OPA) generator, OPA: optical parametric amplifier, APD: avalanche photodiode.

ザーから出力された基本波(中心波長 850 nm) は第二高調波発生器(図中 SHG) において中心波長 425 nm の倍波に変換され, さらにこの倍波をポンプ光とする光パラメトリック増幅器(図中 OPA) により基本波のスクイズド光へと変換される. このスクイズド光の一部はビームスプリッターにより反射光として取り出されアバランシェフォトダイオード(図中 APD) により測定される一方, 透過光の場に対してはホモダイン検波による測定が行われる. スクイズド状態の光をビームスプリッターで分割した場合, 透過光と反射光の状態はエンタングルしているため, 透過光の状態は反射光の場に対して行われた測定(光子検出)の結果により変化する. よって, APD が光子を検出した時にのみ, ホモダイン検波における測定を行うことで, スクイズド状態から一光子引かれた状態を近似的に実現することができる.

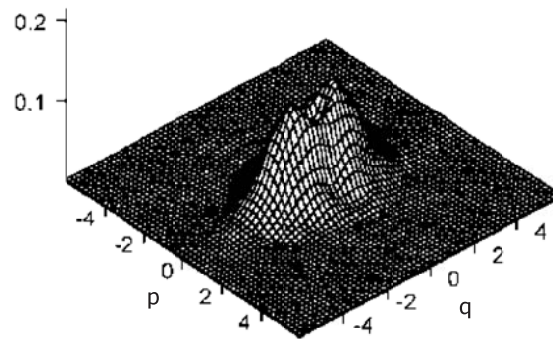


Figure 1.4: Wigner function from the experiment in Ref. [112].

この実験で生成された状態のウィグナー関数¹³は, Fig. 1.4 に示すように, まだ CSS には程遠いものであったが, 筆者が本研究を行っていた 2004–2006 年の間にも彼らは実験系の改良を進め, 2006 年には格段に高品質な CSS の生成について発表するに至った [113]. この時のセットアップならびに結果は Fig. 1.5 の通りである. 基本的なセットアップは Fig. 1.3 に挙げたものと同様であるが, 実験結果から再構成されたウィグナー関数には負の領域が見られる. これは, 生成された状態に著しい量子干渉の効果が見られる, つまり非古典的であることを示している.

そのしばらく後, Polzik のグループは単一モード Ti:Sapphire レーザーから出力される波長 852 nm の cw 光を用いた CSS の生成について発表した [114]. Fig. 1.6 に示したセットアップの基本的な構成は Grangier らのものと同じであるが, APD で測定される場とホモダイン検波で測定される場の周波数モードを一致させるため, 偏光ビームスプリッター(図中 PBS) から APD に至るまでの光路中に周波数フィルタリングを行うための共振器が挿入されている. また, この実験で生成された状態のウィグナー関数は Fig. 1.7 に示すように, 負の領域を持っている.

さらに, 本研究に関連して, 佐々木のグループは単一モード Ti:Sapphire レーザーから出力される波長 860 nm の cw 光と, 本研究でそのポテンシャルが確認

¹³ウィグナー関数については第2章2.3節の記述を, 理想的な CSS のウィグナー関数については2.4.4節の Fig. 2.13 (特に $\varphi = \pi$ について) を参照されたい.

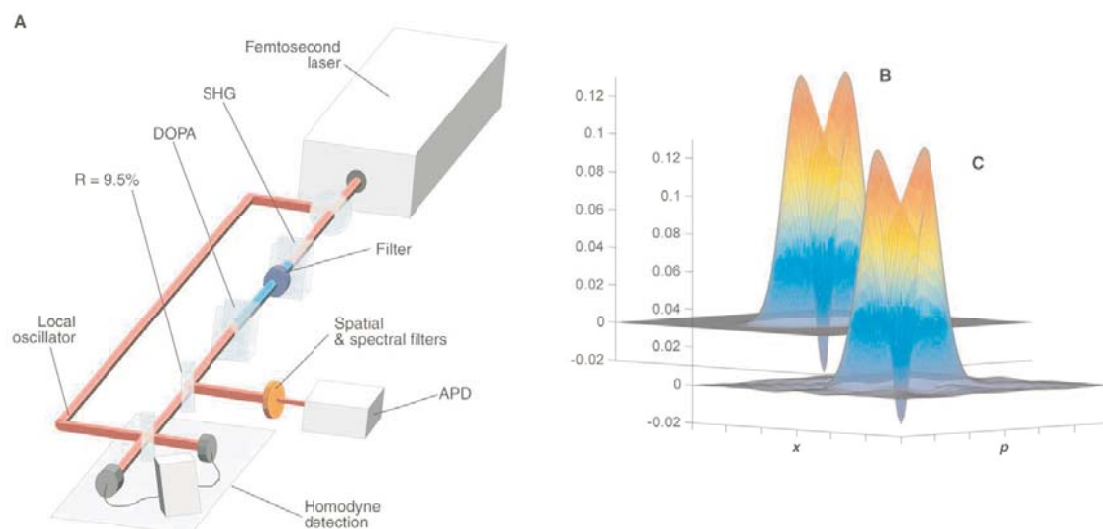


Figure 1.5: The experiment by Grangier group in 2006 [113]. (A) Experimental setup (SHG: second harmonic generation crystal). (B) Wigner function obtained by a theoretical model. (C) Wigner function obtained by Radon transform of the raw experimental data.

された非線形光学結晶である PPKTP (周期分極反転 KTiOPO_4) を使い, Grangier や Polzik のグループにおいて得られたものを上回る高品質な CSS の生成に成功した [115].

なお, PS スキームにおいて cw 光源を用いた場合に特有の問題 (光子検出器とホモダイン検波のそれぞれにおいて測定される場の周波数モードミスマッチ) についての研究も本研究と並行して行われている. こうした理論的な研究は, 佐々木ならびに筆者 [116] や Mølmer [117] が行っている.

一方, SS スキームの提案は PS スキームに比べて 7 年遅かったこともあり, まだ実験的な取り組みはなされていない. しかしながら, こちらのスキームに着目した研究も今後行われるようになるものと考えられる.

1.7.3 CSS の生成にあたっての課題

CSS を生成するための 2 スキーム (SS スキームならびに PS スキーム) が数学的に等価であることについては先に触れた. しかしながら, 実験的なプロセスは異なるため, 実験的な不完全性の影響も異なるものとなり, それゆえ最終的に生成される状態も異なったものとなるはずである. まず, SS スキームでは, 最初に準備される状態が純粋な単一光子状態でないことが主な問題になる [5]. それに対して PS スキームでは, スクイズド状態から常に正確に 1 光子を差し引けないことが問題となる. これは, 光子を差し引くのに用いられる光子検出器の量子効率やダークカウントに起因する.

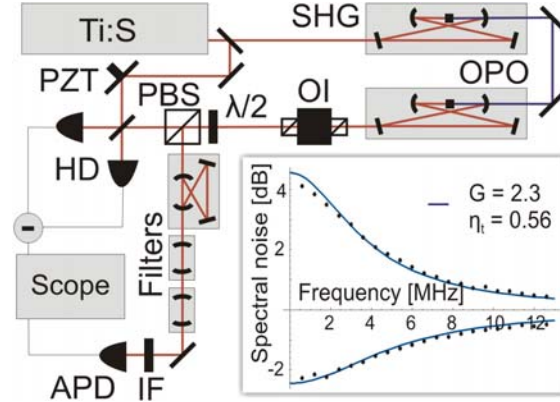


Figure 1.6: Setup of the experiment by Polzik group in 2006 [114]. SHG: second harmonic generator, OI: optical isolator (to prevent scattered LO light from entering the OPO), $\lambda/2$: half-wave plate, PBS: “magic” beam splitter, PZT: piezoelectric transducer, HD: homodyne detector, IF: interference filter, APD: avalanche photodiode. The inset shows the squeezing spectrum obtained from a Fourier analysis of the raw data. The blue curve is the best fit of the theoretical spectrum. The fitted parameters (OPO gain $G = 2.3$, and total efficiency $\eta_t = 0.56$) match well the experimentally estimated values.

そこで、それぞれのスキームを実現するときに避けることのできない不完全性を考慮し、現在の技術ではいずれのスキームがよりよい擬似CSSを生成しうるか検討することは、今後の実験的な研究をサポートする上で有意義であると思われる。

さらに、両スキームに共通するホモダイン検波のロスも、実験的な不完全性としては重要な要素である。これは、検出器に用いられるフォトダイオードの量子効率や、生成された擬似CSSを載せた信号光と局所発振光(LO)のモードミスマッチに起因する [118]。

こうした実験的な不完全性を考慮した研究は、SSスキームについては純粹でない単一光子状態の影響についてLundらが触れているくらいである [5]。PSスキームについては、不完全な光子検出とホモダインのロスの影響についてKimらが解析的に評価を行い、Wengerらの実験結果 [112]と比較し、さらに生成される状態の非古典性を確保するために実験パラメータが満たすべき条件を与えている [119]。ただし、Kimらは不完全な光子検出の影響を表現するのに、光子検出器の量子効率やダークカウントを個別に評価することはせず、Wengerらと同じように“modal purity”という簡略化されたパラメータを便宜的に用いている。この点については、OlivaresとParisが光子検出器のパラメータを考慮し、さらに踏み込んだ解析を行っている [120]が、ホモダインのロスについては言及していない。

よって、これらの研究例 [5, 119, 120]にはない詳細なモデルに基づく解析を通じて2つのスキームを比較し、現状の技術レベルでいずれのスキームがよりよい擬似CSSを生成するかを判定すること、各スキームにおいて生成される状態が非古典性を確保するために、実験パラメータが満たすべき条件を明らかにすることに

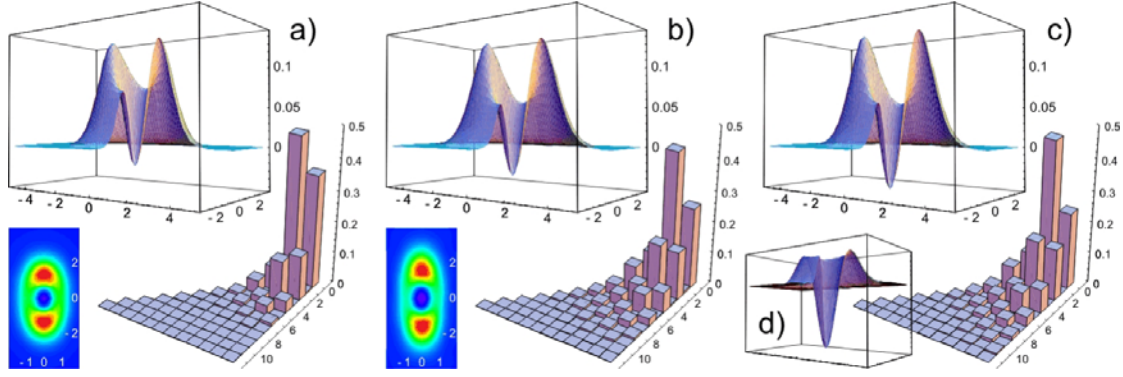


Figure 1.7: Wigner functions (including a top-down contour plot) and density matrices from the experiment in Ref. [114]. (a) The OPO gain $G = 1.8$, (b) $G = 2.3$. The presented plots are averages of 50 separate states, each reconstructed from a 20,000 points quadrature trace and corrected for the 85 % detector efficiency. (c) State calculated from full multi-mode theory with the same temporal mode function and the same overall propagation efficiency $\eta = 0.64$ as for the experimental state (b). (d) State calculated with perfect efficiency $\eta = 1$.

は意義があると考えられる．また，Wenger ら [112] や Kim ら [119] が用いているパラメータ “modal purity” を，本論文で扱う詳細な実験パラメータを用いて表現し直すことも，彼らとの研究と本研究の橋渡しをする上では有効であろう．

1.7.4 CSS 純粋化の必要性

この CSS は，それを生成または伝送する際に不可避な線形損失に対して大変脆弱であり，重ね合わせられた状態間のコヒーレンスが容易に失われてしまう．その結果 CSS は，CSS と CSM の混合

$$\hat{\rho} = \xi \hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi, \sqrt{\eta}\alpha) + (1 - \xi) \hat{\rho}_{\text{CSM}}(\sqrt{\eta}\alpha) \quad (1.13)$$

に陥ってしまう．ここで， $\hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha)$ は Eq. (1.12) により表される CSS の密度演算子， $\hat{\rho}_{\text{CSM}}(\alpha)$ は Eq. (1.11) により表される CSM の密度演算子， η は損失媒体の強度透過率である．

CSS の応用にあたっては，このような混合状態になった CSS を純粋化する，すなわち ξ の値を 1 に近づける手法が必要と考えられる．3 ビット量子誤り訂正に基づく純粋化プロトコルも提案されてはいるが [8]，これは補助状態としての純粋な CSS やほぼ完全な光子数識別測定を必要とする．CSS については，ごく最近になって良質のものが生成されるように [113–115] なってきたとはいえ，まだそれらは CSS 純粋化のための補助状態として使えるほど純粋であるとは言いがたい．また，光子数識別測定も開発されたばかりの段階であり [24, 87–89, 121]，まだ量子光学実験への積極的な応用には至っていない．

そこで、すでに誰もが使える技術を応用して CSS を純粋化できるプロトコルがあれば、連続変数量子情報処理やコヒーレント状態を用いた量子計算に関する研究の進展に寄与するところが大きいと考えられる。

一方で、2つの小振幅 CSS、ビームスプリッター、補助的なコヒーレント状態ならびに on/off 光子検出器を用いて1つの大振幅 CSS を得るプロトコルが提案されている [5]。このプロトコルを用いることにより、入力される状態が CSS とスクイーズド状態の統計的な混合であった場合でも、出力として純粋な CSS を取り出すことができる [5, 7]。このプロトコルが、同様にして CSS と CSM の統計的な混合に対しても有効であるかは調べてみる価値があると思われる。また、本論文の第4章において提案するプロトコルでは、純粋化の過程で CSS の振幅を減少させてしまうことが避けられない。よって、文献 [5] において提案されている CSS 増幅プロトコルと、本研究において提案するプロトコルが組み合わせ可能であるか否かについても検討してみる必要がある。

1.7.5 純粋度の高いスクイーピングの必要性

1.7.1 節で紹介した擬似 CSS 生成スキームでは、入力状態に対するスクイーピングの操作 (またはスクイーズド状態の準備) を必要とする。質のよい擬似 CSS を得るためには、この段階で入力状態にロスを与えることは避けなければならない。

たとえば、単一光子状態をスクイーズする際に、スクイーピングと共にロスを与えてしまえば、入力状態に含まれる単一光子状態の割合を実効的に減少させることになってしまう。また、スクイーズド状態から1光子を引く場合でも、入力されたスクイーズド状態がロスにより破壊されていれば、実効的に光子検出の性能が低下したことに似た状態になる。

擬似 CSS 生成におけるスクイーピング (スクイーズド状態) に対する要求は、1.4.5 節において述べたような高いスクイーピングレベルではない。スクイーピングレベルは -3 dB 程度で十分だが、その代わりに、線形ロスを伴わない純粋な操作 (状態) が必要である。

1.8 スクイーピング

先に 1.4.5 節ならびに 1.7.5 節で述べたように、直交位相スクイーピングは連続変数の領域における量子情報処理を行う上で欠くことができない。ここでは、直交位相スクイーピングの実験的に関して過去に行われた研究を振り返り、本研究における課題を抽出する。

1.8.1 直交位相スクイーピングに関する過去の研究例

光パラメトリック発振器を用いる直交位相スクイーピングの研究例は、Wu らが 1987 年に発表したもの [122] が最初である。彼らは $\text{MgO}:\text{LiNbO}_3$ を非線形光学

結晶として用い、波長 1064 nm において -4 dB のスクイーミングレベルを得た。その後、同様の非線形光学結晶と波長において、1998 年 Schneider らにより -6.5 dB [123]、1999 年 Lam らにより -7 dB という結果が [124] それぞれ報告されている。

しかしながら、量子情報処理のプロトコルでスクイズド状態の光(スクイズド光)を用いる際には、他のビームとの位相をロックしなければならない。そうした観点から過去のスクイーミングに関する実験を振り返ると、スクイズド光とホモダイン検波における局所発振 (LO) 光の相対位相をロックしているものは Table 1.1 に示す 3 件だけである。

Table 1.1: Previous experimental results obtained as the local oscillator is locked in phase onto the maximally squeezed quadrature.

Year	Squeezing Level	Wavelength	Nonlinear crystal	Reference
1992	-6.0 ± 0.3 dB	856 nm	KNbO ₃	[125]
1995	-5.5 ± 0.2 dB	1064 nm	MgO:LiNbO ₃	[126]
2006	-5.6 ± 0.1 dB	946 nm	PPKTP	[127]

1.8.2 860 nm 波長帯のメリット

実験的にスクイーミングを実現する場合、どの波長帯を用いるかは大きな問題である。実際、用いられる波長は実験グループによりまちまちであるが、本研究では以下のようなメリットがある 860 nm 帯を用いている。

- Si フォトダイオードの量子効率が高い
- KNbO₃ 結晶を用いて効率の良い第二高調波発生が可能
- Cs 原子の D₂ 遷移波長 (852 nm) に近い

スクイズド状態のように非古典的な状態は検出時のロスに大変弱い。そのため、すでに広く用いられている Si フォトダイオードで 100 % 近い量子効率を得られる本波長帯は魅力的である。また、KNbO₃ 結晶は数ある非線形光学結晶の中でも非線形光学係数が大きいものとして知られているが、これを高い効率で用いることのできる波長帯に 860 nm 帯は属している。これは、OPO を駆動するためのポンプ光を潤沢に確保できることを意味しており、複数の OPO を用いて多モードのスクイズド状態を生成する実験 (連続変数量子テレポーテーションなど) を行う際に大切な要素となる。さらに、Cs の遷移波長に近いということは、スクイズド状態という非古典的な量子状態の光を用いて原子の状態を制御するような応用も期待できることを意味する。

1.8.3 860 nm 波長帯におけるスクイーミング

本波長帯におけるスクイズド状態の生成には、当然のことながら、非線形光学結晶として KNbO_3 が多く用いられてきた。この結晶の長所は、先ほども述べたように非線形光学係数が大きい点であり、その結果、 -6.0 ± 0.3 dB という高いスクイーミングレベルが Polzik らにより 1992 年に報告されている [125]。彼らは、Fig. 1.8 のようなセットアップにおいて波長 855 nm 付近の cw 光を発生する Ti:Sapphire レーザーを光源とし、縮退光パラメトリック発振器を発振閾値以下のパワーで駆動することにより直交位相スクイズド状態を生成した。その結果、Fig. 1.9 に示

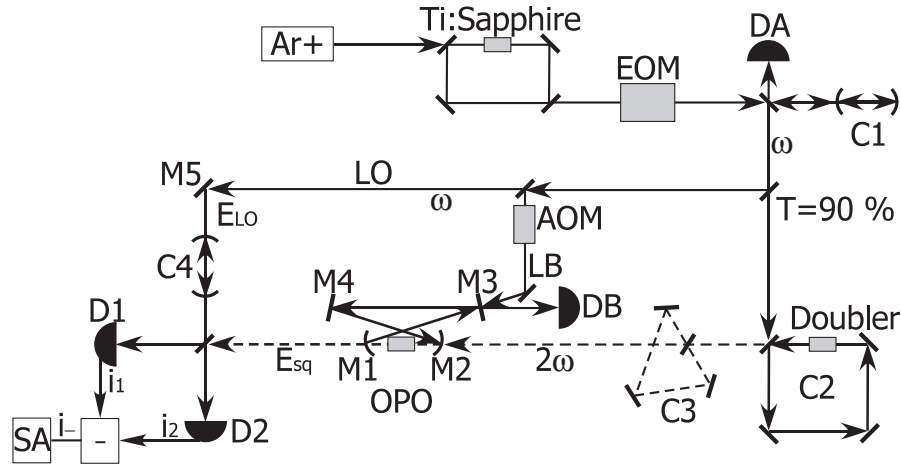


Figure 1.8: Setup of the squeezing experiment at 856 nm by Polzik *et al.* [125]. C1: reference cavity for frequency stabilization of the titanium sapphire laser and hence for all other fields and cavities of the system, C2: external frequency doubling cavity, C3: transfer cavity serving as a reference for the spatial mode of the blue pump beam, C4: mode-cleaning cavity for the local oscillator beam (LO). The resonance of the optical parametric oscillator (OPO) is actively locked with a locking beam (LB). Quantum noise of the squeezed light E_{sq} is detected with the balanced homodyne detector formed by photo-detectors D_1 and D_2 .

すように、波長 856 nm において -6.0 ± 0.3 dB のスクイーミングを実現した。特に、このスクイーミングレベルは最もスクイズされた直交位相成分に局所発振光 (LO) の位相をロックした状態で得られている。また、測定は 1.4 MHz の側帯波成分について行われている。

彼らが用いた形のセットアップは、これ以来、860 nm 帯の波長におけるスクイーミング実験において標準的なものとなっている。

1.8.4 良質なスクイーミングを実現する上での課題

その一方で、より高いスクイーミングレベルの実現に際しては、ポンプ光 (青色) により誘起される赤外光 (スクイズド光) の吸収 (BLIRA: blue light induced

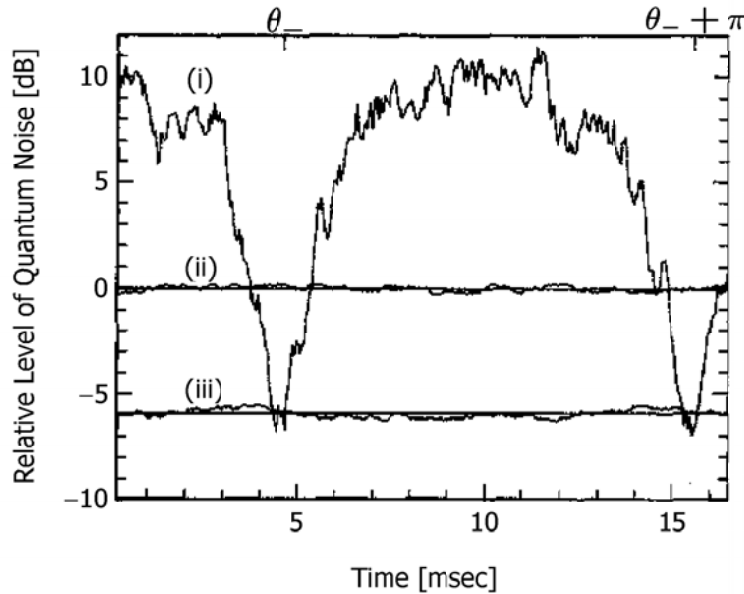


Figure 1.9: Relative levels of quantum noise observed in the experiment [125]. Trace (i) is for squeezed vacuum input to the balanced detector with the local oscillator phase θ swept with a linear ramp. Trace (ii) is a ten-trace for a vacuum state input and sets the “shot-noise” level. Trace (iii) is likewise an average of ten traces, but is acquired with a squeezed vacuum input with the phase θ actively controlled for minimum photocurrent fluctuations, that is, $\theta \cong \theta_-$ for this trace. Acquisition parameters are as follows. Measuring frequency: 1.4 MHz, detection bandwidth: 100 kHz, video bandwidth: 1 Hz for trace (i) and 100 Hz for other traces, sweep time for trace (i): 15 ms, power of the local oscillator: 0.5 mW, wavelength: 856 nm.

infrared absorption) がネックとなってきた。

BLIIRA のない非線形光学結晶として KTiOPO_4 (KTP: potassium titanyl phosphate) が知られてはいたが、この波長帯における波長変換 (基本波 860 nm, 倍波 430 nm) ではタイプ I の位相整合が不可能なこと、また KNbO_3 と較べて非線形光学係数 d_{32} が小さいことから、今まで積極的に用いられることはなかった。しかしながら、こうした問題は擬似位相整合素子である周期分極反転 KTP (PPKTP: periodically-poled KTP) の登場により解決されることとなった。最初に PPKTP をスクイーミングの実験に導入したのは青木ら [127] で、946 nm の cw レーザーを用いて -5.6 dB のスクイーミングを得た。このスクイーミングレベル自体は Polzik らの -6.0 dB に及ばなかったが、PPKTP を用いることにより BLIIRA を回避できることを確認した。

KTP や PPKTP を用いても、光源がパルスレーザーである場合には BLIIRA と類似の現象 (GLIIRA: green light induced infrared absorption) が観測されること [128]、BLIIRA は短波長になるほど顕著になる傾向があることから、今回用い

る 860 nm 帯でどうなるかは実験により確認するしかない。しかし、この波長でも BLIRA がない、もしくは著しく少ないのであれば、従来の -6.0 dB を大幅に上回るスクイーミングレベルや -3.0 dB レベルで高い純粋度を持つスクイズド状態を得ることが可能になるはずである。

1.9 研究の目的と本論文の構成

1.9.1 目的

本研究では、2つのコヒーレント状態を量子力学的に重ね合わせたものである CSS ならびにスクイズド状態の生成に着目し、量子情報処理に関する研究（主にコヒーレント状態を用いるもの、連続変数の領域におけるもの）の進展に寄与する知見や資源を提供することを目標として以下の事から取り組む。

まず、この CSS を擬似的に生成する2種類のスキームを取り上げ、いずれが現実的なスキームであるかを明らかにする。次に、現時点でも実現可能な技術を用いて、CSS を線形ロスによるダメージから回復させるプロトコルを提案する。最後に、高いスクイーミングレベルと純粋度を備えたスクイズド状態を実験的に生成することを試みる。

1.9.2 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。

次章(第2章)では、本論文の理論的な背景について述べる。特に、第3章ならびに第4章で行う解析の基盤となる量子光学の理論や記述について紹介する。

第3章では、2種類の CSS 生成スキームに関し、実験的な不完全性を考慮した解析を行う。その中で、現実的と考えられる条件において、いずれのスキームがより有利かを明らかにする。また、CSS の持つ非古典性について、位相空間原点におけるウィグナー関数の値という観点から評価し、その非古典性を確保するための条件について論じる。それに加え、本研究に先立って行われた研究例 [112, 119] の中で用いられているパラメータを、本研究において導入する詳細なパラメータを用いて表現し直す。

第4章では、現在の技術を用いて実現可能な CSS 純粋化プロトコルを提案する。まず、その生成・伝搬の過程において不可避な線形ロスにより、CSS がどのような状態になるか論じる。そして、その状態の一部をビームスプリッターで取り出し、取り出された場に測定を行い、その結果に依存したイベントセレクションを行うことで、その状態を元の CSS に近づけるプロトコルを提案する。さらに、その測定として現在の技術で簡単に実現できるホモダイン検波を考え、このプロトコルの性能について評価する。それに加え、Lund らにより提案された CSS 増幅プロトコル [5] と、ここで提案するプロトコルとの組み合わせが有効なものか否かについても議論する。

第5章では、高純粋度・高レベルな直交位相スクイーズド状態の生成実験について述べる．ここでは、非線形光学結晶として従来の KNbO_3 に代わり擬似位相整合 KTiOPO_4 を用いることで、従来の結果と比較して高いスクイージングレベルと純粋度が達成できることを述べる．さらに、この実験系の改良を進めることでさらに高いスクイージングレベルを得ることが可能か否かについても議論する．

第6章は結論であり、上に挙げた研究において得られた成果を総括する．

参考文献

- [1] T. C. Ralph, W. J. Munro, and G. J. Milburn, *Proc. SPIE* **4917**, 1 (2002); e-print quant-ph/0110115 (2001).
- [2] J. Eisert, S. Scheel, and M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 137903 (2002).
- [3] J. Fiurášek, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 137904 (2002).
- [4] G. Giedke and J. I. Cirac, *Phys. Rev. A* **66**, 032316 (2002).
- [5] A. P. Lund, H. Jeong, T. C. Ralph, and M. S. Kim, *Phys. Rev. A* **70**, 020101(R) (2004).
- [6] M. Dakna, T. Anhut, T. Opatrný, L. Knöll, and D.-G. Welsch, *Phys. Rev. A* **55**, 3184 (1997).
- [7] H. Jeong, A. P. Lund, and T. C. Ralph, *Phys. Rev. A* **72**, 013801 (2005).
- [8] S. Glancy, H. M. Vasconcelos, and T. C. Ralph, *Phys. Rev. A* **70**, 022317 (2004).
- [9] S. L. Braunstein and A. K. Pati (eds.), *Quantum Information with Continuous Variables* (Kluwer, Dordrecht, 2003).
- [10] H. Mabuchi, E. S. Polzik, and H. J. Kimble, *J. Opt. Soc. B* **11**, 2023 (1994).
- [11] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [12] C. H. Bennett and G. Brassard, *Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing* (IEEE, New York, 1984), p. 175.
- [13] C. H. Bennett, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3121 (1992).
- [14] A. K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661 (1991).
- [15] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969).
- [16] T. C. Ralph, in *Quantum Information with Continuous Variables* edited by S. L. Braunstein and A. K. Pati (Kluwer, Dordrecht, 2001), pp. 295–316.

- [17] D. Gottesman and J. Preskill, Phys. Rev. A **63**, 022309 (2001); in *Quantum Information with Continuous Variables* edited by S. L. Braunstein and A. K. Pati (Kluwer, Dordrecht, 2003), pp. 317–356.
- [18] N. J. Cerf, M. Lévy, and B. V. Assche, Phys. Rev. A **63**, 052311 (2001).
- [19] F. Grosshans and P. Grangier, Phys. Rev. Lett. **88**, 057902 (2002).
- [20] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [21] D. Gottesman, I. L. Chuang, Nature **402**, 390 (1999).
- [22] S. J. van Enk and O. Hirota, Phys. Rev. A **64**, 022313 (2001).
- [23] D. Gottesman, A. Kitaev, and J. Preskill, Phys. Rev. A **64**, 012310 (2001).
- [24] M. Sasaki, K. Wakui, J. Mizuno, M. Fujiwara, and M. Akiba, in *Quantum Communication, Measurement and Computing: The Seventh International Conference on Quantum Communication, Measurement and Computing (AIP Conference Proceedings)*, edited by S. M. Barnett, E. Andersson, J. Jeffers, P. Öhberg, and O. Hirota (AIP, New York, 2004), pp. 44–47; e-print quant-ph/0601058 (2006).
- [25] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [26] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, Nature **390**, 575 (1997).
- [27] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, and L. Hardy, Phys. Rev. Lett. **80**, 1121 (1998).
- [28] I. Marcikic, H. De Riedmatten, W. Tittel, H. Zbinden, and N. Gisin, Nature **421**, 509 (2003).
- [29] A. Furusawa, J. L. Sørensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble, and E. S. Polzik, Science **282**, 706 (1998).
- [30] W. P. Bowen, N. Treps, B. C. Buchler, R. Schnabel, T. C. Ralph, H.-A. Bachor, T. Symul, and P. K. Lam, Phys. Rev. A **67**, 032302 (2003).
- [31] T. C. Zhang, K. W. Goh, C. W. Chou, P. Lodahl, and H. J. Kimble, Phys. Rev. A **67**, 033802 (2003).
- [32] H. Yonezawa, T. Aoki, and A. Furusawa, Nature **431**, 430 (2004).

- [33] N. Takei, H. Yonezawa, T. Aoki, and A. Furusawa, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 220502 (2005).
- [34] N. Takei, T. Aoki, S. Koike, K. Yoshino, K. Wakui, H. Yonezawa, T. Hiraoka, J. Mizuno, M. Takeoka, M. Ban, and A. Furusawa, *Phys. Rev. A* **72**, 042304 (2005).
- [35] H. Yonezawa, N. Takei, and A. Furusawa, “Cascaded quantum teleportation for continuous variables”, IQEC and CLEO-PR 2005, QThD1-4 (2005).
- [36] M. A. Nielsen, E. Knill, and R. Laflamme, *Nature* **396**, 52 (1998).
- [37] M. Riebe, H. Häffner, C. F. Roos, W. Hänsel, J. Benhelm, G. P. T. Lancaster, T. W. Körber, C. Becher, F. Schmidt-Kaler, D. F. V. James, and R. Blatt, *Nature* **429**, 734 (2004).
- [38] M. D. Barrett, J. Chiaverini, T. Schaetz, J. Britton, W. M. Itano, J. D. Jost, E. Knill, C. Langer, D. Leibfried, R. Ozeri, and D. J. Wineland, *Nature* **429**, 737 (2004).
- [39] 細谷暁夫: 量子コンピュータの基礎 (サイエンス社, 1999).
- [40] 佐川弘幸, 吉田宣章: 量子情報理論 (シュプリンガー・フェアラーク東京, 2003).
- [41] P. W. Shor, in *Proceedings of the 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science*, edited by S. Goldwasser (IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, 1994), pp. 124–134; *SIAM J. Comput.* **26**, 1484 (1997); e-print quant-ph/9508027 (1995).
- [42] L. K. Grover, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 325 (1997).
- [43] A. Ekert and R. Jozsa, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 733 (1996).
- [44] D. Deutsch, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **400**, 97 (1985).
- [45] D. Deutsch and R. Jozsa, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **439**, 553 (1992).
- [46] Y. Yamamoto, M. Kitagawa, and K. Igeta, in *Proc. 3rd Asia-Pacific Phys. Conf.* (World Scientific, Singapore, 1988).
- [47] G. J. Milburn, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2124 (1989).
- [48] S. Lloyd and S. L. Braunstein, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1784 (1999).
- [49] E. Knill, R. Laflamme, and G. J. Milburn, *Nature* **409**, 46 (2001).
- [50] S. D. Bartlett and B. C. Sanders, *Phys. Rev. A* **65**, 042304 (2002).

- [51] H. Jeong and M. S. Kim, *Phys. Rev. A* **65**, 042305 (2002).
- [52] L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms* (Dover, New York, 1975).
- [53] J. I. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091 (1995).
- [54] D. P. DiVincenzo, *Phys. Rev. A* **51**, 1015 (1995).
- [55] A. Barenco, D. Deutsch, and A. Eckert, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4083 (1998).
- [56] I. L. Chuang, L. M. K. Vandersypen, X. L. Zhou, D. W. Leung, and S. Lloyd, *Nature* **393**, 143 (1998).
- [57] I. L. Chuang, N. Gershenfeld, and M. Kubinec, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3408 (1998).
- [58] L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood, and I. L. Chuang, *Nature* **414**, 883 (2001).
- [59] J. L. O'Brien, G. J. Pryde, A. G. White, T. C. Ralph, and D. Branning, *Nature* **426**, 264 (2003).
- [60] Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi, and H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4710 (1995).
- [61] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4714 (1995).
- [62] D. J. Wineland, C. Monroe, W. M. Itano, D. Leibfried, B. E. King, and D. M. Meekhof, *J. Natl. Inst. Stand. Tech.* **103**, 259 (1998).
- [63] T. H. Oosterkamp, T. Fujisawa, W. G. van der Wiel, K. Ishibashi, R. V. Hijman, S. Tarucha, and L. P. Kouwenhoven, *Nature* **395**, 873 (1998).
- [64] H.-A. Bachor and T. C. Ralph, *A Guide to Experiments in Quantum Optics* (Wiley-VCH, Weinheim, 2004), p. 355–373.
- [65] P. G. Kwiat, H. Weinfurter, T. Herzog, A. Zeilinger, and M. A. Kasevich, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4763 (1995).
- [66] F. De Martini, L. De Dominicis, V. Cioccolanti, and G. Milani, *Phys. Rev. A* **45**, 5144 (1992).
- [67] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044 (1987).
- [68] L. Mandel, *Rev. Mod. Phys.* **71**, S274 (1999).

- [69] T. B. Pittman, D. V. Stekalov, A. Migdall, M. H. Rubin, A. V. Sergienko, and Y. H. Shih, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1917 (1996).
- [70] J. G. Rarity and P. R. Tapster, *Philos. Trans. R. Soc. London A* **355**, 2267 (1997).
- [71] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1981).
- [72] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91 (1982).
- [73] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982).
- [74] Z. Y. Ou and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 50 (1988).
- [75] Y. H. Shih and C. O. Alley, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2921 (1988).
- [76] J. Brendel, N. Gisin, W. Tittel, and H. Zbinden, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2594 (1999).
- [77] S. L. Braunstein and H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 869 (1998).
- [78] R. Filip, P. Marek, and U. L. Andersen, *Phys. Rev. A* **72**, 042308 (2005).
- [79] S. Lloyd and J.-J. E. Slotine, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4088 (1998).
- [80] A. K. Pati and S. L. Braunstein, in *Quantum Information with Continuous Variables* edited by S. L. Braunstein and A. K. Pati (Kluwer, Dordrecht, 2001), pp. 31–36.
- [81] S. L. Braunstein, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4084 (1998).
- [82] S. L. Braunstein, *Nature* **394**, 47 (1998).
- [83] S. L. Braunstein and P. van Loock, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 513 (2005).
- [84] F. Grosshans, G. V. Assche, J. Wenger, R. Brouri, N. J. Cerf, and P. Grangier, *Nature* **421**, 238 (2003).
- [85] S. D. Bartlett, B. C. Sanders, S. L. Braunstein, and K. Nemoto, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 097904 (2002).
- [86] 古澤明: *量子光学と量子情報科学* (数理工学社, 2005).
- [87] E. Waks, E. Diamanti, B. C. Sanders, S. D. Bartlett, and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 113602 (2004).
- [88] D. Rosenberg, A. E. Lita, A. J. Miller, S. Nam, and R. E. Schwall, *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 15, 575 (2005).

- [89] M. Fujiwara and M. Sasaki, *Opt. Lett.* **31**, 691 (2006).
- [90] M. Ban, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **1**, L9 (1999).
- [91] M. Ban, *Phys. Lett. A* **276**, 213 (2000).
- [92] S. L. Braunstein and H. J. Kimble, *Phys. Rev. A* **61**, 042302 (2000).
- [93] X. Li, Q. Pan, J. Jing, J. Zhang, C. Xie, and K. Peng, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 047904 (2002).
- [94] T. C. Ralph and E. H. Huntington, *Phys. Rev. A* **66**, 042321 (2002).
- [95] J. Mizuno, K. Wakui, A. Furusawa, and M. Sasaki, *Phys. Rev. A* **71**, 012304 (2005).
- [96] S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, and H. J. Kimble, *J. Mod. Opt.* **47**, 267 (2000).
- [97] K. Hammerer, M. M. Wolf, E. S. Polzik, and J. I. Cirac, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 150503 (2005).
- [98] T. C. Ralph, A. Gilchrist, G. J. Milburn, W. J. Munro, and S. Glancy, *Phys. Rev. A* **68**, 042319 (2003).
- [99] V. Giovannetti, S. Guha, S. Lloyd, L. Maccone, J. H. Shapiro, and H. P. Yuen, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 027902 (2004).
- [100] A. S. Holevo, *Tamagawa University Research Review* **4**, 1 (1998);
extended version, e-print quant-ph/9809023 (1998).
- [101] H. Jeong, M. S. Kim, and J. Lee, *Phys. Rev. A* **64**, 052308 (2001).
- [102] J. Clausen, L. Knöll, and D. -G. Welsch, *Phys. Rev. A* **66**, 062303 (2002).
- [103] H. Jeong and M. S. Kim, *Quantum Inf. Compt.* **2**, 208 (2002); e-print quant-ph/0111015 (2002).
- [104] P. T. Cochrane, G. J. Milburn, and W. J. Munro, *Phys. Rev. A* **59**, 2631 (1999).
- [105] A. Gilchrist, K. Nemoto, W. J. Munro, T. C. Ralph, S. Glancy, S. L. Braunstein, and G. J. Milburn, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **6**, S828 (2004).
- [106] A. P. Lund and T. C. Ralph, *Phys. Rev. A* **71**, 032305 (2005).
- [107] H. Jeong and T. C. Ralph, in *Quantum Information with Continuous Variables of Atoms and Light* edited by N. Cerf, G. Leuchs, and E. S. Polzik (Imperial College Press, London, 2006);
e-print quant-ph/0509137 (2005).

- [108] S. D. Bartlett, H. de Guise and B. C. Sanders, *Phys. Rev. A* **65**, 052316 (2002).
- [109] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935); **23**, 823 (1935); **23**, 844 (1935).
- [110] B. Yurke and D. Stoler, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 13 (1986).
- [111] R. W. Boyd, *J. Mod. Opt.* **46**, 367 (1999).
- [112] J. Wenger, R. Tualle-Brouri, and P. Grangier, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 153601 (2004).
- [113] A. Ourjoumtsev, R. Tualle-Brouri, J. Laurat, and P. Grangier, *Science* **312**, 83 (2006).
- [114] J. S. Neergaard-Nielsen, B. Melholt Nielsen, C. Hettich, K. Mølmer, and E. S. Polzik, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 083604 (2006).
- [115] K. Wakui, H. Takahashi, A. Furusawa, and M. Sasaki, “Generation of non-Gaussian optical quantum states from continuous-wave squeezed vacua,” CQIQC 2006, NOSD3 (2006); e-print quant-ph/0609153 (2006).
- [116] M. Sasaki and S. Suzuki, *Phys. Rev. A* **73**, 043807 (2006).
- [117] K. Mølmer, *Phys. Rev. A* **73**, 063804 (2006).
- [118] F. Grosshans and P. Grangier, *Eur. Phys. J. D* **14**, 119 (2001).
- [119] M. S. Kim, E. Park, P. L. Knight, and H. Jeong, *Phys. Rev. A* **71**, 043805 (2005).
- [120] S. Olivares and M. G. A. Paris, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **7**, S616 (2005).
- [121] M. Fujiwara and M. Sasaki, *Opt. Lett.* **31**, 691 (2006).
- [122] L.-A. Wu, M. Xiao, and H. J. Kimble, *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 1465 (1987).
- [123] K. Schneider, M. Lang, J. Mlynek, and S. Schiller, *Opt. Express* **2**, 59 (1998).
- [124] P. K. Lam, T. C. Ralph, B. C. Buchler, D. E. McClelland, H.-A. Bachor, and J. Gao, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **1**, 469 (1999).
- [125] E. S. Polzik, J. Carri, and H. J. Kimble, *Appl. Phys. B* **55**, 279 (1992).
- [126] G. Breitenbach, T. Müller, S. F. Pereira, J.-Ph. Poizat, S. Schiller, and J. Mlynek, *J. Opt. Soc. Am. B* **12**, 2304 (1995).

- [127] T. Aoki, G. Takahashi, and A. Furusawa, *Opt. Express* **14**, 6930 (2006).
- [128] S. Wang, V. Pasiskevicius, and F. Laurell, *J. Appl. Phys.* **96**, 2023 (2004).
- [129] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4887 (1996).
- [130] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, and D. J. Wineland, *Science* **272**, 1131 (1996).

第2章 解析で用いる計算式の導出

本章では，量子光学における基礎的な表記や理論を振り返り，本研究（主に第3章ならびに第4章）において用いる数学的なモデルを記述するための準備を行う．まず，基礎的な量子光学の表記や理論について簡単にまとめ，光の様々な量子状態を紹介する．特に，本研究の主題となる重ね合わせコヒーレント状態（CSS）については詳しく述べる．そして，後の章で扱うことになる光学素子や実験的な不完全性についてのモデルを与える．

最初に，本論文において用いる各種パラメータや物理量の表記について Table 2.1 に示す．物理量の表記や演算子の定義などは，文献により色々な流儀があるが，本論文では基本的に文献 [1] に準拠したものを採用することにする．

Table 2.1: Symbols

Symbol	Description	Type
α, β	Coherent amplitude	Complex
ζ	Squeezing parameter, $\zeta = r e^{i\phi}$	Complex
r	Squeezing parameter (squeezing degree)	Real, positive
ϕ	Squeezing angle	Real
R_{\pm}	Squeezing level, $R_{\pm} \approx e^{\pm 2r}$	Real, positive
x_{θ}	General quadrature component, $x_{\theta} = q \cos \theta + p \sin \theta$	Real
θ	Optical phase	Real
q	Quadrature component (position coordinate), $q = x_0$	Real
p	Quadrature component (momentum coordinate), $p = x_{\pi/2}$	Real
x, y	Auxiliary quadrature component	Real
n, m	Photon number	Real, integer, ≥ 0

2.1 電磁場の量子化と直交位相振幅

本節では，電磁場の振動を量子力学的に表現するための手続きについて紹介する．つまり，電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ および磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ といった表現から，調和振動子の正準量子化における“位置”と“運動量”になぞらた \hat{q} および \hat{p} ，さらには消滅演算子 \hat{a}

ならびに生成演算子 \hat{a}^\dagger を用いた表現を導く．ここでは文献 [2] に倣って電磁場の量子化を行うが，さらに詳細な手続きは文献 [3] を参照されたい．

2.1.1 古典的な電磁場のハミルトニアンと運動方程式

まず，電荷や電流のない真空中におけるマクスウェル方程式は以下のように記述される．

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

もちろん， $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ は電場， $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ は磁場を表すベクトル量である．また， $\mathbf{r} = (x, y, z)$ は空間中の一点を表す位置ベクトル， t は時刻である．この解としての電磁場は，クーロングージにおけるベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ を用いて表現すると便利である．この $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ は波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0\tag{2.2}$$

および発散条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0\tag{2.3}$$

を満たす．このようなベクトルポテンシャルを用いると，電磁場は

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\tag{2.4}$$

のように表される．

平面波による展開

ハミルトンの運動方程式を得るためには，まずベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ を，波数 \mathbf{k} の平面波で展開しておくことと便利である．その際，電磁場は一辺の長さ L の周期境界条件を満たす平面波であると考え，しかるべき段階で $L \rightarrow \infty$ の極限を取る．もちろん，物理的に意味のある計算結果が L に依存することはない．

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}\tag{2.5}$$

ここで，ベクトル $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ の成分は，それぞれ

$$\begin{aligned} k_1 &= 2\pi n_1/L, & n_1 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ k_2 &= 2\pi n_2/L, & n_2 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ k_3 &= 2\pi n_3/L, & n_3 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

のように表される．そのようなわけで， $\sum_{\mathbf{k}}$ は整数 n_1, n_2, n_3 についての総和を取るものとして考えられる． $\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}$ を外に出してあるのは，その方が後々の計算において便利だからである．

横波条件 Eq. (2.3) より，Eq. (2.5) 右辺について

$$\frac{i}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathcal{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 0 \quad (2.7)$$

が成り立たなければならないが，すべての \mathbf{r} に対してこれが成立するためには

$$\mathbf{k} \cdot \mathcal{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0 \quad (2.8)$$

である必要がある．また， $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ が実数であるためには

$$\mathcal{A}_{-\mathbf{k}}(t) = \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^*(t) \quad (2.9)$$

でなければならない．

さらに，波動方程式 Eq. (2.2) を満たすためには

$$\frac{1}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \left(-k^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathcal{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 0 \quad (2.10)$$

が成り立たなければならないが，これがすべての \mathbf{r} に対して成立するためには

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{\mathbf{k}}^2 \right) \mathcal{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0 \quad (2.11)$$

である必要がある．ここで $\omega_{\mathbf{k}} = ck$ と置いた．Eq. (2.11) 解のうち，Eq. (2.9) を満たすものは $c_{\mathbf{k}}$ を定数として

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k}}(t) = c_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} + c_{-\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} \quad (2.12)$$

のようになる．

単位偏光ベクトル

Eq. (2.12) における $c_{\mathbf{k}}$ は，Eq. (2.8) にあるような条件を満たす2つのベクトルに分解しておくとう便利である．これは，正規直交な単位ベクトル $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}, \mathbf{e}_{\mathbf{k}2}$ を以下の条件を満たすように選べば簡単に実現できる．これらのベクトルを複素数として

いるのは、偏光についての情報に加えて波動の初期位相についての情報も載せているからである。

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} &= 0, & (s = 1, 2) \\ \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}^* \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}s'} &= \delta_{ss'}, & (s, s' = 1, 2) \\ \mathbf{e}_{\mathbf{k}1} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}2} &= \mathbf{k}/k \end{aligned} \quad (2.13)$$

こうして選んだ $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}, \mathbf{e}_{\mathbf{k}2}$ を用いると、 $\mathbf{c}_{\mathbf{k}}$ は

$$\mathbf{c}_{\mathbf{k}} = \sum_{s=1}^2 c_{\mathbf{k}s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \quad (2.14)$$

と表される。

こうして計算していくと、最終的にベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ は、各波数ベクトル \mathbf{k} ならびに各偏光方向 s において定義される基本モード関数 $e_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ およびそれに対応する振幅

$$u_{\mathbf{k}s}(t) = c_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} \quad (2.15)$$

を用いて、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [u_{\mathbf{k}s}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} - \text{c.c.}] \quad (2.16)$$

のように展開できる。振幅 $u_{\mathbf{k}s}(t)$ が Eq. (2.11) を満たすとき、基本モード関数は Helmholtz 方程式

$$(\nabla^2 + k^2) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} = 0 \quad (2.17)$$

に従う。

あとは、Eq. (2.4) を用いて電磁場を基本モードに展開して

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \omega_{\mathbf{k}} [u_{\mathbf{k}s}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} + \text{c.c.}] \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{-1}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [u_{\mathbf{k}s}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}) + \text{c.c.}] \end{aligned} \quad (2.18)$$

が得られる。

電磁場のエネルギー

ここでは、今まで得られた式を用いて電磁場のエネルギーを求める。一辺の長さ L の立方体内部に溜め込まれている電磁場の全エネルギーは

$$H = \frac{1}{2} \int_{L^3} \left[\varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right] d^3\mathbf{r} \quad (2.19)$$

で与えられる．この Eq. (2.19) に，Eq. (2.18) および

$$\int_{L^3} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = L^3 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}^*) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s'}) = k^2 \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}^* \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}s'} = k^2 \delta_{ss'} \quad (2.20)$$

を代入することにより，全エネルギーは

$$H = 2 \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \omega_{\mathbf{k}}^2 |u_{\mathbf{k}s}(t)|^2 \quad (2.21)$$

と求められる．

ここで，電磁場を量子化するための準備として，2つの正準変数 $q_{\mathbf{k}s}(t)$, $p_{\mathbf{k}s}(t)$ を導入し，全エネルギー H をハミルトニアンとして記述することを試みる．

$$q_{\mathbf{k}s}(t) = [u_{\mathbf{k}s}(t) + u_{\mathbf{k}s}^*(t)]$$

$$p_{\mathbf{k}s}(t) = -i\omega_{\mathbf{k}} [u_{\mathbf{k}s}(t) - u_{\mathbf{k}s}^*(t)] \quad (2.22)$$

もちろん， $q_{\mathbf{k}s}(t)$ と $p_{\mathbf{k}s}(t)$ の間には

$$\frac{\partial}{\partial t} q_{\mathbf{k}s}(t) = p_{\mathbf{k}s}(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{\mathbf{k}s}(t) = -\omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}s}(t) \quad (2.23)$$

の関係がある．そして， $q_{\mathbf{k}s}(t)$, $p_{\mathbf{k}s}(t)$ を用いて全エネルギー H をハミルトニアンとして書き直すと，調和振動子のものと同じ形をした

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [p_{\mathbf{k}s}^2(t) + \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}s}^2(t)] \quad (2.24)$$

が得られる．すると，Eq. (2.23) と等価な運動方程式は

$$\frac{\partial H}{\partial p_{\mathbf{k}s}} = \frac{\partial q_{\mathbf{k}s}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_{\mathbf{k}s}} = \frac{\partial p_{\mathbf{k}s}}{\partial t} \quad (2.25)$$

のようにも書ける．

最後に，ここで導入した正準変数を用いて，Eq. (2.5) および Eq. (2.18) において展開されたベクトルポテンシャルならびに電磁場を表現し直すと

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{2\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \left\{ \left[q_{\mathbf{k}s}(t) + \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} p_{\mathbf{k}s}(t) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} - \text{c.c.} \right\}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \left\{ [\omega_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}s}(t) + i p_{\mathbf{k}s}(t)] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} + \text{c.c.} \right\}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{-1}{2\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \left\{ \left[q_{\mathbf{k}s}(t) + \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} p_{\mathbf{k}s}(t) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}) + \text{c.c.} \right\} \quad (2.26)$$

のようになる．

2.1.2 電磁場の正準量子化

電磁場を量子力学の言葉で表現するためには，物理量をヒルベルト空間に属する演算子に対応付けなければならない．こうした演算子は，一般的には交換しない．なお，これから導入する演算子は，それに対応する物理量を表す文字にハット $\hat{}$ をつけて表現する．たとえば，2.1.1 節で導入した正準変数 $q_{\mathbf{k}s}(t)$, $p_{\mathbf{k}s}(t)$ に対応する演算子は $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t)$, $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)$ と表記する．量子力学では，正準共役な演算子の交換関係が i であり，異なるモードの物理量に対応する演算子は交換する．こうした関係は，以下のように書ける．

$$\begin{aligned} [\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}(t)] &= i \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \delta_{ss'} \\ [\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{q}_{\mathbf{k}'s'}(t)] &= 0 \\ [\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}(t)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

そして，この交換関係は物理量 $q_{\mathbf{k}s}(t)$ と $p_{\mathbf{k}s}(t)$ の間に不確定性関係

$$\Delta q_{\mathbf{k}s}(t) \Delta p_{\mathbf{k}s}(t) \geq \frac{1}{2} \quad (2.28)$$

をもたらす [4]．ここで， $\Delta q_{\mathbf{k}s}(t)$ および $\Delta p_{\mathbf{k}s}(t)$ は任意の状態 $|\psi\rangle$ について

$$\begin{aligned} \Delta q_{\mathbf{k}s}(t) &\equiv \sqrt{\langle \psi | q_{\mathbf{k}s}^2(t) | \psi \rangle - \langle \psi | q_{\mathbf{k}s}(t) | \psi \rangle^2} \\ \Delta p_{\mathbf{k}s}(t) &\equiv \sqrt{\langle \psi | p_{\mathbf{k}s}^2(t) | \psi \rangle - \langle \psi | p_{\mathbf{k}s}(t) | \psi \rangle^2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

と定義している．

また，量子化された電磁場のハミルトニアンは Eq. (2.24) における $q_{\mathbf{k}s}(t)$, $p_{\mathbf{k}s}(t)$ を $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t)$, $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)$ で置き換えて

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [\hat{p}_{\mathbf{k}s}^2(t) + \omega_{\mathbf{k}}^2 \hat{q}_{\mathbf{k}s}^2(t)] \quad (2.30)$$

のように書けるようになる． $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t)$, $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)$ や，それらの線形な関数として表される電磁場の演算子 $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$, $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$, $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$ は連続固有値を持つ．しかしながら，エネルギーを表す演算子 \hat{H} は離散固有値を持つ．

生成消滅演算子の導入

電磁場を量子化したら，先ほど導入したエルミートな演算子 $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t)$, $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)$ に代わって

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \omega_{\mathbf{k}}}} [\omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) + i \hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)] \\ \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \omega_{\mathbf{k}}}} [\omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) - i \hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)] \end{aligned} \quad (2.31)$$

で定義される非エルミートな演算子を用いると便利である．もちろん，二番目に定義した演算子は一番目に定義したそのエルミート共役である．なお，後に2.4.1節で触れるように， \hat{a} は光子を消滅させる作用を，逆に \hat{a}^\dagger は光子を生成する作用を持つ．そのことから，これらは消滅演算子 (annihilation operator) ならびに生成演算子 (creation operator) と呼ばれる．

これらを用いると，逆に $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t)$, $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)$ は

$$\begin{aligned}\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) &= \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) + \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) \right] \\ \hat{p}_{\mathbf{k}s}(t) &= i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) - \hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) \right]\end{aligned}\quad (2.32)$$

のように表すことができる．また，Eq. (2.27) を用いると， $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)$, $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t)$ の交換関係は

$$\begin{aligned}\left[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger(t) \right] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \delta_{ss'} \\ \left[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}(t) \right] &= 0 \\ \left[\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger(t) \right] &= 0\end{aligned}\quad (2.33)$$

のようになる．

ところで，係数 $\sqrt{1/2\omega_{\mathbf{k}}}$ を除いて Eq. (2.32) を見ると， $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)$, $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t)$ が Eq. (2.22) における $u_{\mathbf{k}s}(t)$, $u_{\mathbf{k}s}^*(t)$ に対応しており，さらに Eq. (2.15) より

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) &= \hat{a}_{\mathbf{k}s}(0)e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \\ \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) &= \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(0)e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}\end{aligned}\quad (2.34)$$

という時間依存を持つことが分かる．また，Eq. (2.30) に Eq. (2.32) を代入することによりハミルトニアンは

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \omega_{\mathbf{k}} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) + \frac{1}{2} \right]\quad (2.35)$$

と書き直される．

生成消滅演算子による電磁場の表現

Eq. (2.26) における正準変数を演算子に置き換えて量子化し，さらに生成消滅演算子を用いて表現し直すと，量子化された電磁場の表式 Eq. (2.36) が得られる．

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{i}{2\epsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \sqrt{\frac{2}{\omega_{\mathbf{k}}}} \left\{ \hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} - \text{h.c.} \right\} \\ \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\epsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} \left\{ \hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} + \text{h.c.} \right\} \\ \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{-1}{2\epsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \sqrt{\frac{2}{\omega_{\mathbf{k}}}} \left\{ \hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}) + \text{h.c.} \right\}\end{aligned}\quad (2.36)$$

2.1.3 直交位相振幅

ここでは、2.1.2節において導入した共役な演算子の対 $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t)$, $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)$, 特に $t = 0$ における $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(0)$, $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(0)$ が実際の電磁場においてどのような意味を持つのか考える。これらを演算子にする前の $q_{\mathbf{k}s}(t)$, $p_{\mathbf{k}s}(t)$ は、電磁場の全エネルギーをハミルトニアンとして記述するためだけに導入された感のある抽象的な物理量であった。一般の力学系では、これらはそれぞれ一般化座標ならびに一般化運動量と呼ばれ、いわゆる位置 \mathbf{r} や運動量 \mathbf{p} そのものとは限らない。しかしながら、 $q_{\mathbf{k}s}(0)$, $p_{\mathbf{k}s}(0)$ については、もう少し具体的な解釈が可能である。また、これは $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$, $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$, $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$ どれについて計算しても同じであるため、簡単に電場 $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ についてのみ考えることにする。

まず、基本ベクトル $\mathbf{e}_{\mathbf{k}s}$ を、位相 θ と振幅を表すベクトル $\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s}$ を用いて

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}s} = \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s} e^{i\theta} \quad (2.37)$$

と表すことにする。さらに、Eq. (2.36) 中の電場に関する式に Eq. (2.34) を代入すると次式が得られる。

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \sqrt{2 \cdot \omega_{\mathbf{k}}} \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s} \left\{ \hat{a}_{\mathbf{k}s}(0) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \theta)} + \text{h.c.} \right\} \quad (2.38)$$

一方、Eq. (2.31) に $t = 0$ を代入することにより明らかに

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}s}(0) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \omega_{\mathbf{k}}}} [\omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}s}(0) + i \hat{p}_{\mathbf{k}s}(0)] \\ \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(0) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \omega_{\mathbf{k}}}} [\omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}s}(0) - i \hat{p}_{\mathbf{k}s}(0)] \end{aligned} \quad (2.39)$$

である。この Eq. (2.39) を Eq. (2.38) に代入して計算することにより

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s} \\ &\times \left\{ \omega \hat{q}_{\mathbf{k}s}(0) \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \theta] - \hat{p}_{\mathbf{k}s}(0) \sin[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \theta] \right\} \end{aligned} \quad (2.40)$$

が得られる。こうして得られた式を見ると、 $\omega \hat{q}_{\mathbf{k}s}(0)$ ならびに $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(0)$ は振動する電場の \sin 成分や \cos 成分に対応する振幅となっていることが分かる。このことから、これらは直交位相振幅 (quadrature) と呼ばれる¹。

さらに一般化された直交位相振幅の表現としては、位相 θ の情報も含む

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\theta \mathbf{k}s}(0) &= \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}s}(0) e^{-i\theta} + \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(0) e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\omega}} [\omega \hat{q}_{\mathbf{k}s}(0) \cos \theta + \hat{p}_{\mathbf{k}s}(0) \sin \theta] \end{aligned} \quad (2.41)$$

¹ここでは、時間依存の項を外に出した $\omega \hat{q}_{\mathbf{k}s}(0)$ および $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(0)$ を quadrature と言っているが、何を指して quadrature と言うかは文献により異なる。消滅演算子の実部と虚部のことを指していることもあれば、単に $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(0)$ と $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(0)$ の和と差を指していることもある。いずれにしても定数が異なるだけである。またそれらの絶対的な値が問題になることはないので、どの流儀に従っても問題はない。

がある．この表現は，後述するホモダイン検波で任意の位相における直交位相振幅を測定する場合などに重要である．

2.1.4 単一モードの電磁波と表記の簡略化

2.1.3 節までは，電磁場を多数の基本モードの集合として扱ってきた．しかしながら，量子光学における多くの問題では，そのうちの一つのモードについてのみ考えればよい場合が多い．そこで，今後は単一モードの場を考えることにする．すると，場所 r や時間 t についての变化を追う必要もなくなるため，こうした振動項も落として考えることにする．さらに，ベクトルポテンシャル，電場ならびに磁場は，直交位相振幅の演算子または生成消滅演算子についての線形な関数として表すことができた．そこで，電磁場は直交位相振幅演算子または消滅演算子で特徴づけてしまうことにする．

すると，簡略化された生成消滅演算子 \hat{a} , \hat{a}^\dagger ならびに直交位相振幅演算子 \hat{q} , \hat{p} は以下の関係式で結ばれるようになる．

$$\hat{a} = \frac{\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2}} \quad (2.42)$$

もちろん，逆に

$$\hat{q} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}i} \quad (2.43)$$

と表すこともできる．また，交換関係 Eq. (2.27) は

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i, \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (2.44)$$

のように， q と p の間の不確定性関係 Eq. (2.28) も

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{1}{2} \quad (2.45)$$

のようにそれぞれ簡略化される．さらに，ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{1}{2} [\hat{q}^2 + \hat{p}^2] = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \quad (2.46)$$

のように表されるようになる．なお，一般化された直交位相振幅は

$$\hat{x}_\theta = \frac{\hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}}{\sqrt{2}} = \hat{q} \cos \theta + \hat{p} \sin \theta \quad (2.47)$$

のようになる．

2.2 直交位相固有状態

直交位相固有状態 (quadrature eigenstate) は、先ほど導入した直交位相演算子 \hat{q} ならびに \hat{p} の固有状態である。これは、後述するスクイーズド状態において、そのスクイージングパラメータ (またはスクイージングレベル) を無限に大きくしたものと考えることもできる。こうした極限的な状態は、それら自身単独で存在することはない。しかしながら、他のさまざまな状態を展開する際の基底として大変重宝する。また、すぐ後に述べるウィグナー関数を定義する際にも、この状態を用いる。

直交位相固有状態 $|q\rangle$ ならびに $|p\rangle$ は以下の式を満足する。

$$\begin{aligned}\hat{q}|q\rangle &= q|q\rangle \\ \hat{p}|p\rangle &= p|p\rangle\end{aligned}\quad (2.48)$$

もちろん、ここで q および p は、 $|q\rangle$ および $|p\rangle$ にそれぞれ対応する固有値である。まず、これらの固有状態は正規直交条件を満たす。

$$\begin{aligned}\langle q|q'\rangle &= \delta(q - q') \\ \langle p|p'\rangle &= \delta(p - p')\end{aligned}\quad (2.49)$$

また、完全系を構成する。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |q\rangle\langle q| dq = \int_{-\infty}^{+\infty} |p\rangle\langle p| dp = 1 \quad (2.50)$$

それゆえ、基底として利用することができる。

また、これらの直交位相固有状態は、互いにフーリエ変換の関係で結ばれている。

$$\begin{aligned}|q\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-iqp] |p\rangle dp \\ |p\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[+iqp] |q\rangle dq\end{aligned}\quad (2.51)$$

任意の状態 $|\psi\rangle$ の波動関数は、 $\langle q|$ または $\langle p|$ を用いて、それぞれ q または p の関数として求められる。

$$\begin{aligned}\psi(q) &= \langle q|\psi\rangle \\ \tilde{\psi}(p) &= \langle p|\psi\rangle\end{aligned}\quad (2.52)$$

2.3 ウィグナー関数

ウィグナー関数は、量子状態を可視化する“準確率密度関数”の一種である。準確率密度関数と呼ばれるものには Q 関数や P 関数といったものもあるが、ウィグナー関数には実験的に求めやすい、さまざまな量子状態において扱いやすい、異なる量子状態を見分けやすいといった便利な特徴が多い。

2.3.1 定義

ウィグナー関数は以下のように定義される．ここで， $\hat{\rho}$ は任意の状態を表す密度演算子である．

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{\rho} \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx \quad (2.53)$$

たとえば，後の2.4.1節で紹介する光子数状態を表現する際には $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|$ と，同じく2.4.2節で紹介するコヒーレント状態を表現するのであれば $\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ とすればよい．

2.3.2 その性質

ウィグナー関数には色々と便利な性質がある．

確率密度関数との関係

そもそも，ウィグナー関数がこのような性質を持つように定義されているのだが，片方の正準変数について $-\infty$ から $+\infty$ まで積分すると，もう片方の正準変数についての確率密度関数が得られる．すなわち， $y_\theta \equiv x_{\theta+\pi/2}$ として

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x_\theta) &\equiv \langle x_\theta | \hat{\rho} | x_\theta \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} W(x_\theta \cos \theta - y_\theta \sin \theta, x_\theta \sin \theta + y_\theta \cos \theta) dy_\theta \end{aligned} \quad (2.54)$$

である．特に $\theta = 0$ および $\theta = \pi/2$ の場合，すなわち q ならびに p についての確率密度関数は

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(q) &\equiv \langle q | \hat{\rho} | q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} W(q, p) dp \\ \mathcal{P}(p) &\equiv \langle p | \hat{\rho} | p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} W(q, p) dq \end{aligned} \quad (2.55)$$

のようになる．

ウィグナー関数の値

まず，ウィグナー関数は実数である．

$$W^*(q, p) = W(q, p) \quad (2.56)$$

また，“準”はつくものの確率密度関数なので規格化されている．

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(q, p) dq dp = 1 \quad (2.57)$$

さらに，その値域は

$$|W(0,0)| \leq \frac{1}{\pi} \quad (2.58)$$

である．ここで，ウィグナー関数は負の値も取りうる点に注意する必要がある．そして，これが“準”確率密度関数と呼ばれる所以である．

演算子のオーバーラップ

ウィグナー関数の持つ性質で特筆すべきものとして，異なる演算子（量子状態の密度演算子や物理量の演算子）のオーバーラップを表現できるというものがある．つまり，任意のエルミートな演算子 \hat{O}_1 および \hat{O}_2 に対して

$$\text{Tr} \{ \hat{O}_1 \hat{O}_2 \} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{O_1}(q,p) W_{O_2}(q,p) dq dp \quad (2.59)$$

が成り立つ．ここで， $W_{O_1}(q,p)$ および $W_{O_2}(q,p)$ は， \hat{O}_1 および \hat{O}_2 をそれぞれ Eq. (2.53) の $\hat{\rho}$ に代入して計算することにより得られる演算子のウィグナー表現である．

こうした性質を用いて，状態 ρ から得られる物理量 \hat{O} の期待値を求めることができる．

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle &= \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{O} \} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\rho}(q,p) W_O(q,p) dq dp \end{aligned} \quad (2.60)$$

また，任意の2つの状態 $\hat{\rho}_1$ および $\hat{\rho}_2$ について，片方が純粋状態 $\hat{\rho}_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ であれば，これらの状態の重なり（フィデリティ F ）を求めることができる．

$$\begin{aligned} F &\equiv \langle \psi_1 | \hat{\rho}_2 | \psi_1 \rangle \\ &= \text{Tr} \{ \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2 \} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\rho_1}(q,p) W_{\rho_2}(q,p) dq dp \end{aligned} \quad (2.61)$$

このフィデリティは，どれだけ2つの量子状態が似ているかを表す指標として多く用いられる．その取りうる値は $0 \leq F \leq 1$ であり，比較している2つの状態が全く同じである場合に $F = 1$ ，直交している場合に $F = 0$ となる．第3章ではフィデリティを求める場面があるが，密度演算子と状態ブラ・ケットそのものから計算するよりも，ここに挙げたようにウィグナー関数を介して計算したほうが楽な場合がある．

さらに，Eq. (2.59) における $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{\rho}$ と置くことにより状態の純粋度 $\text{Tr} \{ \hat{\rho}^2 \}$ を求めることもできる．

$$\text{Tr} \{ \hat{\rho}^2 \} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W^2(q,p) dq dp \quad (2.62)$$

2.4 色々な量子状態

本節では，光の量子状態として光子数状態，コヒーレント状態，スクイーズド状態そして重ね合わせコヒーレント状態 (CSS) について紹介する．そして，直交位相振幅についての確率密度関数やウィグナー関数を用いて，これら量子状態の特徴を明らかにする．

なお，コヒーレント状態，スクイーズド状態および CSS については，最初に紹介する光子数状態も基底として用いることにより，さらに多面的な表現を試みる．

2.4.1 光子数状態 (photon number state)

光子数状態は光子数つまり振幅が確定している状態である．その代わり，位相はまったく確定していない．光には波としての性質と粒子としての性質があるが，光子数状態が持つ性質は後者である．古典的な光の姿は波であるから，粒子としての性質を持つ光子数状態はきわめて非古典的な状態である．

光子数状態は光子数演算子 \hat{n} の固有状態，すなわち

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle \quad (2.63)$$

として定義される．また，ここで光子数演算子 \hat{n} の定義は

$$\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (2.64)$$

である．これと演算子の交換関係 Eq. (2.44) を用いて計算することにより

$$\hat{n} \hat{a} |n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a}^2 |n\rangle = (\hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}) |n\rangle = (n-1) \hat{a} |n\rangle \quad (2.65)$$

であることが分かる．つまり，生成消滅演算子は光子数状態に対し以下のように作用する．

$$\begin{aligned} \hat{a} |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle \end{aligned} \quad (2.66)$$

この Eq. (2.66) より， \hat{a} は光子を 1 個消滅させる作用を，逆に \hat{a}^\dagger は光子を 1 個生成する作用をそれぞれ持つことが分かる．こうした性質から， \hat{a} は消滅演算子， \hat{a}^\dagger は生成演算子と呼ばれている．

なお，ここで $n=0$ とすることにより

$$\hat{a} |0\rangle = 0 \quad (2.67)$$

であることも分かる．

また，定義 Eq. (2.64) を用いてハミルトニアン Eq. (2.46) を書き直すと

$$\hat{H} = \hat{n} + \frac{1}{2} \quad (2.68)$$

である．これは，光子数がゼロであっても場のエネルギーはゼロにならないことを示している．

基底としての光子数状態

光子数状態は，互いに正規直交である (orthonormal) .

$$\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'} \quad (2.69)$$

また，完全系を構成する (complete) .

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{1} \quad (2.70)$$

こうした性質があるため，光子数状態は他の状態を展開するための基底として利用できる．光子数状態の固有値は離散的であるため，計算機を用いて数値計算をする場合などに便利である．一方で，解析的に計算を行う際には不便な場合もある．

直交位相振幅による表現

光子数状態を直交位相振幅 q で表現すると Eq. (2.71) のようになる．ここで， $H_n(q)$ は n 次のエルミート多項式である．なお，先に述べたように光子数状態の位相はまったく確定していないため，どの直交位相固有状態 $|x_\theta\rangle$ を用いて展開しても，得られる波動関数は同じである．そのため，ここでは $|q\rangle = |x_0\rangle$ を用いて光子数状態を展開することとした．

$$\begin{aligned} \psi_{\text{PNS}}(n; q) &= \langle q | n \rangle \\ &= \frac{H_n(q)}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} \exp\left[-\frac{q^2}{2}\right] \end{aligned} \quad (2.71)$$

もちろん，確率密度関数は Eq. (2.72) のように計算できる．また，それを $n = 0 \sim 3$ についてプロットしたものを Fig. 2.1 に示す．

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{PNS}}(n; q) &\equiv |\psi_{\text{PNS}}(n; q)|^2 \\ &= \frac{H_n^2(q)}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \exp[-q^2] \end{aligned} \quad (2.72)$$

ここに示すとおり，直交位相振幅 q を用いて光子数状態を表現したときの確率密度関数は，後に紹介するコヒーレント状態やスクイーズド状態のようなガウス型ではない²．唯一の例外が $n = 0$ の状態すなわち真空であるが，これはコヒーレント状態の一種でもある．

² 正確に言うと高次の (エルミート) ガウス型である．

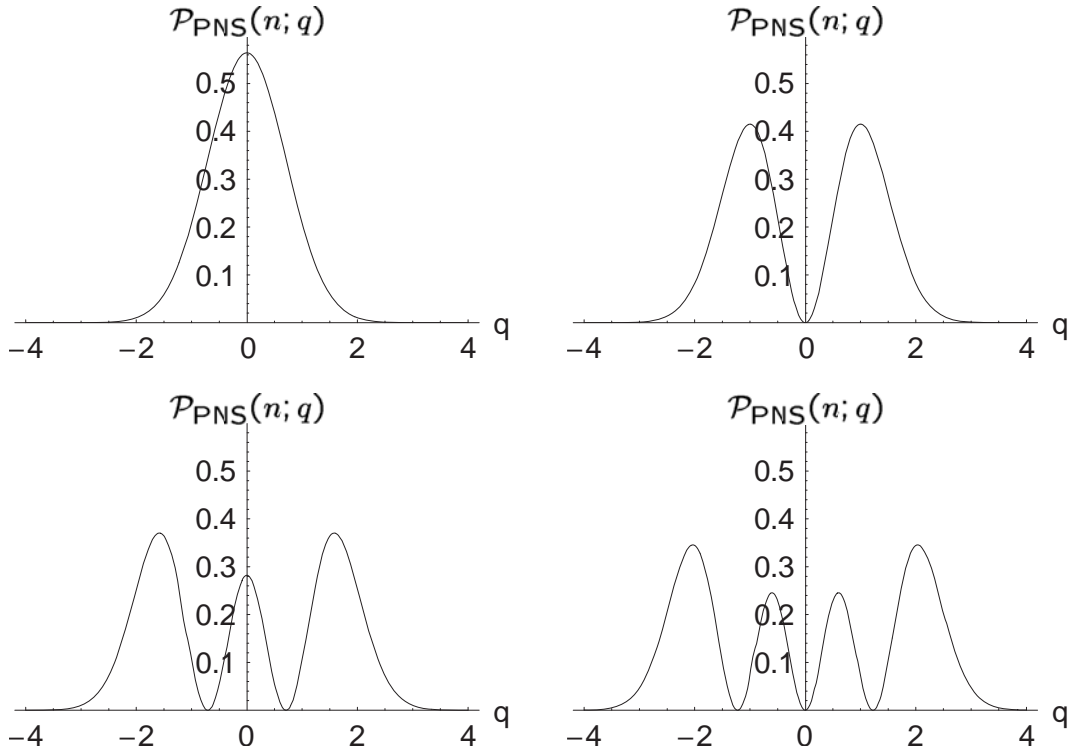


Figure 2.1: Quadrature distributions of the photon number states $\mathcal{P}_{\text{PNS}}(n; q)$ for $n = 0$ (upper left), $n = 1$ (upper right), $n = 2$ (lower left), and $n = 3$ (lower right).

ウィグナー関数

光子数状態のウィグナー関数を $n = 0 \sim 3$ について計算し，その式を Eq. (2.73) 中の $W_{\text{PNS}}(0; q, p) \sim W_{\text{PNS}}(3; q, p)$ として示した．また，これらをプロットしたものを Fig. 2.2 に示した．

これらのウィグナー関数は，値が負になる領域を持っている．これは，光子数状態の著しい非古典性を表している．また，その分布は位相空間原点を中心とした等方的なものである．これは，光子数状態の位相は全く定まらないことを表している．

$$\begin{aligned}
 W_{\text{PNS}}(0; q, p) &= \frac{1}{\pi} e^{-q^2 - p^2} \\
 W_{\text{PNS}}(1; q, p) &= \frac{2q^2 + 2p^2 - 1}{\pi} e^{-q^2 - p^2} \\
 W_{\text{PNS}}(2; q, p) &= \frac{2(q^2 + p^2)(q^2 + p^2 - 2) + 1}{\pi} e^{-q^2 - p^2} \\
 W_{\text{PNS}}(3; q, p) &= \frac{4(q^2 + p^2)^3 - 18(q^2 + p^2)^2 + 18(q^2 + p^2) - 3}{3\pi} e^{-q^2 - p^2}
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

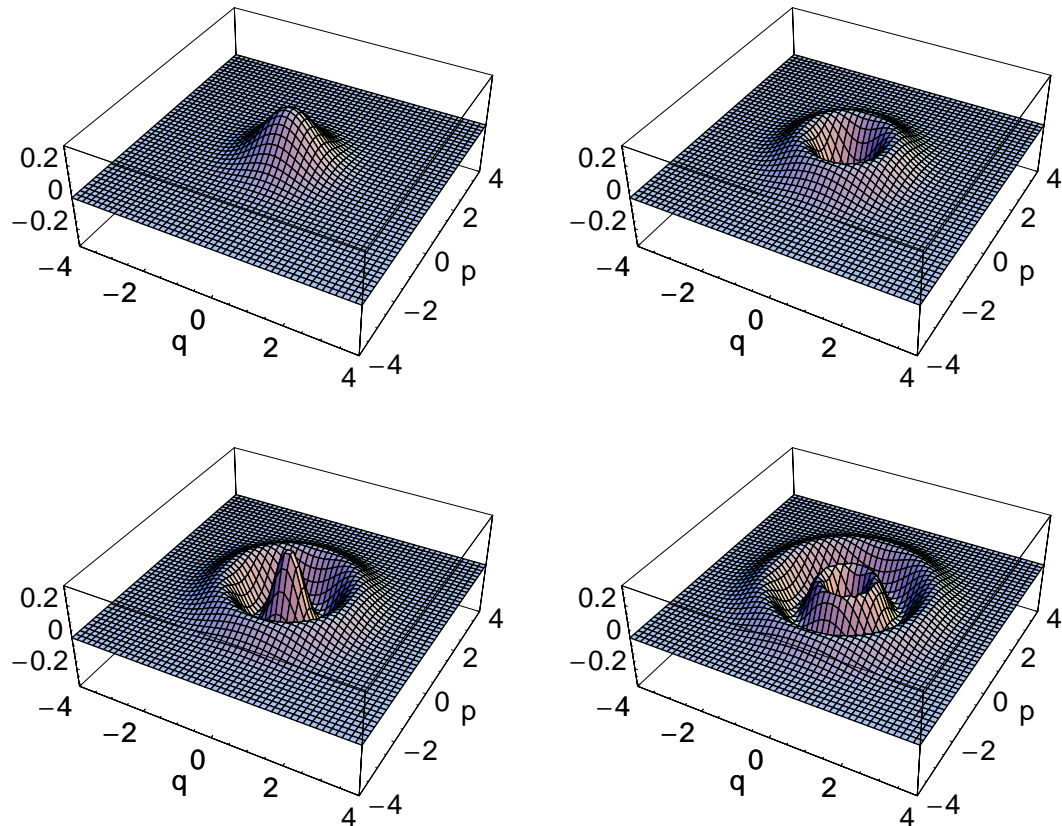


Figure 2.2: Wigner functions of the photon number states for $n = 0$ (upper left), $n = 1$ (upper right), $n = 2$ (lower left), and $n = 3$ (lower right).

2.4.2 コヒーレント状態 (coherent state)

コヒーレント状態は、もっとも古典的な波に近い状態である。これは、振幅と位相が量子力学的に許される範囲で最大限確定していること、つまり Eq. (2.45) に表した式において等号が成り立ち

$$\Delta q \Delta p = \frac{1}{2} \quad (2.74)$$

が満たされていることを意味する。さらに、コヒーレント状態では2つの物理量が等しく揺らいでいる。つまり

$$\Delta q = \Delta p = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.75)$$

のような関係がある。高品質のレーザーから出力される光は、これにきわめて近い状態になっている。

このようなコヒーレント状態は消滅演算子の固有状態として定義される。

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (2.76)$$

消滅演算子はエルミートではないため，その固有値 α は複素数となる．そこで，消滅演算子を \hat{q} と \hat{p} で表現したのに倣って， α を実部と虚部に分けて

$$\alpha = \frac{q_0 + ip_0}{\sqrt{2}} \quad (2.77)$$

と表現する．

また，変位演算子 $\hat{D}(\alpha)$ を導入し，これを真空場 $|0\rangle$ に作用させたものとしてコヒーレント状態を表現することもできる．

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle \quad (2.78)$$

この変位演算子は Eq. (2.79) ように定義される．

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha) &\equiv \exp[\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}] \\ &= \exp\left[-i\frac{q_0 p_0}{2}\right] \exp[-ip_0 \hat{q}] \exp[-iq_0 \hat{p}] \\ &= \exp\left[+i\frac{q_0 p_0}{2}\right] \exp[-iq_0 \hat{p}] \exp[-ip_0 \hat{q}] \end{aligned} \quad (2.79)$$

この式の変形に用いた数学的な技法については文献 [5] が詳しい．この変位演算子は，任意の状態を位相空間上で q 軸に沿って q_0 ， p 軸に沿って p_0 だけシフトさせる．つまり，コヒーレント状態は真空をシフトさせたものとして捉えられる．

また，振幅 α のコヒーレント状態が持つエネルギーの平均値は

$$\langle \hat{H} \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 + \frac{1}{2} \quad (2.80)$$

である．この式から，コヒーレント状態における平均光子数は

$$\langle n \rangle = |\alpha|^2 \quad (2.81)$$

与えられることも分かる．

基底としてのコヒーレント状態

基底としてのコヒーレント状態は，直交位相固有状態や光子数状態と異なり，正規直交ではない．まず，振幅の異なるコヒーレント状態は直交しない (nonorthogonal) ．

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = \exp[-|\beta - \alpha|^2] \quad (2.82)$$

また，過完全である (overcomplete) ．

$$\iint |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d^2\alpha}{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{dq_0 dp_0}{2\pi} = 1 \quad (2.83)$$

しかしながら，コヒーレント状態を基底として他の状態を展開することが可能である．固有値 α が複素数であることから，積分を伴う計算をする場合は手間が倍になる．しかしながら，光子数状態を含む状態を扱う場合には便利な基底である．たとえば， $|n\rangle$ を直交位相固有状態 $|q\rangle$ を基底として展開した場合には Eq. (2.71) のようにエルミート多項式が出てきてしまう．しかしながら， $|\alpha\rangle$ を基底として展開すれば Eq. (2.88) のように比較的簡単な表式となる．

直交位相振幅による表現

コヒーレント状態は， $|q\rangle$ ならびに $|p\rangle$ を基底として以下のように展開できる．

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\text{CS}}(\alpha; q) |q\rangle dq \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_{\text{CS}}(\alpha; p) |p\rangle dp \end{aligned} \quad (2.84)$$

ここで，波動関数 $\psi_{\text{CS}}(\alpha; q)$ ならびに $\tilde{\psi}_{\text{CS}}(\alpha; p)$ は，直交位相振幅 q ならびに p を用いて，それぞれ以下のように表現される．

$$\begin{aligned} \psi_{\text{CS}}(\alpha; q) &= \langle q | \alpha \rangle \\ &= \pi^{-1/4} \exp \left[-\frac{(q - q_0)^2}{2} + ip_0q - i\frac{q_0p_0}{2} \right] \\ \tilde{\psi}_{\text{CS}}(\alpha; p) &= \langle p | \alpha \rangle \\ &= \pi^{-1/4} \exp \left[-\frac{(p - p_0)^2}{2} - iq_0p + i\frac{q_0p_0}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.85)$$

また， q や p についての確率密度関数は

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{CS}}(\alpha; q) &= |\psi_{\text{CS}}(\alpha; q)|^2 = \pi^{-1/2} \exp[-(q - q_0)^2] \\ \tilde{\mathcal{P}}_{\text{CS}}(\alpha; p) &= |\tilde{\psi}_{\text{CS}}(\alpha; p)|^2 = \pi^{-1/2} \exp[-(p - p_0)^2] \end{aligned} \quad (2.86)$$

である．これからも分かるように，コヒーレント状態における直交位相振幅の確率分布は真空のそれを q_0 または p_0 だけシフトさせたものとなる．

光子数による表現

また，光子数状態 $|n\rangle$ を基底すると以下のように展開できる．

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\text{CS}}(\alpha; n) |n\rangle \quad (2.87)$$

この時の展開係数 $C_{\text{CS}}(\alpha; n)$ は以下のように表される．

$$\begin{aligned} C_{\text{CS}}(\alpha; n) &= \langle n | \alpha \rangle \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} |\alpha|^2 \right] \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \end{aligned} \quad (2.88)$$

さらに，この展開係数から光子数統計を計算すると

$$\begin{aligned} P_{\text{CS}}(\alpha; n) &\equiv |C_{\text{CS}}(\alpha; n)|^2 \\ &= \exp[-|\alpha|^2] \frac{|\alpha|^{2n}}{\sqrt{n!}} \\ &= \exp[-\langle n \rangle] \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \end{aligned} \quad (2.89)$$

のようになる．これより，コヒーレント状態の光子数統計はポワソン分布に従うことが分かる．

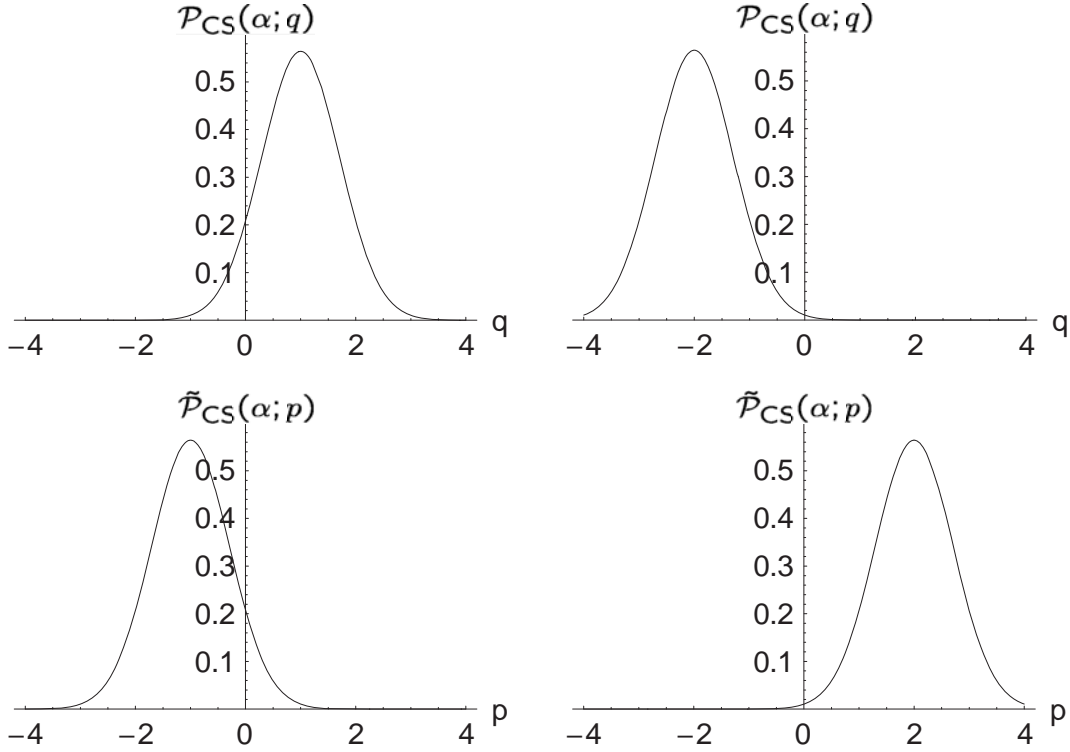


Figure 2.3: Quadrature distributions of the coherent states $\mathcal{P}_{\text{CS}}(\alpha; q)$ and $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{CS}}(\alpha; p)$ for $\{q_0, p_0\} = \{1, -1\}$ (left) and $\{q_0, p_0\} = \{-2, 2\}$ (right).

ウィグナー関数

コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ のウィグナー関数は真空 $|0\rangle$ のそれを位相空間上で q 軸に沿って q_0 , p 軸に沿って p_0 だけシフトしたものとなる。

$$W_{\text{CS}}(\alpha; q, p) = \frac{1}{\pi} [-(q - q_0)^2 - (p - p_0)^2] \quad (2.90)$$

2.4.3 スクイズド状態 (squeezed state)

スクイズド状態というとき、この直交位相スクイズド状態を指すことが多い。本論文でも、直交位相スクイズド状態のことを単にスクイズド状態と呼ぶ。

スクイズド状態は、基本的には Eq. (2.74) に表した最小不確定関係を満たしている³。コヒーレント状態と異なるのは、 Δq または Δp の片方が真空やコヒーレント状態における揺らぎ $1/\sqrt{2}$ より小さくなる、つまり

$$\Delta q < \frac{1}{\sqrt{2}} < \Delta p \quad \text{or} \quad \Delta p < \frac{1}{\sqrt{2}} < \Delta q \quad (2.91)$$

³ロスなどの影響により最小不確定関係を満たさなくなる場合もあるが、ここでは満たしている場合のみを考える。

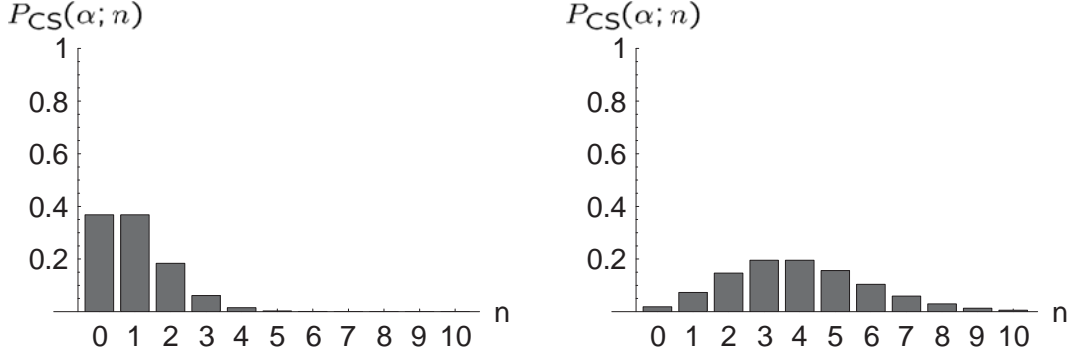


Figure 2.4: Photon number statistics of the coherent states for $|\alpha| = 1$ (left) and $|\alpha| = 2$ (right).

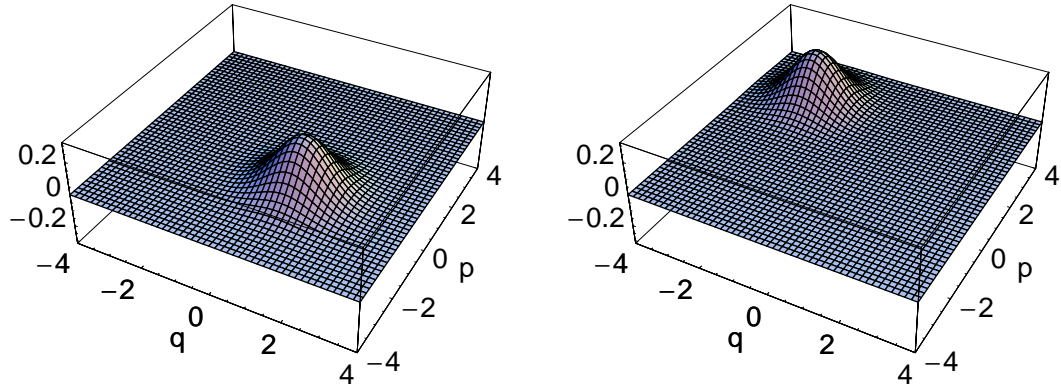


Figure 2.5: Wigner functions of the coherent states for $\{q_0, p_0\} = \{1, -1\}$ (left) and $\{q_0, p_0\} = \{-2, 2\}$ (right).

となる点である．もちろん，最小不確定関係を満たすために，もう片方の揺らぎは真空のそれよりも大きくならなければならない．

このようなスクイーズド状態は，消滅演算子 \hat{a} を Bogoliubov 変換して得られる演算子

$$\hat{c} = \mu \hat{a} + \nu \hat{a}^\dagger \quad (2.92)$$

の固有状態として Eq. (2.93) のように定義することができる [6] ．

$$\hat{c} |\mu, \nu, \gamma\rangle = \gamma |\mu, \nu, \gamma\rangle \quad (2.93)$$

ここで， γ は固有状態 $|\mu, \nu, \gamma\rangle$ に対応する固有値，また μ および ν は

$$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1 \quad (2.94)$$

を満たす複素数である．そして，この演算子 \hat{c} ならびにそのエルミート共役 \hat{c}^\dagger は交換関係

$$[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = 1 \quad (2.95)$$

を満たす．ここで，Eq. (2.94) を満たす複素数として $\mu = \cosh r, \nu = e^{i\phi} \sinh r$ を選ぶと， \hat{c} は

$$\hat{c} = \hat{a} \cosh r + \hat{a}^\dagger e^{i\phi} \sinh r \quad (2.96)$$

のように書き直すことができる．この演算子 \hat{c} は，以下のようにスクイーピングパラメータ $\zeta = r e^{i\phi}$ ならびに生成消滅演算子 \hat{a}^\dagger, \hat{a} を用いて定義されるユニタリーなスクイーズ演算子

$$\hat{S}(\zeta) = \exp \left[\frac{1}{2} (\zeta^* \hat{a}^2 - \zeta \hat{a}^{\dagger 2}) \right] \quad (2.97)$$

を用いて \hat{a} を変換することによっても得られる．

$$\hat{c} = \hat{S}(\zeta) \hat{a} \hat{S}^\dagger(\zeta) \quad (2.98)$$

このスクイーズ演算子を作用させたコヒーレント状態 $\hat{S}(\zeta) |\alpha\rangle$ は， α を固有値とする \hat{c} の固有状態である．

$$\hat{c} \hat{S}(\zeta) |\alpha\rangle = \hat{S}(\zeta) \hat{a} \hat{S}^\dagger(\zeta) \hat{S}(\zeta) |\alpha\rangle = \alpha \hat{S}(\zeta) |\alpha\rangle \quad (2.99)$$

このことから， $\hat{S}(\zeta) |\alpha\rangle$ はスクイーズド状態である．

さて，スクイーピングパラメータ $\zeta = r e^{i\phi}$ は一般的には複素数であるが，実数として扱っても通常は問題ない．そのため，本論文ではスクイーピングの度合いを表すのに，もっぱら実数 $r = |\zeta|$ を用い，先のスクイーズ演算子も

$$\hat{S}(r) = \exp \left[\frac{r}{2} (\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}) \right] \quad (2.100)$$

と書くことにする．また，一般的なスクイーズド状態は Eq. (2.99) に表したような状態であるが，通常は $\alpha = 0$ の場合すなわち“スクイーズされた真空” (SV: squeezed vacuum) をもってスクイーズド状態と呼ぶことが多い．そこで，本論文ではスクイーズド状態 $\hat{S}(\zeta) |\alpha\rangle$ の簡略化された表現

$$|r\rangle = \hat{S}(r) |0\rangle \quad (2.101)$$

を用いる⁴．この $\hat{S}(r)$ による変換を経ると，Eq. (2.91) に表したような揺らぎは

$$\Delta q = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-r}, \quad \Delta p = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{+r} \quad (2.102)$$

のように表されるようになる．

また，スクイーズド状態の平均光子数はゼロではない．“squeezed vacuum” の呼称は q ならびに p の期待値が 0 であるという点だけに由来しており，光子数 n の期待値は

$$\langle n \rangle = \sinh^2 r \quad (2.103)$$

で表される．

⁴ここで，光子数状態やコヒーレント状態の時と異なり，状態ベクトルのラベルに用いている r は演算子の固有値を表しているわけではない．

直交位相振幅による表現

スクイーズド状態の波動関数は以下のように表される．

$$\begin{aligned}\psi_{\text{SS}}(r; q) &\equiv \langle q | r \rangle = \pi^{-1/4} \exp \left[+\frac{r}{2} - \frac{e^{+2r}}{2} q^2 \right] \\ \tilde{\psi}_{\text{SS}}(r; p) &\equiv \langle p | r \rangle = \pi^{-1/4} \exp \left[-\frac{r}{2} - \frac{e^{-2r}}{2} p^2 \right]\end{aligned}\quad (2.104)$$

これらと真空⁵ $|0\rangle$ の波動関数

$$\begin{aligned}\psi(0; q) &\equiv \langle q | 0 \rangle = \pi^{-1/4} \exp \left[-\frac{1}{2} q^2 \right] \\ \tilde{\psi}(0; p) &\equiv \langle p | 0 \rangle = \pi^{-1/4} \exp \left[-\frac{1}{2} p^2 \right]\end{aligned}\quad (2.105)$$

を見比べると，スクイーズド状態においては Eq. (2.102) に示したように q の揺らぎが e^{-r} 倍， p の揺らぎが e^{+r} 倍されていることが分かる．なお，指数関数の中に入っている $\pm r/2$ は波動関数を規格化するために必要なものである．

また，これらより q および p についての確率密度関数は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{SS}}(r; q) &= |\psi_{\text{SS}}(r; q)|^2 = \pi^{-1/2} \exp \left[+r - e^{+2r} q^2 \right] \\ \tilde{\mathcal{P}}_{\text{SS}}(r; p) &= |\tilde{\psi}_{\text{SS}}(r; p)|^2 = \pi^{-1/2} \exp \left[-r - e^{-2r} p^2 \right]\end{aligned}\quad (2.106)$$

これを $r = 0.4$ および $r = 0.8$ について計算したものを Fig. 2.6 にプロットした． r が大きくなると q の分散が小さく， p の分散が大きくなることが分かる．

光子数による表現

光子数状態 $|n\rangle$ を基底したスクイーズド状態は Eq. (2.107) のように展開できる．

$$|r\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\text{SS}}(r; n) |n\rangle \quad (2.107)$$

この時の展開係数 $C_{\text{SS}}(r; n)$ は少々複雑で

$$C_{\text{SS}}(r; n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \frac{\sqrt{n!}}{(n/2)!} \left(-\frac{\tanh r}{2} \right)^{n/2}, & n = \text{even} \\ 0, & n = \text{odd} \end{cases} \quad (2.108)$$

のようになる．これを見ると分かるように，スクイーズド状態を構成する光子数状態には偶数のものしかない．これは，スクイーズド状態がエンタングルした光子のペアによって構成されているためである．

⁵光子数状態において $n = 0$ ，コヒーレント状態において $\alpha = 0$ ，または真空スクイーズド状態において $r = 0$ としたものに相当する．

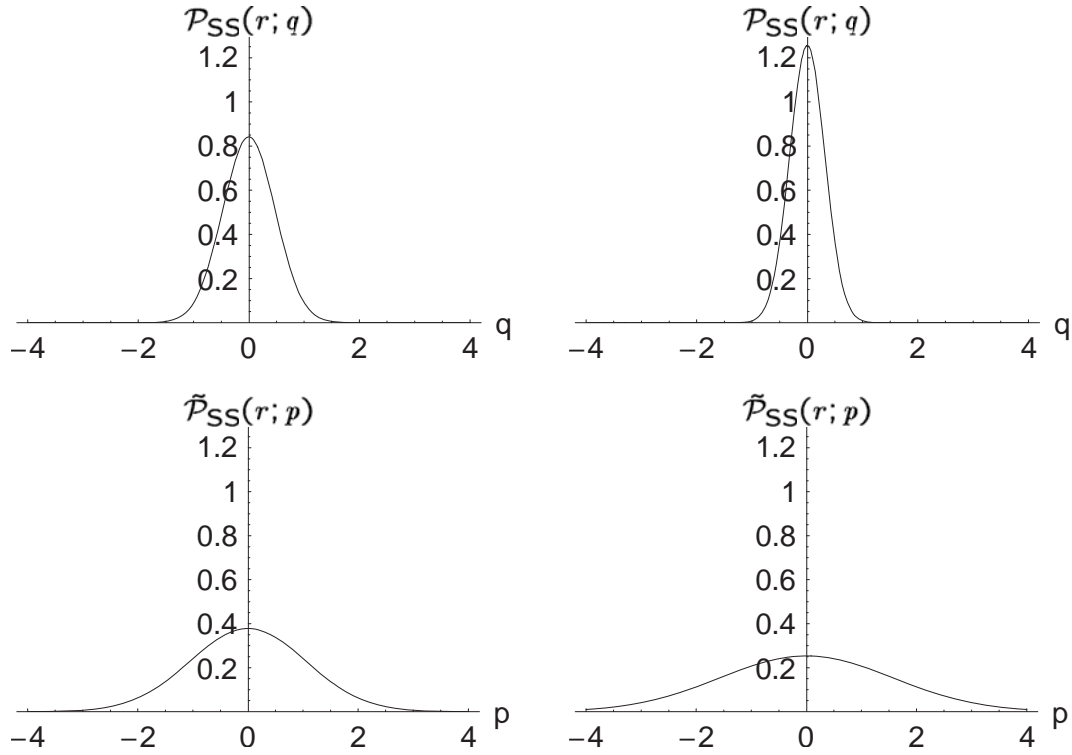


Figure 2.6: Quadrature distributions of the squeezed states $\mathcal{P}_{\text{SS}}(r; q)$ and $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{SS}}(r; p)$ for $r = 0.4$ (left) and $r = 0.8$ (right).

もちろん，これから計算される光子数統計は

$$\begin{aligned}
 P_{\text{SS}}(r; n) &\equiv |C_{\text{SS}}(r; n)|^2 \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{\cosh r} \frac{n!}{[(n/2)!]^2} \left(-\frac{\tanh r}{2}\right)^n, & n = \text{even} \\ 0, & n = \text{odd} \end{cases} \quad (2.109)
 \end{aligned}$$

である．また，これを $r = 0.4$ および $r = 0.8$ について計算し Fig. 2.7 にプロットした．これより， r が大きくなるほど平均光子数が大きくなる事が分かる．

ウィグナー関数

スクイーズド状態のウィグナー関数は Eq. (2.110) のようになる．また，これを $r = 0.4$ ならびに $r = 0.8$ について計算してプロットしたものを Fig. 2.8 に示す．Eq. (2.2) や Fig. 2.73 に示したような真空のウィグナー関数を， q 軸方向に e^{-r} 倍， p 軸方向に e^{+r} 倍した形状になっていることが分かる．

なお，スクイージングパラメータ r を無限に大きくしていくと，スクイーズド

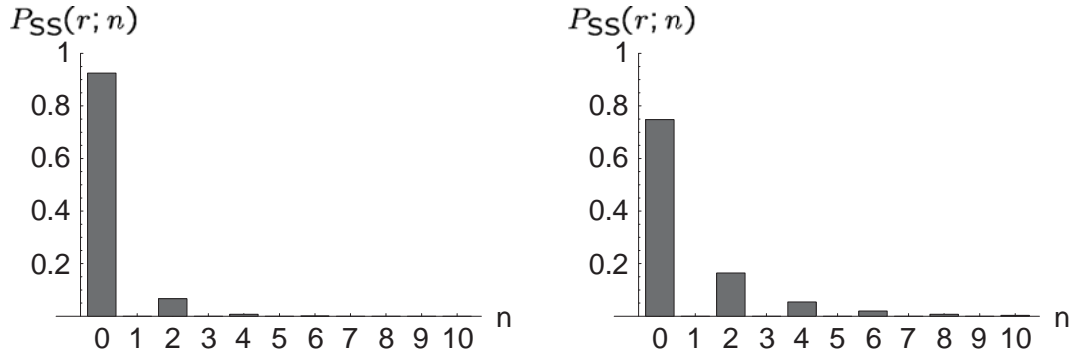


Figure 2.7: Photon number statistics of the squeezed states for $r = 0.4$ (left) and $r = 0.8$ (right).

状態は直交位相固有状態に近づいていく。

$$W_{SS}(r; q, p) = \frac{1}{\pi} \exp[-e^{+2r} q^2 - e^{-2r} p^2] \quad (2.110)$$

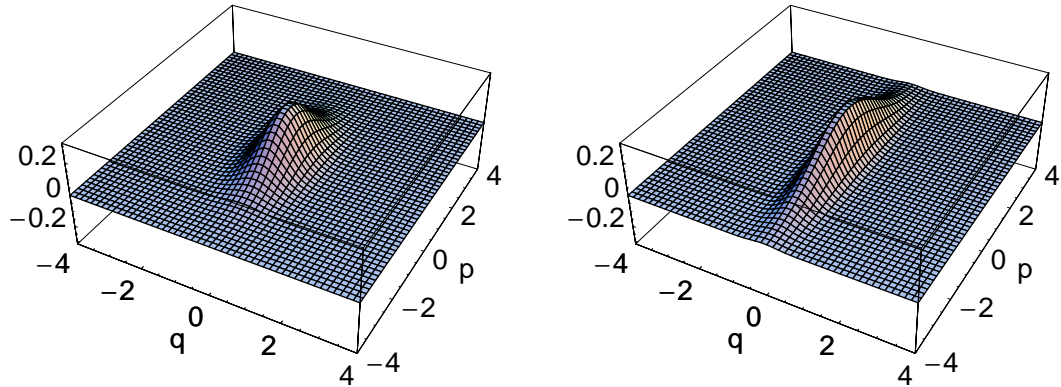


Figure 2.8: Wigner functions of the squeezed states for $r = 0.4$ (left) and $r = 0.8$ (right).

2.4.4 重ね合わせコヒーレント状態 (CSS: coherent state superposition)

重ね合わせコヒーレント状態 (CSS) については第1章でも触れたが、ここではコヒーレント状態の古典的な混合 (CSM: coherent state mixture) との比較を交えつつ徹底した解説を試みる。そして、コヒーレント状態の量子力学的な重ね合わせである CSS が、古典的な混合に過ぎない CSM とは異質なものであることを様々な角度から確認する。

さて，CSS はコヒーレント状態 $|\pm\alpha\rangle$ ，重ね合わせ位相 φ を用いて

$$|\text{CSS}(\varphi, \alpha)\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N(\varphi, \alpha)}} (|+\alpha\rangle + e^{i\varphi} |-\alpha\rangle) \quad (2.111)$$

のように定義される．また，

$$N(\varphi, \alpha) = 2(1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos \varphi) \quad (2.112)$$

は規格化因子である．混合状態である CSM との比較を容易にするため，この CSS を密度行列の形にすると Eq. (2.113) のようになる．

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha) &\equiv |\text{CSS}(\varphi, \alpha)\rangle\langle\text{CSS}(\varphi, \alpha)| \\ &= \frac{1}{N(\varphi, \alpha)} \{ |+\alpha\rangle\langle+\alpha| + e^{+i\varphi} |-\alpha\rangle\langle+\alpha| \\ &\quad + e^{-i\varphi} |+\alpha\rangle\langle-\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha| \} \end{aligned} \quad (2.113)$$

そして，この CSS と似て非なる状態として，2つのコヒーレント状態の“古典的な混合”つまり CSM がある．こうした混合状態は CSS のようにケットベクトルで表すことはできず，密度演算子 $\hat{\rho}_{\text{CSM}}(\alpha)$ で表すしかない．これを，密度行列として表現すると Eq. (2.114) のようになる．

$$\hat{\rho}_{\text{CSM}}(\alpha) \equiv \frac{1}{2} (|+\alpha\rangle\langle+\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|) \quad (2.114)$$

Eq. (2.113) と Eq. (2.114) を見比べてみれば分かるとおり，CSS にあって CSM にはないものは $|\pm\alpha\rangle\langle\mp\alpha|$ といった密度行列の非対角項である．これらの項の有無が，これから述べるように，CSS と CSM における直交位相振幅や光子数の確率分布をまったく異なったものにしてしまう．さらに，こうした確率分布は CSS の重ね合わせ位相 φ によっても変化する．

直交位相振幅による表現

CSS の波動関数は，Eq. (2.85) で表したコヒーレント状態の波動関数を足し合わせたものとして，Eq. (2.115) のように表される．

$$\begin{aligned} \psi_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; q) &\equiv \langle q | \text{CSS}(\varphi, \alpha) \rangle = \frac{1}{\sqrt{N(\varphi, \alpha)}} [\psi_{\text{CS}}(+\alpha; q) + e^{i\varphi} \psi_{\text{CS}}(-\alpha; q)] \\ \tilde{\psi}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; p) &\equiv \langle p | \text{CSS}(\varphi, \alpha) \rangle = \frac{1}{\sqrt{N(\varphi, \alpha)}} [\tilde{\psi}_{\text{CS}}(+\alpha; p) + e^{i\varphi} \tilde{\psi}_{\text{CS}}(-\alpha; p)] \end{aligned} \quad (2.115)$$

ケット表現できない CSM の波動関数は存在しない．この波動関数 Eq. (2.115) または前に示した密度行列 Eq. (2.113) をもとに q や p についての確率密度関数を計

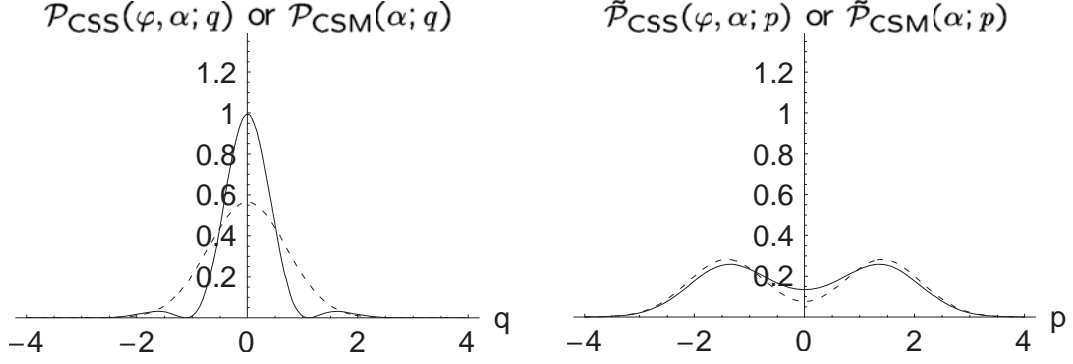


Figure 2.9: Quadrature distributions of the CSS and the CSM. The relative phase factor is $\varphi = 0$ and the coherent amplitude is $\{q_0, p_0\} = \{0, \sqrt{2}\}$. $\mathcal{P}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; q)$: q -distribution of the CSS (left, solid line), $\mathcal{P}_{\text{CSM}}(\alpha; q)$: q -distribution of the CSM (left, dotted line), $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; p)$: p -distributions of the CSS (right, solid line), $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{CSM}}(\alpha; p)$: p -distributions of the CSM (right, dotted line).

算すると

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; q) &\equiv |\psi_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; q)|^2 = \langle q | \hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha) | q \rangle \\
&= \frac{1}{N(\varphi, \alpha)} \left[|\psi_{\text{CS}}(+\alpha; q)|^2 + e^{i\varphi} \psi_{\text{CS}}^*(+\alpha; q) \psi_{\text{CS}}(-\alpha; q) \right. \\
&\quad \left. + e^{-i\varphi} \psi_{\text{CS}}(+\alpha; q) \psi_{\text{CS}}^*(-\alpha; q) + |\psi_{\text{CS}}(-\alpha; q)|^2 \right] \\
&= \frac{\exp[-(q - q_0)^2] + 2 \exp[-q^2 - q_0^2] \cos[2p_0q - \varphi] + \exp[-(q + q_0)^2]}{\pi^{1/2} N(\varphi, \alpha)} \\
\tilde{\mathcal{P}}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; p) &\equiv |\tilde{\psi}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; p)|^2 = \langle p | \hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha) | p \rangle \\
&= \frac{1}{N(\varphi, \alpha)} \left[|\tilde{\psi}_{\text{CS}}(+\alpha; p)|^2 + e^{i\varphi} \tilde{\psi}_{\text{CS}}^*(+\alpha; p) \tilde{\psi}_{\text{CS}}(-\alpha; p) \right. \\
&\quad \left. + e^{-i\varphi} \tilde{\psi}_{\text{CS}}(+\alpha; p) \tilde{\psi}_{\text{CS}}^*(-\alpha; p) + |\tilde{\psi}_{\text{CS}}(-\alpha; p)|^2 \right] \\
&= \frac{\exp[-(p - p_0)^2] + 2 \exp[-p^2 - p_0^2] \cos[2q_0p + \varphi] + \exp[-(p + p_0)^2]}{\pi^{1/2} N(\varphi, \alpha)}
\end{aligned} \tag{2.116}$$

となる．一方，CSM の確率密度関数は単純に

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\text{CSM}}(\alpha; q) &\equiv \langle q | \hat{\rho}_{\text{CSM}}(\alpha) | q \rangle = \frac{1}{2} \{ \mathcal{P}_{\text{CS}}(+\alpha; q) + \mathcal{P}_{\text{CS}}(-\alpha; q) \} \\
&= \frac{1}{2\pi^{1/2}} \{ \exp[-(q - q_0)^2] + \exp[-(q + q_0)^2] \} \\
\tilde{\mathcal{P}}_{\text{CSM}}(\alpha; p) &\equiv \langle p | \hat{\rho}_{\text{CSM}}(\alpha) | p \rangle = \frac{1}{2} \{ \tilde{\mathcal{P}}_{\text{CS}}(+\alpha; p) + \tilde{\mathcal{P}}_{\text{CS}}(-\alpha; p) \} \\
&= \frac{1}{2\pi^{1/2}} \{ \exp[-(p - p_0)^2] + \exp[-(p + p_0)^2] \}
\end{aligned} \tag{2.117}$$

のように計算できる．

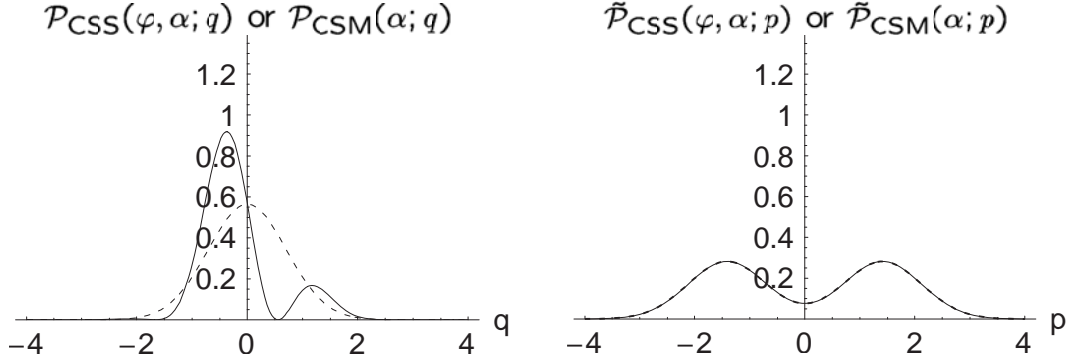


Figure 2.10: Quadrature distributions of the CSS and the CSM. The relative phase factor is $\varphi = \pi/2$ and the coherent amplitude is $\{q_0, p_0\} = \{0, \sqrt{2}\}$. $\mathcal{P}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; q)$: q -distribution of the CSS (left, solid line), $\mathcal{P}_{\text{CSM}}(\alpha; q)$: q -distribution of the CSM (left, dotted line), $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; p)$: p -distributions of the CSS (right, solid line), $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{CSM}}(\alpha; p)$: p -distributions of the CSM (right, dotted line).

ここで，コヒーレント振幅を $q_0 = 0$, $p_0 = 1$, 重ね合わせ位相を 3 種類 ($\varphi = 0, \pi/2, \pi$) として， q および p についての確率密度関数を計算し，それぞれ Fig. 2.9, Fig. 2.10 および Fig. 2.11 にプロットした．CSS の確率密度関数には，密度行列の非対角項に由来する干渉項

$$2 \exp[-q^2 - q_0^2] \cos[2p_0q - \varphi], \quad 2 \exp[-p^2 - p_0^2] \cos[2q_0p + \varphi]$$

が存在している．それにより，直交位相振幅の確率分布が CSS と CSM とで異なること，CSS の中でも重ね合わせ位相 φ の値により変化することが分かる．

光子数による表現

また，光子数状態 $|n\rangle$ を基底とすると以下のように展開できる．

$$|\text{CSS}(\varphi, \alpha)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; n) |n\rangle \quad (2.118)$$

この時の展開係数 $C_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; n)$ は以下のように表される．

$$\begin{aligned} C_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; n) &= \frac{1}{\sqrt{N(\varphi, \alpha)}} \{ \langle n | +\alpha \rangle + e^{i\varphi} \langle n | -\alpha \rangle \} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N(\varphi, \alpha)}} \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right] \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \{1 + e^{i(\pi n + \varphi)}\} \end{aligned} \quad (2.119)$$

さらに，この展開係数から光子数統計を計算すると

$$\begin{aligned} P_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; n) &\equiv |C_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; n)|^2 \\ &= \frac{2e^{-|\alpha|^2}}{N(\varphi, \alpha)} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \{1 + \cos[\pi n + \varphi]\} \end{aligned} \quad (2.120)$$

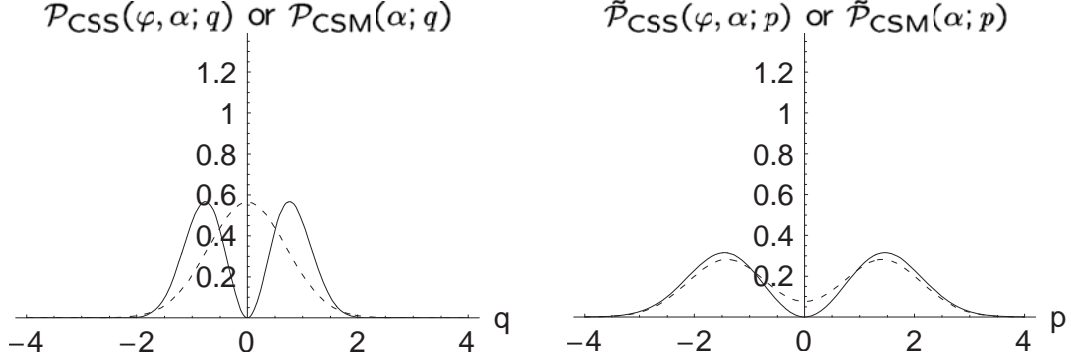


Figure 2.11: Quadrature distributions of the CSS and the CSM. The relative phase factor is $\varphi = \pi$ and the coherent amplitude is $\{q_0, p_0\} = \{0, \sqrt{2}\}$. (left, solid line) q -distribution of the CSS $\mathcal{P}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; q)$, (left, dotted line) q -distribution of the CSM $\mathcal{P}_{\text{CSM}}(\alpha; q)$, (right, solid line) p -distributions of the CSS $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; p)$, (right, dotted line) p -distributions of the CSM $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{CSM}}(\alpha; p)$.

のようになる．一方，CSM の光子数統計は振幅の同じコヒーレント状態のそれ Eq. (2.89) と同じである．

Eq. (2.120) と Eq. (2.89) の比較により，CSS と CSM は光子数統計も異なることが分かる．また，重ね合わせ位相 φ によっても光子数統計は変化する．特に $\varphi = \pi/2$ の時には CSS の光子数統計もコヒーレント状態や CSM と同じポワソン分布に従うようになる．また，CSS は $\varphi = 0$ の場合には偶数光子数状態のみを， $\varphi = \pi$ の場合には奇数光子数状態のみを含むことも分かる．こうしたことから， $\varphi = 0$ のものは“even-CSS”（または“even-cat”）， $\varphi = \pi$ のものは“odd-CSS”（または“odd-cat”）と呼ばれることが多い．

$\varphi = 0, \pi/2, \pi$ における CSS ならびに CSM の光子数統計を $\alpha = 1$ について計算し，Fig. 2.12 にプロットした． $\varphi = 0$ の CSS には偶数光子数状態しか， $\varphi = \pi$ の CSS には奇数光子数状態しか含まれないこと， $\varphi = \pi/2$ の CSS はコヒーレント状態や CSM と同じ光子数統計を持つことが分かる．

ウィグナー関数

CSS のウィグナー関数を計算すると Eq. (2.121) のようになる．

$$\begin{aligned}
 W_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha; q, p) &= \frac{e^{-(q-q_0)^2-(p-p_0)^2} + e^{-(q+q_0)^2-(p+p_0)^2} + 2e^{-q^2-p^2} \cos[\varphi - 2p_0q + 2q_0p]}{2\pi(1 + e^{-q_0^2-p_0^2} \cos \varphi)} \\
 & \tag{2.121}
 \end{aligned}$$

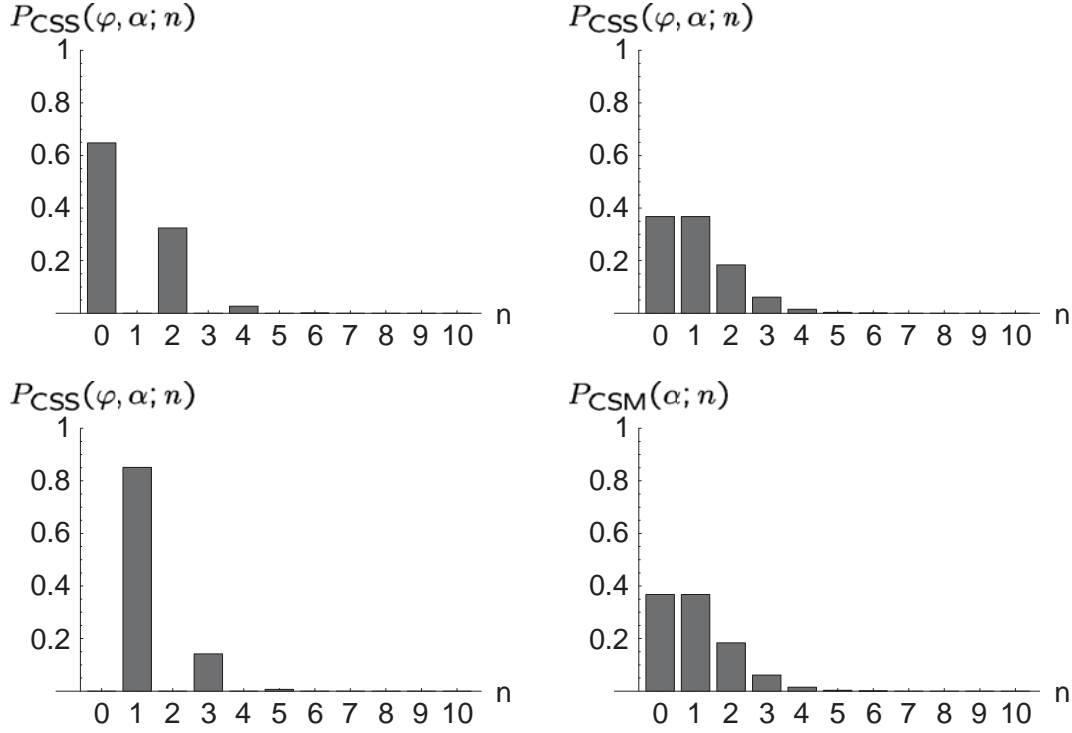


Figure 2.12: Photon number statistics of the CSSs and the CSM for $|\alpha| = 1$. The relative phase factors for the CSS are $\varphi = 0$ (upper left), $\varphi = \pi/2$ (upper right), and $\varphi = \pi$ (lower left). The photon number statistics of the CSM (lower right) is the same as that of the CSS with $\varphi = \pi/2$.

ここでも，密度行列の非対角項に由来する項 $2e^{-q^2-p^2} \cos[\varphi - 2p_0q + 2q_0p]$ が現れている．一方，CSM のウィグナー関数を計算すると Eq. (2.122) のようになる．

$$W_{\text{CSM}}(\alpha; q, p) = \frac{e^{-(q-q_0)^2-(p-p_0)^2} + e^{-(q+q_0)^2-(p+p_0)^2}}{2} \quad (2.122)$$

もちろん，CSS のウィグナー関数に見られたような干渉項はない．

$q_0 = 0$, $p_0 = \sqrt{2}$ としたときの CSS (重ね合わせ位相は $\varphi = 0, \pi/2, \pi$) ならびに CSM のウィグナー関数を計算し，Fig. 2.13 にプロットした．CSS のウィグナー関数は著しく非ガウス型であり，さらに負の領域も持つことが分かる．これは，CSS のような重ね合わせ状態は量子力学的すなわち非古典的な状態であることを表している．コヒーレント状態のように古典的な状態でも，それを量子力学的に重ね合わせたとたん著しい非古典性を持つようになる．

2.5 光学素子

本節では，本研究に登場する光学素子についてのモデルを与える．

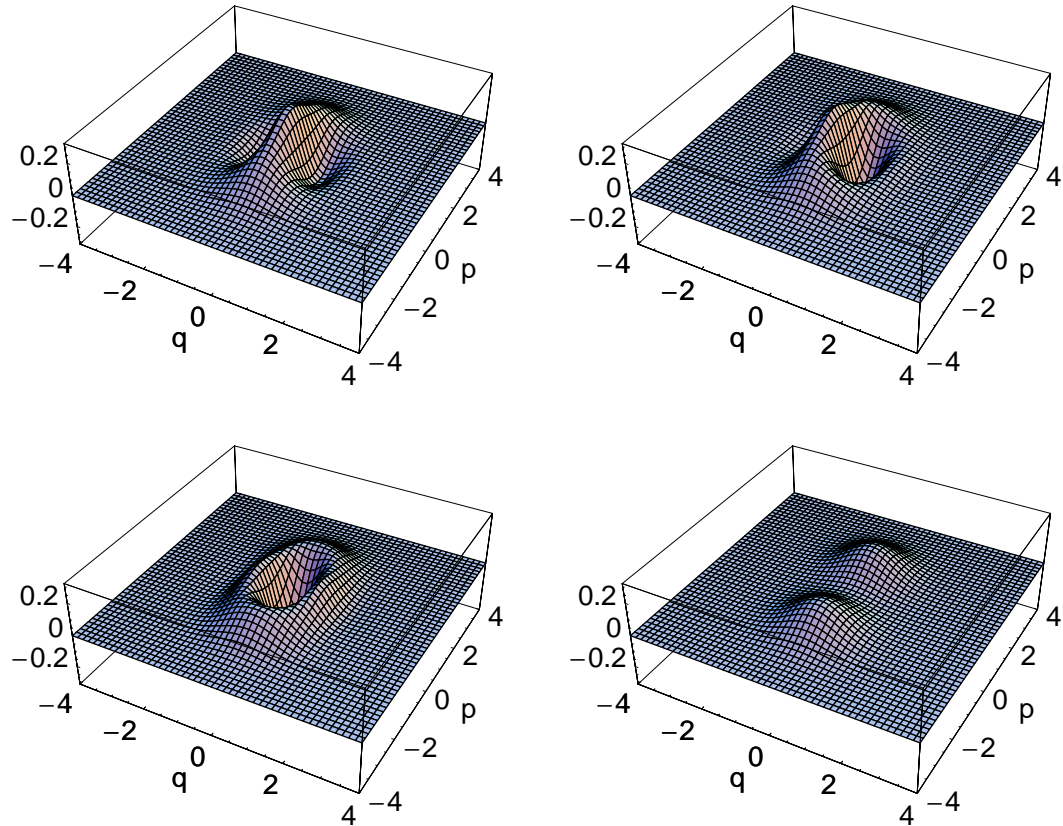


Figure 2.13: Wigner functions of the the CSSs and the CSM for $\{q_0, p_0\} = \{0, \sqrt{2}\}$. The relative phase factors for the CSS are $\varphi = 0$ (upper left), $\varphi = \pi/2$ (upper right), and $\varphi = \pi$ (lower left). Wigner function of the CSM (lower right) show no quantum interference effect.

2.5.1 ビームスプリッター (beam-splitter)

その数学的な表現

ビームスプリッターは2つのモードから入力された状態を2モードの出力状態に変換する。その簡単なモデルをFig. 2.14に示す。ここに表現したように、出力状態は一般的に $\hat{\rho}'_A \otimes \hat{\rho}'_B$ といったようには表現できない。つまり、ビームスプリッターには状態をエンタングルさせる作用がある。

このFig. 2.14において、 $\hat{\rho}_A$ が入力されている方をモードA、 $\hat{\rho}_B$ が入力されている方をモードBとする。また、ビームスプリッターの反射面はモードA入力側(図では左下)で、その透過率を T 、反射率を $R = 1 - T$ とする⁶。ここで、モードAに入力される場を \hat{a}_A 、モードBのそれを \hat{a}_B とすると、それぞれのポートから出

⁶本論文にて用いる“透過率”ならびに“反射率”は、それぞれ強度(パワー)透過率ならびに強度(パワー)反射率を表すものとする。

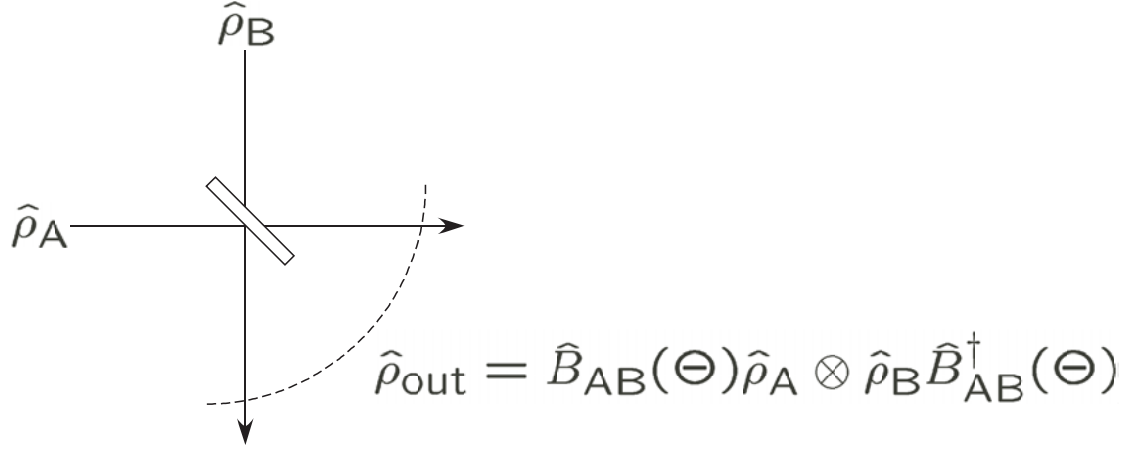


Figure 2.14: A model of the beam-splitter.

力される場合は \hat{a}'_A ならびに \hat{a}'_B , それぞれ Eq. (2.123) のようになる .

$$\begin{aligned}\hat{a}'_A &= +\sqrt{T} \hat{a}_A + \sqrt{R} \hat{a}_B \\ \hat{a}'_B &= -\sqrt{R} \hat{a}_A + \sqrt{T} \hat{a}_B\end{aligned}\quad (2.123)$$

こうした半ば古典的なモデルからビームスプリッターのユニタリー演算子 $\hat{B}_{AB}(\Theta)$ を得る過程については割愛するが (詳細は文献 [1] 参照) , 最終的には

$$\hat{B}_{AB}(\Theta) = \exp \left[\Theta \left(\hat{a}_A^\dagger \hat{a}_B - \hat{a}_A \hat{a}_B^\dagger \right) \right] = \exp [i\Theta (\hat{q}_A \hat{p}_B - \hat{p}_A \hat{q}_B)] \quad (2.124)$$

が得られる . ただし , $\sqrt{T} = \cos \Theta$, $\sqrt{R} = \sin \Theta$ と置いている .

たとえば , 入力状態が共にコヒーレント状態 $|\alpha\rangle_A$ ならびに $|\beta\rangle_B$ である場合の出力は Eq. (2.125) のようになる .

$$\hat{B}_{AB}(\Theta) |\alpha\rangle_A |\beta\rangle_B = \left| +\sqrt{T}\alpha + \sqrt{R}\beta \right\rangle_A \left| -\sqrt{R}\alpha + \sqrt{T}\beta \right\rangle_B \quad (2.125)$$

また , 入力状態が直交位相固有状態 $|q\rangle_A$ ならびに $|q'\rangle_B$ であった場合の出力は Eq. (2.126) のようになる .

$$\hat{B}_{AB}(\Theta) |q\rangle_A |q'\rangle_B = \left| +\sqrt{T}q + \sqrt{R}q' \right\rangle_A \left| -\sqrt{R}q + \sqrt{T}q' \right\rangle_B \quad (2.126)$$

生成されるエンタングルド状態の例

ビームスプリッターに状態をエンタングルさせる作用があると先に述べた . こうした性質は , 第 3 章において CSS を生成するスキームとして登場する “PS スキーム” や , 第 4 章において提案する CSS 純粋化プロトコルの基礎をなしている . ここでは , その一例として先の 2.4.4 節において紹介した CSS からエンタングルド状態が生成されることを示す .

まず，ビームスプリッターの入力モード A に，コヒーレント振幅が α ，重ね合わせ位相が φ である CSS が入力されるものとする．一方で，入力モード B には真空場 $|0\rangle$ が入力されるものとする．すると，入力状態 $|\psi_{\text{in}}\rangle_{\text{AB}}$ は以下のように直積の形（つまりエンタングルしていない状態）として書ける．

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{in}}\rangle_{\text{AB}} &= |\text{CSS}(\varphi, \alpha)\rangle_{\text{A}} |0\rangle_{\text{B}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N(\varphi, \alpha)}} \left\{ |+\alpha\rangle_{\text{A}} + e^{i\varphi} |-\alpha\rangle_{\text{A}} \right\} |0\rangle_{\text{B}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N(\varphi, \alpha)}} \left\{ |+\alpha\rangle_{\text{A}} |0\rangle_{\text{B}} + e^{i\varphi} |-\alpha\rangle_{\text{A}} |0\rangle_{\text{B}} \right\} \end{aligned} \quad (2.127)$$

すると，出力状態 $|\psi_{\text{out}}\rangle_{\text{AB}}$ は

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{out}}\rangle_{\text{AB}} &= \hat{B}_{\text{AB}}(\Theta) |\text{CSS}(\varphi, \alpha)\rangle_{\text{A}} |0\rangle_{\text{B}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N(\varphi, \alpha)}} \left\{ \hat{B}_{\text{AB}}(\Theta) |+\alpha\rangle_{\text{A}} |0\rangle_{\text{B}} + e^{i\varphi} \hat{B}_{\text{AB}}(\Theta) |-\alpha\rangle_{\text{A}} |0\rangle_{\text{B}} \right\} \end{aligned} \quad (2.128)$$

といった形になる．さらに，Eq. (2.125) の結果を利用して計算を続けると

$$|\psi_{\text{out}}\rangle_{\text{AB}} = \frac{1}{\sqrt{N(\varphi, \alpha)}} \left\{ |+\sqrt{T}\alpha\rangle_{\text{A}} |-\sqrt{R}\alpha\rangle_{\text{B}} + e^{i\varphi} |-\sqrt{T}\alpha\rangle_{\text{A}} |+\sqrt{R}\alpha\rangle_{\text{B}} \right\} \quad (2.129)$$

が得られる．この Eq. (2.129) の右辺を見ると，もはや Eq. (2.127) の時のように直積の形で書くことができない．つまり，ビームスプリッターにより CSS と真空からエンタングル状態が生成されたことが分かる．

2.5.2 フォトディテクター (photo-detector)

フォトディテクターは，入力された光のパワーに比例した電圧を出力する，つまり \hat{n} に相当する素子である．そしてこれは，入力された光子を光電子に変換するフォトダイオードと，それに電流信号を電圧信号に変換し，増幅する電子回路により構成される．

フォトディテクターの出力を表す演算子として，しばしば \hat{i} が用いられる．これと入力された場の関係は当然のことながら $\hat{i} \propto \hat{n}$ である．

2.5.3 ホモダイン検波

ホモダイン検波では，任意の直交位相成分を測定することができる．その模式図を Fig. 2.15 に示す．ホモダイン検波は，1 枚の 50:50 ビームスプリッターと 2 個のフォトダイオードを備えたフォトディテクター⁷により構成される．

⁷“ホモダインディテクター”と呼ばれることも多い．

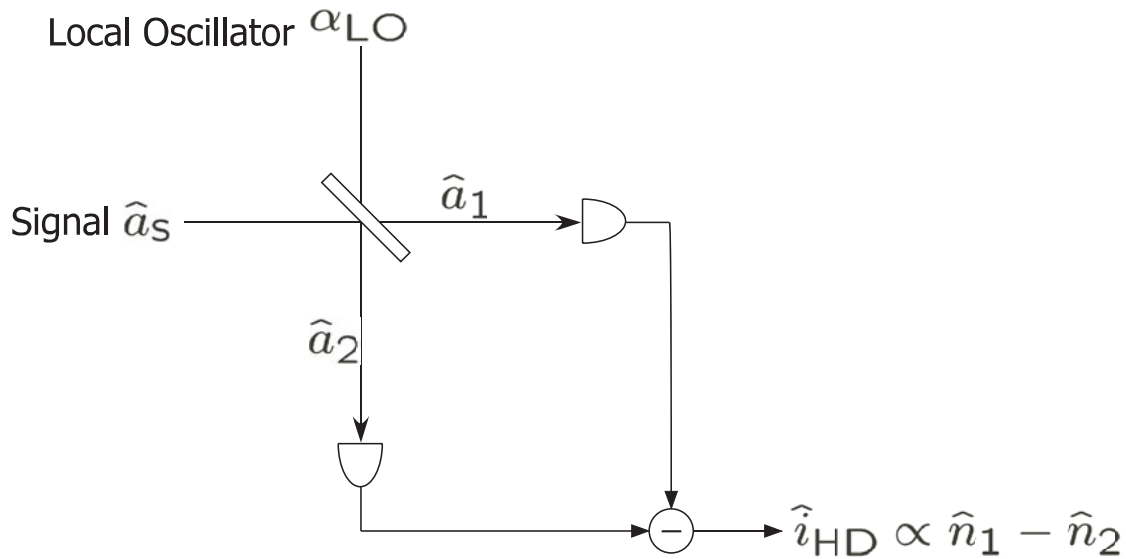


Figure 2.15: A schematic of the homodyne detection.

測定対象となる場 (signal) の消滅演算子を \hat{a}_s , 古典的と見なせる程度に強い局所発振光 (LO: local oscillator) の振幅を α_{LO} とする. まず, この2つの光は50:50ビームスプリッターにおいて合波される. すると, ビームスプリッター後の場はそれぞれ

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_s + \alpha_{LO}), \quad \hat{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{a}_s + \alpha_{LO}) \quad (2.130)$$

となる. ここで, \hat{a}_1 の場と \hat{a}_2 の場をそれぞれフォトダイオードで検出し, 出力電流の差を取ることを考える.

$$\begin{aligned} \hat{i}_{HD} &\propto \hat{n}_1 - \hat{n}_2 \\ &= \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \\ &= \alpha_{LO}^* \hat{a}_s + \alpha_{LO} \hat{a}_s^\dagger \end{aligned} \quad (2.131)$$

さらに, α_{LO} の位相を θ すなわち $\alpha_{LO} = |\alpha_{LO}|e^{i\theta}$ として計算を続けると \hat{i}_{HD} は Eq. (2.132) のようになる.

$$\begin{aligned} \hat{i}_{HD} &\propto |\alpha_{LO}| (e^{-i\theta} \hat{a}_s + e^{i\theta} \hat{a}_s^\dagger) \\ &= \sqrt{2} |\alpha_{LO}| (\hat{q} \cos \theta + \hat{p} \sin \theta) = \sqrt{2} |\alpha_{LO}| \hat{x}_\theta \end{aligned} \quad (2.132)$$

つまり, このフォトディテクター (ホモダインディテクター) の出力は位相 θ における直交位相振幅 x_θ に比例する.

また, Eq. (2.131) を見ると, ホモダイン検波におけるフォトディテクターからの出力 \hat{i}_{HD} は, 信号光と LO 光の干渉成分であることが分かる. このようにしてホモダイン検波では, 強い LO 光を用いて微弱な量子ノイズを電氣的に検出可能なレベルまで“増幅”することができる. さらに, 干渉信号として増幅されるのは

LO 光と時間的・空間的に一致した光だけである．つまり，ホモダイン検波はフィルターとしても機能する．そのため，光学的なノイズの多い環境中でも量子ノイズレベルの微弱な信号を検出することができる．

2.6 実験における不完全性の表現

ここでは，光が伝搬し，検出される過程で考えられる不完全性についてのモデルを取り上げる．本論文で取り上げる問題において考えられる不完全性は，

伝搬ロス 光が損失媒体を透過し，そのパワーに比例したエネルギーを失うこと（線形ロス）によるもの

検出口ス フォトディテクターにおいて，入力した光子の一部がキャリアーに変換されないことによるもの

モードミスマッチ ホモダイン検波において信号光と LO 光の空間モードが一致していないことによるもの

である．検出口スとは反対に，光子が入力されていないのにディテクターから電圧が出力される“ダークカウント”というものもあるが，これは少し特殊なケースであるため第3章で述べるにとどめる．

2.6.1 線形ロス (伝搬ロス)

光路におけるロスは，もっぱら信号光の場と環境場との相互作用により生じ，一般的に以下のような手順でモデル化することができる．

1. 信号のモードと環境のモードとをカップリングさせる
2. シュレーディンガー方程式に従い時間発展させる
3. 環境のモードをトレースアウトする

ここでは，環境場が真空であり信号光の場と線形に相互作用する場合を考える．これは，信号光が伝搬する過程で何らかの媒質を透過し，そこで線形ロスを被るようなケースに相当する．信号光は損失媒体を透過しながら，そのパワー $I(t)$ に比例した減衰を受けて $I(t) = I(0)e^{-\gamma t}$ のようにパワーを落としていく．この損失媒体を通過するのに δt 秒かかり，全体の透過率が η_L であるとするとき， $\gamma \delta t = -\ln \eta_L$ である．

このような過程における光の量子状態 $\hat{\rho}$ の時間発展は，以下に示すようなマスター方程式により記述される [2, 5, 7-9]．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho} &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2} \{2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}\} \\ &\equiv \hat{\mathcal{L}}\hat{\rho} \end{aligned} \quad (2.133)$$

ここで、 \hat{H} は信号モードに対するハミルトニアンである。 \hat{H} には環境モードによる作用も含まれてはいるが、ここでは環境モードが真空 (温度 0 K の熱浴) であるとしているので、 $\hat{H} = 0$ と考えることができる。また、 $\hat{\mathcal{L}}$ は任意の演算子 \hat{O} に作用する超演算子で Liouville 演算子 (Liouvillian) と呼ばれる。

次に、この線形ロスにより量子状態がどのように変化するかについて触れる。このためには、任意の状態の密度演算子 $\hat{\rho}$ をコヒーレント状態で展開した場合の密度行列成分 $|\alpha_1\rangle\langle\alpha_2|$ についての時間発展を考えればよい。この $|\alpha_1\rangle\langle\alpha_2|$ が Eq. (2.133) により δt だけ時間発展したものは、Eq. (2.134) のように表される。また、この時間発展を表す写像を $\hat{\mathcal{L}}_L$ と定義する。

$$\hat{\mathcal{L}}_L |\alpha_1\rangle\langle\alpha_2| \equiv \exp \left[-\frac{1-\eta_L}{2} (|\alpha_1|^2 - 2\alpha_1\alpha_2^* + |\alpha_2|^2) \right] |\sqrt{\eta_L}\alpha_1\rangle\langle\sqrt{\eta_L}\alpha_2| \quad (2.134)$$

ここで、密度行列の対角成分すなわち $\alpha_1 = \alpha_2$ であるような成分に対しては、常に $|\sqrt{\eta_L}\alpha_1\rangle\langle\sqrt{\eta_L}\alpha_2|$ の係数部が 1 であるのに対し、 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ かつ $\eta_L < 1$ の場合には、その絶対値が 1 より小さくなるのが分かる。これは、損失媒体を透過すると密度行列の非対角成分が無くなっていくこと、つまり状態のコヒーレンスが失われ混合状態へと変化していくことを示している。

2.6.2 不完全なフォトディテクター (検出口ス)

フォトディテクターは光子を電子に変換する素子であり、理想的には 1 つの光子が入力されると、1 個の光電子が出力される。しかしながら、実際には入力された光子が必ず電子へと変換されるわけではなく、ある有限の確率で変換されることになる。この確率は“量子効率”と呼ばれ η と表記されることが多いが、ここでは他の効率と区別するため η_{PD} と表すことにする。

m 光子の入力に対して n 個の電子が出力される確率は Bernoulli 分布に従い

$$b_n^m = {}_m C_n \eta_{PD}^n (1 - \eta_{PD})^{m-n} \quad (2.135)$$

のように表される [1, 7]。また、こうしたフォトディテクターにおいて n 個の電子が出力されるような測定を表す演算子 (POVM: positive operator valued measure) は

$$\hat{\Pi}(n, \eta_{PD}) = \sum_{m=n}^{\infty} {}_m C_n \eta_{PD}^n (1 - \eta_{PD})^{m-n} |m\rangle\langle m| \quad (2.136)$$

のように表される [10]。これから分かることは、入力された状態に含まれていた光子の数を出力された電子の数から知ることは、 $\eta_{PD} < 1$ においては不可能であるということである。つまり、不完全なフォトディテクターによる測定は入力された状態を混合状態に射影してしまう。

2.6.3 ホモダイン検波におけるモードミスマッチ

先に2.5.3節において、ホモダイン検波にはフィルターとしての機能もあると述べた。このことは、LO光と信号光の空間的・時間的なモードを完全に一致させることができなければ、測定したい信号光を取りこぼしてしまうことも意味する。その信号を取りこぼしてしまった分、LO光は代わりに真空の揺らぎを増幅することになる。

なお、LO光と信号光のモードが一致している度合い(モードマッチ: $0 \leq \eta_M \leq 1$)は、これらの干渉により生じる干渉縞の明瞭度(visibility: $0 \leq V \leq 1$)を測定することにより知ることができ、

$$\eta_M = V^2 \quad (2.137)$$

の関係がある。ホモダイン検波全体の効率 η_{HD} は、先に述べたフォトディテクターの量子効率 η_{PD} とモードマッチ η_M を用いて

$$\eta_{HD} = \eta_{PD} \cdot \eta_M \quad (2.138)$$

のように表すことができる。

2.6.4 ビームスプリッターによるモデル

今までに挙げた、線形ロス、フォトディテクターの検出口ロス、ホモダイン検波のモードミスマッチといった不完全性は、すべて透過率が η のビームスプリッターとしてモデル化することができる[1]。また、上に挙げた全ての種類のロスが光路中にあった場合、それをモデル化するビームスプリッターの透過率は

$$\eta = \eta_L \cdot \eta_{PD} \cdot \eta_M \quad (2.139)$$

のように表すことができる。

このモデルでは、モードAから入力される状態 $\hat{\rho}_A$ が透過率 η のビームスプリッターでモードLから入力される真空場 $|0\rangle_L$ と重ね合わされる。そして2つの出力モードのうちモードAのみに着目し、モードLをトレースアウトすることにする。以上の手続きを定式化すると

$$\hat{\rho}'_A = \text{Tr}_L \left[\hat{B}_{AL}(\Theta) \hat{\rho}_A \otimes |0\rangle_L \langle 0| \hat{B}_{AL}^\dagger(\Theta) \right] \quad (2.140)$$

となる。もちろん、ここで $\eta = \cos^2 \Theta$ である。そして、Eq. (2.134) のときと同じように、 $\hat{\rho} = |\alpha_1\rangle \langle \alpha_2|$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_A &= \text{Tr}_L \left[\hat{B}_{AL}(\Theta) |\alpha_1\rangle_A |0\rangle_L \langle 0|_A \langle \alpha_2| \hat{B}_{AL}^\dagger(\Theta) \right] \\ &= \left\langle -\sqrt{1-\eta} \alpha_2 \left| -\sqrt{1-\eta} \alpha_1 \right. \right\rangle |\sqrt{\eta} \alpha_1\rangle_A \langle \sqrt{\eta} \alpha_2| \\ &= \exp \left[-\frac{1-\eta}{2} (|\alpha_1|^2 - 2\alpha_1 \alpha_2^* + |\alpha_2|^2) \right] |\sqrt{\eta} \alpha_1\rangle_A \langle \sqrt{\eta} \alpha_2| \quad (2.141) \end{aligned}$$

となる。これは、線形ロスの場合について Eq. (2.134) で得た結果と同じである。

2.7 まとめ

本章では、主に第3章および第4章における解析の理論的な背景について述べた。これらは、参考文献の中ですでに述べられている量子光学の知識に基づいてはいるが、本研究において必要とされる内容について重点的にまとめ、また数学的に体裁を整えたものである。特に、本研究において主役となるCSSについては、CSMとの比較を交えつつ、他にない徹底した解説を試みた。

まず、古典的な電磁場を量子化し、場を量子力学的に表現するために必要な直交位相振幅の演算子や生成消滅演算子を導入した。次に、量子光学的な場の表現をするにあたり必要な基底である直交位相固有状態について紹介した。また、光の量子状態を視覚的に捉えることのできる準確率密度関数“ウィグナー関数”を導入し、その特徴について述べた。

こうして光の量子状態を表現する道具立てがそろったところで、光子数状態、コヒーレント状態、スクイーズド状態、CSSといった様々な量子状態を紹介した。

この後、主な光学素子としてビームスプリッター、フォトディテクター、そしてホモダイン検波について簡単に述べた。最後に、実験的な不完全性のモデルを与え、それらが架空のビームスプリッターで表現されることを示した。

参考文献

- [1] U. Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [2] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995),
- [3] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Photons and Atoms* (Wiley-Interscience, New York, 1997).
- [4] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, revised edition (Addison Wesley, Reading, 1994).
- [5] S. M. Barnett and P. M. Radmore, *Methods in Theoretical Quantum Optics* (Oxford University Press, New York, 1997).
- [6] 松岡正浩: 量子光学 (東京大学出版会, 1996).
- [7] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer-Verlag, Berlin, 1994),
- [8] C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*, 3rd edition (Springer-Verlag, Berlin, 2004).
- [9] C. C. Gerry and P. L. Knight, *Introductory Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
- [10] S. M. Barnett, L. S. Phillips, and D. T. Pegg, *Opt. Commun.* **158**, 45 (1998).

第3章 実験的な不完全性を考慮した CSS生成スキームの検討

本章では、2種類の擬似CSS生成スキームを取り上げ、実験的な不完全性を考慮しつつ過去の研究例にはない詳細な解析を行うことを通じ、いずれの実現性が高いかについて議論する。

まず、過去に提案された2種類の擬似CSS生成スキームとして、Lundらにより提案されたスキーム(単一光子状態をスクイズすることによるもの [1])、ならびにDaknaらにより提案されたスキーム(スクイズド状態から1光子を引くことによるもの [2])を紹介する。これら2つのスキームは数学的に等価であることが知られているが [3]、この点についても簡単な計算を通じて確認する。そして、これらスキームにより生成される状態が小振幅のCSSを大変よく近似することについても確認する。

さて、数学的に等価なこれら2つのスキームも、実験的なプロセスは異なる。当然、実験的に避けることのできない不完全性も異なり、最終的に生成・測定される状態は異なったものになるはずである。そこで、それぞれのスキームに特有の実験的な不完全性を網羅した新しいモデルを構築する。そして、これらのモデルに現実的な実験パラメータを代入して最終的にホモダイン検波で測定されるであろう状態を計算し、それらをウィグナー関数として視覚的に表現する。また、それら生成される状態が目標としているCSSにどれだけ近いかについてはフィデリティ F を指標として、擬似CSSとして備えているべき非古典性についてはウィグナー関数の原点における値 $W(0,0)$ を指標にして評価し、両スキームの比較を行う。

さらに、生成された状態における $W(0,0)$ の値を支配する要素について明らかにし、状態が非古典的である条件 $W(0,0) < 0$ を満たすために、いかなる実験パラメータが要求されるのかについても明らかにしていく。

そして最後に、PSスキームについて、他の研究者が先に行った研究 [4,5] で用いている簡単なモデルと、本論文で用いる詳細なモデルとの整合性についても確認する。ここでは、実験的な不完全性を表すパラメータとして用いられてきた“モード純度(modal purity)”を、本論文で用いる詳細なパラメータの関数として表現できることを初めて示す。

3.1 擬似 CSS 生成スキーム

本節では、擬似 CSS 生成スキームを紹介する．本論文では、単一光子状態をスクイズするものを“SS スキーム” (Squeezing the Single-photon state)、スクイズド状態から一光子を引くものを“PS スキーム” (Photon Subtraction) と呼ぶことにする．

第2章の Eq. (2.111) で定義したように、一般的な CSS は

$$|\text{CSS}(\varphi, \alpha)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N(\varphi, \alpha)}} (|+\alpha\rangle + e^{i\varphi} |-\alpha\rangle) \quad (3.1)$$

のように表されるが、これらのスキームで生成される状態で近似できるのは、そのうちの $\varphi = \pi$ である状態 (“odd cat” または “minus cat” と呼ばれるもの)

$$|\text{CSS}(\pi, \alpha)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2|\alpha|^2}}} (|+\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) \quad (3.2)$$

である．そのウィグナー関数は Fig. 3.1 である (コヒーレント振幅は $|\alpha| = 1$)．本章においては、この Eq. (3.2) で表される状態をターゲット状態と考え、これを基準にしてフィデリティを計算する．

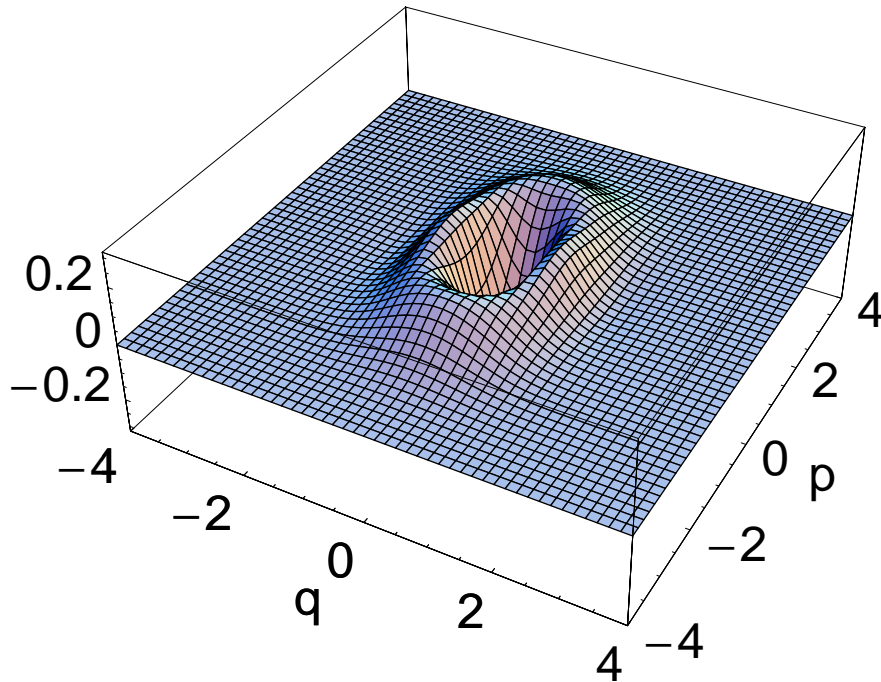


Figure 3.1: Wigner function of a CSS defined in Eq. (3.2) with a coherent amplitude $\alpha = 1$.

3.1.1 SS スキーム

まず, Lund らにより提案されたスキームについて紹介する. 単一光子状態 $|1\rangle$ が用意できれば, それにスクイージング $\hat{S}(r)$ というユニタリーな操作を施すことで, 決定論的に CSS のような状態を得ることができる¹.

$$|\text{SS}(r)\rangle \equiv \hat{S}(r) |1\rangle \quad (3.3)$$

3.1.2 PS スキーム

次に, Dakna らにより提案されたスキームについて紹介する. PS スキームにより生成される状態は, 以下のように表される.

$$|\text{PS}(r)\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{\langle r | \hat{a}^\dagger \hat{a} | r \rangle}} \hat{a} |r\rangle \quad (3.4)$$

ここで, $\langle r | \hat{a}^\dagger \hat{a} | r \rangle^{-1/2}$ は規格化因子である². ここで, 一光子を引く操作 \hat{a} を Fig. 3.2 内のビームスプリッター (BS), 光子数識別測定とイベントセレクション ($|1\rangle_B \langle 1|$) により実現することを考えると, Eq. (3.4) は Eq. (3.5) のように書き直せる.

$$|\text{PS}(r)\rangle = P_{\text{suc}}^{-1/2} \langle 1 | \hat{B}_{\text{AB}}(\Theta_{\text{BS}}) |r\rangle_A |0\rangle_B \quad (3.5)$$

ここで, BS の透過率を T として $T = \cos^2 \Theta_{\text{BS}}$ と置いた. また, $P_{\text{suc}}^{-1/2}$ は規格化因子であるが, 具体的にはモード B の光子数識別測定で 1 光子を検出する確率に相当し, 以下のように表現される.

$$P_{\text{suc}} = {}_A \langle r | {}_B \langle 0 | \hat{B}_{\text{AB}}^\dagger(\Theta_{\text{BS}}) |1\rangle_B \cdot {}_B \langle 1 | \hat{B}_{\text{AB}}(\Theta_{\text{BS}}) |r\rangle_A |0\rangle_B \quad (3.6)$$

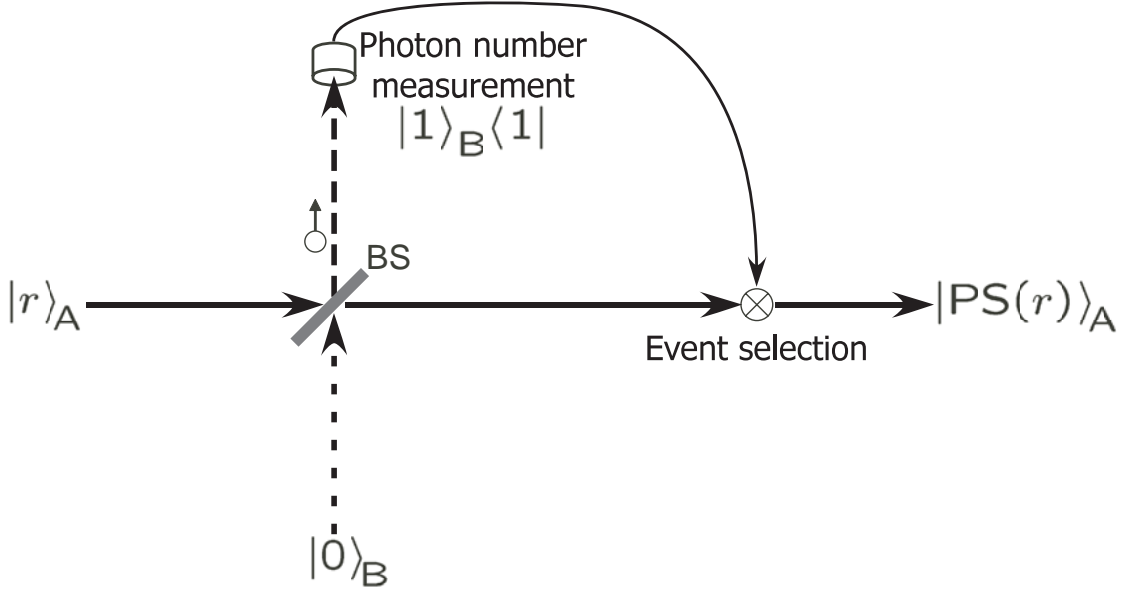
3.1.3 SS スキームと PS スキームの等価性

ここでは, 理想的な条件の下では SS スキームと PS スキームが数学的に等価であることを簡単に確認する. まず, $\hat{a} |r\rangle$ を変形してみると,

$$\begin{aligned} \hat{a} |r\rangle &= \hat{a} \hat{S}(r) |0\rangle \\ &= \hat{S}(r) \hat{S}^\dagger(r) \hat{a} \hat{S}(r) |0\rangle \\ &= \hat{S}(r) (\hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger \sinh r) |0\rangle \\ &= -\sinh r \hat{S}(r) |1\rangle \end{aligned} \quad (3.7)$$

¹単一光子状態の準備を含めて考えれば, SS スキームも確率的なアプローチである.

²光子を引く操作に相当する演算子 \hat{a} はユニタリーではないため, 状態ベクトルのノルムを変える. そのため規格化因子が必要となる.

Figure 3.2: An implementation of the photon-subtracting operation \hat{a} .

となる³．ここで明らかに

$$\langle r | \hat{a}^\dagger \hat{a} | r \rangle^{1/2} = \sinh r \quad (3.8)$$

である．ここで，Eqs. (3.3), (3.7), (3.8) を Eq. (3.4) に代入することにより，

$$|SS(r)\rangle = e^{i\pi} |PS(r)\rangle \quad (3.9)$$

が得られる．そして，量子力学的には Eq. (3.9) と Eq. (3.10) は等価とされる．

$$|SS(r)\rangle = |PS(r)\rangle \quad (3.10)$$

3.1.4 擬似 CSS と CSS の類似性

本節の最後に，SS スキームまたは PS スキームにより生成された状態 (擬似 CSS) は，どのような条件において，どの程度 CSS を近似しているのか議論する．まず，擬似 CSS を表す状態を

$$|PCSS(r)\rangle \equiv |SS(r)\rangle = |PS(r)\rangle \quad (3.11)$$

と置く．そして，この状態が本物の CSS にどの程度似ているのかは，フィデリティ

$$F(\alpha, r) \equiv |\langle CSS(\pi, \alpha) | PCSS(r)\rangle|^2 \quad (3.12)$$

³ここでの係数 $-\sinh r$ は [3] におけるものと異なるが，これはスクイージング演算子の定義が異なることに起因する．

を指標に評価する．ここで，計算を簡単にするため $\alpha = (q_0 + ip_0)/\sqrt{2}$ を実数または虚数，すなわち $p_0 = 0$ または $q_0 = 0$ として扱うことにすると⁴，Eq. (3.12) は α ならびに r の関数として

$$F(\alpha, r) = \frac{\alpha^2 \exp[-\alpha^2 \tanh r]}{\sinh \alpha^2 \cosh^3 r} \quad (3.13)$$

のように表現することができる．ここで， α を実数にとるか虚数にとるか， $F(\alpha, r)$ を最大にする r の符号が逆になることも分かる．

まず，CSS のコヒーレント振幅が比較的小さい場合（ここでは $\alpha = i$ ）について考えよう⁵．この場合，Eq. (3.13) は $r = 0.312573$ において最大値 0.997114 をとる．Fig. 3.3 は，このときの CSS と擬似 CSS のウィグナー関数であるが，これを見ても擬似 CSS は本物の CSS を非常によく近似していることが分かる．これは，本スキームの提案者である Lund らが文献 [1] において主張している通りである．

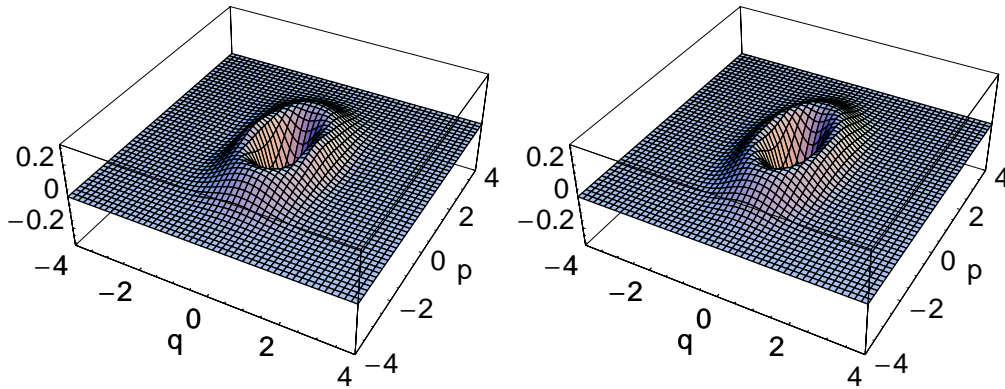


Figure 3.3: Wigner functions of a genuine CSS with $\alpha = i$ (left) and a pseudo-CSS generated by the SS scheme or the PS scheme with $r = 0.312573$ (right).

一方で，コヒーレント状態を用いた量子コンピューティングでは，コヒーレント振幅 $2 < |\alpha|$ の CSS が必要とされる [3]．そこで，次は $\alpha = 2i$ の場合についても考えよう．この場合，Eq. (3.13) は $r = 0.853706$ において最大値をとるが，その値は 0.878244 となり， $\alpha = i$ の場合に較べて小さくなる．また，Fig. 3.3 を見ても，擬似 CSS と本物の CSS ではウィグナー関数の形状が大きく異なっていることが分かる．大きなコヒーレント振幅を持つ CSS を得るには，Lund らが SS スキームと同時に提案しているような [1]，CSS を増幅するためのスキームを別途用いなければならない．

⁴ スクイーミングパラメータ r を実数としている限り，こうしても問題はない．なお，第 2 章では r をスクイーミングパラメータの絶対値（非負の実数）としていたが，本章では実数のスクイーミングパラメータ（負の値も許す）とする．

⁵ グラフの見た目を考慮して α を虚数にとった．

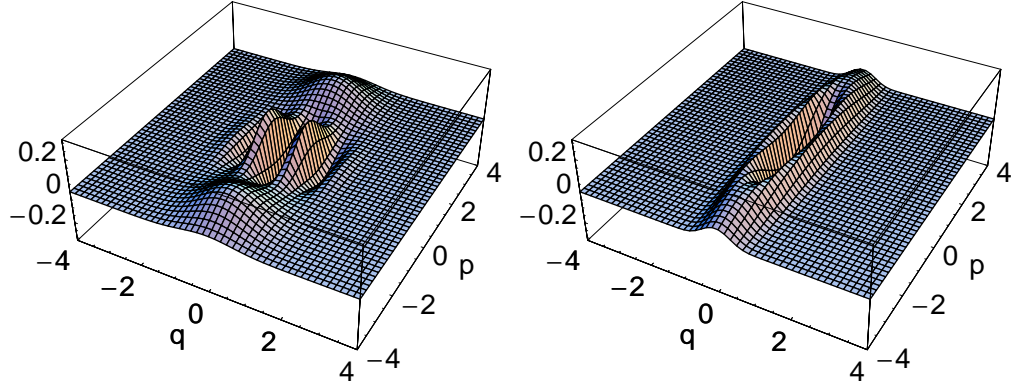


Figure 3.4: Wigner functions of a genuine CSS with $\alpha = 2i$ (left) and a pseudo-CSS generated by the SS scheme or the PS scheme with $r = 0.853706$ (right).

3.2 実験上の不完全性を考慮した解析

3.2.1 SS スキームについての解析

考慮する不完全性

SS スキームに特有の不完全性は、このプロセスにリソースとして入力される状態が完全な単一光子状態ではないという点に由来する。そして、このリソースは、単一光子状態と真空との混合状態

$$\xi_{\text{SPS}} |1\rangle_{\text{A}} \langle 1| + (1 - \xi_{\text{SPS}}) |0\rangle_{\text{A}} \langle 0|, \quad (3.14)$$

として与えられるものと考えことにする [6]。ここで、リソース状態に含まれる単一光子状態の割合を ξ_{SPS} と置いた。

もう一つ、PS スキームと共通の不完全性として、状態を測定するホモダイン検波が完全でないこと、つまりホモダイン効率が 100 % 未満であるということが挙げられる。この影響は前章で述べたように、ホモダイン効率 100 % の完全なホモダイン検波の前に、ホモダイン効率 η を透過率とする架空のビームスプリッターを配置することでモデル化される。

解析の手順

SS スキームにおける解析のモデルを Fig. 3.5 に示す。モード A の光路から単一光子状態の割合 ξ_{SPS} が、残りの $1 - \xi_{\text{SPS}}$ が真空という状態

$$\hat{\rho}_0 = \xi_{\text{SPS}} |1\rangle_{\text{A}} \langle 1| + (1 - \xi_{\text{SPS}}) |0\rangle_{\text{A}} \langle 0| \quad (3.15)$$

が入力され、それが直交位相スクイーミング

$$\hat{S}_{\text{A}}(r) \equiv \exp \left[\frac{r}{2} (\hat{a}_{\text{A}}^2 - \hat{a}_{\text{A}}^{\dagger 2}) \right] \quad (3.16)$$

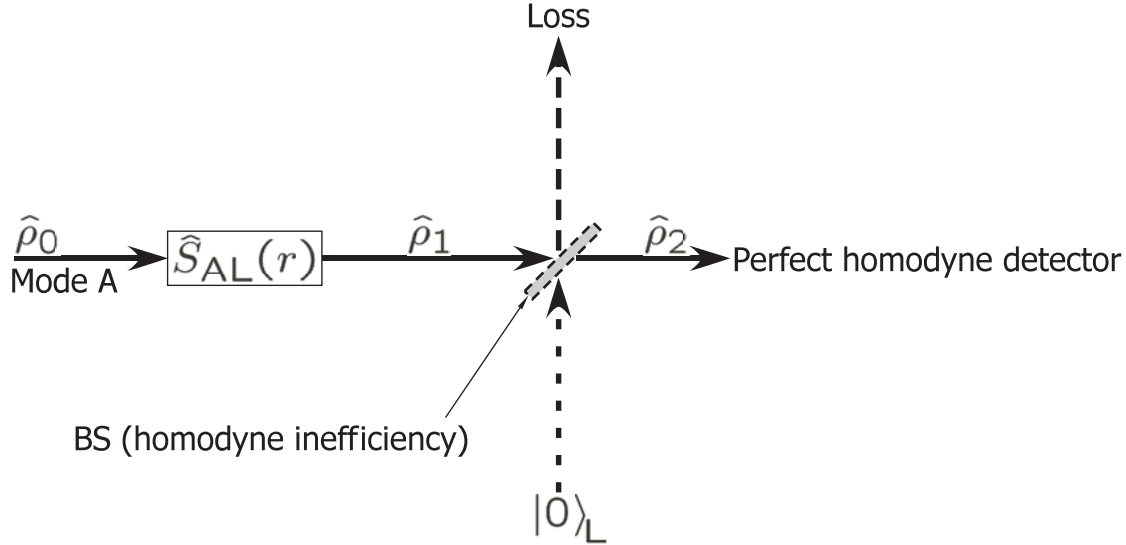


Figure 3.5: A schematic of the model of the experimental imperfections in the SS (squeezing the single-photon state) scheme.

により CSS

$$\hat{\rho}_1 = \hat{S}_A(r)\hat{\rho}_0\hat{S}_A^\dagger(r) \quad (3.17)$$

へと変換される．

こうしてモード A に生成された状態 $\hat{\rho}_1$ は，さらに不完全なホモダイン検波 (ホモダイン効率 η) により測定される．つまり，架空のビームスプリッター (Fig. 3.5 中の BS, 透過率 η)

$$\hat{B}_{AL}(\Theta_{HD}) = \exp \left[\Theta_{HD} (\hat{a}_A^\dagger \hat{a}_L - \hat{a}_A \hat{a}_L^\dagger) \right] \quad (3.18)$$

により，モード L から入射する真空場と合波される．ここで， $\eta = \cos^2 \Theta_{HD}$ と置いた．この合波の結果生じる状態のうちモード L をトレースアウトすることにより，モード A におけるホモダイン検波で測定される状態

$$\hat{\rho}_2 = \text{Tr}_L \left[\hat{B}_{AL}(\Theta_{HD})\hat{\rho}_1 \otimes |0\rangle_L \langle 0| \hat{B}_{AL}^\dagger(\Theta_{HD}) \right] \quad (3.19)$$

が得られる．

ウィグナー関数

ここでは，先の 3.2.1 節で求めた状態 $\hat{\rho}_2$ のウィグナー関数 $W_{SS}(q, p)$ を計算する．もちろん，これは先の $\hat{\rho}_2$ を第 2 章に示したウィグナー関数の定義式に代入して

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{\rho}_2 \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx \quad (3.20)$$

を計算することにより求められる．

その結果得られるウィグナー関数は，入力状態中の単一光子状態に由来する成分 $W_{SS1}(q, p)$ および真空に由来する成分 $W_{SS0}(q, p)$ の和として

$$W_{SS}(q, p) = \xi_{SPS} W_{SS1}(q, p) + (1 - \xi_{SPS}) W_{SS0}(q, p) \quad (3.21)$$

の形になる． $W_{SS1}(q, p)$ および $W_{SS0}(q, p)$ の中身は

$$W_{SS1}(q, p) \equiv \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{2e^{-2r}\eta}{\Delta q^5 \Delta p} q^2 + \frac{2e^{+2r}\eta}{\Delta q \Delta p^5} p^2 - \frac{2\eta - 1}{\Delta q^3 \Delta p^3} \right\} \\ \times \exp \left[- \left(\frac{q}{\Delta q} \right)^2 - \left(\frac{p}{\Delta p} \right)^2 \right] \quad (3.22)$$

$$W_{SS0}(q, p) \equiv \frac{1}{\pi \Delta q \Delta p} \exp \left[- \left(\frac{q}{\Delta q} \right)^2 - \left(\frac{p}{\Delta p} \right)^2 \right] \quad (3.23)$$

のように表される．ここで，表記を簡単にするため

$$\Delta q \equiv \sqrt{1 + (e^{-2r} - 1)\eta} \quad (3.24)$$

$$\Delta p \equiv \sqrt{1 + (e^{+2r} - 1)\eta} \quad (3.25)$$

と置いた．

現実的な実験条件を代入した場合

次に，先の3.2.1節において求めたウィグナー関数に，現時点で現実的と思われる実験パラメータを代入して計算する．まず，リソース状態に含まれる単一光子状態の割合を $\xi_{SPS} = 0.7$ とする．これは，パラメトリック下方変換により生成される光子対を用いて単一光子状態を準備するものとし，その際の光子対回収率が文献 [6–8] の例から 70 % 程度と考えたことによる．また，ホモダイン効率は $\eta = 0.9$ とした．これは，パルス光を用いたホモダイン検波におけるモードマッチが最大で 94.3 % [9]，ホモダイン検波に用いられるフォトダイオードの量子効率が 97.5 % であることに由来する．

これらのパラメータを Eq. (3.21) に代入して計算したウィグナー関数を Fig. 3.6 に示す．このウィグナー関数の，位相空間原点における値は $W_{SS}(0, 0) = -0.075$ である．

次に，目標とする CSS (ここでは $\varphi = \pi$, $\alpha = 1$) に対するフィデリティは，スクイーミングパラメータ $r = 0.318$ (2.76 dB 相当) において最大となり，

$$F = {}_A \langle \text{CSS}(\pi, 1) | \hat{\rho}_2 | \text{CSS}(\pi, 1) \rangle_A \\ = 0.693 \quad (3.26)$$

が得られる．

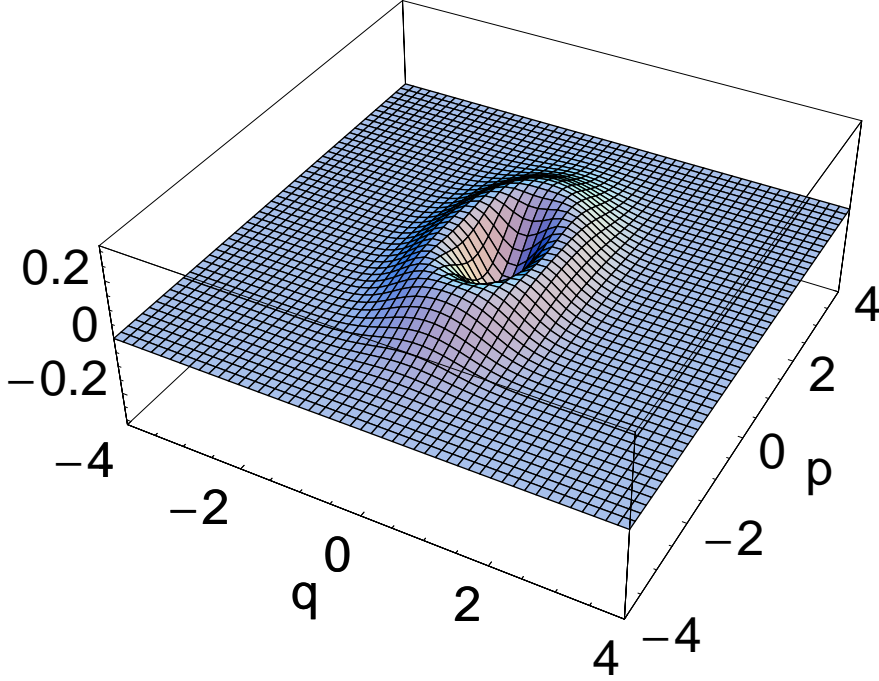


Figure 3.6: Wigner function of the pseudo-CSS generated by the SS scheme under the practical condition: $\xi_{\text{SPS}} = 0.7$ and $\eta = 0.9$.

3.2.2 PS スキームについての解析

考慮する不完全性

PS スキームに特有の不完全性は、一光子を引くこと、言い換えると、完全な光子数識別測定による一光子の検出が不可能であることに由来する。

1. 光子数の識別は不可能 (on/off 検出器による “0/1 以上” の識別しかできない)
2. ダークカウントが存在する (光子が入力されないのに “on” になる場合がある)
3. 量子効率が 1 未満 (光子が入力しても “off” のままである場合がある)

言い換えると、モード B に対して

$$\hat{\Pi}_{\text{B}}^{(\text{on}),\text{ideal}} = |1\rangle_{\text{B}}\langle 1| \quad (3.27)$$

といった POVM で表されるような測定は実現できない。実際には、ダークカウントを ν 、光子検出器の量子効率を η' として

$$\hat{\Pi}_{\text{B}}^{(\text{on})}(\nu, \eta') \equiv \hat{1}_{\text{B}} - \hat{\Pi}_{\text{B}}^{(\text{off})}(\nu, \eta') \quad (3.28)$$

$$\hat{\Pi}_{\text{B}}^{(\text{off})} \equiv e^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \eta')^n |n\rangle_{\text{B}}\langle n| \quad (3.29)$$

のように表される POVM が実現されるはずである . この $\hat{\Pi}_B^{(\text{off})}$ は , m 個の光子により n 個のキャリアーが励起されている光子数識別測定の POVM (文献 [10] による)

$$\hat{\Pi}(n; \nu, \eta') = \sum_{k=0}^n e^{-\nu} \frac{\nu^{n-k}}{(n-k)!} \sum_{m=k}^{\infty} {}_m C_k \eta'^k (1-\eta')^{m-k} |m\rangle\langle m| \quad (3.30)$$

に $n = 0$ を代入することにより得られる .

なお , 不完全なホモダイン検波についての取り扱いは , SS スキームのときと同じである .

解析の手順

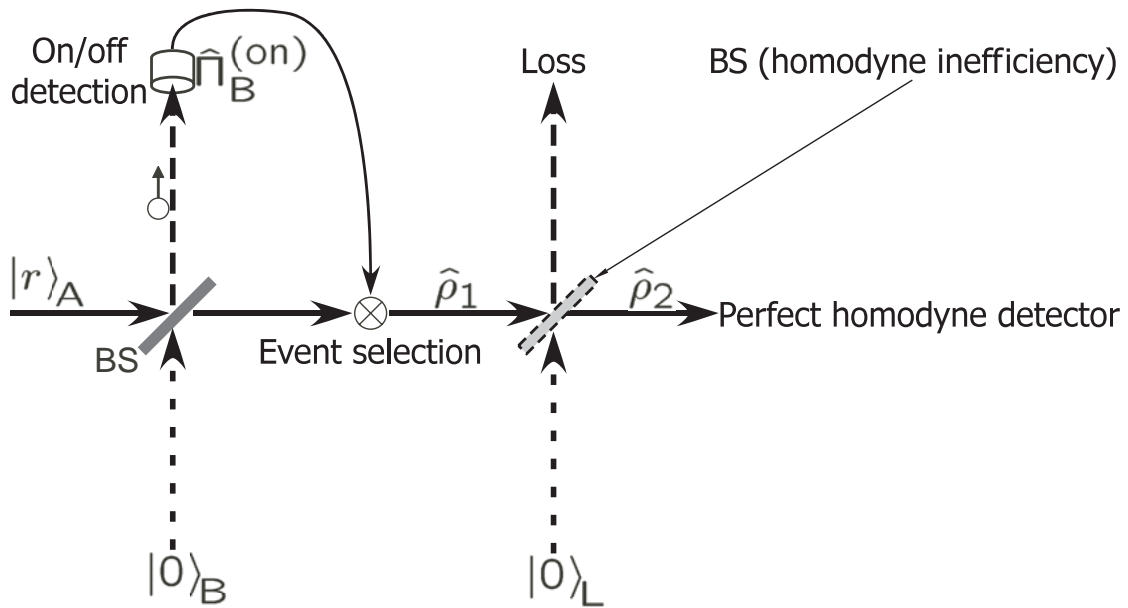


Figure 3.7: A schematic of the model of the experimental imperfections in the PS scheme (photon subtraction scheme).

PS スキームにおける解析のモデルを Fig. 3.7 に示す . モード A に入力されたスクイーズド状態 $|r\rangle_A = \hat{S}_A(r) |0\rangle_A$ は , モード B から入力される真空場 $|0\rangle_B$ と , 透過率 T のビームスプリッター (BS) において合波される .

$$|\psi\rangle_{(AB)} = \hat{B}_{AB}(\Theta_{BS}) |r\rangle_A |0\rangle_B \quad (3.31)$$

ここで , やはり $T = \cos^2 \Theta_{BS}$ と置いている .

その後 , モード B の出力に対しては 1 イベントあたりのダークカウント数 ν , 量子効率 η' の on-off 光子検出器による測定が行われる . この検出器が “on” となった場合 , モード A の状態は

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{P_{\text{det}}} \text{Tr}_B \left[|\psi\rangle_{(AB)} \langle \psi| \otimes \hat{\Pi}_B^{(\text{on})}(\nu, \eta') \right] \quad (3.32)$$

に射影される．ここで， $\hat{\Pi}_B^{(\text{on})}(\nu, \eta')$ は Eq. (3.28) で与えた POVM である．また， P_{det} は検出器が “on” になる確率であり， $\lambda = \tanh r$ および $R = 1 - T$ を用いて

$$\begin{aligned} P_{\text{det}} &= \text{Tr}_{AB} \left[|\psi\rangle_{(AB)} \langle \psi| \otimes \hat{\Pi}_B^{(\text{on})}(\nu, \eta') \right] \\ &= 1 - e^{-\nu} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{1 - \lambda^2 [T + (1 - \eta')R]^2}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

のように与えられる．

ホモダイン検波の効率 η の影響を考慮した状態 $\hat{\rho}_2$ は，SS スキームの時と同じように Eq. (3.19) を用いて計算できる．

ウィグナー関数

ここでも，先の 3.2.2 節で求めた状態 $\hat{\rho}_2$ のウィグナー関数 $W_{\text{PS}}(q, p)$ を計算する．これも，第 2 章に示したウィグナー関数の定義から，

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{\rho}_2 \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx \quad (3.34)$$

を計算することにより

$$W_{\text{PS}}(q, p) = W_{\text{PS1}}(q, p) - e^{-\nu} W_{\text{PS0}}(q, p) \quad (3.35)$$

のように求められる．ここで， $j = 1, 0$ について

$$\begin{aligned} W_{\text{PS}j}(q, p) &= \frac{1}{\pi P_{\text{det}}} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{1 - \lambda^2 \{(2\eta - 1)T - \gamma_j\}^2}} \\ &\times \exp \left[-\frac{1 - \lambda^2 (T + \gamma_j)^2}{(1 - \lambda\eta T)^2 - \lambda^2 \{(1 - \eta)T + \gamma_j\}^2} q^2 \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{(1 - \lambda\eta T)^2 - \lambda^2 \{(1 - \eta)T + \gamma_j\}^2}{1 - \lambda^2 \{(2\eta - 1)T - \gamma_j\}^2} p^2 \right] \\ \gamma_1 &\equiv R \\ \gamma_0 &\equiv (1 - \eta')R \end{aligned} \quad (3.36)$$

とおいた．

現実的な実験条件を代入した場合

次に，先の 3.2.2 節において求めたウィグナー関数に，現時点で現実的と思われる実験パラメータを代入して計算する．ここでは，on/off 検出器の特性として 1 イベントあたりのダークカウント $\nu = 25 \times 10^{-9}$ および $\eta' = 0.7$ ，ビームスプリッターの透過率 $T = 0.9$ ，ホモダイン効率 $\eta = 0.9$ と考えた．ここで，on/off 検出器

の特性は市販の光子検出器 (SPCM: single photon counting module), 具体的には Perkin Elmer 社製の製品 SPCM AQR-16 を想定している. また, 1 イベントの時間幅は 1 ns と考えている.

これらのパラメータを Eq. (3.35) に代入して計算したウィグナー関数を Fig. 3.8 に示す. このウィグナー関数の, 位相空間原点における値は $W_{PS}(0, 0) = -0.202$ である.

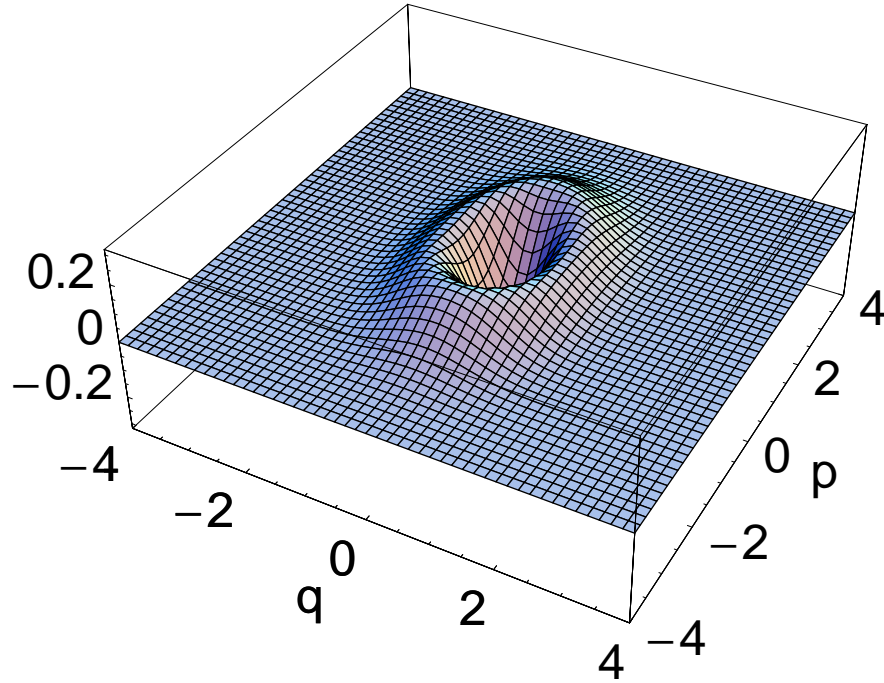


Figure 3.8: Wigner function of the pseudo-CSS generated by the PS scheme under the practical condition: $\nu = 25 \times 10^{-9}$, $\eta' = 0.7$, $T = 0.9$, $\eta = 0.9$.

次に, 目標とする CSS (ここでは $\varphi = \pi$, $\alpha = 1$) に対するフィデリティは, スクイーミングパラメータ $r = -0.301$ (2.62 dB 相当) において最大となり,

$$\begin{aligned} F &= {}_A \langle \text{CSS}(\pi, 1) | \hat{\rho}_2 | \text{CSS}(\pi, 1) \rangle_A \\ &= 0.808 \end{aligned} \quad (3.37)$$

が得られる.

3.2.3 まとめ

3.2.1 節ならびに 3.2.2 節で得られた結果は, PS スキームが SS スキームよりも良好な擬似 CSS を生成することを示している. もし, SS スキームで PS スキーム並みのフィデリティ $F = 0.808$ を得ようとするれば, 入力状態として純度 $\xi_{SPS} > 0.94$

の単一光子状態が必要であるが、この状態を現状の技術で用意することは難しい。よって、現状の技術レベルでは、PS スキームのほうがより妥当な擬似 CSS 生成スキームであると言える。

ただ、PS スキームが通常非常に低い成功確率(先の例では $P_{\text{det}} = 0.00627$) しか擬似 CSS を生成できないのに対し、SS スキームにおいては、単一光子状態さえ用意できれば、ほぼ決定論的に擬似 CSS を生成することができることに注意する必要がある。

3.3 非古典性を確保するための実験条件

理想的な条件の下では、SS スキームならびに PS スキームにより生成される状態は位相空間上で非等方的であり、さらに奇数の光子数状態のみで構成される。状態がどれだけ非古典的かは、その状態の光子数統計、言い換えれば奇数光子数状態がどの程度含まれているかで推し量ることができると考えられる。

本節では、得られた状態に含まれる奇数光子数状態の割合が、位相空間原点におけるウィグナー関数の値 $W(0,0)$ と直結していることを示す。さらに、測定される状態が非古典性を示す、すなわち $W(0,0) < 0$ を満足するための実験条件を求めらる。

3.3.1 状態の非古典性と光子数統計

本節では、位相空間原点におけるウィグナー関数の値 $W(0,0)$ は、その状態の光子数統計のみに依存することを示す。計算はいたって簡単である。

まず、ある状態の密度演算子 $\hat{\rho}$ は、以下のように光子数基底の密度行列として表現できる。

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{nm} |n\rangle \langle m| \quad (3.38)$$

ここで、 ρ_{nm} は密度行列の成分 (n 行 m 列)

$$\rho_{nm} = \langle n | \hat{\rho} | m \rangle \quad (3.39)$$

である。すると、その状態のウィグナー関数も同じように展開できる。

$$\begin{aligned} W(q,p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{\rho} \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{nm} |n\rangle \langle m| \right\} \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{nm} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| n \right\rangle \left\langle m \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx \quad (3.40) \end{aligned}$$

ここでは $W(0, 0)$ の値に着目するので、この Eq. (3.40) において $q = 0$ ならびに $p = 0$ を代入して計算を続けると

$$\begin{aligned}
W(0, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho_{nm}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle -\frac{x}{2} \middle| n \right\rangle \left\langle m \middle| +\frac{x}{2} \right\rangle dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho_{nm}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left\langle \frac{x}{2} \middle| n \right\rangle \left\langle m \middle| \frac{x}{2} \right\rangle dx \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{nm} (-1)^n \langle n | m \rangle \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{nn} (-1)^n \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\langle 2m | \hat{\rho} | 2m \rangle - \langle 2m+1 | \hat{\rho} | 2m+1 \rangle}{\pi} \tag{3.41}
\end{aligned}$$

が得られる。ここで、状態に含まれる偶数光子数状態の割合 P_{even} および奇数光子数状態の割合 P_{odd} が、それぞれ

$$\begin{aligned}
P_{\text{even}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \langle 2m | \hat{\rho} | 2m \rangle \\
P_{\text{odd}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \langle 2m+1 | \hat{\rho} | 2m+1 \rangle \tag{3.42}
\end{aligned}$$

であることから、

$$W(0, 0) = \frac{P_{\text{even}} - P_{\text{odd}}}{\pi} \tag{3.43}$$

が得られる。この Eq. (3.43) から、ウィグナー関数の位相空間原点における値は光子数統計から判断できることが分かる。

3.3.2 状態の非古典性を保つための条件

ここでは、測定の結果得られた状態が非古典的つまり $W(0, 0) < 0$ を満たすために実験的なパラメータがどのような条件を満たさなければならないか明らかにする。

SS スキーム

SS スキームの場合は、不完全性を表すパラメータが単一光子状態の純度 ξ_{SPS} ならびにホモダイン効率 η だけである。そこで、まずは3種類のスクイーミングパラメータ ($r = 10^{-5}, 0.3, 0.6$) について $W(0, 0) = 0$ となるような ξ_{SPS} と η の組み合わせを計算し、 η - ξ_{SPS} グラフとして Fig. 3.9 にプロットした。これらの曲線

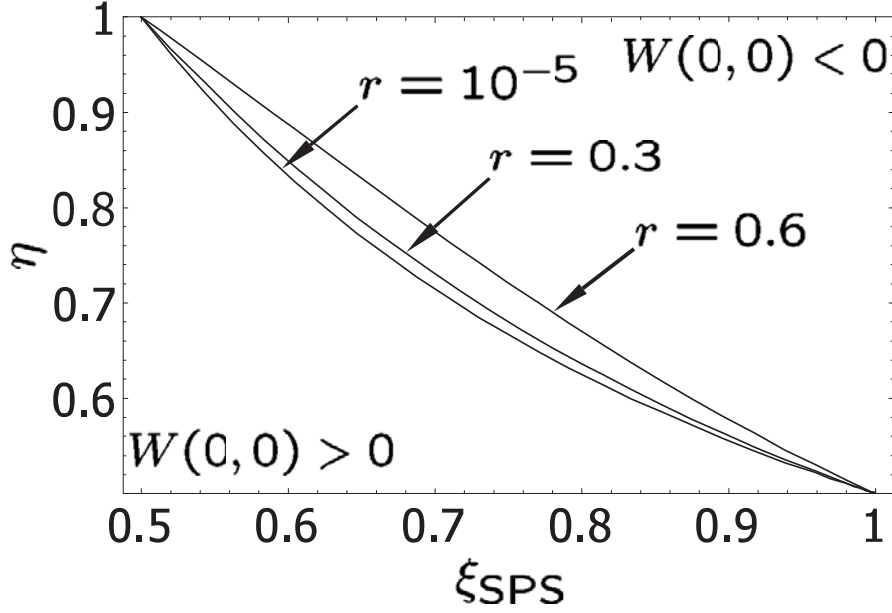


Figure 3.9: Relationships between the modal purity of the initial single-photon state ξ_{SPS} and the homodyne efficiency η which satisfy $W(0,0) = 0$. The value of $W(0,0)$ is negative in the area above each curve.

を境界にして、グラフ右上のエリアにおいて $W(0,0) < 0$ 、左下のエリアにおいて $W(0,0) > 0$ である。

ここで、 η - ξ_{SPS} 曲線はスクイーミングパラメータ r が大きくなるほど上にシフトしていることが分かる。この傾向についてもう少し詳しく調べるため、3種類のホモダイン効率 ($\eta = 1.0, 0.9, 0.8$) について $W(0,0)$ - r 曲線を計算し Fig. 3.10 にプロットした。ここで、単一光子状態の純度は $\xi_{\text{SPS}} = 0.7$ に固定した。ホモダイン効率が1未満の場合、スクイーミングパラメータが大きくなるほどに $W(0,0)$ の値も大きくなっていくことが分かる。逆に、ホモダイン効率が1の場合、 $W(0,0)$ の値はスクイーミングパラメータによらず一定である。

この傾向は、Eq. (3.43) に示したような、光子数状態と $W(0,0)$ の値の関係をを用いて解釈することができる。最初に用意された単一光子状態が完全な場合、ホモダイン検波により測定される前の擬似CSSに含まれる光子数状態は、奇数のものだけである。つまり、 $W(0,0)$ の値は $-1/\pi$ である。しかしホモダイン検波のロスには、奇数の光子数状態から $W(0,0)$ の値が $+1/\pi$ である偶数の光子数状態を発生させてしまう。その結果、 $W(0,0)$ の値は増加していくと考えることができる。この“よりスクイーズした状態ほど壊れやすい”という傾向は、量子光学においては普遍的なものである。

一方で、より強くスクイーズされた単一光子状態は、よりコヒーレント振幅の大きなCSSに対応していると考えられる。そして、第2章の Eq. (2.141) から推測されるように、振幅のより大きなCSSはロスの影響をより強く受ける。(ロスの大きさが同じであっても、コヒーレント振幅がより大きければ密度行列の

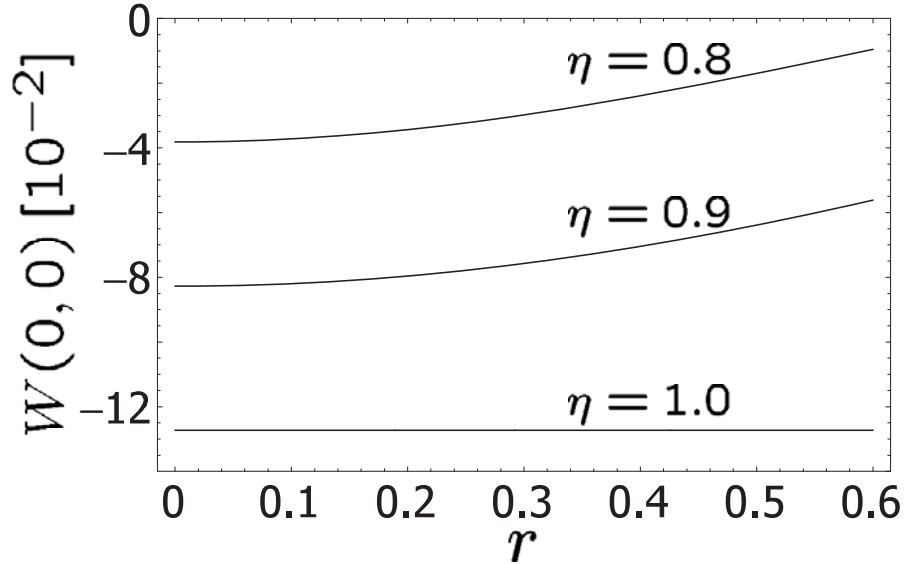


Figure 3.10: Dependence of the Wigner function at the phase-space origin $W(0,0) = 0$ on the squeezing parameter r for the SS scheme. The modal purity of the initial single-photon state is $\xi_{\text{SPS}} = 0.7$.

非対角成分は絶対値をより減らす。) このように考えても、スクイーミングパラメータ r の増加が $W(0,0)$ の値を増加させることについての解釈が可能である。

PS スキーム

PS スキームに関しては、不完全性を表すパラメータが3つ (on/off 検出器のダークカウントならびに量子効率、ホモダイン効率)、その他のパラメータが2つ (ビームスプリッターの透過率ならびにスクイーミングパラメータ) 存在する。

まず、on/off 検出器の量子効率を $\eta' = 0.7$ 、ホモダイン効率を $\eta = 0.9$ に固定し、スクイーミングパラメータを $r = 0.1, 0.3, 0.6$ の3種類として $W(0,0) = 0$ を満たす ν - T 曲線を計算し Fig. 3.11 にプロットした。これらの曲線の下側において $W(0,0) < 0$ 、上側において $W(0,0) > 0$ である。スクイーミングパラメータが大きくなるほどに $W(0,0) < 0$ を満たす領域が広がっていく。つまり許容されるダークカウントが大きくなっていく。また、スクイーミングパラメータに関係なく、曲線は $T = 0.725$ において最大となる。これは、スクイーミングパラメータが大きくなると状態の平均光子数が増加するため、on/off 検出器が“on”になるイベントが増加し、ダークカウントに起因するイベント (ホモダイン検波でスクイーズド状態が測定される) の比率が低下するためである。

先に議論した SS スキームにおいては、スクイーミングパラメータの増加がホモダイン検波におけるロスを通じて $W(0,0)$ の値を増加させる。この傾向は PS スキームについても共通のはずであるが、先に述べたように、大きなスクイーミングパラメータが on/off 検出器のダークカウントによる影響を緩和するという効果

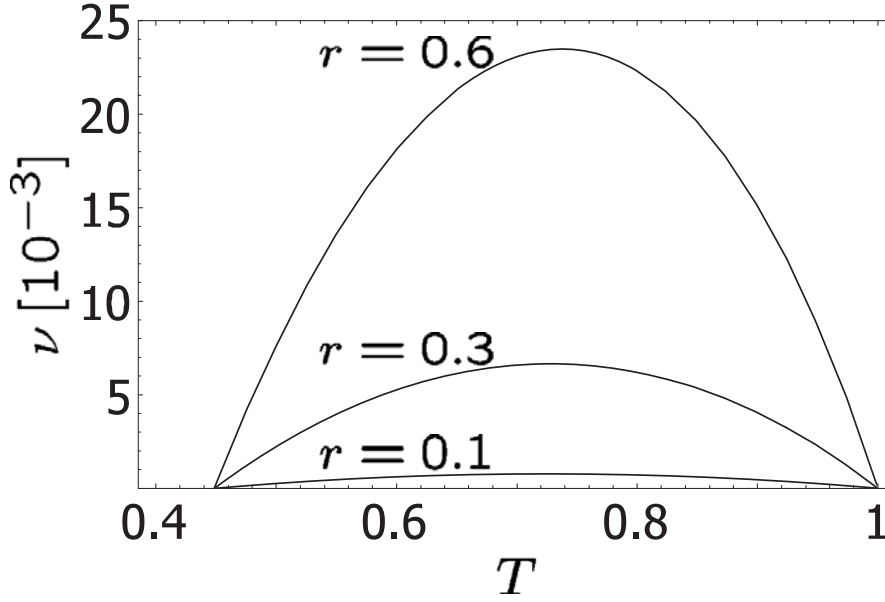


Figure 3.11: Relationships between the dark count per event ν and the transmittance of the photon tapping beam-splitter T which satisfy $W(0,0) = 0$. The value of $W(0,0)$ is negative in the area below each curve. The detection efficiency of the on/off detector and the homodyne efficiency are $\eta' = 0.9$ and $\eta = 0.9$, respectively.

もある．そこで，どちらの効果がより支配的か明らかにするため，スクイーミングパラメータ $r = 0.1, 0.3, 0.6$ について $W(0,0) = 0$ を満たす ν - η 曲線を計算して Fig. 3.12 にプロットした．ここで，on/off 検出器の量子効率を $\eta' = 0.7$ ，ビームスプリッターの透過率を $T = 0.725$ に固定した．これらの曲線の右下において $W(0,0) < 0$ ，左上において $W(0,0) > 0$ である．そして，スクイーミングパラメータが大きくなると， $W(0,0) < 0$ を満たす領域は広がることが分かった．つまり，ダークカウントの影響が緩和されることによる効果は，ホモダイン検波のロスによる影響が強まる効果よりも大きい．

さらに，1 イベントあたりのダークカウントを $\nu = 25 \times 10^{-9}$ ，on/off 検出器の量子効率を $\eta' = 0.7$ ，ビームスプリッターの透過率を $T = 0.9$ に固定し，ホモダイン効率を $\eta = 1.0, 0.9, 0.8$ として $W(0,0)$ - r 曲線を計算し Fig. 3.13 にプロットした．すると，Fig. 3.12 に示した結果と矛盾するようだが， $W(0,0)$ の値自体はスクイーミングパラメータの増加とともに大きくなる傾向がある．これは，ホモダイン検波におけるロスの影響が大きくなる効果の他に，平均光子数の増加に伴い，2 つ以上の光子がビームスプリッターにより取り出されてしまう確率が増大することによる効果も寄与していると考えられる．

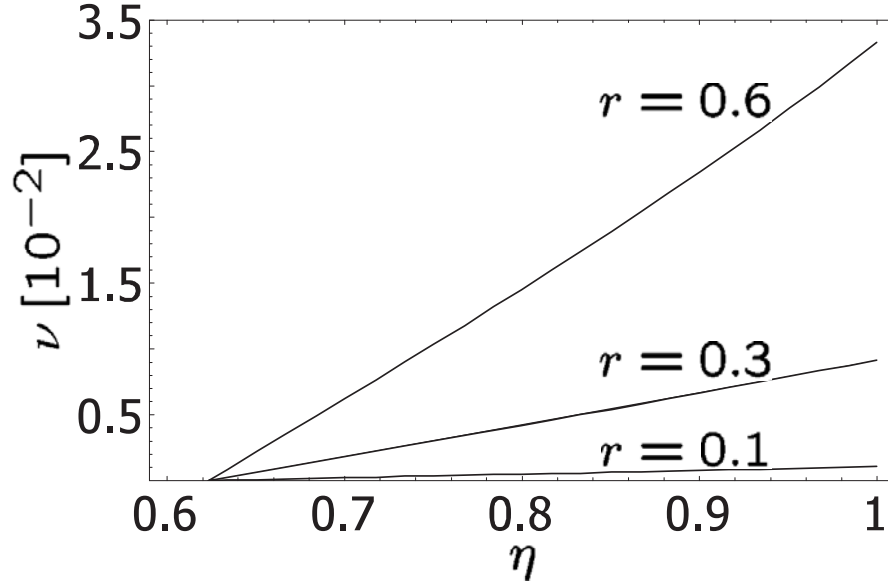


Figure 3.12: Relationships between the dark count per event ν and the homodyne efficiency η which satisfy $W(0,0) = 0$. The value of $W(0,0)$ is negative in the area below each curve. The detection efficiency of the on/off detector and the transmittance of the photon tapping beam-splitter are $\eta' = 0.7$ and $T = 0.725$, respectively.

3.4 実験的なパラメータによるモード純度の表現

本論文で言うところの“PS スキーム”について、過去に行われた研究例 [4, 5] では、on/off 検出器のダークカウントや量子効率に由来する不完全性を“モード純度 (modal purity)”という簡略化された一つのパラメータを用いて表現していた。ここでは、Eq. (3.44) のように、生成される状態を 2 つの状態の統計的な混合として扱っている。

$$\hat{\rho} = \xi \hat{\rho}_{\text{ng}} + (1 - \xi) \hat{\rho}_{\text{sq}} \quad (3.44)$$

ここで、 $\hat{\rho}_{\text{ng}}$ は、入力されたスクイズド状態から 1 個以上の光子を引くことに成功したイベントに由来する状態である。また、 $\hat{\rho}_{\text{sq}}$ は、ダークカウントのために光子が 1 個も引かれていないにもかかわらず検出器が“on”になってしまったイベントに由来する状態である。本節では、本論文で Eq. (3.32) に示したモデルと、Wenger や Kim らが Eq. (3.44) のように示したモデルが等価であること、“modal purity” ξ が各実験パラメータ (光子検出器のダークカウント ν ならびに量子効率 η' 、ビームスプリッターの透過率 T 、スクイーミングパラメータ r) を用いて表現されることを示す。

まず、Eq. (3.44) 右辺の $\hat{\rho}_{\text{sq}}$ は、Eq. (3.32) においてダークカウントがない、つ

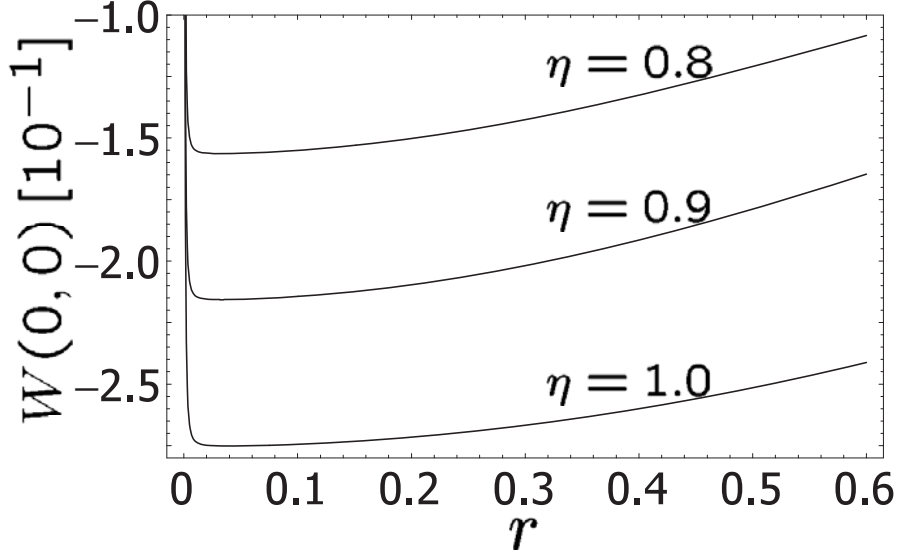


Figure 3.13: Dependence of the Wigner function at the phase-space origin $W(0,0) = 0$ on the squeezing parameter r for the PS scheme. The dark count per event, the detection efficiency of the on/off detector, and the transmittance of the photon tapping beam-splitter are $\nu = 25 \times 10^{-9}$, $\eta' = 0.7$, and $T = 0.9$, respectively.

まり $\nu = 0$ の場合に相当する．その密度行列は，

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{ng}} &= \hat{\rho}_1|_{\nu=0} \\ &= \frac{1}{P_{\text{det}}|_{\nu=0}} \text{Tr}_{\text{B}} \left[|\psi\rangle_{(\text{AB})} \langle \psi| \otimes \hat{\Pi}_{\text{B}}^{(\text{on})}(0, \eta') \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

のように与えられる．また， $P_{\text{det}}|_{\nu=0}$ は Eq. (3.33) に $\nu = 0$ を代入することにより

$$P_{\text{det}}|_{\nu=0} = 1 - \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{1 - \lambda^2 [T + (1 - \eta')R]^2}} \quad (3.46)$$

と得られることは明らかである．

次に，Eq. (3.44) 左辺の $\hat{\rho}_{\text{sq}}$ は，on/off 検出器が “off” であったときイベントに相当する．これは，Eq. (3.29) で定義した POVM を用いて

$$\hat{\rho}_{\text{sq}} = \frac{1}{P_{\text{nd}}} \text{Tr}_{\text{B}} \left[|\psi\rangle_{(\text{AB})} \langle \psi| \otimes \hat{\Pi}_{\text{B}}^{(\text{off})}(\nu, \eta') \right] \quad (3.47)$$

のように与えられる．ここで， P_{nd} は検出器が “off” になる確率であり，

$$\begin{aligned} P_{\text{nd}} &= \text{Tr}_{\text{AB}} \left[|\psi\rangle_{(\text{AB})} \langle \psi| \otimes \hat{\Pi}_{\text{B}}^{(\text{off})}(\nu, \eta') \right] \\ &= e^{-\nu} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{1 - \lambda^2 [T + (1 - \eta')R]^2}}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

として与えられる．

一方で, Eq. (3.28) で定義した POVM を, ダークカウントがない場合の “on” イベントに対応する $\hat{\Pi}_B^{(\text{on})}(0, \eta')$ と, “off” イベントに対応する $\hat{\Pi}_B^{(\text{off})}(\nu, \eta')$ に分けて書き直すと

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_B^{(\text{on})}(\nu, \eta') &= \hat{1}_B - e^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \eta')^n |n\rangle_B \langle n| \\ &= \hat{\Pi}_B^{(\text{on})}(0, \eta') + (e^\nu - 1) \hat{\Pi}_B^{(\text{off})}(\nu, \eta')\end{aligned}\quad (3.49)$$

のようになる．あとは, Eq. (3.32) に Eqs. (3.49), (3.45), (3.47) を代入して計算することにより, Eq. (3.44) と同じ形をした表現

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_1 &= \frac{1}{P_{\text{det}}} \text{Tr}_B \left[|\psi\rangle_{(AB)} \langle \psi| \otimes \hat{\Pi}_B^{(\text{on})}(\nu, \eta') \right] \\ &= \frac{P_{\text{det}}|_{\nu=0}}{P_{\text{det}}} \hat{\rho}_{ng} + \frac{(e^\nu - 1)P_{nd}}{P_{\text{det}}} \hat{\rho}_{sq} \\ &= \frac{P_{\text{det}}|_{\nu=0}}{P_{\text{det}}} \hat{\rho}_{ng} + \left(1 - \frac{P_{\text{det}}|_{\nu=0}}{P_{\text{det}}} \right) \hat{\rho}_{sq}\end{aligned}\quad (3.50)$$

が得られる．これより, Wenger や Kim らが用いているパラメータ “modal purity” は

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \frac{P_{\text{det}}|_{\nu=0}}{P_{\text{det}}} \\ &= \frac{1 - \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{1 - \lambda^2 [T + (1 - \eta')R]^2}}}{1 - e^{-\nu} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{1 - \lambda^2 [T + (1 - \eta')R]^2}}}\end{aligned}\quad (3.51)$$

のように具体的な実験パラメータを用いて表現できることが示される．

3.5 まとめ

本章では, 2 種類の擬似 CSS 生成スキームを取り上げ, 実験的な不完全性を考慮して過去の研究例にはない詳細な解析を行った．

まず, 過去に提案された 2 種類の擬似 CSS 生成スキームである SS スキーム (単一光子状態をスクイーズすることによる) ならびに PS スキーム (スクイーズド状態から 1 光子を引くことによる) について紹介し, これらが理想的な条件の下では数学的に等価であることを示した．そして, これらスキームにより生成される状態が小振幅 ($|\alpha| = 1$ 程度) の CSS を大変よく近似する一方, 大振幅 ($|\alpha| = 2$ 程度) の CSS に対しては徐々に近似の精度が落ちていくことについても述べた．

そして, 現在考えられている 2 種類の擬似 CSS 生成スキームについて, それぞれのスキームに特有の実験的な不完全性 (単一光子源や光子検出器の性能, ホモダ

イン効率)を網羅した新しいモデルを構築した。これらのモデルに現実的な実験パラメータを代入して、最終的にホモダイン検波で測定されるであろう状態を計算・比較したところ、現在の技術水準においてはSSスキームよりもPSスキームの方が現実的であることが分かった。たとえば、今回ターゲットにした $|\alpha| = 1$ のCSSに対するフィデリティは、SSスキームにより得られる値が $F = 0.693$ であるのに対し、PSスキームにより得られる値は $F = 0.808$ であった。また、位相空間原点におけるウィグナー関数の値 $W(0, 0)$ は、理想的な条件の下での値 $-1/\pi \approx -0.318$ に対し、SSスキームでは -0.075 、PSスキームでは -0.202 がそれぞれ得られた。これは、現時点ではSSスキームに用いるための純度の高い単一光子状態を用意することが困難であることに起因している。

次に、状態の非古典性を評価する際に用いられる指標であるウィグナー関数の位相空間原点における値 $W(0, 0)$ は状態の光子数統計にのみ依存すること、つまり非古典的な状態は必ずしも純粋な状態ではないことを初めて示した。これは、 $W(0, 0)$ の値が密度行列の非対角成分に影響されないこと、偶数光子数状態のウィグナー関数において $W(0, 0) = +1/\pi$ 、奇数光子数状態のウィグナー関数において $W(0, 0) = -1/\pi$ であることに起因している。将来的に光子数識別測定が可能になれば、莫大な回数の測定とデータ解析を必要とするホモダイントモグラフィを行うことなく、生成された擬似CSSの品質を簡単に見積もることが可能になるであろう。

さらに、状態が非古典性を確保する条件 $W(0, 0) < 0$ を満たすために、こういった実験パラメータが要求されるのかについても明らかにした。その中で、SSスキームにおいてはスクイーミングパラメータが大きくなるほど $W(0, 0) < 0$ を満たす条件が厳しくなるのに対し、PSスキームでは逆であることが判明した。このうち、SSスキームに見られる傾向は、より強くスクイーズされた状態(よりコヒーレント振幅の大きなCSSに対応)はホモダインの不完全性といったロスに対してより脆弱になることを示していると言える。一方、PSスキームに見られる傾向は、スクイーミングの強化に伴う平均光子数の増加によりイベントが成功する(つまりon/off検出器に光子が入ることによりonになる)確率も増加し、相対的にダークカウントの影響が緩和されることによるダークカウントによると考えられる。

最後に、他の研究者がPSスキームにおける実験的な不完全性を表すパラメータとして用いている“modal purity”を、本論文で用いたパラメータ(on/off検出器のダークカウントならびに量子効率、ビームスプリッターの透過率、スクイーミングパラメータ)の関数として表現できることを初めて示した。

参考文献

- [1] A. P. Lund, H. Jeong, T. C. Ralph, and M. S. Kim, *Phys. Rev. A* **70**, 020101(R) (2004).
- [2] M. Dakna, T. Anhut, T. Opatrný, L. Knöll, and D.-G. Welsch, *Phys. Rev. A* **55**, 3184 (1997).
- [3] H. Jeong, A. P. Lund, and T. C. Ralph, *Phys. Rev. A* **72**, 013801 (2005).
- [4] J. Wenger, R. Tualle-Brouiri, and P. Grangier, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 153601 (2004).
- [5] M. S. Kim, E. Park, P. L. Knight, and H. Jeong, *Phys. Rev. A* **71**, 043805 (2005).
- [6] T. Konrad, M. Nock, A. Scherer, and J. Audretsch, *Phys. Rev. A* **74**, 032331 (2006).
- [7] T. B. Pittman, B. C. Jacobs, J. D. Franson, *Opt. Commun.* **246**, 545 (2004).
- [8] D. W. Berry, S. Schee, B. C. Sanders, and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **69**, 031806 (2004).
- [9] F. Grosshans and P. Grangier, *Eur. Phys. J. D* **14**, 119 (2001).
- [10] S. M. Barnett, L. S. Phillips, and D. T. Pegg, *Opt. Commun.* **158**, 45 (1998).

第4章 ホモダイン検波を用いるCSS 純粋化プロトコルの提案

本章では、線形ロスにより劣化したCSSを回復させるためのプロトコルとして、今までになくシンプルで現実的なものを提案し、その性能について解析を通じて評価を行う。

それに先立ち、CSSに対する線形損失の影響について述べる。ここでは、その生成ならびに伝搬の過程において避けることのできない線形ロスにより、CSSがどのように劣化していくのかを明らかにする。

次に、こうして劣化したCSSを回復させるためのプロトコルを提案する。ここで提案するプロトコルは、入力状態に対して部分測定を行い、その結果に基づいてイベント選択を行うものである。つまり、CSSとCSMの混合となった状態の一部をビームスプリッターで取り出し、その取り出された場に対して何らかの測定を行い、より多くのCSSを含む状態へと写像が行われるようにイベントを選択することで純粋化を達成する。

続いて、このようなプロトコルにおいて純粋化の効率を最大化するために必要な条件を導く。また、ここで用いる部分測定として、ホモダイン検波が最適なものの一つであることについて触れる。このホモダイン検波は技術的に成熟した測定スキームであるため、過去に提案された同様の目的を持つプロトコルよりも実験的に実現することが容易であるという長所を持っている。

さらに、こうしたホモダイン検波を部分測定として用いるケースについて計算を行い、本プロトコルの性能について具体的な評価を行う。その中で、このプロトコルが抱える問題点についても明らかにしていく。

これらに加えて、本プロトコルにより減少してしまうCSSのコヒーレント振幅を、Lundらにより提案されたCSS増幅プロトコル [1] との組み合わせにより回復させられるか否かについても検討する。

4.1 ロスによるCSSのデコヒーレンス

光路において支配的なロスは、もっぱら信号光の場と環境の真空場との相互作用によるものである。ここでは線形な散逸過程つまり線形ロスの存在下で、CSSがどのように変化するか簡単に述べる。

まず、繰り返しになるが、CSSは2つのコヒーレント状態 $|\pm\beta\rangle$ を位相 φ で重ね

合わせたもので Eq. (4.1) のように表される .

$$|\text{CSS}(\varphi, \beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N(\varphi, \beta)}} (|+\beta\rangle + e^{i\varphi} |-\beta\rangle), \quad (4.1)$$

ここで ,

$$N(\varphi, \beta) = 2(1 + e^{-2\beta^2} \cos \varphi) \quad (4.2)$$

は規格化因子である . ここで , コヒーレント振幅 β は複素数であるが , 実数として扱っても一般性を失わないため , 本章では実数として考えることにする .

次に , このような信号光の場が環境場 (真空) と線形相互作用することを考える . この相互作用は , 第2章の Eq. (2.134) に表した通り , コヒーレント状態を基底として表現された密度行列要素 $|\beta_1\rangle\langle\beta_2|$ を以下のように変換する .

$$\hat{\mathcal{L}}_L |\beta_1\rangle\langle\beta_2| = \exp\left[-\frac{1-\eta_L}{2}(\beta_1^2 - 2\beta_1\beta_2 + \beta_2^2)\right] |\sqrt{\eta_L}\beta_1\rangle\langle\sqrt{\eta_L}\beta_2| \quad (4.3)$$

このような写像を , ここでは $\hat{\mathcal{L}}_L$ を用いて表現している . また , 光路の透過率を η_L とした .

さらに , この写像 $\hat{\mathcal{L}}_L$ により CSS がどのような状態に変化するか調べてみよう . そこで , CSS の密度演算子 $\hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi, \beta)$ に $\hat{\mathcal{L}}_L$ を作用させると次の Eq. (4.4) のようになる .

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_L \hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi, \beta) &= \hat{\mathcal{L}}_L |\text{CSS}(\varphi, \beta)\rangle\langle\text{CSS}(\varphi, \beta)| \\ &= \frac{1}{N(\varphi, \beta)} \hat{\mathcal{L}}_L \{ |+\beta\rangle\langle+\beta| + e^{+i\varphi} |-\beta\rangle\langle+\beta| \\ &\quad + e^{-i\varphi} |+\beta\rangle\langle-\beta| + |-\beta\rangle\langle-\beta| \} \\ &= \frac{1}{N(\varphi, \beta)} \left\{ |+\sqrt{\eta_L}\beta\rangle\langle+\sqrt{\eta_L}\beta| + e^{-2(1-\eta_L)\beta^2+i\varphi} |-\sqrt{\eta_L}\beta\rangle\langle+\sqrt{\eta_L}\beta| \right. \\ &\quad \left. + e^{-2(1-\eta_L)\beta^2-i\varphi} |+\sqrt{\eta_L}\beta\rangle\langle-\sqrt{\eta_L}\beta| + |-\sqrt{\eta_L}\beta\rangle\langle-\sqrt{\eta_L}\beta| \right\} \\ &= \frac{1}{N(\varphi, \beta)} \left\{ e^{-2(1-\eta_L)\beta^2} N(\varphi, \sqrt{\eta_L}\beta) \hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi, \sqrt{\eta_L}\beta) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(1 - e^{-2(1-\eta_L)\beta^2}\right) \hat{\rho}_{\text{CSM}}(\sqrt{\eta_L}\beta) \right\} \\ &= \xi \hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi, \sqrt{\eta_L}\beta) + (1 - \xi) \hat{\rho}_{\text{CSM}}(\sqrt{\eta_L}\beta) \end{aligned} \quad (4.4)$$

ここで ,

$$\xi = \frac{N(\varphi, \sqrt{\eta_L}\beta)}{N(\varphi, \sqrt{\eta_L}\beta)} e^{-2(1-\eta_L)\beta^2} \quad (4.5)$$

と置いた . これより , 線形な散逸過程を経た CSS は振幅が $\sqrt{\eta_L}\beta$ に減少した CSS と CSM との混合 , つまり混合状態へと変換されることが分かる . また , $\hat{\rho}_{\text{CSM}}(\sqrt{\eta_L}\beta)$ は第2章でも述べた CSM の密度演算子であり , もちろんその密度行列は

$$\hat{\rho}_{\text{CSM}}(\sqrt{\eta_L}\beta) = \frac{1}{2} (|+\sqrt{\eta_L}\beta\rangle\langle+\sqrt{\eta_L}\beta| + |-\sqrt{\eta_L}\beta\rangle\langle-\sqrt{\eta_L}\beta|) \quad (4.6)$$

である。

このように、環境との線形相互作用は元の CSS を古典的・統計的な混合へと変えてしまう。本章で目的とするところは、このように CSS の割合が減少した状態から、より CSS の多く含まれる状態を確率的に得ること、言い換えると ξ の値を増やすことである。

ちなみに、状態の“良さ”を表す指標として用いられることの多い純粋度 $\text{Tr}[\hat{\rho}^2]$ は、今回のケースに関しては適切な指標にはならないことにも注意する必要がある。たとえば、Eq. (4.4) で表されるような混合状態において ξ の値が小さくなってしまっても、コヒーレント振幅 β を小さくすることにより $\text{Tr}[\hat{\rho}^2]$ は上げることができるからである。こうした状態はきわめて真空に近くなってしまいうわけで、ここで求められている純粋な CSS とはまったく異なるものであることは明らかである。

4.2 提案するプロトコル

まず、ここで扱うケースは次の通りとする。

- CSS は $|+\alpha\rangle + e^{i\varphi}|-\alpha\rangle$ のように、2つのコヒーレント状態が等しい重み付けで重ね合わせられている
- コヒーレント振幅 α および重ね合わせ位相 φ の値はあらかじめ分かっている

この状態は、線形損失の透過によるデコヒーレンスの過程を経て混合状態になる。こうして生じた状態は、後に述べるように、振幅の減少した CSS ならびに CSM ($|+\alpha\rangle\langle+\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|$ で表されるような“コヒーレント状態の混合”) を古典的に混合したものである。本章における課題は、この状態に含まれる CSS の割合をできるだけ効率よく増加させることである。

そして、本章で提案するプロトコルの概略を Fig. 4.1 に示す。モード A には CSS と CSM の混合状態が、モード B には真空が、それぞれ入力される。モード A への入力状態の一部はビームスプリッターによりモード B へと取り出され、続いて何らかの測定が行われる。そこで、CSS と CSM の波動関数が異なることを利用して、モード B に対する測定結果からモード A への出力が CSS か CSM であるかを見分けることを試みる。これが見込みどおりであれば、最適なイベントを選択することにより A の出力に含まれる CSS の割合を高めることができるはずである。

さて、ここに示したようなプロトコルでは、CSS のコヒーレント振幅が減少することを避けることができない。そこで、参考文献 [1,2] にあるようなプロトコルを用いて、CSS のコヒーレント振幅を回復させることも 4.5 節において検討する。

4.3 一般的な部分測定による純粋化

CSS を確率的に純粋化するプロトコルを Fig. 4.1 に示した。これから調べる状態は、モード A から透過率 T のビームスプリッターに入射し、モード B から入射

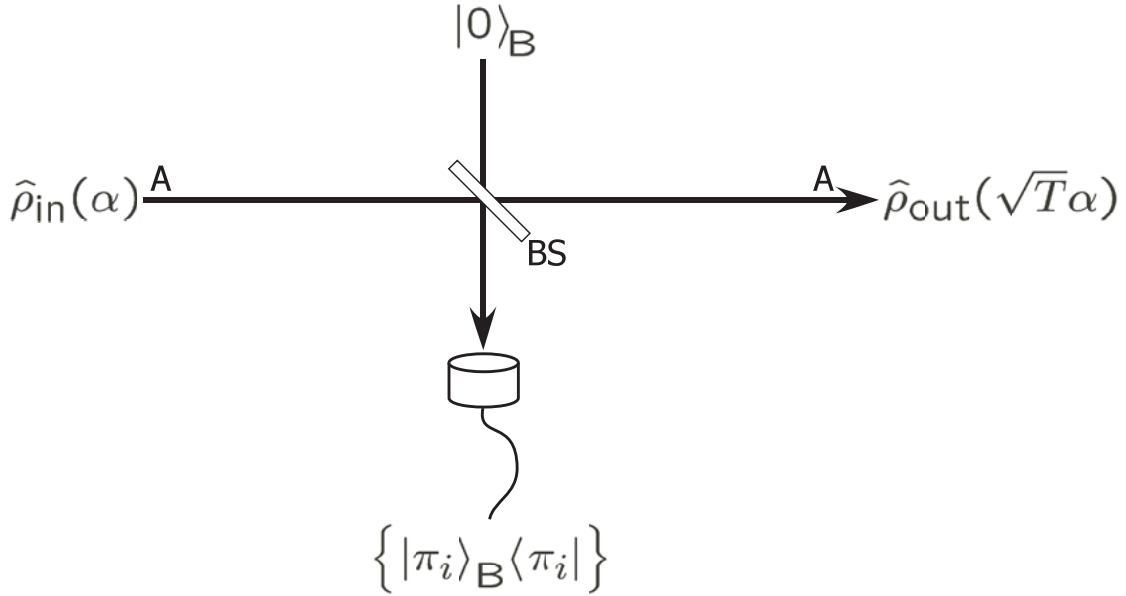


Figure 4.1: A schematic of the conditional purification scheme using partial measurement. BS: Beam splitter with the transmittance T .

する真空と組み合わせられる．反射してモード B に転じた状態は，ある正值演算子のセットからなる POVM (positive operator-valued measure) $\{|\pi_i\rangle_B \langle \pi_i|\}$ により測定される．ここで，もちろん

$$\sum_i |\pi_i\rangle_B \langle \pi_i| = \hat{1} \quad (4.7)$$

である．この測定結果に依存して，透過したモード A の状態は確率的に純粋化される．もし，測定値がある特定の範囲内であれば透過したモードは純粋化される．そうでなければ，より悪化した状態が出てくることになるが，そのときのイベントは破棄すればよい．

まず，モード A に入力される状態がすでに純粋な CSS，すなわち密度演算子

$$\hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha) = |\text{CSS}(\varphi, \alpha)\rangle_A \langle \text{CSS}(\varphi, \alpha)| \quad (4.8)$$

で表される状態だった場合について考えよう．このとき，ビームスプリッター後の状態は，Eq. (4.9) のようにエンタングルした状態になる．

$$\hat{B}_{AB}(\Theta) |\text{CSS}(\varphi, \alpha)\rangle_A |0\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{N(\varphi, \alpha)}} \left(\left| +\sqrt{T}\alpha \right\rangle_A \left| +\sqrt{R}\alpha \right\rangle_B + e^{i\varphi} \left| -\sqrt{T}\alpha \right\rangle_A \left| -\sqrt{R}\alpha \right\rangle_B \right) \quad (4.9)$$

ここで， $\hat{B}_{AB}(\Theta)$ はビームスプリッターの作用を表すユニタリー演算子であり，ビームスプリッターの透過率ならびに反射率は， $T = \cos^2 \Theta$ ならびに $R = \sin^2 \Theta$ のようにそれぞれ表される．当然のことながら，2つの出力モードのうち片方だけに注

目し残りの一方をトレースアウトしてしまえば，入力された CSS は真空との組み合わせにより混合状態に変換されてしまう．

このプロトコルが機能するためには，少なくとも，モード A の入力に含まれる CSS がモード A の出力に含まれる CSS へと確実に写像されなくてはならない．そのような写像が行われるためには，モード B の出力に対して測定を行った結果得られる固有値の中に適切なものが存在していなければならない．これはすなわち，採用されるイベントに対応する測定結果が

$$\langle \pi_j^s | -\sqrt{R}\alpha \rangle = e^{i\varphi'_j} \langle \pi_j^s | +\sqrt{R}\alpha \rangle \quad (4.10)$$

を満たさなければならないということである．ここで， s は採用されるイベント (successful event) を意味している．このように選ばれたイベントにおいて，モード A への出力は

$$\begin{aligned} & {}_B \langle \pi_j^s | \hat{B}_{AB}(\Theta) | \text{CSS}(\varphi, \alpha) \rangle_A |0\rangle_B \\ &= \frac{1}{N(\varphi, \alpha)^{1/2}} \langle \pi_j^s | +\sqrt{R}\alpha \rangle \left(|+\sqrt{T}\alpha\rangle_A + e^{i(\varphi+\varphi'_j)} |-\sqrt{T}\alpha\rangle_A \right) \\ &= \langle \pi_j^s | \sqrt{R}\alpha \rangle \left(\frac{N(\varphi + \varphi'_j, \sqrt{T}\alpha)}{N(\varphi, \alpha)} \right)^{1/2} | \text{CSS}(\varphi + \varphi'_j, \sqrt{T}\alpha) \rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

で与えられる (ただし，規格化はされていない)．このように，入力の CSS に較べると振幅が小さく，また重ね合わせの位相も異なっているが，出力もやはり CSS となっている．そしてこれは，Eq. (4.10) を満足するような測定を用いることにより，モード A の出力中に含まれる CSS の割合を増加させようことを意味する．

次に，線形ロスに起因するデコヒーレンスにより CSS と CSM の古典的な混合となった状態

$$\hat{\rho}_{\text{in}}(\alpha) = \xi_{\text{in}} \hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha) + (1 - \xi_{\text{in}}) \hat{\rho}_{\text{CSM}}(\alpha) \quad (4.12)$$

が系のモード A に入力されるケースについて考えよう．ここでも，先ほど純粋な CSS を入力として扱った時と同じように，反射した場に対して測定を行い Eq. (4.10) の条件を満たすイベントを採用する．その結果，モード A の出力には

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{out}}(\sqrt{T}\alpha) &= \frac{\xi_{\text{in}} \mathcal{P}_{\text{CSS}} \hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi + \varphi'_j, \sqrt{T}\alpha) + (1 - \xi_{\text{in}}) \mathcal{P}_{\text{CSM}} \hat{\rho}_{\text{CSM}}(\sqrt{T}\alpha)}{\xi_{\text{in}} \mathcal{P}_{\text{CSS}} + (1 - \xi_{\text{in}}) \mathcal{P}_{\text{CSM}}} \\ &\equiv \xi_{\text{out}} \hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi + \varphi'_j, \sqrt{T}\alpha) + (1 - \xi_{\text{out}}) \hat{\rho}_{\text{CSM}}(\sqrt{T}\alpha) \end{aligned} \quad (4.13)$$

という密度演算子で与えられる現れる状態が現れる．ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{CSS}} &= \text{Tr}_A \left[{}_B \langle \pi_j^s | \hat{B}_{AB}(\Theta) \left(\hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha) \otimes |0\rangle_B \langle 0| \right) \hat{B}_{AB}^\dagger(\Theta) | \pi_j^s \rangle_B \right] \\ &= \left| \langle \pi_j^s | \sqrt{R}\alpha \rangle \right|^2 \frac{1 + e^{-2T\alpha^2} \cos(\varphi + \varphi'_j)}{1 + e^{-2\alpha^2} \cos \varphi} \end{aligned} \quad (4.14)$$

および

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{CSM}} &= \text{Tr}_A \left[{}_B \langle \pi_j^s | \hat{B}_{AB}(\Theta) \left(\hat{\rho}_{\text{CSM}}(\alpha) \otimes |0\rangle_B \langle 0| \right) \hat{B}_{AB}^\dagger(\Theta) | \pi_j^s \rangle_B \right] \\ &= \left| \langle \pi_j^s | +\sqrt{R}\alpha \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

は、それぞれ状態 $\hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha)$ および $\hat{\rho}_{\text{CSM}}(\alpha)$ において得られる測定値 π_j^s に対する確率分布である。その結果、純粋化後の状態に含まれる CSS の割合は

$$\begin{aligned}\xi_{\text{out}} &= \frac{\mathcal{P}_{\text{CSS}}}{\xi_{\text{in}} \mathcal{P}_{\text{CSS}} + (1 - \xi_{\text{in}}) \mathcal{P}_{\text{CSM}}} \xi_{\text{in}} \\ &= \frac{1}{\xi_{\text{in}} + \mathcal{P}_{\text{CSM}}/\mathcal{P}_{\text{CSS}} (1 - \xi_{\text{in}})} \xi_{\text{in}}\end{aligned}\quad (4.16)$$

のようになる。純粋化が成功する、すなわち $\xi_{\text{out}} > \xi_{\text{in}}$ となる条件は、

$$\frac{\mathcal{P}_{\text{CSM}}}{\mathcal{P}_{\text{CSS}}} = \frac{1 + e^{-2\alpha^2} \cos \varphi}{1 + e^{-2T\alpha^2} \cos(\varphi + \varphi'_j)} < 1, \quad (4.17)$$

で表される。

ここで、純粋化の効率 $\xi_{\text{out}}/\xi_{\text{in}}$ が最大になるためには $\mathcal{P}_{\text{CSM}}/\mathcal{P}_{\text{CSS}}$ が最小化されなければならない。Eq. (4.17) を見ると分かるように、この関数の値を決めるパラメータのうち、任意に決められるものには φ'_j と T の2つがある。まず、位相 φ'_j を最適化して $\mathcal{P}_{\text{CSM}}/\mathcal{P}_{\text{CSS}}$ を最小化しようとするれば $\varphi'_j = -\varphi$ となる。そして、この項は T を減らすことにより小さくできることも明らかである。また、入力状態に含まれる CSS のパラメータについて考えると、 $\mathcal{P}_{\text{CSM}}/\mathcal{P}_{\text{CSS}}$ は $\varphi = 0$ の場合に最大となり、 $\varphi = \pi$ の場合に最小となることが分かる。場合にもっともさらに、 α は小さいほうが良いことも明らかである。

これらはいずれも、出力中に含まれる CSS の割合と出力状態に含まれる CSS のコヒーレント振幅がトレードオフの関係にあることを示している。CSS の応用にあたっては、コヒーレント振幅は大きいほうが望ましいため、このプロトコルを適用した後の CSS を増幅できるかどうかについても議論する。

なお、このプロトコルについての最適な POVM は、Eq. (4.10) に従い、なおかつ $\varphi'_j + \varphi = 0$ を満足することにより Eq. (4.17) を最小化するものである。このように、用いられる測定方法に対する要求は比較的ゆるいため、測定方法の選択に関してはいくぶんかの自由度がある。そして、これらの条件を満たす測定のうち、よく知られたものとしては光子数測定とホモダイン検波が挙げられる。仮に光子数測定を使ったとすると、純粋化が可能なのは重ね合わせ位相が $\varphi = 0$ または π である場合のみである。それに加えて、こうした検出器を用意するのは大変に難しいため、一般的な実験に用いるというわけにはいかない。

しかしながら、幸いなことに、光子数識別と比較してはるかに成熟した測定技術であるホモダイン検波も純粋化を成功させるための条件を満たす。さらに、ホモダイン検波を用いると φ の値に対する制約はなくなる。続く 4.4 節では、ホモダイン検波を用いた CSS の純粋化について、さらに詳しく議論する。

4.4 ホモダイン検波を用いる純粋化

本節では、Fig. 4.1 中のモード B に対する部分測定としてホモダイン検波を用いる場合について考える。第2節でも述べたように、ホモダイン検波は電磁場の

直交位相振幅を固有値として得る測定である．そして，得られる直交位相振幅の成分は，局所発振光 (LO: local oscillator) の位相 θ で決まる．この操作の数学的な表現は，状態を連続固有値のセット $\{|x_\theta\rangle\}$ に射影する演算子 $|x_\theta\rangle\langle x_\theta|$ である．これらの直交位相成分のうち， $x_0 = q$ は“位置”， $x_{\pi/2} = p$ は“運動量”と呼ばれならわされており，とりわけ重要である．

4.4.1 完全なホモダイン検波を用いる場合

まず，本プロトコルの特性について見積もるため，ホモダイン検波が完全すなわちホモダイン効率が $\eta_{\text{HD}} = 1$ である場合を考える．もちろん，現実的にはホモダイン効率は $\eta_{\text{HD}} < 1$ であるが，こうしたロスの影響については4.4.2節において考察する．

あるコヒーレント状態 $|\beta\rangle$ をホモダイン検波により測定し，直交位相振幅の固有値を得る場合の確率振幅は

$$\langle x_\theta | \beta \rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp \left[-\frac{1}{2} x_\theta^2 - \sqrt{2} e^{-i\theta} x_\theta \beta - \frac{1}{2} e^{-2i\theta} \beta^2 - \frac{1}{2} |\beta|^2 \right] \quad (4.18)$$

で与えられる．ここで提案している純粋化のプロトコルが機能する必要条件 Eq. (4.10) は $\theta = \pi/2$ のとき，つまり測定により運動量固有状態への射影が行われたときに満たされる．この場合，Eq. (4.10) は次のようになる．

$$\langle x_{\pi/2} | -\beta \rangle = e^{i2\sqrt{2}x_{\pi/2}\beta} \langle x_{\pi/2} | +\beta \rangle \quad (4.19)$$

また，純粋化後された CSS の重ね合わせ位相 φ にもたらされる位相シフト φ' は $x_{\pi/2}$ に依存し，以下のように表される．

$$\varphi' = 2\sqrt{2}x_{\pi/2}\beta \quad (4.20)$$

このようにホモダイン検波においては， $x_{\pi/2}$ を適切に選ぶことにより，与えられた φ に対して φ' を最適化することができる．

さて，これ以降は簡単のため

$$p_B \equiv x_{\pi/2}$$

と置くことにする¹．すると，Eq. (4.11) に対応する条件付き出力 (未規格化) は，以下のように表される．

$$\begin{aligned} & {}_B \langle p_B | \hat{B}_{\text{AB}}(\Theta) | \text{CSS}(\varphi, \alpha) \rangle_A | 0 \rangle_B \\ &= \frac{1}{\sqrt{N(\varphi, \alpha)}} \langle p_B | \sqrt{R}\alpha \rangle \left(| +\sqrt{T}\alpha \rangle_A + e^{i(\varphi+\varphi')} | -\sqrt{T}\alpha \rangle_A \right) \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}p_B^2 - i\sqrt{2R}\alpha p}}{\pi^{1/4}} \sqrt{\frac{1 + e^{-2T\alpha^2} \cos(\varphi + 2\sqrt{2R}\alpha p_B)}{1 + e^{-2\alpha^2} \cos \varphi}} \\ & \quad \times | \text{CSS}(\varphi + 2\sqrt{2R}\alpha p_B, \sqrt{T}\alpha) \rangle_A \end{aligned} \quad (4.21)$$

¹ p_B : モード B における直交位相振幅 p という意味で添え字をつけた．

モード A への入力 $\hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha)$ ならびに $\hat{\rho}_{\text{CSM}}(\alpha)$ であった場合, モード B の出力における直交位相振幅 p_B の確率密度関数は以下の Eqs. (4.22), (4.23) のようになる.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha, \Theta; p_B) &\equiv \text{Tr}_A \left[\langle p_B | \hat{B}_{\text{AB}}(\Theta) \hat{\rho}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha) \otimes |0\rangle_B \langle 0| \hat{B}_{\text{AB}}^\dagger(\Theta) |p_B\rangle_B \right] \\ &= \frac{e^{-p_B^2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1 + e^{-2T\alpha^2} \cos(\varphi + 2\sqrt{2R}\alpha p_B)}{1 + e^{-2\alpha^2} \cos \varphi} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{CSM}}(p_B) &\equiv \text{Tr}_A \left[\langle p_B | \hat{B}_{\text{AB}}(\Theta) \hat{\rho}_{\text{CSM}}(\alpha) \otimes |0\rangle_B \langle 0| \hat{B}_{\text{AB}}^\dagger(\Theta) |p_B\rangle_B \right] \\ &= \frac{e^{-p_B^2}}{\sqrt{\pi}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

当然のことながら, $\Theta = \pi/2$ すなわち $T = 0, R = 1$ であれば, Eq. (4.22) は第2章の Eq. (2.116) においてコヒーレント振幅 α を実数に取ったものと同じである. また, 本節における条件 (α は実数, ホモダイン検波における測定は $\{|p_B\rangle_B \langle p_B|\}$) の下では, Eq. (4.23) は α や Θ によらず真空と同じ確率分布を持つ.

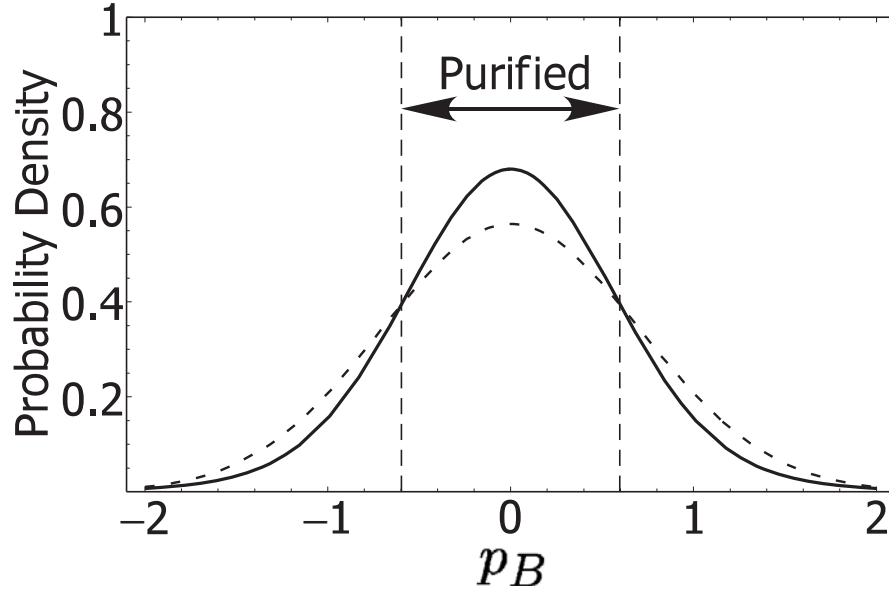


Figure 4.2: Quadrature distributions of the CSS with $\varphi = 0$ and the CSM. (solid line) p-distribution of the CSS $\mathcal{P}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha, \Theta; p_B)$. (dotted line) p-distribution of the CSM $\mathcal{P}_{\text{CSM}}(p_B)$. The transmittance of the beam-splitter and the coherent amplitude are $T = 0.5$ ($\Theta = \pi/4$) and $\alpha = 1$, respectively. The purification protocol is successful when the measurement outcome falls within the interval indicated by the dashed vertical lines.

ここで, ビームスプリッターの透過率 $T = 0.5$ すなわち $\Theta = \pi/4$, コヒーレント振幅 $\alpha = 1$ という条件の下, モード A に CSS が入力された際の確率密度関数 $\mathcal{P}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha, \Theta; p_B)$ を計算し, $\varphi = 0$ の場合について Fig. 4.2 に, $\varphi = \pi$ の場合

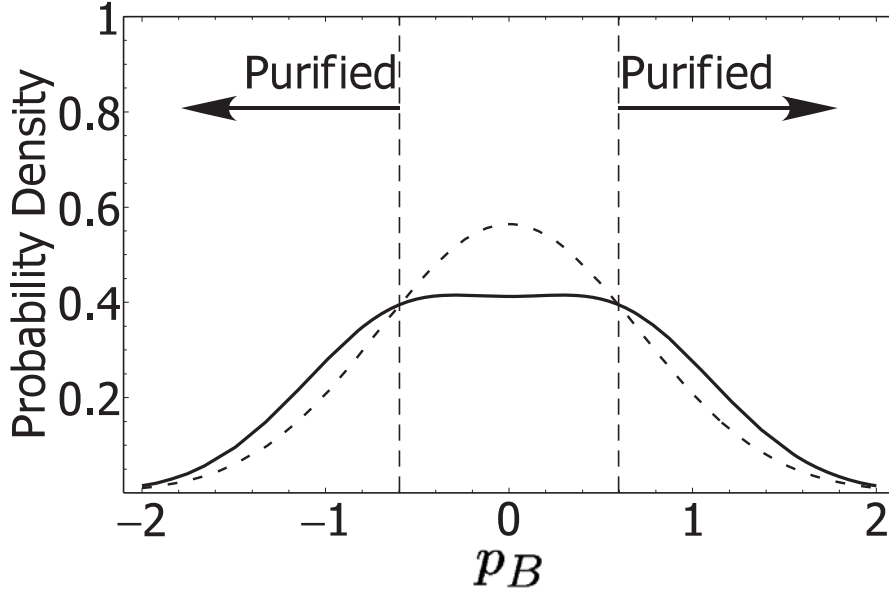


Figure 4.3: Quadrature distributions of the CSS with $\varphi = \pi$ and the CSM. (solid line) p-distribution of the CSS $\mathcal{P}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha, \Theta; p_B)$. (dotted line) p-distribution of the CSM $\mathcal{P}_{\text{CSM}}(p_B)$. The transmittance of the beam-splitter and the coherent amplitude are $T = 0.5$ ($\Theta = \pi/4$) and $\alpha = 1$, respectively. The purification protocol is successful when the measurement outcome falls outside the interval indicated by the dashed vertical lines.

について Fig. 4.3 にそれぞれ示した。また、これらの図には、同じ条件でモード A に CSM が入力された際の確率密度関数 $\mathcal{P}_{\text{CSM}}(p_B)$ も併記した。点線で描かれた $\mathcal{P}_{\text{CSM}}(p_B)$ がガウス型になっているのに対し、実線で描かれた $\mathcal{P}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha, \Theta; p_B)$ は、2つのコヒーレント状態間の量子干渉により非ガウス型になっている。ここで提案した純粋化プロトコルが機能することは、このように確率密度関数の形が CSS と CSM で大きく異なることに起因している。

ここで、純粋化を行うためには

$$\mathcal{P}_{\text{CSM}}(p_B) < \mathcal{P}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha, \Theta; p_B)$$

となるような p_B の値が得られた時のイベントを採用すればよい。具体的には、 $\varphi = 0$ の場合においては、 p_B の値がある範囲の内側に得られた時のイベントを、 $\varphi = \pi$ においては、逆にその範囲の外側に得られた時のイベントを採用することになる。

次に、Eq. (4.16) に Eq. (4.22) および Eq. (4.23) を代入することにより、この純粋化プロトコルの効率 $\xi_{\text{out}}/\xi_{\text{in}}$ を計算し、 $\varphi = 0$ の場合について Fig. 4.4 に、 $\varphi = \pi$ の場合について Fig. 4.5 にそれぞれプロットした。 $\varphi = 0$ の場合、純粋化が可能な条件 Eq. (4.10) が満たされるのは

$$|\cos \varphi'| > e^{-2R\alpha^2}$$

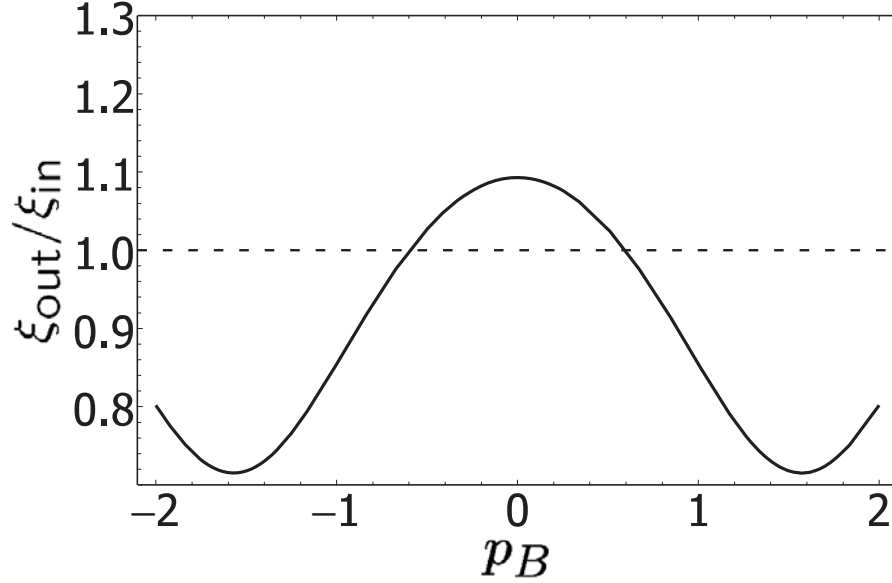


Figure 4.4: Purification efficiency for the CSS with $\varphi = 0$ conditioned on the homodyne detection outcomes. The phase of the local oscillator is chosen to measure the quadrature $p_B \equiv x_{\pi/2}$. The transmittance of the beam-splitter, the coherent amplitude, and the modal purity of the input state are $T = 0.5$ ($\Theta = \pi/4$), $\alpha = 1$, and $\xi_{\text{in}} = 0.5$, respectively.

の範囲であり，さらに純粋化効率が最大化されるのは $\varphi' = 0$ の時である．そして，これに対応する測定値が

$$p_B^{\text{opt}} = 0$$

であることは Eq. (4.20) より明らかである．一方， $\varphi = \pi$ の場合には

$$|\cos \varphi'| < e^{-2R\alpha^2}$$

の範囲で純粋化が実現され， $\varphi' = \pi$ において純粋化効率が最大化される．これに対応する測定値は，Eq. (4.20) に $\varphi' = \pi$ および $\beta = \sqrt{R}\alpha$ を代入することにより

$$p_B^{\text{opt}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}R\alpha}$$

であることが分かる．なお， $\varphi = \pi$ の場合には $\varphi = 0$ の場合よりも得られる純粋化効率は大きい．その反面， $\varphi = \pi$ の CSS は純粋化のプロセスを通じて $\varphi = 0$ の CSS へと変換されてしまうことに注意する必要がある．

また， ξ_{out} の最大値を ξ_{in} の関数として， $T = 1/2$ ならびに $\alpha = 1$ の場合について計算し Fig. 4.6 に示した．これにより，純粋化の効率は $\xi_{\text{in}} = 1/2$ 付近でもっとも大きくなることが分かる．

さらに，入力状態に含まれる CSS コヒーレント振幅 α ならびにビームスプリッターの透過率 T に純粋化効率 $\xi_{\text{out}}/\xi_{\text{in}}$ がどのように依存するか $\xi_{\text{in}} = 0.5$ の条件において計算し，Fig. 4.7 ならびに Fig. 4.8 にそれぞれ示した．Fig. 4.7 より，純粋

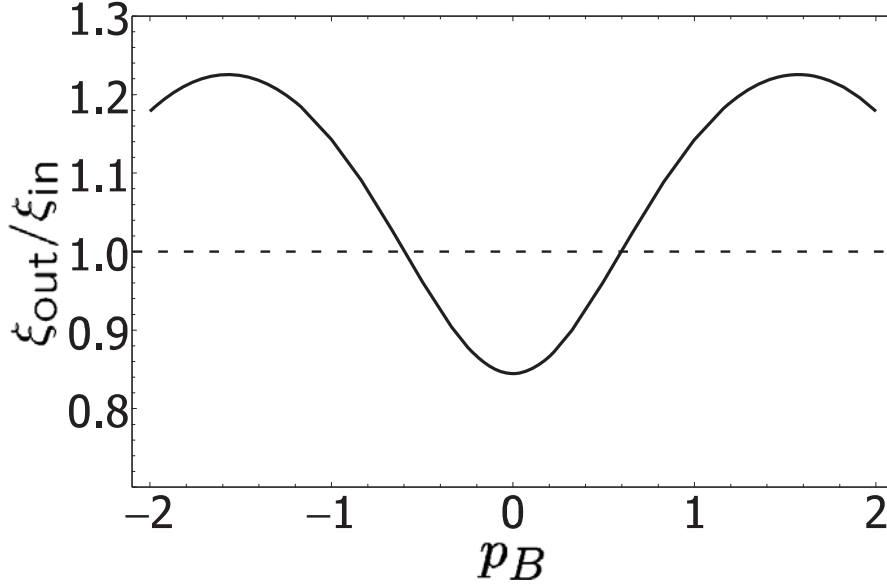


Figure 4.5: Purification efficiency for the CSS with $\varphi = \pi$ conditioned on the homodyne detection outcomes. The phase of the local oscillator is chosen to measure the quadrature $p_B \equiv x_{\pi/2}$. The transmittance of the beam-splitter, the coherent amplitude, and the modal purity of the input state are $T = 0.5$ ($\Theta = \pi/4$), $\alpha = 1$, and $\xi_{\text{in}} = 0.5$, respectively.

化効率は $\varphi = 0$ の入力状態 (実線) については $\alpha \sim 1$ 付近で最大となり, $\varphi = \pi$ の入力状態 (破線) については, α が小さくなるほど大きくなることが分かる. また Fig. 4.8 より, ビームスプリッターの透過率 T は小さい方が有利であることも分かる.

しかしながら, すでに指摘したように, 小さい T は CSS のコヒーレント振幅を減じてしまうため望ましいものではない. その一方で, 当然のことながら, $T = 1$ における純粋化の成功は起こりえないことにも注意する必要がある. 確かに Fig. 4.8 において $\xi_{\text{out}}/\xi_{\text{in}}$ の値は $\varphi = \pi$ ならびに $T = 1$ において 1 を上回っているが, 確率密度関数 $\mathcal{P}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha, \Theta; p_B)$ の値はゼロになってしまう. つまり, 実際にこうしたイベントが発生することはない.

これらの計算結果から, この純粋化プロトコルは [3] において生成されたような小振幅の CSS に対して有効であることが分かる. そして, これから 4.5 節で取り上げる課題が導かれる.

以上のように, 部分測定としてホモダイン検波を用いたときの純粋化効率を, 特定のパラメータについて計算した. ホモダイン検波は, 本プロトコルを実現するための最適量子測定の一つであり, また実現性にも富むが, 残念ながら, 一般的に求められるコヒーレント振幅 $\alpha > 2$ を持つ CSS を出力として取り出すのは困難であることも分かった. ホモダイン検波のようなガウス型の操作では, この程度の純粋化効率が限界であるとも考えられる.

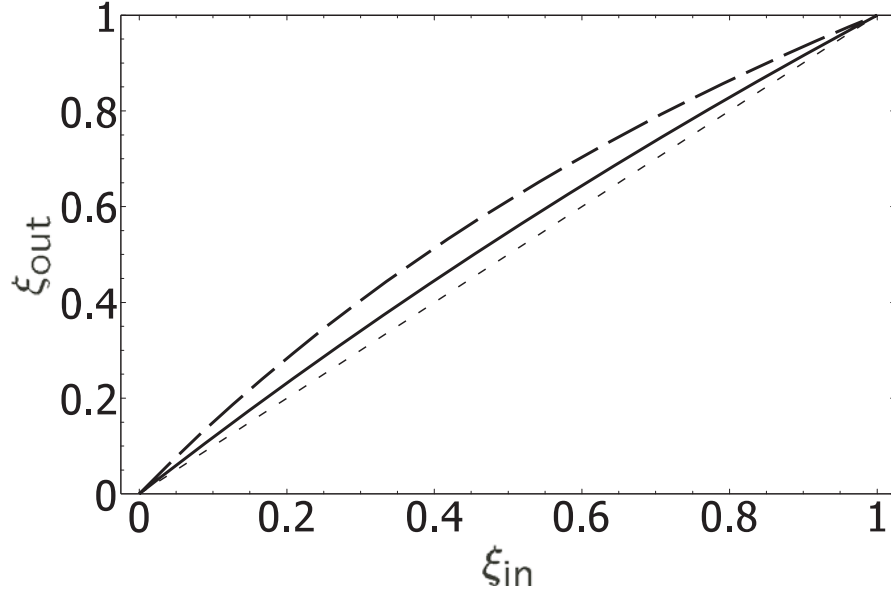


Figure 4.6: Dependence of the ξ_{out} on ξ_{in} for the CSS with $\varphi = 0$ (solid line) and $\varphi = \pi$ (dashed line) where the outputs are conditioned on the measurement outcomes $p_B = 0$ and $p_B = \pi/2$, respectively. The dotted line denotes $\xi_{\text{out}} = \xi_{\text{in}}$ as a reference. The transmittance of the beam-splitter and the coherent amplitude are $T = 0.5$ ($\Theta = \pi/4$) and $\alpha = 1$, respectively.

4.4.2 ホモダイン検波におけるロスの影響

ここでは、部分測定の本モダイン検波におけるロスの影響について考察する。現実の実験系においては、フォトダイオードの量子効率、ミスアラインメント、モードミスマッチ、光学素子におけるロスなどにより、ホモダイン効率は η_{HD} は 1 より小さくなる。そして、第 2 章で述べたように、効率 η_{HD} のホモダイン検波は、ロスのないホモダイン検波の前に透過率 η_{HD} のビームスプリッターが置かれているものと考えることができる。また同じようにして、透過率 η_{L} の損失媒体も、やはり透過率 η_{HD} のビームスプリッターが置かれているものと考えることができる。

これらを踏まえると、本章で提案している純粋化プロトコルは Fig. 4.9 のように書き直すことができる。そして、出力される状態は

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{out}} = & \text{Tr}_{\text{AL}} \left[{}_{\text{B}} \langle p_B | \hat{B}_{\text{BH}}(\Theta_{\text{HD}}) \hat{B}_{\text{AB}}(\Theta_{\text{BS}}) \hat{B}_{\text{AL}}(\Theta_{\text{L}}) \hat{\rho}_{\text{in}} \right. \\ & \otimes |0\rangle_{\text{L}} \langle 0| \hat{B}_{\text{AL}}^{\dagger}(\Theta_{\text{L}}) \\ & \otimes |0\rangle_{\text{B}} \langle 0| \hat{B}_{\text{AB}}^{\dagger}(\Theta_{\text{BS}}) \\ & \left. \otimes |0\rangle_{\text{H}} \langle 0| \hat{B}_{\text{BH}}^{\dagger}(\Theta_{\text{HD}}) |p_B\rangle_{\text{B}} \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

のように表される。ここで、

$$\eta_{\text{L}} = \cos^2 \Theta_{\text{L}}, \quad T = \cos^2 \Theta_{\text{BS}}, \quad \eta_{\text{HD}} = \cos^2 \Theta_{\text{HD}}$$

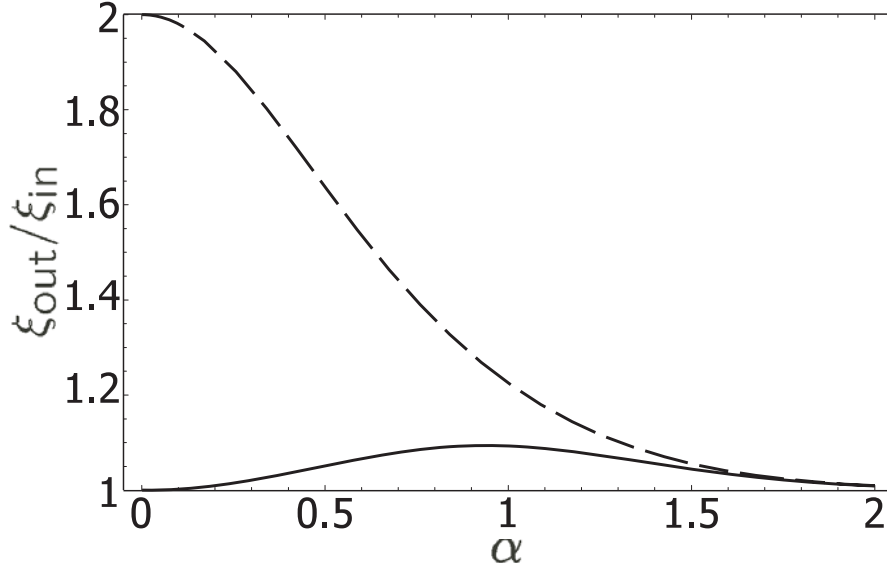


Figure 4.7: Dependence of the purification efficiency on the initial coherent amplitude α for the CSSs with $\varphi = 0$ (solid line) and $\varphi = \pi$ (dashed line). The measurement outcome p_B is selected to satisfy the optimal condition $\varphi + \varphi' = 0$. The transmittance of the beam-splitter and the coherent amplitude are $T = 0.5$ ($\Theta = \pi/4$) and $\alpha = 1$, respectively.

と置いている。

次に、この Eq. (4.24) における入力状態 $\hat{\rho}_{\text{in}}$ に、任意の状態をコヒーレント状態で展開した際の密度行列要素 $|\alpha_1\rangle_A \langle \alpha_2|$ を代入して計算すると

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{out}} &= \pi^{-1/2} \exp \left[-\frac{1 - \eta_L (T + \eta_{\text{HD}} R)}{2} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \right] \\ &\quad \times \exp \left[-p_B^2 + i\sqrt{2\eta_L \eta_{\text{HD}} R} (\alpha_1 - \alpha_2) p_B \right] \\ &\quad \times \left| \sqrt{\eta_L T} \alpha_1 \right\rangle_A \left\langle \sqrt{\eta_L T} \alpha_2 \right| \end{aligned} \quad (4.25)$$

が得られる。ここで、 α_1 および α_2 は実数である。

この Eq. (4.25) と第 2 章の Eq. (2.141) を比較することにより、ホモダイン検波のロスによる影響を見積もるには、Eq. (4.5) 中の η_L を $\eta_L (T + \eta_{\text{HD}} R)$ で置き換えればよいことが分かる。しかしながら、Si フォトダイオードの量子効率が十分に高い波長域において、cw レーザーを光源として用いた最近の実験では、本論文の第 5 章や文献 [4] にあるように $\eta_{\text{HD}} \geq 0.98$ といった値も得られている。たとえば、 $\varphi = \pi$ 、 $T = 0.5$ (すなわち $\Theta_{\text{BS}} = \pi/4$)、 $\alpha = 1$ 、 $\xi_{\text{in}} = 0.5$ といった条件において、純粋化後の状態に含まれる CSS の割合は、 $\eta_{\text{HD}} = 1$ について $\xi_{\text{out}} = 0.613$ であるのに対し、 $\eta_{\text{HD}} = 0.98$ については $\xi_{\text{out}} = 0.609$ となる。

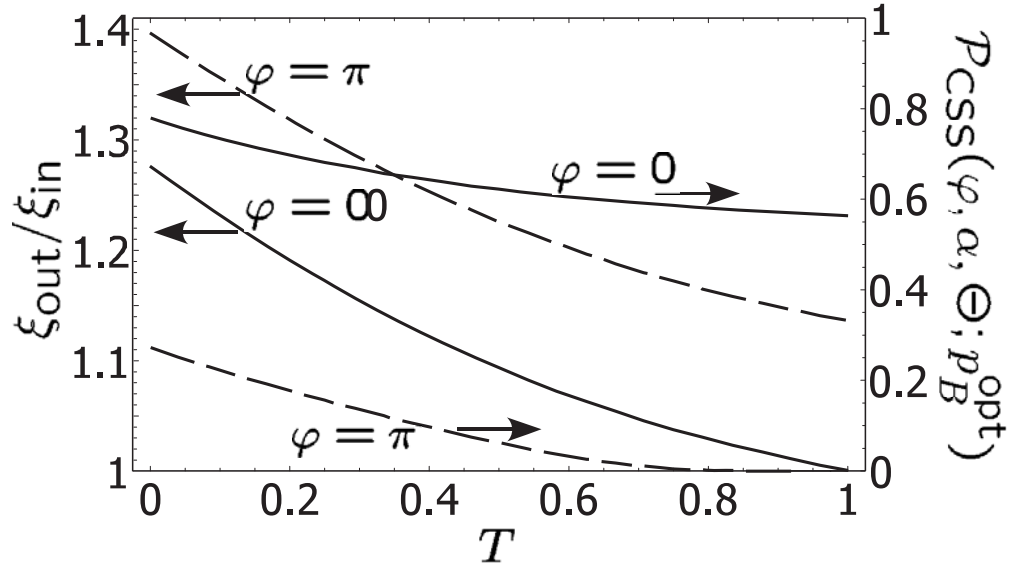


Figure 4.8: Dependences of the purification efficiency $\xi_{\text{out}}/\xi_{\text{in}}$ (left axis) and the probability density $\mathcal{P}_{\text{CSS}}(\varphi, \alpha, \Theta; p_B^{\text{opt}})$ (right axis) on the transmittance of the beam-splitter T for $\varphi = 0$ (solid line) and $\varphi = \pi$ (dashed line). The modal purity of the input state and the coherent amplitude are $\xi_{\text{in}} = 0.5$ and $\alpha = 1$, respectively. The measurement outcome p_B^{opt} is selected to satisfy the optimal condition $\varphi + \varphi' = 0$.

4.5 CSS 増幅プロトコルについて

コヒーレント振幅の小さな CSS から、その大きな CSS を確率的に生成するプロトコルが Lund らにより提案された [1]。ここでは、2つの小振幅 CSS と、補助的なコヒーレント状態、ビームスプリッター、on/off 検出器を用いる。さらに、このプロトコルの拡張性については、Jeong らによる検討が行われた [2]。

この CSS 増幅プロトコルの優れた点として、入力状態がスクイズされた単一光子状態とスクイズド状態の混合であった場合、スクイズド状態を取り除くことができるというものがある。このプロトコルが提案されている文献では、増幅される前の小振幅 CSS として、SS スキームにより生成された擬似 CSS (スクイズされた単一光子状態) が想定されている。第3章において述べたように、純粋な単一光子状態を用意することは困難であり、現実的に用意できるのは単一光子状態と真空の混合状態である。その結果、CSS 増幅プロトコルの系に入力されることになるのは、擬似 CSS (スクイズされた単一光子状態) とスクイズド状態 (真空スクイズド状態) の混合状態となる。

本節では、デコヒーレンスの結果 CSS と CSM の混合となった状態から、Lund らの CSS 増幅プロトコルを使って、より振幅の大きい CSS を得ることができるかどうか検討する。そして残念ながら、ほとんどの場合には出力状態に含まれる CSM の割合が増加してしまうことも示す。

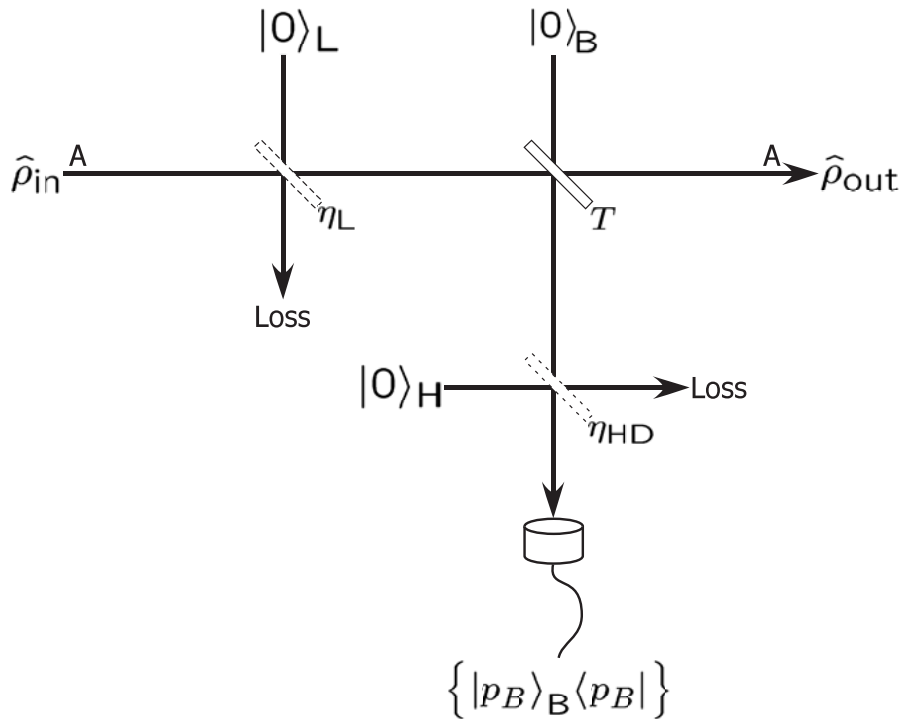


Figure 4.9: A model of the purification protocol including a linear lossy channel and an inefficient homodyne detection. Fictitious beam-splitters represent the linear lossy channel with its transmittance η_L and the inefficient homodyne detection with its efficiency η_{HD} . A real beam-splitter with its transmittance T corresponds to the tapping beam-splitter in Fig. 4.1.

文献 [1] において提案された CSS 増幅プロトコルは Fig. 4.10 に示す通りである。まず、小さい振幅 α を持つ 2 つの CSS が 50:50 ビームスプリッター 1 で合波される。そして、出力の片方はさらに 50:50 ビームスプリッター 2 で振幅 $\sqrt{2}\alpha$ のコヒーレント状態と合波される。このビームスプリッター 2 の出力は、それぞれ on/off 光子検出器で測定される。両方の光子検出器が光子を検出すれば、ビームスプリッター 1 の残りは、振幅 $\sqrt{2}\alpha$ の CSS に写像されるはずである。この増幅作用に加えて、この写像は CSS (スクイーズされた単一光子状態) に混入したスクイーズド状態を取り除くこともできる。

4.5.1 CSS と CSM の混合を入力とした場合

さて、ここで入力 $\hat{\rho}_{in}(\alpha)$ がデコヒーレンスを受けた CSS、つまり Eq. (4.12) で定義したような CSS と CSM の混合であるとしよう。すると、入力状態は 2 つの

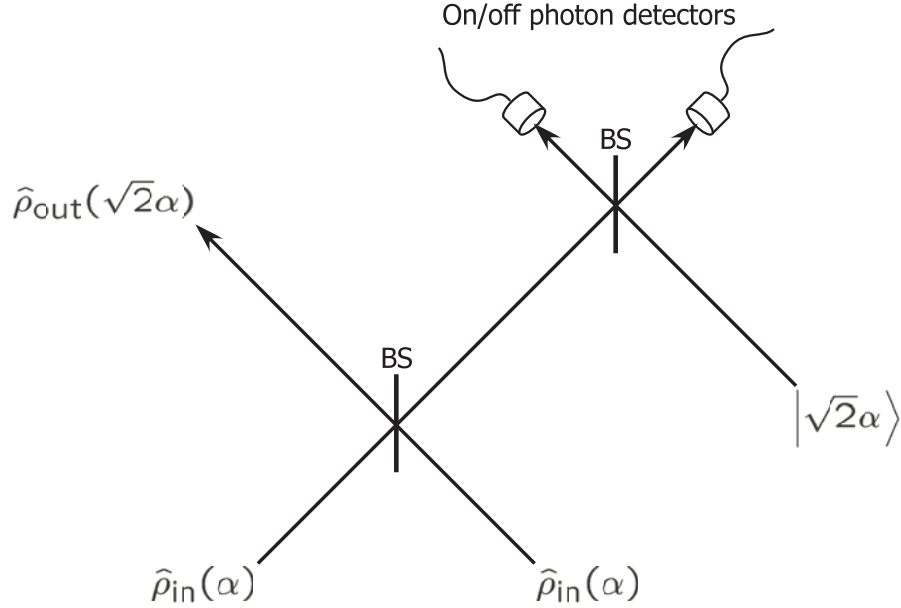


Figure 4.10: A schematic of the CSS-amplification process [1] with the decohered input and output.

$\hat{\rho}_{in}(\alpha)$ のテンソル積で表される .

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{in} \otimes \hat{\rho}_{in} &= \xi_{in}^2 \hat{\rho}_{CSS}(\varphi, \alpha) \otimes \hat{\rho}_{CSS}(\varphi, \alpha) + (1 - \xi_{in})^2 \hat{\rho}_{CSM}(\alpha) \otimes \hat{\rho}_{CSM}(\alpha) \\ &\quad + \xi_{in}(1 - \xi_{in}) (\hat{\rho}_{CSS}(\varphi, \alpha) \otimes \hat{\rho}_{CSM}(\alpha) + \hat{\rho}_{CSS}(\varphi, \alpha) \otimes \hat{\rho}_{CSM}(\alpha)) \end{aligned} \quad (4.26)$$

光子検出の結果によって条件付けされ，増幅される状態において，CSS に写像されるのは Eq. (4.26) 右辺の第 1 項のみである．それ以外は，CSM へと変換されてしまう．その結果，出力状態に含まれる CSS の割合は

$$\xi_{out} \sim \xi_{in}^2$$

のように減少してしまう．さらに正確には，出力中に含まれる CSS の割合 ξ_{out}^+ および ξ_{out}^- は Eq. (4.27) のように与えられる．ここで， ξ_{out}^+ は入力状態に含まれる CSS が $\hat{\rho}_{CSS}(0, \alpha)$ だった場合， ξ_{out}^- は入力状態に含まれる CSS が $\hat{\rho}_{CSS}(\pi, \alpha)$ だった場合に対応している．

$$\xi_{out}^{\pm} = \frac{\frac{1 + e^{-4\alpha^2}}{(1 \pm e^{-2\alpha^2})^2} \xi_{in}^2}{\frac{1 + e^{-4\alpha^2}}{(1 \pm e^{-2\alpha^2})^2} \xi_{in}^2 + \frac{2\xi_{in}(1 - \xi_{in})}{1 \pm e^{-2\alpha^2}} + (1 - \xi_{in})^2} \quad (4.27)$$

ここで，確率 ξ_{out}^{\pm} で出てくる CSS は，常に $|CSS(0, \sqrt{2}\alpha)\rangle$ であることに注意する必要がある [1]．入力された CSS が純粋化されるためにパラメーターの値がどのよ

うな範囲にあればよいかは,

$$\xi_{\text{out}}^{\pm} > \xi_{\text{in}} \quad (4.28)$$

から見積もられる．まず, $\varphi = 0$ の場合, つまり $\hat{\rho}_{\text{CSS}}(0, \alpha)$ を増幅しようとする場合, 不等式 Eq. (4.28) が満足されることはない．そのため, このケースでは常に ξ_{out}^+ は入力状態に含まれる CSS の割合より小さくなる, つまりデコヒーレンスの度合いが大きくなってしまふ．一方で, $\varphi = \pi$ の場合, つまり $\hat{\rho}_{\text{CSS}}(\pi, \alpha)$ を増幅しようとする場合には, Eq. (4.29) の条件を満たすことにより Eq. (4.28) を満足することが可能である．つまり, 振幅を増やしつつ純粋化も行えるパラメータの領域が存在する．

$$\xi_{\text{in}} > \frac{1}{2} \left(e^{2\alpha^2} - 1 \right)^2 \quad (4.29)$$

この条件は, デコヒーレンスの度合いを増やさずに振幅の増加を図るためには, 入力状態に含まれる CSS の平均光子数が

$$\alpha^2 < \ln(\sqrt{2} + 1)/2 \approx 0.44$$

でなければならないことを意味している．

4.5.2 純粋化プロトコルと増幅プロトコルの組み合わせについて

ここでは, Fig. 4.11 に描いたように, 本章で提案した CSS 純粋化プロトコルと Lund らが文献 [1] で提案した CSS 増幅プロトコルの組み合わせが有効か否かについて調べる．まず, 初期状態 $\hat{\rho}_{\text{in}}(\alpha)$ が純粋化プロトコルを用いて純粋化されるものとする．ここで, $T = 1/2$ とすると, 純粋化された出力状態に含まれる CSS のコヒーレント振幅は $\alpha/\sqrt{2}$ となる．こうして, 2 つの並列な純粋化プロセスから得られた出力状態 $\hat{\rho}_{\text{out}}(\alpha/\sqrt{2})$ が得られたら, 今度はそれらを増幅プロセスに通し, コヒーレント振幅を再び α にすることを考える．

ここで, 増幅プロセスからの出力される状態に含まれる CSS の割合 ξ_{out} は, 純粋化プロセスに入力される状態に含まれる CSS の割合 ξ_{in} よりも大きくなりうるのかどうか考えよう．まず, 増幅プロセスから最終的に得られる CSS が $\varphi = 0$ であることから, 入力状態についても $\varphi = 0$ であると仮定する．次に, Eq. (4.27) における ξ_{in} に, 事前の純粋化プロセスにより得られる状態に含まれる CSS の割合, つまり Eq. (4.16) における ξ_{out} を代入し, $\xi_{\text{out}} > \xi_{\text{in}}$ となるパラメータを探すことになる．

しかしながら, 残念なことに, この条件を満たす解は存在しない．純粋化プロセスに入力される初期状態が, どのようなコヒーレント振幅 α をもっていても, デコヒーレンスの度合いは増加してしまう．この結果は, 文献 [1] において提案されたような, 線形光学素子とイベントセレクションのプロセスを用いて小振幅の CSS を増幅するプロトコルにおいては, 入力される CSS に対する線形ロスの影響について十分に注意する必要があることを示している．また, 先に示したように, CSS 増幅プロセスは多くの場合デコヒーレンスの影響も増やしてしまう．

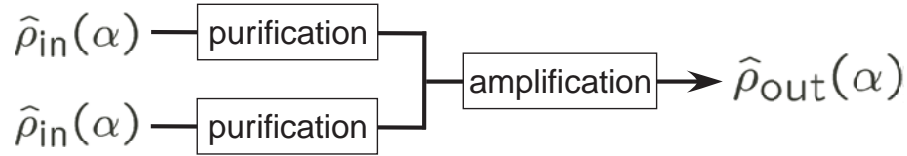


Figure 4.11: Concatenation of the purification and amplification processes.

4.6 まとめ

本章では、線形ロスにより劣化した CSS を回復させるためのプロトコルとして、今までになくシンプルで現実的なものを提案し、その性能について解析を通じて評価を行った。

ここで提案したプロトコルは、入力状態に対して部分測定を行い、その結果に基づくイベント選択を行うものである。つまり、状態の一部をビームスプリッターで取り出し、それに対して何らかの測定を行い、CSS と CSM の混合となった状態から、より多くの CSS を含む状態へと写像が行われるようにイベントの選択を行うことにより純粋化された CSS を得る。

まず、このようなプロトコルにおいて純粋化の効率を最大化するために必要な条件を導いた。そして、部分測定としては、ホモダイン検波が最適なものの一つであることを明らかにした。このホモダイン検波は技術的に成熟した測定スキームであるため、過去に提案された同様の目的を持つプロトコルよりも実験的に実現することが容易であるという長所を持つ。

ホモダイン検波を部分測定として用いるケースにおいて、本プロトコルの性能を計算により評価した。その結果、本プロトコルは CSS のコヒーレント振幅を減少させてしまうこと、 $\alpha \geq 2$ のように振幅の大きな CSS の純粋化には向かないことが分かった。

本プロトコルにより減少してしまった CSS のコヒーレント振幅を、Lund らにより提案された CSS 増幅プロトコル [1] との組み合わせにより回復させられるか否か検討した。その結果、CSS が線形ロスの影響で CSS と CSM の混合になってしまっていた場合、Lund らの CSS 増幅プロトコルは、コヒーレント振幅のみならず出力状態に含まれる CSM の割合も増やしてしまうこと、これらの増幅プロトコルならびに純粋化プロトコルを組み合わせても、入力状態中に含まれる CSS の割合を増やすことは依然として難しいことも分かった。

エンタングルメント純粋化の観点からは、エンタングルしたコヒーレント状態が線形ロスにより劣化した場合、その状態を補助的な CSS を用いることなしに線形光学素子と光子数識別測定のみで純粋化することは困難であると言われている [5]。こうしたことから、今回の結果は、光子数識別測定や補助的な CSS を用いない CSS 純粋化プロトコルの限界を示しているとも考えることができる。

ただ、先にも述べたようにホモダイン検波はすでに成熟した技術であるため、ここで提案したプロトコルは、過去に提案された同様の目的を持つプロトコルより

も実験的に実現することが容易である．そのため，このプロトコルは，現在行われている CSS 生成のための実験に適用され，線形ロスによる影響の補償や非古典性の増強に用いられることが期待できる．

参考文献

- [1] A. P. Lund, H. Jeong, T. C. Ralph, and M. S. Kim, *Phys. Rev. A* **70**, 020101(R) (2004).
- [2] H. Jeong, A. P. Lund, and T. C. Ralph, *Phys. Rev. A* **72**, 013801 (2005).
- [3] J. Wenger, R. Tualle-Brouiri, and P. Grangier, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 153601 (2004).
- [4] H. Yonezawa, T. Aoki, and A. Furusawa, *Nature* **431**, 430 (2004).
- [5] H. Jeong and M. S. Kim, *Quantum Inf. Compt.* **2**, 208 (2002); e-print quant-ph/0111015 (2002).

第5章 PPKTPを用いるスクイーズド状態の生成

第3章で述べたように、現在考えられている2種類の擬似CSS生成スキームはいずれもスクイーディングの操作を必要とする。この操作は、SSスキームにおいては単一光子状態に対して、PSスキームにおいては真空に対して行われる。一方で、第4章で述べたように、CSSは線形ロスに対して大変に脆弱である。そのため、擬似CSS生成の過程では極力ロスを伴わない、つまり純粋度の高いスクイーディングの操作が必要である。

この章では、擬似位相整合素子の一つである周期分極反転 KTiOPO_4 (PPKTP: periodically-poled potassium titanyl phosphate) を用い、波長860 nmにおいてスクイーズド状態を生成する実験について述べる。

5.1 スクイーディングに関する理論

ここでは、実験的なスクイーズド状態の生成についての理論を簡単にまとめる。

5.1.1 光パラメトリック増幅によるスクイーズド状態の生成

直交位相スクイーズド状態は、光パラメトリック増幅過程により生成される。

ポンプ光と呼ばれる角周波数 ω_p の光とシグナル光と呼ばれる角周波数 ω_s の光を非線形光学結晶に入射すると、アイドラー光と呼ばれる角周波数 $\omega_i = \omega_p - \omega_s$ の光が発生する。これは、結晶中で ω_p のエネルギーを持つ光子が ω_s のエネルギーを持つ光子と ω_i のエネルギーを持つ光子に分裂していると捉えることができる。ここで、ポンプ光、シグナル光およびアイドラー光の波数ベクトル k_p , k_s および k_i の間に位相整合条件 $k_p = k_s + k_i$ が成り立っているとき、入力されたシグナル光は増幅されて出力される。

このような過程を光パラメトリック増幅という。特に、 $\omega_s = \omega_i$ であるものを縮退光パラメトリック増幅という。

縮退光パラメトリック増幅過程によるスクイーズド状態の生成

まず、この縮退光パラメトリック増幅過程($\omega_s = \omega_i \equiv \omega_0$)においてスクイーズド状態が生成されることについて述べる。ここではハイゼンベルク表示を用いる

こととして、シグナル光およびアイドラー光の場を消滅演算子 \hat{a} で表現すると、系のハミルトニアンは Eq. (5.1) のように書ける。

$$\hat{H} = -\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + i \frac{\chi}{2} [\hat{a}^{\dagger 2} e^{-2i\omega_0 t} - \hat{a}^2 e^{2i\omega_0 t}] \quad (5.1)$$

ここで、 χ は非線形光学結晶の非線形光学係数ならびにポンプ光の強度に比例する定数である。このハミルトニアンにより記述される系の時間発展は、ハイゼンベルク方程式

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}}{dt} &= -i\omega_0 \hat{a} + \chi e^{-2i\omega_0 t} \hat{a}^\dagger \\ \frac{d\hat{a}^\dagger}{dt} &= i\omega_0 \hat{a}^\dagger + \chi e^{2i\omega_0 t} \hat{a} \end{aligned} \quad (5.2)$$

に従う。ここで、 \hat{a} を

$$\hat{a} = \hat{a}_0(t) e^{-i\omega_0 t} \quad (5.3)$$

のように各周波数 ω_0 で振動する項とその振幅 $\hat{a}_0(t)$ に分けて表現すると、先の Eq. (5.2) を

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}_0(t)}{dt} &= \chi \hat{a}_0^\dagger(t) \\ \frac{d\hat{a}_0^\dagger(t)}{dt} &= \chi \hat{a}_0(t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

のように書き直すことができる。これを解くと

$$\hat{a}_0(t) = \hat{a}_0(0) \cosh \chi t + \hat{a}_0^\dagger(0) \sinh \chi t \quad (5.5)$$

のようになるが、これは第2章における Eq. (2.96) と同じ形をしている。これと Eq. (2.98) より、 $\hat{a}_0(t)$ で表現される場はスクイズされたものであることが分かる。

一般的なスクイズド状態の生成と測定

上では簡単のためシグナルとアイドラーの周波数が縮退している場合について扱ったが、これは特殊なケースである。真空スクイズド状態の生成にあたっては、シグナル光の入力がない、言い換えると真空場がシグナル光として入力される。そして、真空場の角周波数は特に ω_0 に限定されているわけではないから、一般的にシグナル光ならびにアイドラー光の周波数は

$$\omega_s = \omega_0 + \Delta\omega, \quad \omega_i = \omega_0 - \Delta\omega \quad (5.6)$$

となる。ここで、 $\Delta\omega$ の値はゼロから位相整合条件を満たす範囲で分布する。つまり、ポンプ光の周波数はほぼ単一でも、スクイズド光は広い周波数帯域を持つのが普通である。

本実験をはじめとするスクイーズド状態の生成を伴う実験の多くは、この ω_0 から $\Delta\omega$ だけ周波数のシフトした成分を測定している。こうした成分をホモダイン検波¹により測定する場合は、ホモダインディテクターから出力される信号から角周波数 $\Delta\omega$ で振動する成分をスペクトラムアナライザーなどで抜き出せばよい。 ω_0 で振動する成分を測定せず、わざわざ周波数が \sim MHzもシフトした成分を測定するのは、ホモダインディテクターから出力される信号のDC付近には光源や電気回路に由来する古典的なノイズが多いからである。

5.1.2 OPOにより生成されるスクイーズド状態

本実験では、ポンプ光とスクイーズド光(プローブ光)の相互作用時間を長くすることを通じてパラメトリックゲインを稼ぐため、非線形光学結晶を共振器の中に設置し生成されたスクイーズド光(増幅/減衰されたプローブ光)が何度も結晶を通過するようにしている。

こうした構造は光パラメトリック発振器(OPO: optical parametric oscillator)と同じであるが、スクイーミングの実験においてはこれを発振閾値に満たないパワーのポンプ光で駆動する。こうした機能的な意味においては、この装置は光パラメトリック増幅器(OPA: optical parametric amplifier)と呼ばれるべきであるが、本論文では慣例に従ってOPOと呼ぶことにする。

ここでは、OPOに関するパラメータと得られるスクイーミングの度合い(スクイーミングレベル)の関係について述べる。

スクイーミングレベル

本章では、スクイーミングの度合いを表すのにスクイーミングレベル R_- およびアンタイスクイーミングレベル R_+ を用いる。これらは、直交位相振幅の揺らぎに由来する量子ノイズのパワーが、真空のそれに対して何倍されているかを表しており、デシベル表示されることが多い²。

ロスなどの実験的な不完全性がない場合に限り、これら R_{\pm} はスクイーミングパラメータ r を用いて

$$R_{\pm} = e^{\pm 2r} \quad (5.7)$$

と表すことができる。

スクイーミングレベルの計算式

OPOにおいて生成される状態のスクイーミングレベル R_- ならびにアンタイスクイーミングレベル R_+ は、文献[1, 2]によれば次のEq. (5.8)のように定式化さ

¹信号光の周波数とLO光の周波数は $\Delta\omega$ 異なるのでヘテロダイン検波という方が正確である。

²たとえば、 $R_- = 0.1$ であれば -10 dBと表記される。

れる

$$R_{\pm} = 1 \pm \eta \rho \frac{4x}{(1 \mp x)^2 + 4\Omega^2}. \quad (5.8)$$

ここで、 η はトータルの検出効率であり、OPO を出てからホモダインディテクターのフォトダイオードに至る直前までの伝搬効率 η_P ならびにホモダイン効率 η_{HD} を用いて

$$\eta = \eta_P \cdot \eta_{HD} \quad (5.9)$$

と表される。また、 ρ は OPO 共振器のエスケープ効率 (escape efficiency) と呼ばれるもので、OPO 共振器の出力カップラー透過率 T および共振器内部ロス L を用いて Eq. (5.10) のように定義される。

$$\rho \equiv \frac{T}{T + L} \quad (5.10)$$

さらに、 x はポンプパラメータ (pump parameter) と呼ばれ、ポンプ光パワー P_{pump} とその発振閾値 P_{th} を用いて Eq. (5.11) のように定義される。

$$x \equiv \sqrt{\frac{P_{\text{pump}}}{P_{\text{th}}}} \quad (5.11)$$

ここで、OPO の発振閾値 P_{th} は結晶の非線形変換係数 E_{NL} を用いて Eq. (5.12) のように表される。

$$P_{\text{th}} = \frac{(T + L)^2}{4E_{\text{NL}}} \quad (5.12)$$

なお、ポンプパラメータ x と OPO のパラメトリックゲイン (増幅されるときを G_+ 、減衰されるときを G_- とする) の間には Eq. (5.13) で表されるような関係がある。

$$G_{\pm} = \frac{1}{(1 \mp x)^2} \quad (5.13)$$

また、 Ω は離調パラメータ (detuning parameter) と呼ばれ、Eq. (5.14) のように定義される。

$$\Omega \equiv \frac{\omega}{\gamma} \quad (5.14)$$

ここで、 ω は実験において測定される側帯波の角周波数である。また、 γ は共振器の減衰率 (decay rate) と呼ばれ、光速 c ならびに共振器の周回長 l を用いて以下の Eq. (5.15) のように定義される。

$$\gamma = \frac{c(T + L)}{l} \quad (5.15)$$

以上のモデルに実験のパラメータを代入することにより、得られるであろうスクイズングレベルを予測することができる。

非線形変換係数について

先に用いた非線形変換係数 E_{NL} は，シングルパスにおける結晶の変換効率である．これは，角周波数が ω である光のパワーを P_ω ，角周波数が 2ω である光のパワーを $P_{2\omega}$ としたとき

$$E_{\text{NL}} P_\omega^2 = P_{2\omega} \quad (5.16)$$

という関係がある．

5.1.3 LO 光に対する位相揺らぎの影響

スクイズド状態のうち，最もスクイズ/アンタイスクイズした直交位相成分をホモダイン検波により観測するには，それらの直交位相成分に LO 光の位相を固定しなければならない．たとえば， q 方向にスクイズした状態の最もスクイズされた直交位相成分を観測するためには，ホモダイン検波により観測される直交位相成分 x_θ の位相を $\theta = 0$ にする必要がある．同様に，最もアンタイスクイズされた成分を観測する際には $\theta = \pi/2$ としなければならない．

本実験ではこの θ を一定時間ロックすることを試みるが，それを完全に行うことは不可能であり必ず一定の揺らぎ $\tilde{\theta}$ を伴う．スクイズド光と LO 光の相対位相が $\tilde{\theta}$ だけ揺らぐことにより，スクイズされた直交位相成分のみを観測することができず，アンタイスクイズされた直交位相成分の影響を受けてしまう．ポンプ光パワーが大きくなればスクイーミングレベルは高くなるが，同時にアンタイスクイーミングレベルも高くなる．

そのため， $\tilde{\theta}$ の値がゼロでないときには一定のポンプ光パワーにおいてスクイーミングレベルは飽和し，さらには悪化してしまう．もちろん，アンタイスクイーミングされた直交位相成分を観測する際にはスクイズされた直交位相成分の影響を受ける．しかしながら，アンタイスクイーミングレベルの方が値としてははるかに大きいため，測定値への影響はわずかである．

これを考慮したスクイーミングレベル R'_- ならびにアンタイスクイーミングレベル R'_+ は次の Eq. (5.17) のように表される [3, 4]．

$$\begin{aligned} R'_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\theta}}} \int_{-\tilde{\theta}}^{+\tilde{\theta}} \exp\left[-\frac{\theta^2}{2\tilde{\theta}^2}\right] (R_\pm \cos^2 \theta + R_\mp \sin^2 \theta) d\theta \\ &\approx R_\pm \cos^2 \tilde{\theta} + R_\mp \sin^2 \tilde{\theta}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.1.4 スクイズド状態の純粋度

ここでは，得られたスクイーミングレベルとアンタイスクイーミングレベルから状態の純粋度を計算した際に用いた方法を記す．

純粋度は状態の密度演算子を $\hat{\rho}$ として $\text{Tr}\{\hat{\rho}^2\}$ で定義されるが，第2章の Eq. (2.62) に示したように，ウィグナー関数を用いて計算することも可能である．また，損失

により混合状態となったスクイーズド状態のウィグナー関数は第3章の Eq. (3.23) より

$$\begin{aligned} W(q, p) &= \frac{1}{\pi \Delta q \Delta p} \exp \left[- \left(\frac{q}{\Delta q} \right)^2 - \left(\frac{p}{\Delta p} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{R'_+ R'_-}} \exp \left[- \left(\frac{q}{\sqrt{R'_+}} \right)^2 - \left(\frac{p}{\sqrt{R'_-}} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

の形に表される．ここで，直交位相成分の揺らぎは真空のそれに比べ q 方向に Δq 倍， p 方向に Δp 倍されている．そのため，測定されるノイズ(パワー)のレベルである R'_\pm との関連づけは $\Delta q = \sqrt{R'_+}$ ， $\Delta p = \sqrt{R'_-}$ となる．この式を Eq. (2.62) に代入して計算すると純粋度は

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ \rho^2 \} &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W^2(q, p) dq dp \\ &= \frac{1}{\Delta q \Delta p} = \frac{1}{\sqrt{R'_+ R'_-}} \end{aligned} \quad (5.19)$$

のように計算されることになる．

5.2 擬似位相整合

本研究では用いる擬似位相整合素子の一種である PPKTP(周期分極反転 KTP) 結晶を用いる．そこで，本節では擬似位相整合について簡単に触れる．

擬似位相整合について

非線形光学結晶内で波長変換された光を外部に有効に取り出すためには，結晶内の様々な部位で発生した光が干渉により打ち消し合わない条件，すなわち位相整合条件を満足させなければならない．本研究における波長変換は第二高調波発生と縮退パラメトリック増幅であるから，基本波(波数 k_1)と倍波(波数 k_2)を考えればよく，位相整合条件は $k_2 = 2k_1$ となる．一般的に媒質の屈折率は正常分散を示すため，基本波に対する屈折率を n_1 ，倍波に対する屈折率を n_2 とすると $n_1 < n_2$ である．ここで $n_1 = n_2$ として位相整合条件を満たすためには，結晶の複屈折を用いることが多い．

しかしながら，近年はコヒーレンス長 L_c (またはその奇数倍)ごとに非線形光学係数 d の符号を反転させた素子(周期分極反転素子)を用いることにより，結晶固有の位相不整合をそのままにして擬似的に位相整合を取ることができるようになった [5, 6]．これは擬似位相整合(QPM: quasi-phase matching)と呼ばれる．ここで，コヒーレンス長は $L_c = \pi / \Delta k$ である．また， Δk は位相整合ベクトルの大きさ $\Delta k = |k_2 - 2k_1|$ である．

このQPMを用いることにより、複屈折を用いる方法では位相整合の取れなかった材料と波長の組み合わせが可能となる。また、非対角成分に較べて値の大きな対角成分の非線形光学係数 d_{33} を用いることが可能になるため、効率のよい波長変換が可能になるという利点もある [7]。

本実験における擬位相整合素子の必要性

たとえば、本実験のように 860 nm と 430 nm の間で波長変換を行う場合、バルクのKTPでは位相整合を取ることが不可能である。また、タイプIの位相整合を取る場合の非線形光学係数 d_{32} は KNbO_3 のそれと比較して小さい。

しかしながら、擬位相整合素子であるPPKTPを用いることにより、本実験で使用する波長帯においても位相整合を取ることが可能になる。さらに、関係する非線形光学係数 d_{33} は KNbO_3 に対して遜色のない値であるため、 KNbO_3 を用いた時と同レベルの変換効率を維持できることが期待される。

5.3 セットアップ

5.3.1 概略

ここでは、本実験のセットアップについて概説する。まず、Fig. 5.1 にその概略図を示す。

図中のTi:Sapphireは本実験の光源となるレーザーである。Ti:Sapphireから出力されたビームは、まず光アイソレーター (ISO) を通過し、続いて電気光学変調器 (EOM: electro-optic modulator) において 15.3 MHz で位相変調される。このビームは、波長 860 nm のままで用いられる分と波長 430 nm の第二高調波 (SH: second harmonic) に変換される分 (約 0.9 W) に分けられる。前者は、それぞれ後に説明するプローブ光、ロック光、アラインメント光、局所発振光 (LO: local oscillator) として使用される。

このLO光はモードクリーニング共振器 (MCC: mode cleaning cavity) において空間モードを光パラメトリック発振器 (OPO: optical parametric oscillator) のそれと揃えられた後、ホモダイン検波の 50:50 ビームスプリッター (HBS: half beam-splitter) において OPO からのスクイーズド光と合波される。後者は第二高調波発生器 (SHG: second harmonic generator) において SH 光に変換される、この SH 光はスクイーズド光を生成するためのポンプ光として OPO に入力される。その後、このポンプ光から OPO 中の PPKTP 結晶において生成されたスクイーズド光は、OPO 共振器の中を周回した後に取り出され、ホモダイン検波の HBS において LO 光と合波される。

こうして合波されたスクイーズド光と LO 光はバランス型ホモダインディテクター (HD: homodyne detector) で検出される。ホモダインディテクターの出力はスペクトラムアナライザーに取り込まれ、その 1 MHz における側帯波のパワーが最終的に測定される。

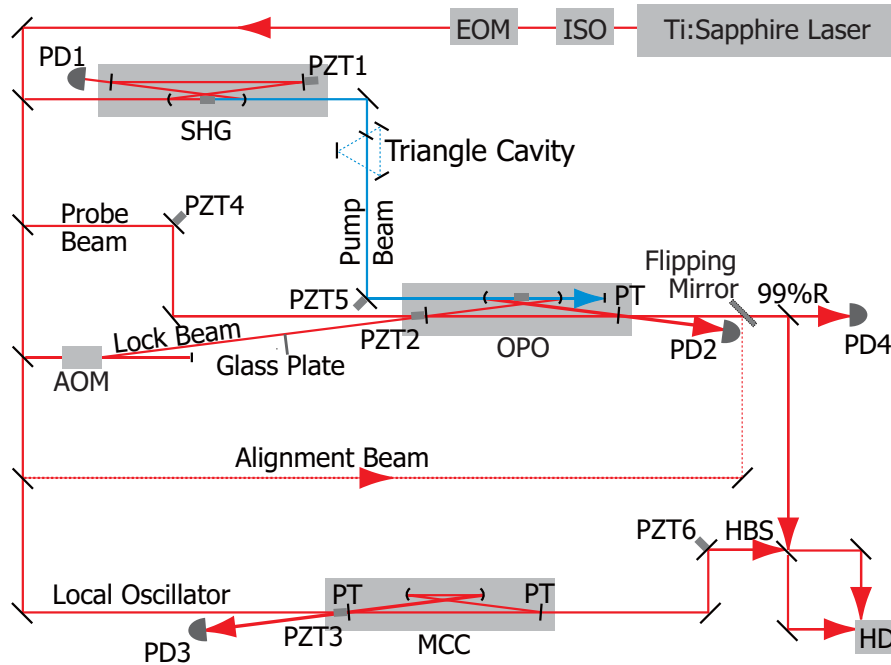


Figure 5.1: Experimental setup. ISO: optical isolator, EOM: electro-optic modulator, AOM: acousto-optic modulator, SHG: second harmonic generator (frequency doubler), OPO: sub-threshold degenerate optical parametric oscillator, MCC: mode cleaning cavity, HBS: half (50:50) beam-splitter, PTs: partial transmittance mirrors, HD: homodyne detector, PDs: photo-detectors, PZTs: piezo-electric transducers.

5.3.2 各種ビーム

ポンプ光 (pump beam)

パラメトリック増幅を行うための光で、本実験では SHG により生成された SH 光すなわち 430 nm の光を指す。これは OPO の凹面高反射 (HR: high reflectance) ミラー裏から入射され、結晶を一回だけ通過する。SHG 出力は 400 mW 程度であるが、スクイーズド光を生成する際にポンプ光として使用したのは 10~120 mW である。

プローブ光 (probe beam)

この光は OPO に入力され、そのパラメトリックゲインにより増幅または減衰され、スクイーズド光と同じ空間モードで出力される。そのため、パラメトリックゲインの測定、スクイーズド光と LO 光の空間モード合わせや相対位相ロックに用いられる。

パワーは 20 mW 程度配分したが、スクイーズド光を測定 (パラメトリックゲインならびに LO 光との相対位相をロック) した際にはパワーを 1 μ W 程度まで絞っ

た．これは，あまりプローブ光を入れすぎるとホモダイン検波における“バランス”が崩れ，レーザーの古典ノイズをキャンセルできなくなるためである．

ロック光 (lock beam)

この光は OPO の共振周波数 (共振器長) をロックするために用いられる．また，パワーは 20 mW 程度配分されている．

また，これと同時に共振器内を周回するプローブ光との干渉を避けるために以下のような対策が講じられている．

1. プローブ光と逆方向に共振器内を周回するよう入力
2. 周波数をシフト
3. 空間モードを TEM_{00} から TEM_{10} に変更

1 番目はメインの対策であるが，わずかながら結晶の端面における反射があるため，両ビームの干渉を完全になくすことはできない．これによる問題を解決するために 2 番目の対策が追加されている [1]．この周波数シフトは，音響光学変調器 (AOM: acousto-optic modulator) により実現している．しかしながら，このように周波数をシフトされたロック光は，そのままの状態ではプローブ光と同時に共振器に共振することができなくなるため，3 番目の対策が採られている．ここでは，OPO に入射する前のロック光に半分だけガラス板を挿入することにより，空間モード (共振器の横モード) の変更を実現している．

なお，2 番目の対策における周波数シフト量は， TEM_{00} のプローブ光と TEM_{10} のロック光が共に OPO 共振器に共振するように調整されている．およその周波数シフト量については後の 5.3.6 節において述べる．

アラインメント光 (alignment beam)

この光は比較的透過率の高い出力カプラーから OPO 共振器に入射され，プローブ光やスクイズド光とは逆向きに共振器内を周回する．パワーは 17 mW 程度配分されており，以下のような作業を行うために用いられる．

1. 共振器の構築に伴うアラインメントためのガイド
2. 共振器モードとポンプ光のモードマッチ
3. 共振器内部ロス測定

OPO 共振器を構成するミラーは，出力カプラーが部分透過 (PT: partial transmittance) である以外は全て HR である．そのため，上の 1 番目に挙げた共振器の構築作業を行う段階では，アラインメント用の光は出力カプラーから入射するより他に方法がない．

なお，2 番目に挙げた作業については 5.5.2 節で，3 番目に挙げたものについては 5.5.3 節でそれぞれ述べる．

LO 光 (local oscillator)

これは、第2章で説明したように、ホモダイン検波で量子ノイズを測定するために用いられる光で3 mW 程度のパワーが配分されている。

ホモダイン検波のハーフビームスプリッター (HBS: half beam-splitter) におけるスクイズド光との干渉性を高めるため、LO 光の空間モードはモードクリーニング共振器 (MCC) によって整えられる。

5.3.3 光源ならびに周辺装置

ここでは、本セットアップ全体の光源であるレーザー、その周辺機器、光パラメトリック発振器 (OPO) のポンプ光を生成する第二高調波発生器 (SHG) について説明する。

レーザー

全体の光源には、Coherent 社製 MBR-110 (cw, Ti:Sapphire, 単一縦モード, 波長可変) が用いられている。線幅はスペック値で < 100 kHz, 実際には 10 kHz 程度である。波長は 860 nm となるよう調整されており、その時の出力は約 1.6 W である。

なお、MBR-110 の励起光源としては同社製の Verdi V10 (波長 532 nm, 出力約 10 W) を用いている。

光アイソレーター (optical isolator)

レーザーの直後には Linos 社のファラデーアイソレーター FI-850-5SV-40DB を挿入してある。もちろん、これは戻り光によるレーザー動作の不安定化を防止するためである。

電気光学変調器 (EOM: electro-optic modulator)

光アイソレーターを通過した直後の光に、Linios 社製の電気光学変調器 PM25 を用いて 15.3 MHz の位相変調をかけている。この位相変調により生じた側帯波成分は、5.4 節で述べるように、FM サイドバンド法に基づき各種共振器 (SHG, OPO, MCC) の共振周波数をロックするために用いられる。

第二高調波発生器 (SHG)

5.3.1 節でも述べたように、これは OPO を駆動するためのポンプ光となる SH 光 (波長 430 nm) を生成するためのものである。

この SHG は、基本波が共振するよう制御されたポウタイ型リング共振器と、その中に置かれた非線形光学結晶 (KNbO₃) により構成されている。約 0.9W の基本波入力に対して、SH 出力は約 0.4 W である。

5.3.4 非線形光学結晶 (PPKTP)

素子の仕様

ここで用いた PPKTP は Raicol Crystals 社製の特注品である。大きさは、長さ方向に 10 mm、幅および高さ方向にそれぞれ 1 mm である。結晶端面は光の入射方向に垂直にカットされており (ブリュースターカットではない)、その表面には 860 nm に対する反射防止 (AR: anti-reflection) コーティングが施されている。今回の実験では、AR コーティングの仕様が異なる 2 つの PPKTP を用いた。このうち、より反射率の低い AR コーティングを施されたものを結晶 #1、通常の AR コーティングを施されたものを結晶 #2 と呼ぶことにする。

カットは *a*-cut で、基本波 (860 nm) ならびに倍波 (430 nm) とともに *Z* 軸に平行な条件 (つまり非線形光学係数は d_{33}) において結晶の温度を適切に保つことで、非臨界位相整合が実現される (温度位相整合)。なお、KTP 結晶における結晶軸と光学弾性軸の対応は $a, b, c \Rightarrow X, Y, Z$ となっている [8]。また、屈折率は $n_z = 1.84$ である。

周期構造については明らかにされていないが、約 62°C で位相整合することから、反転周期は 4.28 μm (2.14 μm ごとに反転) であると推測される。この推測は、KTP 結晶についてのセルマイヤー方程式 [8]

$$\begin{aligned} n_z^2(\tau = 293 \text{ K}) &= 1 + \frac{1.71645\lambda^2}{\lambda^2 - 0.013346} + \frac{0.5924\lambda^2}{\lambda^2 - 0.06503} + \frac{0.3226\lambda^2}{\lambda^2 - 67.1208} - 0.01133\lambda^2 \\ \frac{dn_z}{d\tau} &= \left(\frac{0.9221}{\lambda^3} - \frac{2.9220}{\lambda^2} + \frac{3.6677}{\lambda} - 0.1897 \right) \times 10^{-5} \text{ K}^{-1} \end{aligned} \quad (5.20)$$

より得た。ここで、 λ [μm] は真空中における光の波長、 τ [K] は結晶の温度である。

温度制御

先に述べたような温度位相整合を実現するために、PPKTP の温度を適切な値に保つ必要がある。

そのため、本実験ではフィードバック制御に基づく温度コントローラ (Thorlabs 社製 TED 200) を用いた。このコントローラは、サーミスタを通じて結晶温度をモニターし、ペルチェ素子を通じて結晶を加熱/冷却することにより、結晶の温度を保持する。これらサーミスタやペルチェ素子を PPKTP 自体に取り付けるわけ

がゼロでないことにより凹面鏡の焦点距離は向き (水平/垂直) により異なり, その結果生じるビームウエストは若干楕円になる.

ここで, 本共振器の設計思想について説明する. まず, リング型の共振器を用いた理由は以下の通りである.

- 非線形変換係数を最大化する共振器モード (結晶中におけるビームウエスト半径 $w_0 = 20 \mu\text{m}$) はリング型でなければ得られない.
- ポンプ光 (波長 430 nm) は結晶を一回だけ通過するため, 生成されるスクイーズド光が結晶を通過する回数も一周につき一回となるような配置にした方が, 結晶による損失の影響を少なくできる [1].
- 共振器長をアクティブにロックするための光 (ロック光) をスクイーズド光と逆向きに周回させることができる.

また, 主要な寸法は結晶中におけるビームウエスト半径が $w_0 = 20 \mu\text{m}$ となる安定な共振器を実現するという観点から決定されている.

なお, 結晶中におけるビームウエスト半径 $w_0 = 20 \mu\text{m}$ は, 非線形変換係数を最大化すべく設定されたものである. 一般的に, 非線形変換係数を稼ぐには結晶の内部にビームウエストを配置する必要があるが, その半径 w_0 は結晶の長さ d に依存し, Eq. (5.21) に示すような関係を満たすものが最適であると言われている [9].

$$d = 2.84b \quad (5.21)$$

ここで, $b = 2z_0$ はコンフォーカルパラメータ, z_0 はレイリー長である. このレイリー長はビームウエストの半径 w_0 , 媒質の屈折率 n , 真空 (空気) 中における波長 λ を用いて Eq. (5.22) のように表される.

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2 n}{\lambda} \quad (5.22)$$

これらより, 結晶の長さ d ならびに屈折率 n , 波長 λ が与えられれば最適なウエスト半径 w_0 が求められる. ここで $d = 10 \text{ mm}$, $n = 1.84$ ならびに $\lambda = 860 \text{ nm}$ とすれば最適値は $w_0 = 16 \mu\text{m}$ となるが, 熱レンズの影響 [1, 10] も加味して設定値を $w_0 = 20 \mu\text{m}$ とした.

OPO の特性

共振器の寸法と出力カプラー透過率 $T = 0.123$ から計算した OPO の基本的な特性を Table 5.1 に示す. 表中の共振器線幅 $\nu_{1/2}$ は, 光速 c , 出力カプラーの透過率 T , 共振器内部ロス L ならびに共振器の周回長 l に依存し

$$\nu_{1/2} = \frac{c(T + L)}{2\pi l} \quad (5.23)$$

Table 5.1: Characteristics of the OPO. l : round trip length of the OPO cavity, ν_{FSR} : free spectral range, T : transmittance of the output coupler, $\nu_{1/2}$: linewidth (FWHM). The effect of the intracavity loss may be ignored.

l	ν_{FSR}	T	$\nu_{1/2}$
500 mm	600 MHz	0.12	12 MHz

のように計算される．このうち， L の値は主に結晶端面での反射に起因しているため用いる結晶により異なるが，この $\nu_{1/2}$ を計算する上では無視できるレベルであったため $L = 0$ として計算している．

また，後にポンプ光パワーからスクイージングレベルの理論値を求めるのに必要となるパラメータを Table 5.2 に示す． L の値は 5.5.3 節において測定したものをを用いている．

Table 5.2: Characteristics of the OPO. L : intracavity loss, γ : decay rate, Ω : detuning parameter, ρ : escape efficiency, P_{th} : oscillation threshold.

Crystal	L	γ	Ω	ρ	P_{th}
# 1	0.006	7.7×10^7 Hz	0.013	0.95	180 mW
# 2	0.002	7.5×10^7 Hz	0.013	0.98	170 mW

また，再掲になるが，減衰率 γ ，離調パラメータ Ω ，エスケープ効率 ρ ，発振閾値 P_{th} の計算式を Eq. (5.24) に示す．

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{c(T+L)}{l} \\
 \Omega &= \frac{\omega}{\gamma} \\
 \rho &= \frac{T}{T+L} \\
 P_{\text{th}} &= \frac{(T+L)^2}{4E_{\text{NL}}} \tag{5.24}
 \end{aligned}$$

この中で， ω はスクイージングを測定する際に用いる側帯波の各周波数であり，本実験では 1 MHz の側帯波を用いるので $\omega = 2\pi$ MHz となる．また， E_{NL} は光が非線形光学結晶を一回通過する時の非線形変換係数であり，本実験で用いた PPKTP においては $E_{\text{NL}} = 0.023$ W⁻¹ である．

なお，この OPO に 200 mW のポンプ光を入力し，実際に発振することも確認されている．

5.3.6 音響光学変調器 (AOM: acousto-optic modulator)

本実験では，ロック光の周波数をシフトさせるために Brimrose 社製の音響光学変調器 TEF-110-60-0.860 を用いている．周波数のシフト量は，以下の計算に示すように，およそ -120 MHz である．

ガウスビームの表式

まず， z 方向に伝播する高次 (lm 次) のガウスビームについて考える．その電場の大きさは，以下の Eq. (5.25) のように表される [6]．

$$E_{lm}(x, y, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} H_l \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \times \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} - ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - ikz + i(l + m + 1)\eta(z) \right] \quad (5.25)$$

ここで， E_0 は定数， w_0 はウエストにおけるビーム半径である．また， H_l ならびに H_m は，それぞれ l 次ならびに m 次のエルミート多項式を表している．さらに， $w(z)$ はビーム径， $R(z)$ はビームの曲率半径， $\eta(z)$ はビームの拡がり角であり，それらは以下の Eq. (5.26) のように表すことができる．

$$\begin{aligned} w^2(z) &= w_0 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right) \\ R(z) &= z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2} \right) \\ \eta(z) &= \arctan \left(\frac{z}{z_0} \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

ここで，再掲になるが z_0 はレイリー長であり，ウエスト径 w_0 ，媒質の屈折率 n ならびに光の真空 (空気) 中における波長 λ を用いて Eq. (5.27) のように表される．また，ビームのウエストは $z = 0$ の位置にあるものとしている．

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2 n}{\lambda} \quad (5.27)$$

周波数シフト量の計算

Eq. (5.25) によれば， TEM_{lm} のガウスビームが z 方向に伝播する時， $x = y = 0$ の点において受ける位相シフト $\theta(z)$ は

$$\theta(z) = kz - (l + m + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad (5.28)$$

であることが分かる．そこで，Eq. (5.28) を用いてロック光 (TEM_{10}) に必要な周波数シフトの量 $\delta\nu$ を計算する．なお，計算によって求める値は概算値で差し支えないため，屈折率が空気中とは異なる非線形光学結晶の存在は無視する．

まず，ここで $\delta\nu$ に相当する波数シフトの量を $\delta k = 2\pi\delta\nu/c$ ，プローブ光 (TEM_{00}) の波数を k とそれぞれ置く．また，ビームウエストは共振器内に2つあるため，小さいウエストの半径を w_{01} ，大きいウエストの半径を w_{02} とする．さらに，これらに相当するレイリー長を z_{01} ならびに z_{02} とする．

すると，共振器を一周することによりプローブ光が受ける位相シフト θ_{probe} ならびにロック光が受ける位相シフト θ_{lock} は，

$$\begin{aligned}\theta_{\text{probe}} &= kl_{\text{opo}} - \left\{ 2 \arctan \left(\frac{z_1}{z_{01}} \right) + 2 \arctan \left(\frac{z_2}{z_{02}} \right) \right\} \\ \theta_{\text{lock}} &= (k + \delta k)l_{\text{opo}} - 2 \left\{ 2 \arctan \left(\frac{z_1}{z_{01}} \right) + 2 \arctan \left(\frac{z_2}{z_{02}} \right) \right\} \quad (5.29)\end{aligned}$$

のように表される．ここで，共振器の周回長さを l_{opo} ，小さいウエストから凹面鏡までの距離を z_1 ，大きいウエストからのそれを z_2 とした．

プローブ光とロック光が同時に OPO 共振器において共振するためには Eq. (5.29) に表した量ビームの位相差 $\theta_{\text{probe}} - \theta_{\text{lock}}$ が 2π の整数倍になっていなければならないが，ここではその中で

$$\theta_{\text{probe}} - \theta_{\text{lock}} = 0 \quad (5.30)$$

といった条件を満たす δk を求めることにする．ここで，Eq. (5.29) に条件 Eq. (5.30) を課すと，

$$\delta k l_{\text{opo}} = 2 \arctan \left(\frac{z_1}{z_{01}} \right) + 2 \arctan \left(\frac{z_2}{z_{02}} \right) \quad (5.31)$$

が得られる．さらに， $l_{\text{opo}} = 2z_1 + 2z_2$ ， $\delta k = 2\pi\delta\nu/c$ といった関係を考慮すると，ロック光の周波数シフト $\delta\nu$ は

$$\delta\nu = \frac{c}{2\pi(z_1 + z_2)} \left\{ \arctan \left(\frac{z_1}{z_{01}} \right) + \arctan \left(\frac{z_2}{z_{02}} \right) \right\} \quad (5.32)$$

のように求められる．

ここで，Eq. (5.27) において $\lambda = 860 \text{ nm}$ ， $w_0 = w_{01} = 20 \text{ }\mu\text{m}$ または $w_0 = w_{02} = 200 \text{ }\mu\text{m}$ とすることにより z_{01} ならびに z_{02} が計算できる．さらに，それらと $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ， $z_1 = 30 \text{ mm}$ ， $z_2 = 220 \text{ mm}$ を Eq. (5.32) に代入して計算することにより $\delta\nu \approx 480 \text{ MHz}$ となる．

今回用いた AOM では 140 MHz までの周波数シフトしか実現できないが，OPO 共振器の FSR (モード間隔) が約 600 MHz であることから，周波数シフトを $480 \text{ MHz} - 600 \text{ MHz} = -120 \text{ MHz}$ とすることによりポンプ光をプローブ光と同時に共振させることが可能になる．

5.3.7 モードクリーニング共振器 (MCC)

ホモダイン効率を極力向上させるため、本実験ではモードクリーニング共振器 (MCC: mode cleaning cavity) により空間モードを整えている。MCC の構成は非線形光学結晶が入っていないことを除けば OPO と基本的に同じで、OPO と同じ空間モードすなわちウエスト半径 $200 \mu\text{m}$ のビームを生成するように設計されている。その概略図を Fig. 5.3 に示す。

この MCC からホモダイン検波の 50:50 ビームスプリッター (HBS) までの距離は、この HBS から OPO までの距離と同じになるように設定した。この結果、プローブ光 (スクイズド光) と LO 光が作る干渉縞のビジビリティは、結晶 #1 を用いた時で 0.99、結晶 #2 を用いた時で 0.98 であった。

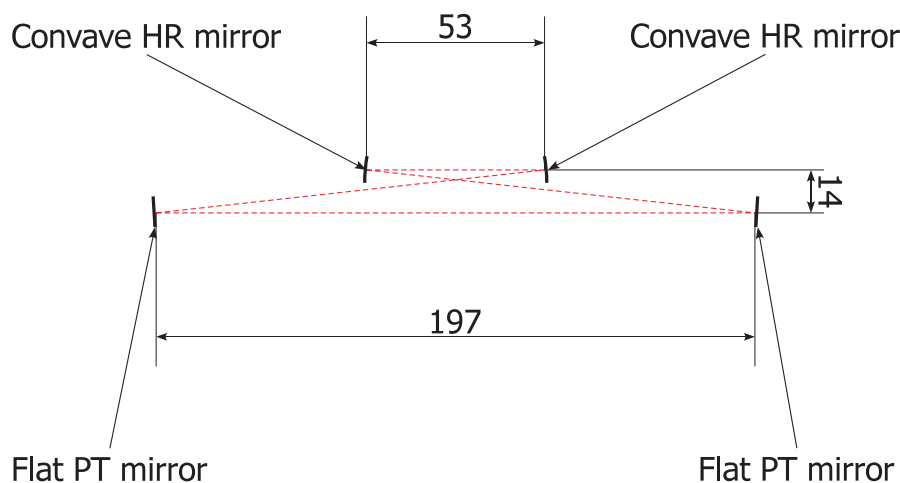


Figure 5.3: Schematic of the mode cleaning cavity (MCC). The dimensional unit is mm. Flat PT (partial transmittance) mirrors have their transmittances: 0.07 and 0.10. Two concave mirrors have their radii of curvature $R = 50$ mm.

5.3.8 検出/測定系

ホモダイン検波/ホモダインディテクター

生成されたスクイズド光は 50:50 ビームスプリッターにおいて LO 光と重ね合わされ、ホモダインディテクター (HD) で検出される。

HD に搭載されているフォトダイオードの量子効率は、この波長においてほぼ 100 % とみなせることから、ホモダイン効率 η_{HD} はもっぱらスクイズド光と LO 光のモードマッチにより支配されると考えてよい。先ほどのビジビリティから計算すると、ホモダイン効率は結晶 #1 を用いた時で $\eta_{\text{HD}} = 0.98$ 、結晶 #2 を用いた時で $\eta_{\text{HD}} = 0.96$ である。これに、OPO から HD までの伝搬効率 $\eta_{\text{P}} = 0.99$ を加味すると、トータルの検出効率 $\eta = \eta_{\text{P}}\eta_{\text{HD}}$ は結晶 #1 を用いた時で 0.97、結晶 #2 を用いた時で 0.95 となる。

なお，このHDに搭載されている2つのSiフォトダイオードは，特注のARコーティングを施されたHamamatsu S3590-06である．さらに，1 MHzにおけるHDの回路ノイズは，LO光パワー3 mWの条件においてショットノイズ比 -18.5 dBであった．

スペクトラムアナライザー

Agilent 社製 E4402B を用いた．設定は以下の Table 5.3 に記す．

Table 5.3: Settings of the spectrum analyzer. (BW: bandwidth.)

Center Frequency	Span	Resolution BW	Video BW	Sweep Time
1 MHz	Zero	30 kHz	300 Hz	100 ms

5.4 ロック機構

本実験におけるロックは，FM サイドバンド法 (Drever-Hall 法) [11] に基づくフィードバック制御により実現されている．ここでは，そのFM サイドバンド法により各種共振器 (SHG, OPO, MCC) の共振周波数，LO 光とスクイーズド光の相対位相をロックする機構について述べる．

5.4.1 共振器の共振周波数

入射した光が共振器に共振する時，共振器内を周回する光ならびに透過光は最大に，入射カプラーから反射する光は最小になる．そこで，SHG においては共振器の高反射ミラーから漏れ出てくる基本波を PD1 により，OPO においては共振器を透過してくる基本波 (ロック光) を PD2 により，MCC においては共振器の入力カプラーから反射してくる光を PD3 によりそれぞれ検出する．そして，これらのフォトディテクターで検出される光のパワーが PD1 と PD2 においては最大，PD3 においては最小になるような制御を行う．

こうした制御を FM サイドバンド法により実現するため，レーザーから出力された光には予め EOM において 15.3 MHz の位相変調をかけておく．各共振器を制御するためのフィードバック制御器は，この位相変調により生成された側帯波成分から差動信号を生成し，さらに増幅して piezo 素子 (SHG については PZT1，OPO については PZT2，MCC については PZT3) へフィードバック信号を送る．

こうして駆動される piezo 素子により，各共振器はその周回長が調節され，共振周波数がロックされる．

5.4.2 LO 光とスクイーズド光の相対位相

一般的に、複数の光の相対位相をロックするには、それらの干渉信号をモニターする必要がある。しかしながら、ここで対象となっているスクイーズド光は古典的な振幅を持たないため、そのままでは相対位相ロックに必要な干渉信号を得ることができない。

そこで、ここではスクイーズド光と位相を同じくするコヒーレント光(プローブ光)を導入する。このプローブ光は、OPO において生成されるスクイーズド光と同じ光路を通るよう共振器に入力され、そのパワーはパラメトリックゲインに従って増加または減少する。OPO から出力されるプローブ光のパワーが最小化されていれば、その位相はスクイーズド光の最もスクイーズされた直交位相成分に一致している。逆に、OPO によりパワーが最大化されていれば、その位相はスクイーズド光の最もアンタイスクイーズされた直交位相成分に一致している。こうしてプローブ光が用意できたら、この光と LO 光の相対位相をロックすることを通じてスクイーズド光と LO 光の相対位相をロックすることができる。

これらより、LO 光とスクイーズド光の相対位相をロックするには

1. OPO のパラメトリックゲインをロック
2. プローブ光と LO 光の相対位相をロック

といったステップを踏む必要があることが分かる。これらについての詳細を以下に記述する。

OPO のパラメトリックゲインをロック

ロックすべきパラメトリックゲインをモニターするため、OPO 直後にあるビームスプリッターによりプローブ光を 1 % だけ取り出し PD4 により検出する。制御は、検出される光のパワーが最大または最小になるように行われるため、ここでも FM サイドバンド法に基づくフィードバック制御が用いられる。

そのために必要となる側帯波成分は、PZT4 により 64 kHz の位相変調をかけることにより生成する。ここで、フィードバック制御器が PD4 の出力信号に含まれる 64 kHz の側帯波成分から差動信号を生成して PZT5 にフィードバック信号を送る。

こうしてプローブ光は、そのパラメトリックゲインがロックされ、スクイーズド光の直交位相成分を示すマーカーとして機能するようになる。

プローブ光と LO 光の相対位相をロック

プローブ光と LO 光の干渉信号をモニターするには、ホモダインディテクター(HD)を用いる。前に述べたように、プローブ光の位相はスクイーズド光の最もスクイーズまたはアンタイスクイーズされた直交位相成分に一致している。そのため、ここではプローブ光とスクイーズド光の相対位相が 0 または π となるように、

すなわちこれら 2 ビームの干渉信号が最大または最小となるように相対位相を制御することになるが、これにはやはり FM サイドバンド法によるフィードバック制御が必要となる。

このために必要な側帯波成分は、先のパラメトリックゲインをロックするために生成したもの (PZT4 により生成された 64 kHz の側帯波) を流用できる。そして、フィードバック制御器が HD の出力信号に含まれる 64 kHz の側帯波成分から差動信号を生成し、PZT6 にフィードバック信号を送る。

こうして LO 光の位相は、プローブ光の位相すなわちスクィーズド光の最もスクィーズもしくはアンタイスクィーズされた直交位相成分にロックされる。

スクィーズド光と LO 光の相対位相揺らぎ

これらのロックが不完全であることに起因するスクィーズド光と LO 光の相対位相揺らぎは、本セットアップにおいて $\theta = 3.9^\circ$ である。

5.5 実験方法

本節では、実験の主な手順について述べる。まず、得られるであろうスクィージングレベルを理論的に計算するために必要なパラメータ (パラメトリックゲイン、共振器内部ロス、ホモダイン効率) を得るための手順について述べる。

5.5.1 ホモダイン検波のバランス

バランス型ホモダイン検波によりレーザーの古典ノイズをキャンセルし高い SN 比で量子ノイズを測定するためには、ホモダインディテクター (HD) に搭載されたフォトダイオードに入る LO 光のパワーを揃える、すなわちバランスをとる必要がある。本実験では 1 MHz の側帯波成分を測定するので、特にその周波数においてバランスが取れている必要がある。

このバランスは以下のような手順で取った。まず、HD の両フォトダイオードに LO 光が入るようにし、なおかつ OPO からの光はカットした。次に、LO 光の光路に EOM を挿入し 1 MHz で位相変調をかけた。そして、HD の出力信号をスペクトラムアナライザーに入力し、そのうちの 1 MHz 成分に着目しつつ、これが極力小さくなるようにホモダイン検波のハーフビームスプリッター (HBS) の向きを微調整した。

5.5.2 ポンプ光と OPO のモードマッチ

OPO におけるパラメトリック増幅を効率よく行うためには、非線形光学結晶の内部に集光されるポンプ光と共振器の固有モードを一致させる必要がある。しか

しながら，結晶内部におけるビームウエスト半径が $20\ \mu\text{m}$ 程度しかないこともあり，これらの空間モードを一致させることは容易ではない．

そのため，本実験では文献 [1] でも用いられている方法を用いてポンプ光の空間モードと共振器の固有モードを一致させた．そのために，この OPO を “doubler mode” にて駆動することにより，アライメント光から第二高調波 (SH) を生成させた．この時のビーム配置を Fig. 5.4 に示す．ここで，OPO 共振器の周回長さは

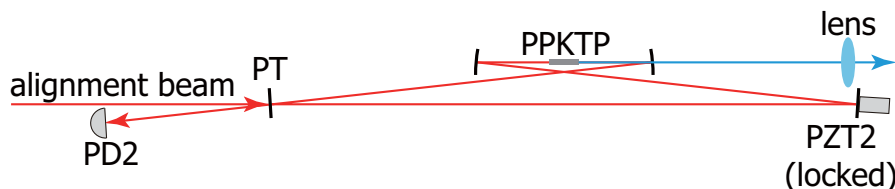


Figure 5.4: Beam configuration for mode matching of the pump beam and the OPO cavity.

PZT2 を用いてロックし，アライメント光が共振器に共振した状態になるよう保持した．また，非線形光学結晶 (PPKTP) の温度は位相整合条件が満たされるよう調整した．

こうしてアライメント光から発生した SH 光は，ポンプ光にとって理想的な空間モードを再現しており，さらにその伝播方向はポンプ光と逆である．次は，OPO により生成された SH 光と SHG により生成されたポンプ光の空間モードを一致させた．この一助とするため，SHG と OPO の間に参照用の共振器 (Fig. 5.1 中の “triangle cavity”) を置き，これに SHG からのポンプ光と OPO からの SH 光が各々共振するよう，集光用レンズ (Fig. 5.4 中の “lens”) や光路中にあるミラーのアライメントを行った．こうして，ポンプ光の空間モードを OPO 共振器の空間モードに合わせ込むことができた．

なお，この後でさらにポンプ光路中のミラーならびに集光用レンズを微調整することにより，パラメトリックゲインを最大化することができた．

5.5.3 共振器内部ロスの測定

共振器内部ロスを測定するためにはアライメント光を用いる．この時のビーム配置を Fig. 5.5 に示す．

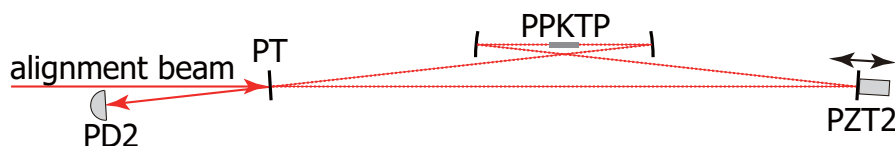


Figure 5.5: Beam configuration for measuring the intracavity loss.

PZT2 に三角波を与えて共振器長をスキャンしている状態で、共振器の出力カプラーから反射した光を PD2 で検出し、それをオシロスコープで観察した。こうすると、アラインメント光が共振器に共振する時だけ反射光のパワーが低下する様子が見られたため、共振していないときの PD 出力を I_a 、共振している時の PD 出力を I_b として測定した。

そして、Eq. (5.33) を用いて、これらの測定値と出力カプラーの透過率 $T = 0.123$ から共振器内部ロス L を算出した。

$$L = 1 - \left(\frac{\sqrt{1-T} + \sqrt{I_b/I_a}}{1 + \sqrt{1-T}\sqrt{I_b/I_a}} \right)^2 \quad (5.33)$$

5.5.4 パラメトリックゲインの測定

光パラメトリック増幅はポンプ光と増幅されるシグナル光の位相差に敏感な過程である。すなわち、シグナル光のうちポンプとの位相差が 0 である直交位相成分が増幅され、逆に位相差が $\pi/2$ である直交位相成分は減衰される。シグナルの入力が真空場であれば、ポンプ光の半周期ごとに真空の揺らぎが増幅・減衰されることになる。もちろん、これはポンプ光のパワーに依存するため、実験でパワーを変えるたびに測定する必要がある。

こうしたパラメトリックゲインを測定するためには、OPO にプローブ光を入力し、増幅/減衰された後に出力されたもののパワーをモニターする。そのためのビーム配置を Fig. 5.6 に示す。

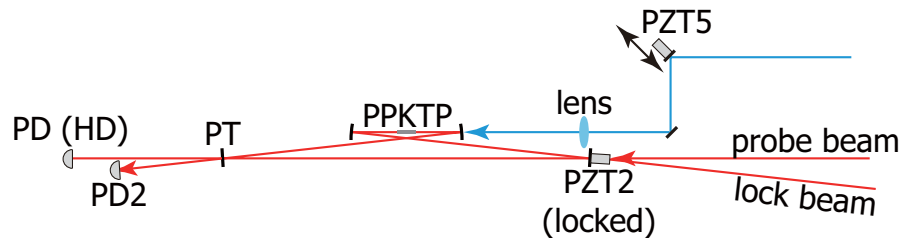


Figure 5.6: Beam configuration for measuring the parametric gain of the OPO.

まず、ロック光、プローブ光を入射した状態で OPO の共振器をロックした。次に、その状態で OPO と空間モードを合わせてあるポンプ光を入力した。そして、PZT5 に三角波の電圧をかけることでプローブ光の位相をスキャンし、OPO で増幅/減衰されたプローブ光を HD に搭載されたフォトディテクターの片方で検出し、それをオシロスコープで観察した³。

結晶の温度を位相整合温度に合わせると、位相に敏感なパラメトリックゲインに従い、OPO から出力されるプローブ光のパワーすなわち HD 出力が変動するの

³別なフォトディテクター (PD4) を用いてもよいが、ここでは実験的な利便性の都合から HD を用いた。

が見えた．ここで，結晶の温度，ポンプ光の方向ならびに集光用レンズの位置を微調整した．さらに，共振器のロックをいったん外し，PZT2 に三角波電圧を与えることにより共振器長をスキャンさせ，ロック光とプローブ光が同時に共振するようロック光の周波数シフト量を調整した．

その後，再び共振器をロックしてプローブ光に対するパラメトリック増幅を再開し，HD 出力の最大値 I_+ および最小値 I_- を測定した．さらに，結晶の温度を位相整合温度から十分に外してパラメトリックゲインを 1 にした状態における HD 出力 I_0 を測定した．

最後に，得られた測定値と Eq. (5.34) を用い，パラメトリックゲイン (増幅側 G_+ ，減衰側 G_-) を計算した．

$$G_{\pm} = \frac{I_{\pm}}{I_0} \quad (5.34)$$

5.5.5 ホモダイン効率の測定

ホモダイン効率の測定は，OPO を通過したプローブ光と LO 光をホモダイン検波の HBS で干渉させ，その干渉縞の明瞭度 (visibility) を測定することを通じて求めた．その時のビーム配置を Fig. 5.7 に示す．

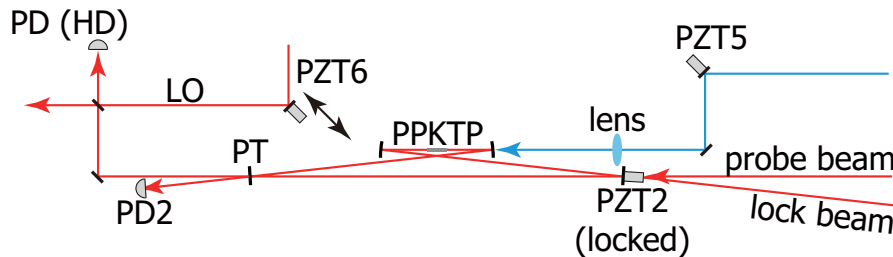


Figure 5.7: Beam configuration for measuring the homodyne efficiency.

まず，OPO にポンプ光，ロック光，プローブ光を入射して共振器をロックした．ポンプ光を入射するのは，PPKTP 結晶によるポンプ光の吸収により熱レンズが形成され，わずかながら空間モードが変化するためである．PZT6 には三角波電圧をかけて，LO 光の位相が掃引されるようにした．

この状態で，パラメトリックゲインが十分小さくなるように結晶の温度を位相整合温度から外した．これは，プローブ光のパワーが変動すると干渉縞の明瞭度を測定できないためである．次に，HD に搭載されたフォトダイオードの片方で LO 光とプローブ光を検出し，それをオシロスコープで観察した．その後，OPO から出てきたプローブ光と LO 光のパワーをそれぞれ調節し，両ビームのパワーを等しくした．

すると，HD の出力の時間波形にプローブ光と LO 光の干渉が見られるようになったため，この干渉成分が十分大きくなるようアラインメントを行い，HD 出力の最大値 I_{\max} ならびに最小値 I_{\min} を測定した．

最後に，得られた測定値と Eq. (5.35) を用い，ホモダイン効率 (干渉縞の明瞭度を2乗したものを) を計算した．

$$\eta_{\text{HD}} = \left(\frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}} \right)^2 \quad (5.35)$$

5.5.6 スクイーミング/アンタイスクイーミングレベルの測定

ここではスクイズド状態の量子ノイズを測定した際の手順について述べる．ビーム配置は Fig. 5.8 に示すように，5.5.5 節におけるものとほぼ同一である．先ほどと異なるのは，HD に搭載されたフォトディテクターを両方使用する点，プローブ光をきわめて弱くした状態で使う点である．もちろん，この一連の作業はポンプ光のパワーを変更するたびに行った．

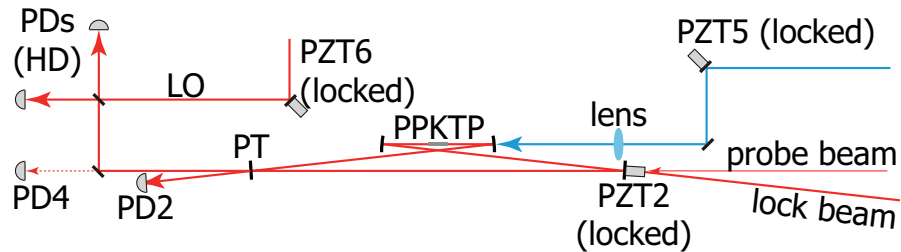


Figure 5.8: Beam configuration for measuring squeezing or anti-squeezing level.

まず，5.5.4 節ならびに 5.5.5 節で述べた作業は予め済ませたものとする．そして，結晶の温度を位相整合温度に戻し，HD に搭載されたフォトダイオードの両方に光を入れ，さらに LO 光のパワーを 3 mW まで増やして HD 出力をスペクトラムアナライザーに入力した．また，スペクトラムアナライザーの設定は 5.3.8 節の Table 5.3 に示した通りにした．

最初に，真空の量子ノイズレベルから測定した．そのために，OPO からの光を遮りスペクトラムアナライザーでノイズレベルを記録した．次に，スクイズド光と LO 光の相対位相をスキャンした状態でノイズレベルを測定した．ここでは，プローブ光をいったん切り，PZT6 に三角波電圧を与えて LO 光の位相を掃引しつつ OPO からのスクイズド光をホモダイン検波に入力し，スペクトラムアナライザーでノイズレベルを記録した．

続いて，スクイズド光の最もスクイズされた直交位相成分に LO 光をロックした状態でスクイーミングレベルを観測した．まず，PD4 出力をモニタリングしつつ，OPO から出力されるプローブ光パワーの最小値が $1 \mu\text{W}$ となるように OPO 前のプローブ光パワーを調整した．その後，PZT5 を用いてパラメトリックゲインが極小値になるようロックし，さらにスペクトラムアナライザーで観測されるノイズレベルが最小になるよう，PZT6 を用いて LO 光の位相をロックした．さらに，OPO から出力されるプローブ光パワーの最大値が $1 \mu\text{W}$ となるように OPO 前の

プローブ光パワーを調整した。その後、スペクトラムアナライザーでノイズレベルを記録し、スキージングレベルの測定を完了した。

最後に、スキーズド光の最もアンタイスキーズされた直交位相成分に LO 光をロックした状態でスキージングレベルを観測した。まず、LO 光の位相やパラメトリックゲインのロックをいったん外し、PD4 出力をモニタリングしつつ、OPO から出力されるプローブ光パワーの最大値が $1 \mu\text{W}$ となるように OPO 前のプローブ光パワーを調整した。その後、PZT5 を用いてパラメトリックゲインが極大値になるようロックし、さらにスペクトラムアナライザーで観測されるノイズレベルが最大になるよう、PZT6 を用いて LO 光の位相をロックした。その後、スペクトラムアナライザーでノイズレベルを記録し、アンタイスキージングレベルの測定を完了した。

5.6 実験結果

5.6.1 共振器内部ロス (BLIIRA の影響について)

PPKTP 結晶における BLIIRA の影響について調査した結果を Table 5.4 に示す。また、比較のため KNbO_3 を搭載した他の OPO におけるデータも併記した。共振器内部ロスのポンプ光による増加すなわち BLIIRA の影響は、PPKTP を搭載した OPO では KNbO_3 を搭載したそれに較べ極端に少ないことが分かった。特に、結晶 #1 においては BLIIRA の影響が全く見られなかった。

今回は、過去の BLIIRA が観測されなかった研究例 [4] で用いていた波長 946 nm よりも短い波長 860 nm を用いた。このことは BLIIRA を避けるうえでは不利ではないかとの懸念もあったが、この調査により 860 nm においても十分に PPKTP のメリットを享受できることが分かった。また、Wang らによるパルス光を用いた調査では BLIIRA に類した現象 (波長が違うので BLIIRA ではなく GLIIRA) が起きている [12] ことを考えると、今回の実験において BLIIRA の影響がわずかしか見られなかったのは、cw による低いピークパワーのためだったと推測することができる。

Table 5.4: Increments in the intracavity loss induced by 100 mW pumping. (L : intracavity loss. The data in the third row was obtained using other OPO with a KNbO_3 crystal.)

Crystal	L (without pumping)	L (with pumping)	Increment in L
#1	0.006	0.006	0.000
#2	0.002	0.004	0.002
(KNbO_3)	(0.009)	(0.024)	(0.015)

5.6.2 パラメトリックゲイン

パラメトリックゲインの測定結果を Fig. 5.9 に示す．これより，用いる結晶によるパラメトリックゲインの差はわずかであることが分かる．

減衰側のパラメトリックゲイン G_- の値は，ポンプ光パワーが増加するとともに減少していくはずであるが，結晶#1 を用い 120 mW でポンプしたときには増加していることが分かる．これは，OPO 共振器のロックが不安定になっていたためであり，その原因は結晶端面において反射したプローブ光とロック光の干渉であると考えられる．より反射率の低い AR コーティングを施された結晶#2 については，120 mW のポンプ光パワーにおいても共振器の不安定化は発生せず，その結果 G_- は順調に減少した．

なお，5.6.4 節の Fig. 5.11 にプロットしたスクイーディングレベルの理論値は，ここで得られたパラメトリックゲインを用いて計算した．

5.6.3 最適なポンプ光パワーにおける量子ノイズレベル

スクイーディングレベルが最高となったとき (最もスクイズされたとき) の結果を Table 5.5 ならびに Fig. 5.10 に示す．スクイズド光の最もスクイズまたはアンタイスクイズした直交位相成分に LO 光の位相をロックして，Table 5.5 に示した結果を得た．いずれも， KNbO_3 により得られた最高記録である -6.0 dB [1] を大幅に塗り替えることに成功した．

Table 5.5: Experimental results obtained at the optimal pump power. (L : intracavity loss, η : overall detection efficiency, P_{opt} : optimal pump power, Sq.: squeezing, A.-sq.: anti-squeezing.)

Crystal	L	η	P_{opt}	Sq. Level	A.-sq. Level
#1	0.006	0.97	100 mW	-7.2 ± 0.2 dB	$+11.6 \pm 0.2$ dB
#2	0.002	0.95	110 mW	-7.5 ± 0.2 dB	$+12.5 \pm 0.2$ dB

Fig. 5.10 においては，縦軸がホモダイン検波により得られたノイズレベルであり，真空を測定したときのノイズレベル (shot noise level) が 0 dB になるよう規格化してある．また，横軸は時刻であり，ノイズレベルの時間変化を 100 ms のスパンで観測している．図中のプロットは (a) が真空のノイズレベル，(b) がスクイズされた直交位相成分に LO の位相をロックして得られたノイズレベル，(c) がアンタイスクイズされた直交位相成分に LO の位相をロックして得られたノイズレベル，(d) が LO の位相を掃引しながら得たノイズレベルである．

なお，スクイズされた直交位相成分を測定したときのノイズレベルがショットノイズ比 -7 dB 程度になると，ホモダインディテクターの回路ノイズによる影響を免れない．仮に回路ノイズがなかったと仮定すると，測定されるスクイー

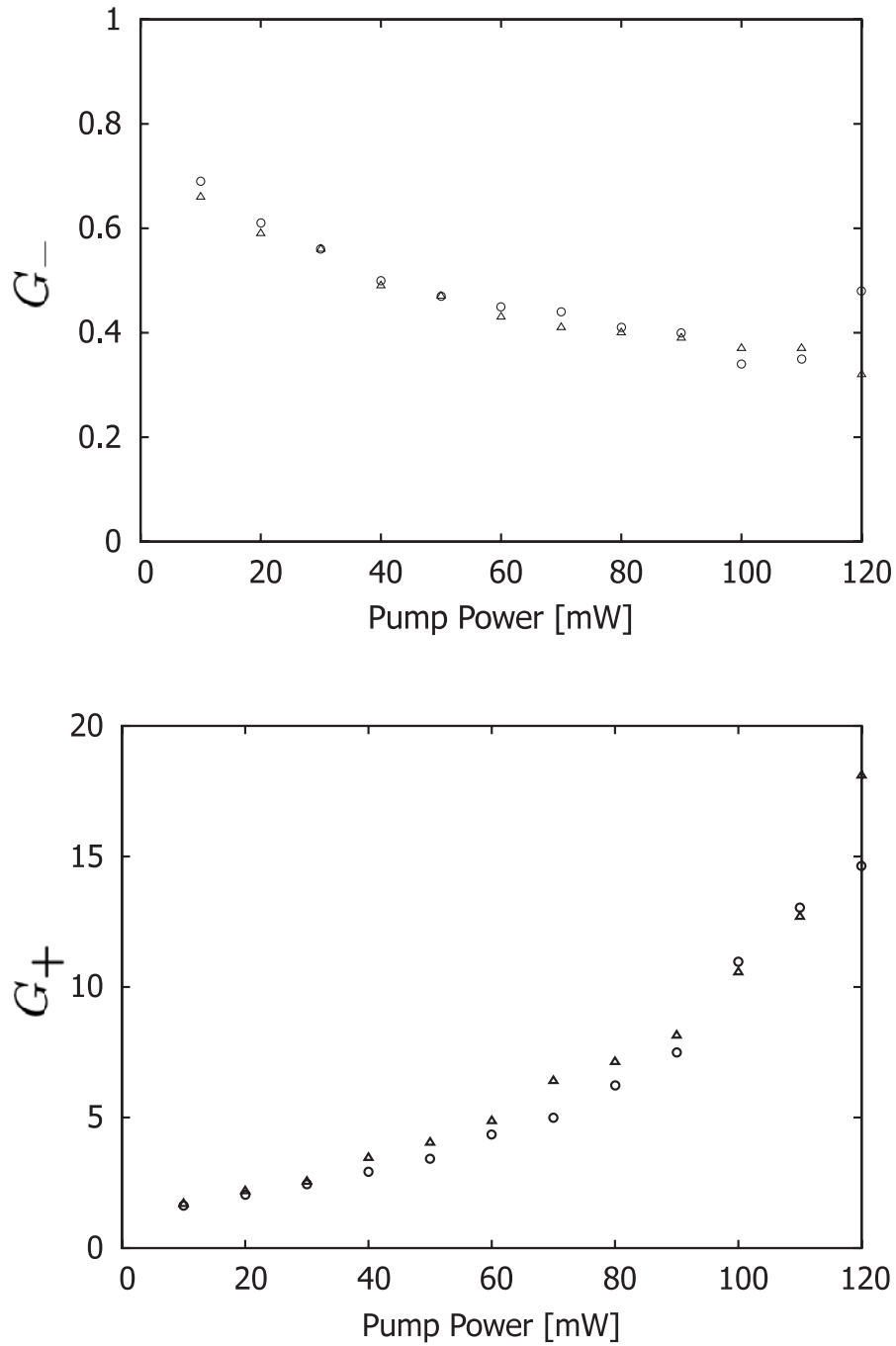


Figure 5.9: Classical parametric gain of the OPO. (upper) Deamplification gain G_- . (lower) Amplification gain G_+ . Plots with \circ and \triangle indicate values obtained with the crystal #1 ($L = 0.006$) and the crystal #2 ($L = 0.002$), respectively.

レベルは結晶#1において -7.5 dB, 結晶#2において -7.8 dBになると推定される.

5.6.4 量子ノイズレベルのポンプ光パワー依存性

スクイージングレベル/アンタイスクイージングレベルのポンプ光パワー依存を Fig. 5.11 に示す. 観測されるスクイージングレベルはポンプ光パワーが大きくなるほどに飽和しており, 実験的なパラメータ (パラメトリックゲイン, OPO 共振器出力カプラー透過率, 共振器内部ロス, 伝搬ロス, ホモダイン効率) から計算されるスクイージングレベル (グラフ中 \circ プロット) とも乖離していくことが分かる.

しかしながら, これらのパラメータに加えて相対位相揺らぎ $\tilde{\theta} = 3.9^\circ$ も考慮に入れて計算された理論スクイージングレベル (グラフ中 \triangle プロット) は, 実験的に得られたスクイージングレベルとよく一致している. このことは, このスクイージングレベルの飽和が, スクイーズド光と LO 光の相対位相揺らぎすなわちロックの不完全性に起因するものであることを示している.

仮に $\tilde{\theta} = 0$ であったならば, 得られるスクイージングレベルは結晶#1においてポンプ光パワーを 100 mW とした場合で -9.3 dB, 結晶#2においてポンプ光パワーを 110 mW とした場合で -9.7 dB であると見積もることができる.

5.6.5 -3 dB 程度のスクイージングにおける状態の純粋度

Fig. 5.12 には, Fig. 5.11 に示したスクイージングレベルならびにアンタイスクイージングレベルから計算した純粋度を示す. 特に, 結晶#2においてポンプ光パワー 10 mW とした時にはスクイージングレベル -3.2 dB, アンタイスクイージングレベル $+3.5$ dB が得られ, これらより計算される純粋度は 0.97 であった. これは, スクイージングパラメータ $r = 0.43$ (スクイージングレベル -3.8 dB 相当) の純粋なスクイーズド状態が透過率 $\eta = 0.90$ の損失媒体を透過したものと等価である.

ちなみに, KNbO_3 を非線形光学結晶として用いた同種の実験では, -3.0 dB のスクイージングレベルが得られるときのアンタイスクイージングレベルが $+4.4$ dB, これらより計算される純粋度は 0.85 であった. こちらは, スクイージングパラメータ $r = 0.63$ (スクイージングレベル -5.5 dB 相当) の純粋なスクイーズド状態が透過率 $\eta = 0.70$ の損失媒体を透過したものと等価である.

このように, PPKTP を用いることにより KNbO_3 結晶を用いたときと比較して大幅にスクイージングの純粋度を上げることができた. これは, 擬似 CSS を生成する上で大きな前進であると言える.

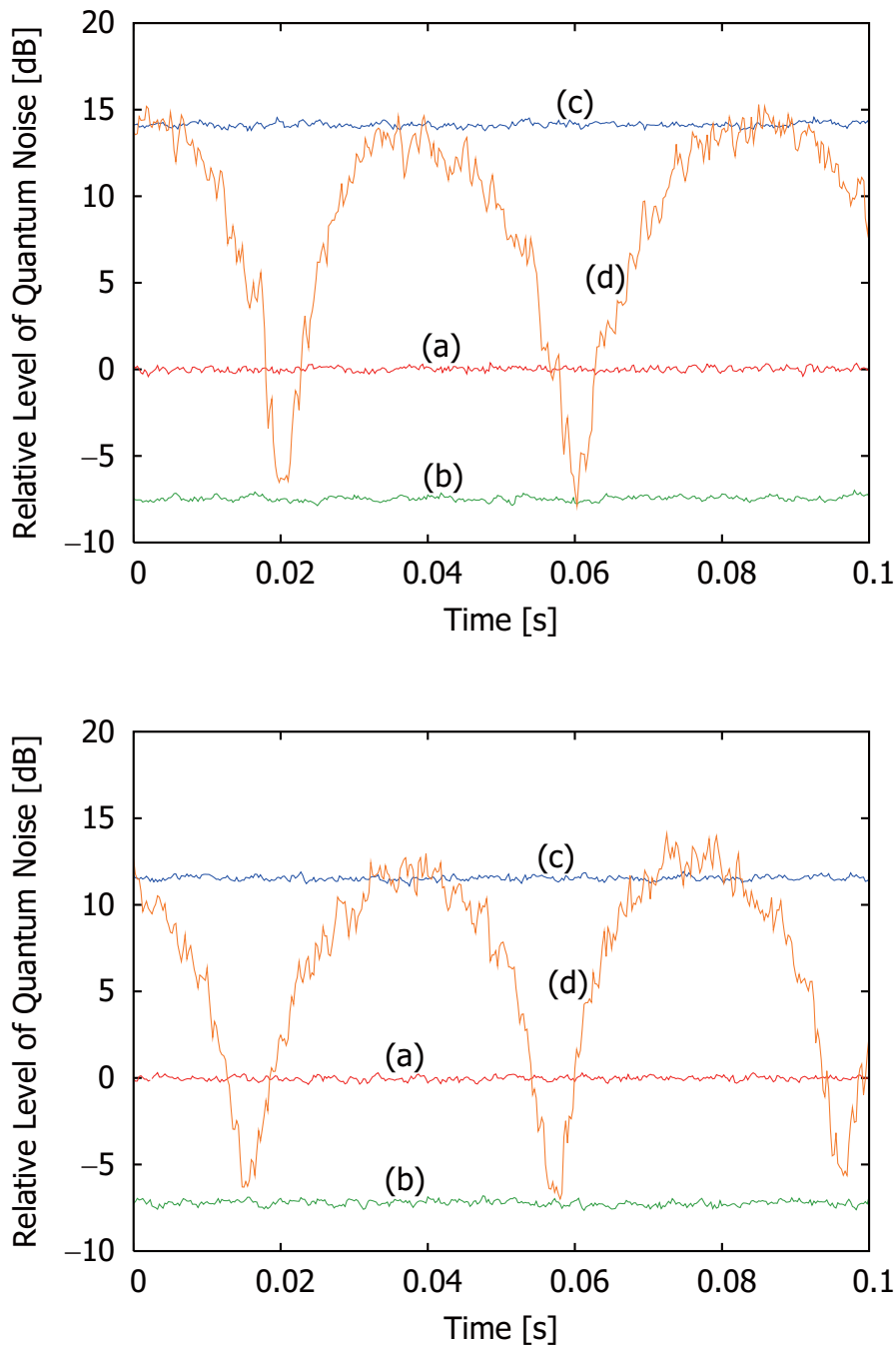


Figure 5.10: Power levels of quantum noise. (upper) Obtained with the crystal #1 ($L = 0.006$) and 100 mW pumping. (lower) Obtained with the crystal #2 ($L = 0.002$) and 110 mW pumping. (a) shot noise level, (b) LO phase is locked at the squeezed quadrature, (c) LO phase is locked at the anti-squeezed quadrature, (d) LO phase is scanned. These are normalized to make the shot noise level 0 dB. All traces except for (d) are averaged for 20 times.

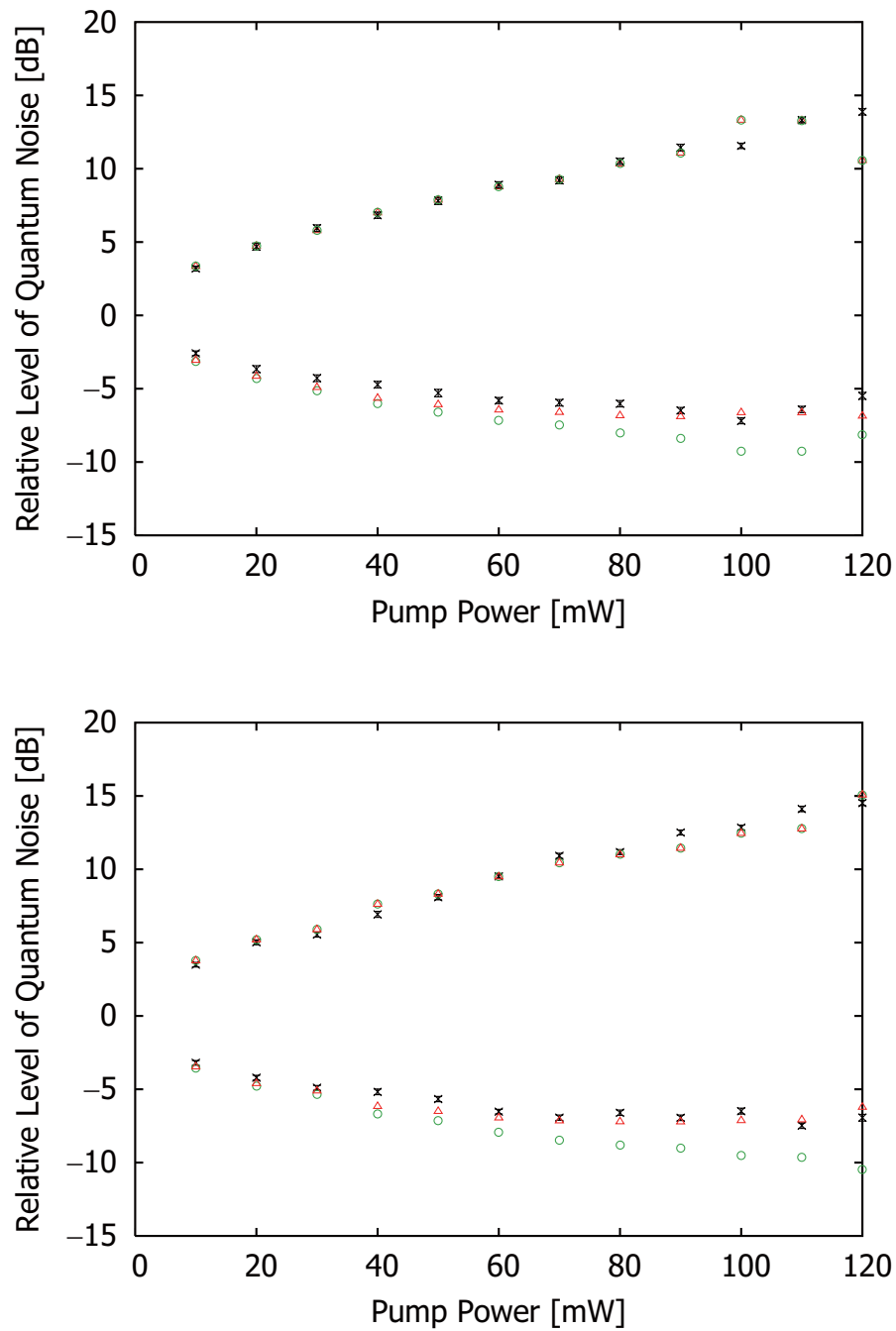


Figure 5.11: Squeezing and anti-squeezing levels at several powers of the pump beam. (upper) Obtained with the crystal #1 ($L = 0.006$). (lower) Obtained with the crystal #2 ($L = 0.002$). Plots with \times indicate measured values while \circ and Δ indicate theoretical ones which are calculated from measured classical parametric gains. The phase fluctuation of the LO is taken into account for the plots with Δ while it is not done for those with \circ .

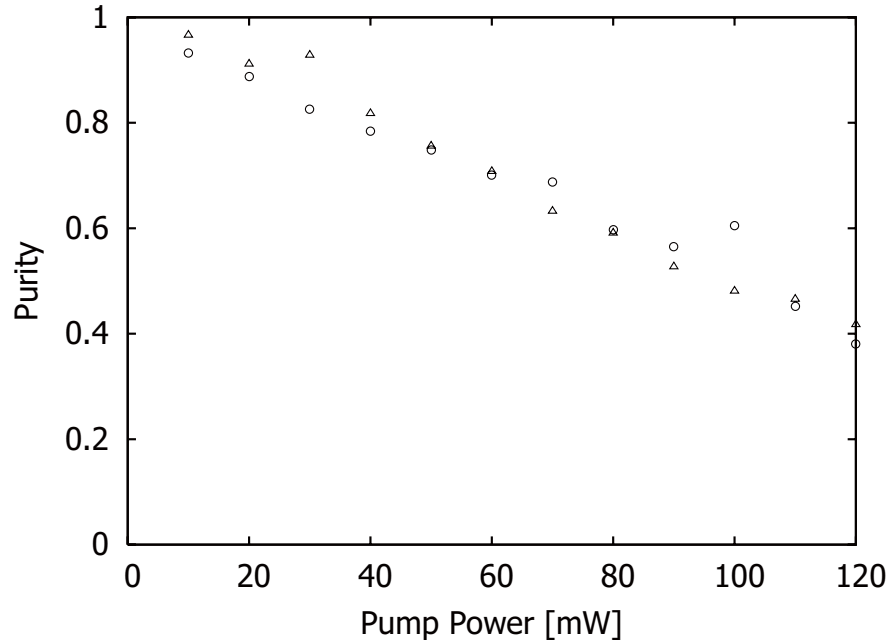


Figure 5.12: Purities calculated from the observed squeezing and anti-squeezing levels using the definition $\text{Tr}\{\hat{\rho}^2\}$ where $\hat{\rho}$ denotes the density operator of the observed state. Plots with \circ and \triangle indicate values obtained with the crystal #1 ($L = 0.006$) and the crystal #2 ($L = 0.002$), respectively.

5.7 考察

本節では考察として、さらに高いスクイーピングレベル、特にテレポーテーションにより CSS を転送するのに必要となる -10 dB [13] を得るにはどうすべきかについて論じる。

先にも述べたとおり、スクイーピングレベルを決定するパラメータはポンピングパラメータ x 、共振器出力カプラーの透過率 T 、共振器内部ロス L そしてスクイーズド光と LO 光の相対位相揺らぎ $\tilde{\theta}$ である。

まず、共振器の出力カプラーの透過率は $T = 0.2$ に変更することを考える。これは、共振器のエスケープ効率 ρ を向上させ、さらにスクイーピングの周波数帯域の拡大を通じて 1 MHz の側帯波におけるスクイーピングレベルを改善することにつながる。この対策を講じると OPO の発振閾値が上昇しより大きなポンプ光パワーが必要になるが、本実験で用いた SHG の出力であれば対応可能である⁴。

こうした条件の下、Eqs. (5.8)–(5.17) を用いてスクイーピングレベル R'_- を計算し、これを共振器内部ロス L ならびに相対位相揺らぎ $\tilde{\theta}$ の関数として Fig. 5.13 にプロットした。ここで、それぞれの L ならびに $\tilde{\theta}$ において R'_- が最小となるよう x

⁴ $T = 0.2$, $L = 0.006$, $E_{\text{NL}} = 0.023$ といった条件で Eq. (5.12) を用いて発振閾値を求めると $P_{\text{th}} = 461$ mW になる。すると本実験で用いた SHG の出力 $P_{\text{pump}} = 400$ mW によりポンプパラメータ $x = 0.931$ を達成することが可能である。 $x = 0.931$, $\eta = 0.97$, $l = 0.5$ さらに $\tilde{\theta} = 0$ といった条件であれば、得られるスクイーピングレベルは -12.0 dB である。

の値は最適化してある．

この計算結果は、実験系の改良してスクイズド光 LO 光の相対位相揺らぎを抑制することによりさらに高いスクイーディングレベルを達成しうることを示している．たとえば、 -10 dB のスクイーディングレベルは $L = 0.003$, $\tilde{\theta} = 1.6^\circ$, $G = 13.7$ において達成可能である．このうち、 $L = 0.003$ は今回用いた結晶#2 においてすでにクリアされており、パラメトリックゲインはポンプ光パワー 238 mW にて達成可能な見込みである．さらに、 $\tilde{\theta}$ についても重力波干渉計の例 [14] から察するに $\sim 0.1^\circ$ まで抑制できると考えられる．こうしたことから、連続変数における量子テレポーテーションにより CSS を転送するのに必要とされるスクイーディングレベル -10 dB は、比較的リーズナブルな条件で実現できるものと考えられる．

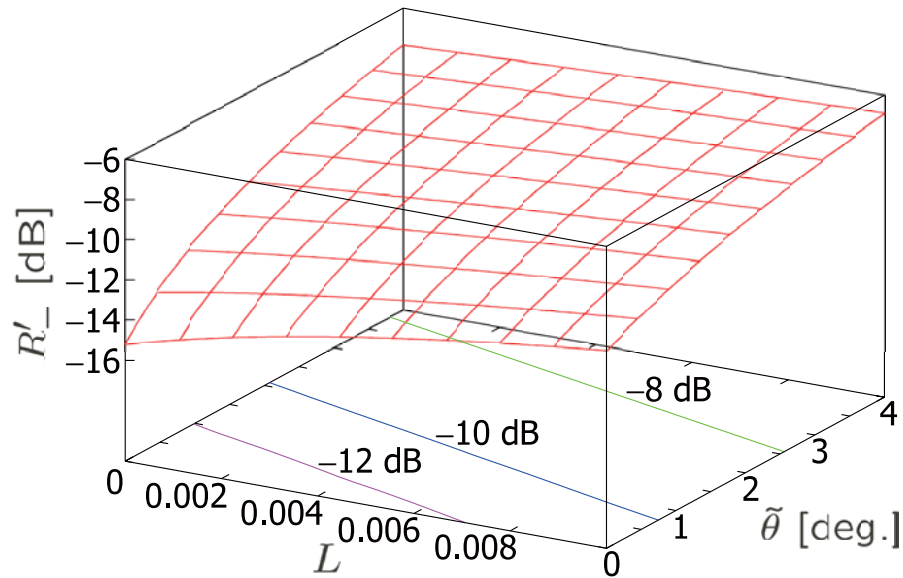


Figure 5.13: Relationship among the squeezing level R'_- , the intracavity loss L , and the LO phase fluctuation $\tilde{\theta}$. The values of the experimental parameters are unchanged from the experimental setup except for the transmissivity of the output coupler T and the pump parameter x . Curves on the L - $\tilde{\theta}$ plane denote contours of the surface: -12 dB, -10 dB, and -8 dB.

5.8 まとめ

本章では、非線形光学結晶として PPKTP を用い、波長 860 nm の高レベル・高純粋度のスクイズド状態を生成する実験について述べた．このスクイズド光は、PPKTP を搭載した光パラメトリック発振器を発振閾値以下でポンプすることにより発生させた．この中で、従来の KNbO_3 結晶を用いるスクイーディング実験において問題となっていた、非線形光学結晶によるポンプ光誘起の赤外光吸収 (BLIRA) はほぼ無視できるレベルにまで抑制できることが分かった．その結果、

旧来の記録を大幅に上回る -7.5 ± 0.2 dB の直交位相成分スクイーディングを観測することに成功した。さらに、このスクイーディングレベルは LO の位相を最もスクイーズした直交位相成分にロックした状態で観測された。

このことは、生成されたスクイーズド状態を連続変数の領域における量子情報処理プロトコルに応用する際にきわめて重要なことである。たとえばコヒーレント状態を量子テレポーテーションにより転送する場合、5 回の連続したプロセスが可能になる。なお、1 回の転送プロセスであれば、転送される状態の入力状態に対するフィデリティは、原理的には 0.85 に達する。

さらに、このスクイーディングレベルは通信路における新しい符号化技術やセンシング技術を実現に導く可能性を秘めている [15–17]。特に、 -7.5 dB というスクイーディングレベル自体は、コヒーレント光を用いた通信路の容量を規制している Holevo 限界を打ち破るのに必要なスクイーディングレベルの理論値 -6.78 dB [17] を超えている。もっとも、実際に Holevo 限界を破るには、用いるスクイーズド状態が純粋状態 (スクイーディングレベルとアンタイスクイーディングレベルの絶対値が同じ) でなければならないため、今後はアンタイスクイーディングレベルを抑える努力が必要である。

また、 -3 dB 程度のスクイーディングレベルにおける高い純粋度は、擬似 CSS を生成するにあたって威力を発揮するはずである。現に、PS スキームに基づく実験に PPKTP を導入することにより [18]、 KNbO_3 を用いた従来の実験 [19] と比較して純粋度の高い擬似 CSS を生成することに成功している。

さらに、 860 nm は Cs 原子の D_2 遷移に対応する波長 (852 nm) に近いので、スクイーズド状態のような非古典的な状態にある光を用いた原子の制御にも活用できることが期待される。

これに加えて、CSS を量子テレポーテーションにより転送する際に必要となる -10 dB のスクイーディング [13] を観測するために必要な条件についても検討を行った。ここでは、理論的に得られうるスクイーディングレベルを、共振器内部ロスならびに LO 位相の揺らぎの関数として計算した。その結果、 -10 dB のスクイーディングも比較的現実的な条件で実現できる見込みがあることが分かった。

参考文献

- [1] E. S. Polzik, J. Carri, and H. J. Kimble, *Appl. Phys. B* **55**, 279 (1992).
- [2] M. J. Collett and C. W. Gardiner, *Phys. Rev. A* **30**, 1386 (1984).
- [3] T. C. Zhang, K. W. Goh, C. W. Chou, P. Lodahl, and H. J. Kimble, *Phys. Rev. A* **67**, 033802 (2003).
- [4] T. Aoki, G. Takahashi, and A. Furusawa, *Opt. Express*, **14**, 6930 (2006).
- [5] S. Somekh and A. Yariv, *Opt. Commun.* **6**, 301 (1972).
- [6] A. Yariv, *Photonics: Optical Electronics in Modern Communications*, 6th edition (Oxford University Press, New York, 2006).
- [7] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, 2nd edition (Academic Press, San Diego, 2003).
- [8] D. N. Nikogosyan, *Nonlinear Optical Crystals: A Complete Survey* (Springer, New York, 2003).
- [9] G. D. Boyd and D. A. Kleinman, *J. Appl. Phys.* **39**, 3597 (1968); R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, 2nd edition (Academic Press, San Diego, 2003).
- [10] E. S. Polzik and H. J. Kimble, *Opt. Lett.* **16**, 1400, (1991).
- [11] R. W. P. Drever, J. L. Hall, F. V. Kowalski, J. Hough, G. M. Ford, A. J. Munley, and H. Ward, *Appl. Phys. B* **31**, 97 (1983).
- [12] S. Wang, V. Pasiskevicius, and F. Laurell, *J. Appl. Phys.* **96**, 2023 (2004).
- [13] S. L. Braunstein and H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 869 (1998).
- [14] M. Ando, K. Arai, R. Takahashi, G. Heinzl, S. Kawamura, D. Tatsumi, N. Kanda, H. Tagoshi, A. Araya, H. Asada, Y. Aso, M. A. Barton, M.-K. Fujimoto, M. Fukushima, T. Futamase, K. Hayama, G. Horikoshi, H. Ishizuka, N. Kamikubota, K. Kawabe, N. Kawashima, Y. Kobayashi, Y. Kojima, K. Kondo, Y. Kozai, K. Kuroda, N. Matsuda, N. Mio, K. Miura, O. Miyakawa, S. M. Miyama, S. Miyoki, S. Moriwaki, M. Musha, S. Nagano, K. Nakagawa, T. Nakamura, K. Nakao, K. Numata, Y. Ogawa, M. Ohashi, N. Ohishi, S.

- Okutomi, K. Oohara, S. Otsuka, Y. Saito, M. Sasaki, S. Sato, A. Sekiya, M. Shibata, K. Somiya, T. Suzuki, A. Takamori, T. Tanaka, S. Taniguchi, S. Telada, K. Tochikubo, T. Tomaru, K. Tsubono, N. Tsuda, T. Uchiyama, A. Ueda, K. Ueda, K. Waseda, Y. Watanabe, H. Yakura, K. Yamamoto, and T. Yamazaki (TAMA Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3950 (2001).
- [15] E. S. Polzik, J. Carri, and H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3020 (1992).
- [16] C. M. Caves, *Phys. Rev. D* **23**, 1693 (1981).
- [17] S. L. Braunstein and H. J. Kimble, *Phys. Rev. A* **61**, 042302 (2000).
- [18] K. Wakui, H. Takahashi, A. Furusawa, and M. Sasaki, “Generation of non-Gaussian optical quantum states from continuous-wave squeezed vacua,” CQIQC 2006, NOSD3 (2006); e-print quant-ph/0609153 (2006).
- [19] J. S. Neergaard-Nielsen, B. Melholt Nielsen, C. Hettich, K. Mølmer, and E. S. Polzik, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 083604 (2006).

第6章 結論

本章では，第3章，第4章ならびに第5章における取り組みにより得られた結果をまとめる．また，本研究と並行して進められている研究との関わり合いについて触れ，そこから将来の展望について述べる．

6.1 実験的な不完全性を考慮した CSS 生成スキームの検討 (第3章)

- 現在考えられている2種類の擬似 CSS 生成スキームについて，実験的な不完全性(単一光子源や光子検出器の性能，ホモダイン効率)を網羅したモデルを構築した．それらに現実的な実験パラメータを代入して，測定されるであろう状態を計算・比較した．その結果，現在の技術水準においては SS スキームよりも PS スキームの方が現実的であることが分かった．
- 状態の非古典性を評価する際に用いられる指標であるウィグナー関数の位相空間原点における値 $W(0,0)$ は状態の光子数統計にのみ依存すること，つまり非古典的な状態は必ずしも純粋な状態ではないことを示した．
- 状態が非古典性を確保する条件 $W(0,0) < 0$ を満たすために，こういった実験パラメータが要求されるのかを明らかにした．その中で，SS スキームはスクイーミングパラメータが大きくなるほどに $W(0,0) < 0$ を満たす条件が厳しくなるのに対し，PS スキームでは逆であることが分かった．
- 他の研究者が PS スキームにおける実験的な不完全性を表すパラメータとして用いている “modal purity” を，本論文で用いたパラメータ (on/off 検出器のダークカウントならびに量子効率，ビームスプリッターの透過率，スクイーミングパラメータ) の関数として表現できることを示した．

6.2 ホモダイン検波を用いる CSS 純粋化プロトコルの提案 (第4章)

- 線形ロスにより劣化した CSS を回復させるための現実的なプロトコルを提案した．このプロトコルでは，入力状態に対して部分測定を行い，その結果に基づくイベント選択を行う．

- このプロトコルにおける部分測定としては、ホモダイン検波が最適なものの一つであることを明らかにした。ホモダイン検波は技術的に成熟した測定スキームであるため、過去に提案された同様の目的を持つプロトコルよりも実験的に実現することが容易である。
- ホモダイン検波を部分測定として用いるケースにおいて、本プロトコルの性能を計算により評価した。その結果、本プロトコルはCSSのコヒーレント振幅を減少させてしまうこと、振幅の大きなCSSの純粋化には向かないことが分かった。
- 本プロトコルにより減少してしまったCSSのコヒーレント振幅を、Lundらにより提案されたCSS増幅プロトコル [1] との組み合わせにより回復させられるか否か検討した。その結果、これらの組み合わせによる状態の改善は困難であることが分かった。

6.3 PPKTPを用いるスクイーズ状態の生成(第5章)

- 非線形光学結晶としてPPKTPを用い、波長860 nmにおいて直交位相スクイーズ状態を得る実験を行った。従来の KNbO_3 結晶に代わりPPKTPを用いたことで、得られる状態を悪化させる原因となっていたBLIRAが大幅に低減された。その結果、LO光の位相を最もスクイーズされた直交位相成分にロックしつつ -7.5 ± 0.2 dB スクイーディングレベルを得ることができた。また、 -3 dB程度のスクイーディングレベルにおいては0.97という高い純粋度を達成することができた。
- これに加えて、CSSを量子テレポーテーションにより転送する際に必要となる -10 dBのスクイーディング [2] を観測するために必要な条件についても検討を行った。その結果、 -10 dBのスクイーディングも実現できる見込みがあることが分かった。

6.4 総括と今後の展望

本節では、第1章で述べた本研究の目的と対比しつつ、得られた成果について総括する。そして、本研究の成果が今後どのように活用されるのか述べる。

6.4.1 総括

本研究では、量子情報処理に関する研究(主に光のコヒーレント状態を用いるもの、連続変数の領域におけるもの)の進展に寄与する知見や資源を提供することを目指し、以上にまとめた事柄に取り組んだ。

まず、この CSS を擬似的に生成する 2 種類のスキームについての知見を与えた。この中で、単一光子をスクイーズするスキーム (SS スキーム) とスクイーズド状態から 1 光子引くスキーム (PS スキーム) 2 種類の CSS 生成スキームについて、実験的な不完全性と現実的な実験条件を考慮した解析を行い、PS スキームの方がより現実的なスキームであることを明らかにした。

次に、線形ロスによりダメージを受けた CSS の回復について論じた。ここでは、CSS がその生成・伝搬時に避けることのできない線形ロスにより、CSS と CSM (振幅の異なるコヒーレント状態の古典的な混合) となることを示し、そうした状態を元の CSS に近づけることができるプロトコルを提案した。このプロトコルによる純粋化の効率について定量的に評価した結果は芳しいものではなかったが、ホモダイン検波というすでに確立された測定法を用いて実現が可能であるという点では一定の意義はあったものと思う。

最後に、CSS の生成および連続変数の領域における量子情報処理に欠かすことのできない良質の直交位相スクイーズド状態を、PPKTP を用いることにより実験的に実現した。

6.4.2 今後の展望

擬似 CSS の生成においては当面 PS スキームに基づく実験が中心に行われていくものと考えられる。PS スキームの方が現状の技術レベルで良質な CSS を生成できうること、また非ガウス操作としての側面も持つ本スキームはエンタングルメント抽出などとも関わりが深いからである。

一方の SS スキームが今よりも注目されるためには、より純粋度の高い単一光子状態が生成されるようになること、この損失にきわめて弱い状態にスクイージングの操作を実現できるようになることが必要である。これらに関して、すでに Pittman らにより純度 83 % の単一光子状態の生成が報告されている [3]。また、吉川らが“ユニバーサルスクイーズ”によるコヒーレント状態のスクイージング操作に成功している [4]。これらの研究が進展していくことは、SS スキームの実験的な実現に向けたモチベーションとなるに違いない。

本研究において提案した、ホモダイン検波を用いる部分測定とイベントセレクションにより CSS を回復させるプロトコルは、純粋な CSS と光子数識別測定の実現により Glancy らのプロトコル [5] が現実的になるまでの間、つなぎ的な役割を演じることになるだろう。なお、本プロトコルに類似したものは、すでに Heersink らにより実験的に実現されている [6]。

擬似位相整合 KTiOPO_4 素子を用いたスクイーズド状態については、今後

- さらなる高レベル化
- CSS 生成への応用
- 連続変数における量子情報処理プロトコルへの応用

が考えられる．さらなる高レベル化については，本研究の続きとして竹野らが実験系の改良を行った結果， -9 dB が達成されるに至っている [7]．また，和久井らは PS スキームに基づく実験に PPKTP を導入することにより [8]， KNbO_3 を用いた従来の実験 [9] と比較して純粋な擬似 CSS を生成することに成功している．また，この PPKTP を用いて生成されたスクイーズド状態を利用した量子テレポーテーションの実験もすでに行われている [10]．

今後，PPKTP は 860 nm 帯の波長におけるスクイーズド状態を生成するための標準的な非線形光学結晶になっていくであろう．また， 860 nm は Cs 原子の D_2 遷移に対応する波長 (852 nm) に近いため，この非古典的な状態にある光を Cs 原子と相互作用させる形での応用も期待できる．

参考文献

- [1] A. P. Lund, H. Jeong, T. C. Ralph, and M. S. Kim, *Phys. Rev. A* **70**, 020101(R) (2004).
- [2] S. L. Braunstein and H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 869 (1998).
- [3] T. B. Pittman, B. C. Jacobs, J. D. Franson, *Opt. Commun.* **246**, 545 (2004).
- [4] J. Yoshikawa, T. Hayashi, T. Akiyama, N. Takei, U. L. Andersen, and A. Furusawa, “Universal Squeezer via the Measurement-and-Feedforward Approach,” *CLEO/QELS 2006, QFD2* (2006).
- [5] S. Glancy, H. M. Vasconcelos, and T. C. Ralph, *Phys. Rev. A* **70**, 022317 (2004).
- [6] J. Heersink, Ch. Marquardt, R. Dong, R. Filip, S. Lorenz, G. Leuchs, and U. L. Andersen *Phys. Rev. Lett.* **96**, 253601 (2006).
- [7] 竹野唯志, 鈴木重成, 米澤英宏, 古澤明: “PPKTP による波長 860nm スクイズド光の生成 II,” 日本物理学会 2006 年秋季大会, 26pRB-4 (2006).
- [8] K. Wakui, H. Takahashi, A. Furusawa, and M. Sasaki, “Generation of non-Gaussian optical quantum states from continuous-wave squeezed vacua,” *CQIQC 2006, NOSD3* (2006); e-print quant-ph/0609153 (2006).
- [9] J. S. Neergaard-Nielsen, B. Melholt Nielsen, C. Hettich, K. Mølmer, and E. S. Polzik, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 083604 (2006).
- [10] H. Yonezawa and A. Furusawa, “Sequential Quantum Teleportation for Continuous Variables and Quantum State Reconstruction by Optical Homodyne Tomography,” *CLEO/QELS 2006, QFD5* (2006).

謝辞

本研究は、慶應義塾大学 理工学部電子工学科教授 神成文彦博士の御指導のもと、独立行政法人情報通信研究機構 (NICT) からの委託研究を軸にして、NICT および東京大学において行われたものであります。研究の場をアレンジしてくださり、また本研究全体にわたり御指導下さった神成文彦博士に深甚なる謝意を表します。

また、本論文を完成させるにあたり、慶應義塾大学 理工学部電子工学科教授 梅垣真祐先生、同物理学科教授 日向裕幸先生、同物理学科教授 佐々田博之先生には、副査として本論文の詳細にわたり御査読頂くとともに、丁寧なご指導をいただきました。ここに謹んで感謝の意を表します。

独立行政法人情報通信研究機構 研究マネージャー 佐々木雅英博士、同研究員武岡正裕博士、同専攻研究員 辻野賢治博士、デンマーク工科大学 (Technical University of Denmark) 助教授 アンダーセン博士 (Dr. Ulrik Lund Andersen)、そして、東京大学大学院工学系研究科 助教授 古澤明先生、同博士課程 米澤英宏修士ならびに竹野唯志修士からは、共同研究者としてのみならず多くの御指導ならびに御援助を頂きました。各氏にも謹んで感謝の意を表します。特に、佐々木雅英博士、古澤明先生には、実際の研究の場を与えて頂き、多くの学術・研究面での刺激を受けて研究生活を過ごすことができました。ここに厚く御礼申し上げます。

その他、慶應義塾大学 神成研究室、情報通信研究機構、東京大学 古澤研究室においては、上に名前を挙げた以外の方々からも様々な形で御支援や助言を頂きました。また、筆者は大学院博士課程に入学するため、勤務していた日産自動車株式会社を退職致しましたが、ここでの所属長ならびに関係者の方々が筆者を快く送り出してくださったことで学生としての再スタートを順調に切ることができました。ここでお世話になった方々の名前をすべて列挙することはできませんが、この場を借りて心から感謝の意を表したいと思います。

最後に、二度目の学生生活を全面的に支えてくださった両親に対し心からの敬意と謝意を表して本論文を締めくくります。

著者論文目録

I 本研究に関するもの

1 原著論文

1. Shigenari Suzuki, Hidehiro Yonezawa, Fumihiko Kannari, Masahide Sasaki, and Akira Furusawa, “7 dB quadrature squeezing at 860 nm with periodically poled KTiOPO₄”, Applied Physics Letters, Vol. 89, Issue 6, 061116 (2006).
2. Shigenari Suzuki, Masahiro Takeoka, Masahide Sasaki, Ulrik L. Andersen, and Fumihiko Kannari, “Practical purification scheme for decohered coherent-state superpositions via partial homodyne detection”, Physical Review A, Vol. 73, Issue 4, 042304 (2006).
3. Shigenari Suzuki, Kenji Tsujino, Fumihiko Kannari, and Masahide Sasaki, “Analysis on generation schemes of Schrödinger-cat-like states under experimental imperfections”, Optics Communications, Vol. 259, Issue 2, pp. 758–764 (2006).

2 国際会議

1. Shigenari Suzuki, Hidehiro Yonezawa, Fumihiko Kannari, Masahide Sasaki, and Akira Furusawa, “7.2 dB Quadrature Squeezing at 860 nm with Periodically-Poled KTiOPO₄”, CLEO/QELS 2006, QFD1, Long Beach, USA, May 21–26, 2006.
2. Shigenari Suzuki, Kenji Tsujino, Fumihiko Kannari, and Masahide Sasaki, “Photon subtraction and single photon squeezing schemes for generation of Schrödinger-cat-like states under experimental imperfections”, IQEC and CLEO-PR 2005, QThC3-P16, Tokyo, Japan, Jul. 11–15, 2005.

3 国内会議

1. 竹野唯志, 鈴木重成, 米澤英宏, 古澤明, “PPKTP による波長 860 nm スクイーズド光の生成 II”, 日本物理学会 2006 年秋季大会, 26pRB-4, 奈良女子大学/千葉大学, 奈良/千葉, 2006 年 9 月 20–26 日.

2. 鈴木重成, 米澤英宏, 神成文彦, 佐々木雅英, 古澤明, “PPKTP による波長 860 nm スクィーズド光の生成”, 日本物理学会第 61 回年次大会, 30pSA-11, 愛媛大学/松山大学, 松山, 2006 年 3 月 27–30 日.
3. 鈴木重成, 武岡正裕, 佐々木雅英, Ulrik L. Andersen, 神成文彦, “ホモダイナミクス測定によるコヒーレント重ね合わせ状態の純粋化”, レーザー学会学術講演会 第 26 回年次大会, 10aVI9, 大宮ソニックシティ, さいたま, 2006 年 2 月 9–10 日.
4. 鈴木重成, 辻野賢治, 神成文彦, 佐々木雅英 “光源のパルス化が及ぼす単一光子スクィーズド状態測定への影響”, 日本物理学会 第 60 回年次大会, 27aYE-3, 東京理科大学, 野田, 2005 年 3 月 24–27 日.

II その他のもの

1 原著論文

1. Masahide Sasaki and Shigenari Suzuki, “Multimode theory of measurement-induced non-Gaussian operation on wideband squeezed light”, Physical Review A, Vol. 73, Issue 4, 043807 (2006).
2. Nobutatsu Takei, Shigenari Suzuki, and Fumihiko Kannari, “20-Hz operation of an eye-safe cascade Raman laser with a $\text{Ba}(\text{NO}_3)_2$ crystal”, Applied Physics B: Lasers and Optics, Vol. 74, No. 6, pp. 521–527 (2002).

2 国際会議

1. Yasutaka Fujii, Shigenari Suzuki, Kyo Otsuka, and Fumihiko Kannari, “A scanning coherent phonon microscope”, CLEO/Pacific Rim 2001, P1-64 (Vol. 2, pp. II-186–187), Chiba, Japan, Jul. 15–19, 2001.
2. Kyo Otsuka, Shigenari Suzuki, Takasumi Tanabe, Yasutaka Fujii, and Fumihiko Kannari, “Femtosecond pump-probe spectral interferometry with high spatial resolution using the solid immersion lens”, CLEO/Pacific Rim 2001, P1-58 (Vol. 2, pp. II-174–175), Chiba, Japan, Jul. 15–19, 2001.
3. Nobutatsu Takei, Shigenari Suzuki, and Fumihiko Kannari, “Compensation of thermal lensing in an eye-safe cascade Raman laser with $\text{Ba}(\text{NO}_3)_2$ crystal”, CLEO/Pacific Rim '99, ThP5 (Vol. 3, pp. 744–745), Seoul, Korea, Aug. 30–Sep. 3, 1999.

3 国内会議

1. 藤井康隆, 鈴木重成, 大塚京, 神成文彦, “光学顕微鏡を用いたコヒーレントフォノン観測”, 第 48 回応用物理学関係連合講演会, 30p-ZC-11/III, 明治大学, 東京, 2001 年 3 月 28-31 日.
2. 鈴木重成, 大塚京, 藤井康隆, 神成文彦, “走査型レーザー顕微鏡を用いたコヒーレントフォノン観測”, レーザー学会学術講演会 第 21 回年次大会, 30aII7, 東京国際フォーラム, 東京, 2001 年 1 月 30-31 日.
3. 大塚京, 鈴木重成, 田辺孝純, 神成文彦, “Solid Immersion Lens を用いた高空間分解フェムト秒 Pump-Probe 計測”, レーザー学会学術講演会 第 21 回年次大会, 30aII8, 東京国際フォーラム, 東京, 2001 年 1 月 30-31 日.