

ディーゼル機関防振支持系における
非線形振動現象
(バウンシング主共振に及ぼす内部共振の影響)

平成 18 年度

常 世 田 哲 郎

目次

第 1 章	緒論	1
1.1	序言	2
1.2	本研究の背景	2
1.2.1	発電用機関の防振	2
1.2.2	船用主機関の防振	5
1.2.3	非連成支持	5
1.2.4	防振材	6
1.3	防振支持系に関連する非線形振動現象の従来の研究	7
1.4	本研究の目的および概要	9
第 2 章	支配方程式の誘導	13
2.1	序言	14
2.2	解析モデル	14
2.3	Lagrange 方程式による支配方程式の誘導	16
2.4	結言	19
第 3 章	内部共振が存在しない場合の定常振動	23
3.1	序言	24
3.2	模型実験	25
3.2.1	実験装置	25
3.2.2	実験方法	27
3.2.3	実験結果	28
3.3	三自由度防振支持系支配方程式の非線形部分の簡単化	28
3.3.1	支配方程式の変形	29
3.3.2	基礎方程式の線形部分の対角化	31

3.3.3	標準形の方法を用いた非線形部分の簡単化	32
3.3.4	パラメータの高調波成分への影響	36
3.3.5	解析的近似解	36
3.3.6	数値解との比較	39
3.4	結言	41
第4章	内部共振が存在する場合の定常振動	42
4.1	序言	43
4.2	定常振動解析のための理論解析	44
4.2.1	自由振動系	44
4.2.2	強制振動系	53
4.3	実験	58
4.3.1	実験装置	58
4.3.2	実験結果	58
4.4	結言	59
第5章	内部共振が存在する場合の過渡振動	69
5.1	序言	70
5.2	直流モータの電気回路を考慮した支配方程式の誘導	71
5.3	上下動のみに拘束した一自由度防振支持系の共振点通過	72
5.4	三自由度防振支持系の共振点通過	73
5.4.1	内部共振が起らない場合	73
5.4.2	内部共振が起る場合	74
5.5	実験	80
5.5.1	実験装置	81
5.5.2	実験結果	82
5.6	結言	85
第6章	結論	89
	謝辞	91
	著者論文目録	95
	付録	99

付録 A	簡単化の例	101
付録 B	非線形部分の簡単化のメカニズム	104
付録 C	振動解析における共鳴項の物理的な解釈	107
付録 D	直流モータについて	108
付録 E	Routh-Hurwitz の判別法	111
付録 F	装置図面	113

記号表

m	:	剛体の質量
J	:	剛体の慣性モーメント (三自由度の場合)
J_ϕ	:	ロータの慣性モーメント
I_x	:	剛体の慣性モーメント (六自由度の場合)
I_y	:	剛体の慣性モーメント (六自由度の場合)
I_z	:	剛体の慣性モーメント (六自由度の場合)
I_{xy}	:	剛体の慣性乗積 (六自由度の場合)
I_{xz}	:	剛体の慣性乗積 (六自由度の場合)
I_{yx}	:	剛体の慣性乗積 (六自由度の場合)
I_{zy}	:	剛体の慣性乗積 (六自由度の場合)
I_{yz}	:	剛体の慣性乗積 (六自由度の場合)
I_{zx}	:	剛体の慣性乗積 (六自由度の場合)
F_x	:	剛体の重心に作用する x 方向の力
F_y	:	剛体の重心に作用する y 方向の力
F_z	:	剛体の重心に作用する z 方向の力
M_x	:	剛体の重心に作用する x 軸回りのモーメント
M_y	:	剛体の重心に作用する y 軸回りのモーメント
M_z	:	剛体の重心に作用する z 軸回りのモーメント
p	:	ばねの弾性主軸
q	:	ばねの弾性主軸
s	:	ばねの弾性主軸
α	:	ばねの傾斜角
k_p	:	ばね定数 (p 方向)
k_q	:	ばね定数 (q 方向)
k_s	:	ばね定数 (s 方向)
c_p	:	粘性減衰定数 (p 方向)
c_q	:	粘性減衰定数 (q 方向)
l	:	ばねの取り付け長さ
h	:	剛体の弾性支持面からの重心高さ
b	:	ばね取り付け部から剛体の弾性支持面中心までの距離
c_i	:	ばね取り付け部から重心までの x 軸方向の距離

G	:	剛体の重心
Δm	:	不釣り合い質量
r	:	不釣り合い質量の回転半径
ϕ	:	不釣り合い質量の回転角
O	:	座標原点
z	:	剛体の上下方向変位
y	:	剛体の左右方向変位
x	:	剛体の前後方向変位
θ	:	剛体のローリング角
ψ	:	剛体のヨーイング角
φ	:	剛体のピッチング角
i	:	回路内に流れる電流
v	:	印加電圧
V_0	:	公称電圧
R	:	端子間抵抗
L_e	:	端子間インダクタンス
C	:	摩擦抵抗定数
k_t	:	トルク定数
k_e	:	起電力定数
$K_{y\theta}$:	線形連成復元定数
$K_{\theta y}$:	線形連成復元定数
Δl_{pn}	:	点 n におけるばねの変形量 (p 方向)
Δl_{qn}	:	点 n におけるばねの変形量 (q 方向)
T	:	系の運動エネルギー
U	:	系のポテンシャルエネルギー
D	:	散逸関数
Q_z	:	不釣り合い質量による加振力 (z 方向)
Q_y	:	不釣り合い質量による加振力 (y 方向)
Q_θ	:	不釣り合い質量による加振トルク (θ 方向)
L_L	:	<i>Lagrange</i> 関数
t	:	時間
H	:	h と l の無次元比
B	:	b と l の無次元比
L	:	ml^2 と J の無次元比

K	:	k_q と k_p の無次元比
M	:	Δm と m の無次元比
λ	:	r と l の無次元比
μ_p	:	p 方向の減衰定数
μ_q	:	q 方向の減衰定数
$\mu_{\phi\phi}$:	C と $J_\phi\omega_z^2$ の無次元比
$K_{\phi i}$:	$k_t V_0$ と $J_\phi R\omega_z^2$ の無次元比
L_r	:	$\Delta m r l$ と J_ϕ の無次元比
K_{ii}	:	R と $L_e\omega_z$ の無次元比
$\mu_{i\phi}$:	$k_e R$ と $L_e V_0$ の無次元比
τ_e	:	電氣的時定数
κ_e	:	k_e と V_0 の無次元比
μ_{zz}	:	z 方向の減衰定数
$\alpha_{z,y,\theta}$:	z 方向の無次元非線形復元係数
K_{yy}	:	y 方向の無次元復元定数
μ_{yy}	:	y 方向の減衰定数
$\mu_{y\theta}$:	線形連成減衰定数
$\beta_{z,y,\theta}$:	y 方向の無次元非線形復元係数
$K_{\theta\theta}$:	θ 方向の無次元復元定数
$\mu_{\theta\theta}$:	θ 方向の減衰定数
$\mu_{\theta y}$:	線形連成減衰定数
$\gamma_{z,y,\theta}$:	θ 方向の無次元非線形復元係数
ω_z	:	z 方向の線形固有角振動数
ω_y	:	y 方向の線形固有角振動数
ω_θ	:	θ 方向の線形固有角振動数
ϵ	:	微小パラメータ
t_n	:	$\epsilon^n t$ で表される時間尺度
a_z	:	z の振幅
a_y	:	y の振幅
a_θ	:	θ の振幅
ξ_z	:	z の位相
ξ_y	:	y の位相
ξ_θ	:	θ の位相
L_T	:	駆動トルク
R_T	:	負荷トルク

第 1 章

緒論

1.1 序言

往復動内燃機関の防振支持は古くから行われ、周辺の機器や建物などの振動軽減、車両の乗り心地向上などに効果を発揮してきた。しかし、近年、車両や船舶の乗り心地、内燃機関を利用した発電設備の周辺における振動公害の問題回避などのために、より高度な防振性能が要求され、従来は技術的に困難な面があったために、実施例が少なかった船用主機の防振支持もかなり行われるようになった。

本章ではディーゼル機関の防振支持の線形領域における従来の理論 [1][2][3][4]、非線形領域の研究を行うに至った経緯、従来の研究などについて述べる。

1.2 本研究の背景

1.2.1 発電用機関の防振

従来から行われているディーゼルエンジンの防振支持方式である発電用機関の防振は、発電用機関が周波数一定の電気を作るために、回転数が一定の状態、変動する負荷に追従する運転を行うため、防振系の固有振動数を機関の回転による周波数の $1/3$ 以下にすることが出来れば良好な防振性能を得ることができ、その設計は比較的容易である。

ここでは、防振系の固有振動数と防振性能の計算式に簡単に触れる [1][2]。

図 1.1 に示す解析モデルにおいて、系の重心を原点にとり、機関長手水平方向を x 、それに直交する水平軸を y 、上下軸を z 、 x, y, z 軸回りの回転をそれぞれ θ, φ, ψ とする。また、ばねは上下方向に軸を一致させて取り付けられているとすると、その圧縮方向 p 、せん断方向 q, s のばね定数をそれぞれ k_p, k_q, k_s 、剛体の質量を m 、各軸回りの剛体の慣性モーメントを I_x, I_y, I_z 、慣性乗積を $I_{xy}, I_{xz}, I_{yx}, I_{yz}, I_{zx}, I_{zy}$ 、剛体の重心に作用する力およびモーメントをそれぞれ $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$ とする。そして、ばねの重心位置から取り付け位置までの距離を x, y, z 方向それぞれ c_i, b, h とすると運動方程式は式 (1.1) で表される。

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

ここで，式 (1.1) の左辺第 2 項の剛性マトリックスの成分は

$$k_{11} = \Sigma k_s \quad k_{22} = \Sigma k_q \quad k_{33} = \Sigma k_p \quad (1.2)$$

$$k_{44} = \Sigma(k_q h^2 + k_p b^2) \quad k_{55} = \Sigma(k_p c_i^2 + k_s h^2) \quad k_{66} = \Sigma(k_s b^2 + k_q c_i^2) \quad (1.3)$$

$$k_{14} = 0 \quad (1.4)$$

$$k_{15} = \Sigma k_r h \quad k_{16} = \Sigma(-k_s b) \quad k_{24} = \Sigma(-k_q h) \quad (1.5)$$

$$k_{25} = 0 \quad (1.6)$$

$$k_{26} = \Sigma(k_q c_i) \quad k_{34} = \Sigma(k_p b) \quad k_{35} = \Sigma(-k_p c_i) \quad (1.7)$$

$$k_{36} = 0 \quad (1.8)$$

$$k_{12} = 0 \quad k_{23} = 0 \quad k_{13} = 0 \quad (1.9)$$

$$k_{45} = \Sigma(-k_p c_i b) \quad k_{56} = \Sigma(-k_s b h) \quad k_{46} = \Sigma(-k_q c_i h) \quad (1.10)$$

となる。

これらの方程式を解いて，防振設計をする場合，コンピュータが十分普及しなかった時代には，ばね配置の対称性，慣性主軸の原点と方向を座標軸と一致させるなどして，自由度の小さいいくつかの式に分けて解いていた．ここでその一例を示すと，重心と座標原点を一致させ，慣性主軸と座標軸を一致させることで

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yx} = I_{yz} = I_{zx} = I_{zy} = 0 \quad (1.11)$$

となり，ばねが $x - y$ 平面において x 軸， y 軸に平行なピッチ線上に配置される場合（前後，左右の対称性），系を水平に保つ条件から， $x - z$ 面， $y - z$ 面に関し対称となり， $x - \varphi$ ， $y - \theta$ ， z ， ψ がそれぞれ独立となる．これを式で書くと

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + k_{11}x + k_{15}\varphi &= F_x \\ I_y\ddot{\varphi} + k_{51}x + k_{55}\varphi &= M_y \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{y} + k_{22}y + k_{24}\theta &= F_y \\ I_x\ddot{\theta} + k_{42}y + k_{44}\theta &= M_x \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{z} + k_{33}z &= F_z \\ I_z\ddot{\psi} + k_{66}\psi &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

となる．

$x - \varphi$ 方向の振幅と固有振動数 式 (1.12) を解くと振幅 x_0 と φ_0 は

$$x_0 = \frac{1}{\Delta_1} \left\{ \frac{F_x}{m} (-\omega^2 + \omega_{55}^2) - \frac{M_y}{I_y} \frac{k_{15}}{m} \right\} \quad (1.15)$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{\Delta_1} \left\{ \frac{M_y}{I_y} (-\omega^2 + \omega_{11}^2) - \frac{F_x}{m} \frac{k_{15}}{I_y} \right\} \quad (1.16)$$

ここに

$$\Delta_1 = (-\omega^2 + \omega_{11}^2)(-\omega^2 + \omega_{55}^2) - \frac{k_{15}^2}{mI_y} \quad (1.17)$$

固有角振動数 $\omega_{15,1,2}$ は $\Delta_1 = 0$ とおいて求めることができる．

$$\omega_{15,1,2}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \omega_{11}^2 + \omega_{55}^2 \mp \sqrt{(\omega_{11} - \omega_{55})^2 + 4k_{15}/(mI_y)} \right\} \quad (1.18)$$

$y - \theta$ 方向の振幅と固有角振動数 式 (1.13) を解くと振幅 y_0 と ϕ_0 は

$$y_0 = \frac{1}{\Delta_2} \left\{ \frac{F_y}{m} (-\omega^2 + \omega_{44}^2) - \frac{M_x}{I_x} \frac{k_{24}}{m} \right\} \quad (1.19)$$

$$\theta_0 = \frac{1}{\Delta_2} \left\{ \frac{M_x}{I_x} (-\omega^2 + \omega_{22}^2) - \frac{F_y}{m} \frac{k_{24}}{I_x} \right\} \quad (1.20)$$

ここに

$$\Delta_2 = (-\omega^2 + \omega_{44}^2)(-\omega^2 + \omega_{22}^2) - \frac{k_{24}^2}{mI_x} \quad (1.21)$$

$x - \varphi$ 系と同様に $\Delta_2 = 0$ とおいて

$$\omega_{24,1,2}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \omega_{22}^2 + \omega_{44}^2 \mp \sqrt{(\omega_{22} - \omega_{44})^2 + 4k_{24}/(mI_x)} \right\} \quad (1.22)$$

$z - \psi$ 方向の振幅と固有角振動数 z 方向, ψ 方向の振動はそれぞれ独立でありその振幅は

$$z_0 = \frac{F_z}{m(-\omega^2 + \omega_{33}^2)} \quad (1.23)$$

$$\psi_0 = \frac{M_z}{I_z(-\omega^2 + \omega_{66}^2)} \quad (1.24)$$

その固有角振動数は

$$\omega_{33}^2 = \frac{k_{33}}{m} \quad (1.25)$$

$$\omega_{66}^2 = \frac{k_{66}}{I_z} \quad (1.26)$$

1.2.2 船用主機関の防振

船用主機の場合, 防振支持された機関から船体に軸受けが固定されたプロペラ軸への出力の取り出し, 船体の揺動に対する対策などの困難があったためユニバーサルジョイントを使わずにこれが実用化されたのは発電用に比べ比較的新しいと思われる.

出力の取り出しについてはゴムや薄い金属板を組み合わせたフレキシブルジョイントを使用することにより, 船体側に軸受けを固定されたプロペラ軸と防振支持された主機関の相対変位を吸収することに成功し, 船体の動揺については変位を制限するストッパを小さな間隙をへだてて設ける事により機関の変位の問題を解決した.

従って, その設計に際しては前節で示した計算式を用いるほかに, 運転時の反トルクによる機関の出力軸回りの回転による変位と運転時の振動を許容するストッパの間隙の決定, 水, 燃料, 排気などの配管の相対変位を吸収する可撓管の許容変位の検討が必要になる. これらについては, 実験および解析の報告がなされている [5].

1.2.3 非連成支持

すでに述べたように, 剛体の重心から下に防振ばねの支持点がある通常の防振支持では x と φ , y と θ が連成する. この状態では各方向の起振力が別の方向の変位に影響し, その運動が複雑になり, 振動絶縁上好ましくない.

そこで，防振材の取り付け角度を y, z 面内で z 方向から α 傾斜させて y と θ が連成しないようにすることが出来る．

いま，ばねの軸方向および軸直角方向のばね定数をそれぞれ k_p, k_q ，機関長手方向の片側のばねの個数を n とすれば，ばねを α 傾斜させたことにより，式 (1.13) のばね定数は

$$k_{22} = 2n(k_p \sin^2 \alpha + k_q \cos^2 \alpha) \quad (1.27)$$

$$k_{24} = k_{42} = 2n\{(k_p \sin^2 \alpha + k_q \cos^2 \alpha)h - (k_p - k_q)b \sin \alpha \cos \alpha\} \quad (1.28)$$

$$k_{44} = 2n\{(k_p \sin^2 \alpha + k_q \cos^2 \alpha)h^2 + (k_p \cos^2 \alpha + k_q \sin^2 \alpha)b^2 - 2(k_p - k_q)bh \sin \alpha \cos \alpha\} \quad (1.29)$$

となり，非連成の条件はばね定数の連成項 $k_{24} = 0$ とすればよいから $y - \theta$ 系の独立の条件は

$$\frac{(k_p - k_q) \sin \alpha \cos \alpha}{k_p \sin^2 \alpha + k_q \cos^2 \alpha} = \frac{h}{b} \quad (1.30)$$

となる．

これは，傾斜支持の特別な場合であり， α を変化させることにより各方向のばね定数を変化させることができるため後の章で触れる内部共振の条件を設定するのに使用できる．

1.2.4 防振材

次にディーゼル機関の防振装置に使用される防振材について触れる．その主なものは防振ゴムと防振ばねであり，それぞれ用途に特徴がある [1][6]．

防振ゴムはおよそ $600 \text{min}^{-1} \sim 700 \text{min}^{-1}$ 以上の比較的回転数の高いエンジンの防振に用いられ以下の特徴を持つ．

1. 適度な減衰をもつ
2. 形状を変えることにより軸方向とそれに直角な方向のばね定数を変えることが出来る
3. 経年変化があり，オゾンや油に弱い

一方，防振ばねは 500min^{-1} 程度以下の比較的大形で回転数の低い機関に用いられることが多く，以下のような特徴をもつ

1. 負担荷重が大きく低い固有振動数の系を作ることができる
2. 減衰は小さい
3. 取り付け時の安定のために取り付け高さのコイル径の比をある程度以下に抑える必要がある
4. 車両用，船用など移動する対象にはほとんど用いられない

この他に，さらに防振系の固有振動数を下げるために空気ばねを使用する考え方もある [1] .

1.3 防振支持系に関連する非線形振動現象の従来の研究

防振支持系は回転または往復動機械を弾性体で支持するものが一般であるが，この系を小型 FRP 船の主機に適用した場合を取り扱ったものとして，米沢ら [4] の，また低速機関に適用した場合を取り扱った研究 [5] がある．また，これとは異なる方式として防振性能を能動的に制御する能動防振支持を行っている例も見られる [23] .

複雑な振動現象は，通常，多自由度の連立常微分方程式の形に定式化され，それが線形であればモード座標空間において非連成化することができる [9][10] .

しかし，このようなモード解析は，基本的には線形問題に適用され，系に非線形特性が含まれている場合，非線形項は連成したまま残る．そこで，従来，複雑な振動現象で，非線形効果を考慮する必要がある場合，非線形項は連成させた状態で支配方程式を取り扱い，主に数値シミュレーションによる解析がなされてきた．

一方，コンピュータの発達に伴う数式処理の活用が盛んになり，以下の章で取り扱うように多数の非線形項を持つ系の振動解析も，数値シミュレーション以外に，解析的な取り扱いが可能になってきた．

すなわち，これらの非線形部分进行处理する手段の一つとして，標準形の方法の利用が考えられる [11] . 標準形の方法は，系を力学的に記述する方程式を簡単化するために，局部座標変換を用い，最も簡単な形を取る力学系を探すもので，既知の解の近傍で変換が行われる．本研究のような非線形系に適用される場合，体系的に得られる座標変換式を用いることにより，支配方程式に含まれる非線形性を可能な限り取り除き，現象の支配方程式が最も単純な形をとるような座標系に変換するものである．この方法の欠点の一つは，従来，多量の解析計算を要する

ことであったが、数式処理の援用により、比較的容易に計算を行うことが可能になった。

他方で、線形系におけるモード解析の概念を非線形系へ拡張することが、従来より検討されてきた [12]。多自由度系の非線形連成振動の解析では、当然、振動方程式の解に対して重ね合わせの原理が適用できない。しかし、共振現象は、正規モードの近傍で発生する。したがって、非線形系の場合も、正規モードを求めることは、振動解析の基礎として重要なことである [13]。また、多自由度系の非線形振動における Nonlinear Normal Modes (以下 NNMs と略記) を求めることの実用上の有用性については、次数を減少させたモデルからでも要求精度を満たす結果が得られる可能性が示され、計算時間短縮による制御への応用や [14]、非線形モードの局在化から、衝撃と振動絶縁への応用が示唆されている [15]。NNMs に関しては、この他に二次の非線形性のある場合 [26]、連続体に関するもの [27]、二自由度系の NNMs の分岐に関するもの [29] などがある。

さらに、多自由度非線形振動の一例として、これまで多くの研究者の関心を引いてきた内部共振 (Internal Resonance) [16] の条件を満たす場合を考える。内部共振とはある方向の固有角振動数が別方向のその整数倍であり、これに見合う非線形項が存在する場合に各モード間の強い相互作用により共振することをいう。これについては、葉ら [30] が $1:1:1$ の内部共振の条件を満たす三自由度系を扱っている。

また、実際の防振支持系においては、発停時に必ず共振点通過が起るが、これについて従来から行われている研究では、回転角速度 $\dot{\phi}$ は一定に加速、あるいは減速するものとして扱われている [17],[18]。しかし、共振状態では駆動トルクが一定に上昇しているにも拘わらず、回転速度は停滞する例が見られる。

Dimentberg らは共振点通過に関し、一自由度のモデルで、減衰がない時など特殊な場合について研究している [8]。この問題については、Rand ら [32] も扱い、三自由度の場合 [33]、回転軸系が非線形ばねを持つ場合 [34]、弦の共振点通過を扱った例 [35] などが見られる。

一方、全体の防振系を離れて、回転体に関して注目すると、不釣合いを有する回転軸と制限された駆動トルクの間相互作用を扱ったもの [8]、振れ回りに伴う回転速度の動揺分岐現象を取り扱ったもの [7] などがある。

1.4 本研究の目的および概要

船用主機関の防振支持系における振動現象の中で、比較的定格回転数の低い機関を防振支持した場合に、非線形項の影響を調べなければならない問題の発生が予想される。前に触れたように防振支持系は、経験上、その固有振動数を加振振動数の $1/3$ 以下にすることが出来れば機関から基礎または機関台に伝わる力の伝達率を実用上問題ない範囲まで十分小さくすることが出来る。しかし、定格回転数が低い機関に対して 6 個ある固有振動数すべてについて使用回転数との振動数比を $1/3$ 以下とすることは、使用する防振材（防振ゴムやコイルばね）の荷重限界などから困難となる場合が多い。

このため、防振支持系の持つ複数個の固有振動数のなかで、機関使用回転数域に対し低く出来るグループと高くなるグループを作るように防振材の種類、ばね定数や配置を選定し、両グループの間の回転数範囲の中で機関を運転し、共振を避けることがある。（この場合、機関使用回転数範囲よりも高くなるグループについてはそのモードが、高次の機関起振力の特性と一致しないようにすることが望ましい。）

さらに船用主機関の場合、機関出力は定格回転数に対する部分負荷回転数の比の 3 乗に比例して変化するため、使用される回転数範囲はアイドル回転から過負荷 (110%) までと広くなり、全領域について上記の条件を満足することはさらに困難となる。

したがって、系の共振を避けることが出来ても、使用回転数範囲の上限または下限付近で運転される時、機関の振幅が大きくなることが起こりうる。このような場合、時として非線形振動特有の現象が発生することが考えられる。これを調べるためには変位に対する幾何学的非線形性を考慮した支配方程式を導く必要がある。

これらの問題に対し、単純化された力学モデルの非線形振動を扱った研究は多いが、現実的な多自由度非線形振動系において具体的に現象を解析した例は少ない。これは自由度が増すことで、解析演算が膨大になる点、数値計算上の収束性、得られた解の多価性および安定性の検討が必要になることから、解析が困難になるためであると考えられる。しかし、近年のコンピュータ数式処理の目覚ましい進歩により、多量の解析演算も短時間に行えるようになり、多自由度系の非線形振動解析も可能となってきている。

そこで、本研究では、機械システムの一例として実施例の比較的少ない三自由度以上の振動系の特性を調べるため、本来六自由度系となる防振支持系において、現象の考察に必要な上下方向変位・左右方向変位・ローリングの三自由度に低減した系を考え、支配方程式に多数の非線形項を有する問題を取り扱う第一歩として、回転不釣合いによる起振力のみを考慮し、非線形性に起因して起こる挙動を、まず力学系を単純化する事ができる方法の一つである標準形の方法 [22] を用いて解析を試みる。

また、線形系では多自由度系の解析に用いられるモード解析の概念を非線形の領域に拡張した NNMs を求める。この時、剛体の支持方式として現実の防振系に用いられている傾斜支持方式 [1][2] を採用する。これにより、各方向の固有角振動数を目標値に設定することも比較的自由に行うことが出来るため、以下に述べる内部共振の条件を満たす振動数比の設定が比較的容易になる。ここでは、それぞれの固有振動数の比が約 $2:1:1$ になる場合の内部共振現象について解析を行う。これにより、非線形連成を有する系の定常時の挙動を NNMs により明らかにする。

さらに、このような実際の防振支持系においては、定常応答よりむしろ発停時に必ず起こる、共振点通過現象がより重要となると思われるが、本研究では実施例が少ないと思われる、非線形範囲で連成している三自由度に拡張された系を取り扱う。さらに、直流モータを駆動源に用いた系において、モータ回路の式 [19] を考慮に入れ、トルクではなく、電圧を与えて考察を行う。

以上のような背景から、ディーゼル機関防振支持系の非線形振動の解析のために以下のような具体的な項目を目標とする。

1. 数式処理を援用し多数の非線形項を有する支配方程式を最も単純な形となる座標系に変換し、解析的に取り扱えるようにする標準形の方法の適用。
2. 内部共振の発生する条件で線形のモード解析の概念を非線形領域に拡張し、定常振動を調べる NNMs の適用。
3. 内部共振の発生する条件で駆動系の電気に関する支配方程式と振動系の支配方程式を連立させ、内部共振が現象に及ぼす影響の大きさを調べる防振支持系の共振点通過現象の解析。

本論文は全 5 章から構成されている。

第 2 章では、防振支持系を三自由度にモデル化し、以降の各章で解析を行うための基本となる、幾何学的非線形性を考慮した、非線形項を含む支配方程式を、

Lagrange の運動方程式を用いて求める。

第 3 章では、前章で作った解析モデルにならって実験装置を作り、高調波成分が発生することを確認する。また線形項のみの非連成化により非線形項が支配方程式中に連成して残るため、従来は数値解析により解かれていた非線形項を含む運動方程式を、解析的に取り扱うことができる標準形の方法を用いて簡単化し、得られた方程式から解析的近似解を求め、数値解と一致することおよび、実験で得られたと同じ高調波成分の存在を確認する。

第 4 章では、第 2 章で導いた支配方程式から出発し、従来から線形系の複雑な振動系に対して用いられているモード解析の考え方を非線形の領域に拡張した、NNMs を古典的方法により求め、 $2:1:1$ の内部共振が存在する系における NNMs の定常応答を調べる。

第 5 章では、防振支持系で起動、停止時に必ず発生する共振点通過現象を取り扱う。第 2 章で用いた解析モデルに $2:1:1$ の内部共振の条件を与え、共振点通過に及ぼす内部共振の影響を調べ力学的な式にさらにモータ回路の式を考慮する。不釣合いを持つロータを回転させる直流モータの回転制御は電圧を変化させることにより行い、トルクの制御は電流を制限することにより行う。このとき、内部共振が共振点通過にどのような影響を与えるかを調べる。

第 6 章は、本研究の結論であり、本研究で得られた成果の総括を行った。

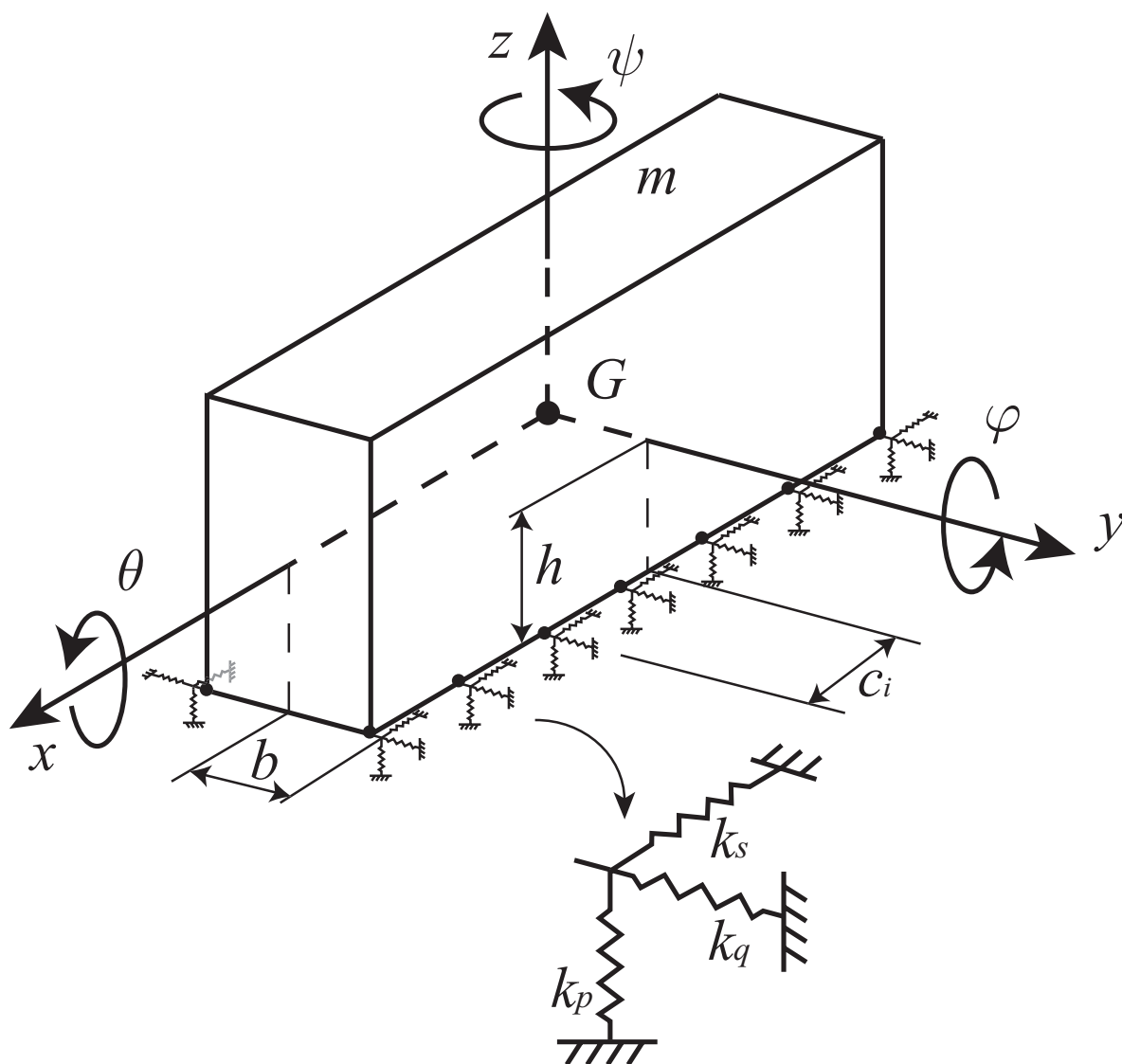


Fig.1.1 Analytical Model of 6 D.O.F Vibration Isolation System

第2章

支配方程式の誘導

2.1 序言

本章では，三自由度防振支持系の解析モデルを設定し，このモデルの支配方程式を Lagrange 方程式を用いて求める．このとき，幾何学的に生じる非線形項を考慮することにより非線形連立常微分方程式に定式化する．この手段は，複雑な構造を有する系の支配方程式を体系的に求めることができるという利点がある一方で，莫大な解析演算を必要とする．そこで本研究では，数式処理 Mathematica を援用することでこれに対処する．

2.2 解析モデル

図 2.1 に解析モデルとなる三自由度防振支持系を示す．同図において質量 m ，慣性モーメント J の剛体が，その両下端においてばねの弾性主軸 p, q をそれぞれ上下方向および左右方向に α 傾けて線形ばねで支持されているものとする．そして，これらのばねについて p 方向および q 方向のばね定数・粘性減衰係数をそれぞれ $k_p \cdot c_p$ および $k_q \cdot c_q$ とし， z 軸の左側の支持点を点 1，右側の支持点を点 2 とする．また，系の静止状態におけるばね取付長さを両弾性主軸方向とも l とする．

一方，剛体は弾性支持面から重心までの高さを h ，ばね取付け部から弾性支持面中心までの長さを b とし，その重心 G を回転中心として半径 r の距離で回転する質量 Δm の不釣り合い質量を有する．この不釣り合い質量の回転角を ϕ とする．

この際，系の静止状態における重心位置を座標原点 O にとり， $z-y$ 平面内に拘束されているものとして，重心 G の上下方向変位，左右方向変位および重心 G 回りの剛体のローリング角をそれぞれ z, y, θ で表す．

・解析モデルに適用した傾斜支持について

過去の研究 [20] においては，非傾斜支持 ($\alpha = 0$) を採用していた．この場合，線形連成復元定数 $K_{y\theta}, K_{\theta y}$ はある値を持ち， y と θ は連成する．そこでこの線形連成について説明するために，線形系において有次元で考えた場合の各方向に働く復元力および復元モーメントを考える．まず，重心回りに θ 回転した場合， z 方向に点 1 で $-b\theta$ ，点 2 で $b\theta$ と逆方向に移動して， z 方向に働く点 1 の復元力

$F_1(= -b\theta k_p)$ と点 2 の復元力 $F_2(= b\theta k_p)$ は相殺される．また，回転により y 方向に両点とも $b\theta$ と同方向に移動して， y 方向に働く点 1 の復元力 $F_7(= h\theta k_q)$ と点 2 の復元力 $F_8(= h\theta k_q)$ は強め合う．結果として θ 回転することにより y 方向の復元力が変化する．同様に y 方向に移動した場合，復元モーメントは $2hk_q y$ であり，回転方向のモーメントが変化する．これにより， y と θ が連成することがわかる．

一方，傾斜支持 ($\alpha \neq 0$) にした場合，傾斜角の変更で固有角振動数が変化し，線形連成の影響を低減できるが，これを説明するために，線形系において有次元で考えた場合の各方向に働く復元力を考える．そこで，重心回りに θ 回転した場合の復元力図を図 2.2 に示す．また，実際に働く復元力は以下のように表される．

a. z 方向に点 1 で $-b\theta$ 移動し，点 2 で $b\theta$ 移動するとき

$$\begin{aligned} F_1 &= -(k_q \sin^2 \alpha \cdot b\theta + k_p \cos^2 \alpha \cdot b\theta) \\ F_2 &= (k_q \sin^2 \alpha \cdot b\theta + k_p \cos^2 \alpha \cdot b\theta) \\ F_3 &= -(-k_q \sin \alpha \cos \alpha \cdot b\theta + k_p \sin \alpha \cos \alpha \cdot b\theta) \\ F_4 &= -(-k_q \sin \alpha \cos \alpha \cdot b\theta + k_p \sin \alpha \cos \alpha \cdot b\theta) \end{aligned}$$

z 方向に生じる点 1 の復元力 F_1 と点 2 の復元力 F_2 は相殺される．

y 方向に生じる点 1 の復元力 F_3 と点 2 の復元力 F_4 は強め合う．

b. y 方向に点 1 で $h\theta$ 移動し，点 2 で $h\theta$ 移動するとき

$$\begin{aligned} F_5 &= -(k_q \cos \alpha \sin \alpha \cdot h\theta - k_p \sin \alpha \cos \alpha \cdot h\theta) \\ F_6 &= (k_q \cos \alpha \sin \alpha \cdot h\theta - k_p \sin \alpha \cos \alpha \cdot h\theta) \\ F_7 &= (k_q \cos^2 \alpha \cdot h\theta + k_p \sin^2 \alpha \cdot h\theta) \\ F_8 &= (k_q \cos^2 \alpha \cdot h\theta + k_p \sin^2 \alpha \cdot h\theta) \end{aligned}$$

z 方向に生じる点 1 の復元力 F_5 と点 2 の復元力 F_6 は相殺される．

y 方向に生じる点 1 の復元力 F_7 と点 2 の復元力 F_8 は強め合う．

これにより z 方向に生じる復元力は a.，b. とともに相殺される．また， y 方向に生じる復元力は強め合うが，a. と b. で逆の方向に力が働くとときこれらが同じ大きさであれば相殺され， θ 回転しても y 方向の復元力は変化しない．また，同様に y 方向に移動した場合，回転方向に働くモーメントが相殺されるように働く．このことから傾斜支持することにより， y と θ を非連成にすることができる [2][3]．これは，1.2.3 で述べた非連成支持のことであり， α の条件は後述する．

2.3 Lagrange 方程式による支配方程式の誘導

図 2.1 に示す解析モデルにおいて Lagrange 方程式を用いて，支配方程式を求め
る．静止状態から図 2.3 の状態に移動した場合，点 1 と点 2 の p 方向におけるば
ねの変形量をそれぞれ Δl_{p_1} , Δl_{p_2} ，点 1 と点 2 の q 方向におけるばねの変形量を
それぞれ Δl_{q_1} , Δl_{q_2} とすると，

$$\Delta l_{p_1} = f_{p_1}^{\frac{1}{2}}(y, z, \theta) - l$$

$$\Delta l_{p_2} = f_{p_2}^{\frac{1}{2}}(y, z, \theta) - l$$

$$\Delta l_{q_1} = f_{q_1}^{\frac{1}{2}}(y, z, \theta) - l$$

$$\Delta l_{q_2} = f_{q_2}^{\frac{1}{2}}(y, z, \theta) - l$$

と表される．ただし，

$$f_{p_1} = [y + h \sin \theta + b(1 - \cos \theta) + l \sin \alpha]^2 + [z - b \sin \theta + h(1 - \cos \theta) + l \cos \alpha]^2$$

$$f_{p_2} = [y + h \sin \theta - b(1 - \cos \theta) - l \sin \alpha]^2 + [z + b \sin \theta + h(1 - \cos \theta) + l \cos \alpha]^2$$

$$f_{q_1} = [y + h \sin \theta + b(1 - \cos \theta) + l \cos \alpha]^2 + [z - b \sin \theta + h(1 - \cos \theta) - l \sin \alpha]^2$$

$$f_{q_2} = [y + h \sin \theta - b(1 - \cos \theta) - l \cos \alpha]^2 + [z + b \sin \theta + h(1 - \cos \theta) - l \sin \alpha]^2$$

である．このとき，系の運動エネルギー T ，ポテンシャルエネルギー U および散
逸関数 D は，

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_p(\Delta l_{p_1}^2(z, y, \theta) + \Delta l_{p_2}^2(z, y, \theta)) + \frac{1}{2}k_q(\Delta l_{q_1}^2(z, y, \theta) + \Delta l_{q_2}^2(z, y, \theta))$$

$$D = \frac{1}{2}c_p(\Delta \dot{l}_{p_1}^2(z, y, \theta) + \Delta \dot{l}_{p_2}^2(z, y, \theta)) + \frac{1}{2}c_q(\Delta \dot{l}_{q_1}^2(z, y, \theta) + \Delta \dot{l}_{q_2}^2(z, y, \theta))$$

となる．また，不釣り合い質量 Δm による加振力は，

$$Q_z = \Delta mr \left(-\frac{d^2\phi}{dt^2} \cos \phi + \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \sin \phi \right)$$

$$Q_y = \Delta mr \left(\frac{d^2\phi}{dt^2} \sin \phi + \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \cos \phi \right)$$

$$Q_\theta = \Delta mr^2 \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

であり, T, U, D および不釣り合い質量 Δm による加振力を以下の Lagrange 方程式に代入する.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L_L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

ただし, Lagrange 関数を $L_L = T - U$ とし, $q_1 = z, q_2 = y, q_3 = \theta, Q_1 = Q_z, Q_2 = Q_y, Q_3 = Q_\theta$ である. ここで z, y についてはばね取付け長さ l , 時間 t については z 方向の固有角振動数の逆数 $\sqrt{m/2(k_p \cos^2 \alpha + k_q \sin^2 \alpha)}$ で無次元化すると, 支配方程式は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \ddot{z}^* = & -\frac{1}{4(\cos^2 \alpha + K \sin^2 \alpha)} \left[(1 - f_{p_1}^{*\frac{1}{2}}) \frac{\partial f_{p_1}^*}{\partial z^*} + (1 - f_{p_2}^{*\frac{1}{2}}) \frac{\partial f_{p_2}^*}{\partial z^*} \right] \\ & -\frac{K}{4(\cos^2 \alpha + K \sin^2 \alpha)} \left[(1 - f_{q_1}^{*\frac{1}{2}}) \frac{\partial f_{q_1}^*}{\partial z^*} + (1 - f_{q_2}^{*\frac{1}{2}}) \frac{\partial f_{q_2}^*}{\partial z^*} \right] \\ & -\frac{\mu_p}{4} \left[f_{p_1}^{*-1} \frac{\partial f_{p_1}^*}{\partial z^*} \left(\frac{\partial f_{p_1}^*}{\partial z^*} \dot{z}^* + \frac{\partial f_{p_1}^*}{\partial y^*} \dot{y}^* + \frac{\partial f_{p_1}^*}{\partial \theta^*} \dot{\theta}^* \right) \right. \\ & \quad \left. + f_{p_2}^{*-1} \frac{\partial f_{p_2}^*}{\partial z^*} \left(\frac{\partial f_{p_2}^*}{\partial z^*} \dot{z}^* + \frac{\partial f_{p_2}^*}{\partial y^*} \dot{y}^* + \frac{\partial f_{p_2}^*}{\partial \theta^*} \dot{\theta}^* \right) \right] \\ & -\frac{\mu_q}{4} \left[f_{q_1}^{*-1} \frac{\partial f_{q_1}^*}{\partial z^*} \left(\frac{\partial f_{q_1}^*}{\partial z^*} \dot{z}^* + \frac{\partial f_{q_1}^*}{\partial y^*} \dot{y}^* + \frac{\partial f_{q_1}^*}{\partial \theta^*} \dot{\theta}^* \right) \right. \\ & \quad \left. + f_{q_2}^{*-1} \frac{\partial f_{q_2}^*}{\partial z^*} \left(\frac{\partial f_{q_2}^*}{\partial z^*} \dot{z}^* + \frac{\partial f_{q_2}^*}{\partial y^*} \dot{y}^* + \frac{\partial f_{q_2}^*}{\partial \theta^*} \dot{\theta}^* \right) \right] \\ & + M\lambda(-\ddot{\phi}^* \cos \phi^* + \dot{\phi}^{*2} \sin \phi^*) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}^* = & -\frac{1}{4(\cos^2 \alpha + K \sin^2 \alpha)} \left[(1 - f_{p_1}^{*\frac{1}{2}}) \frac{\partial f_{p_1}^*}{\partial y^*} + (1 - f_{p_2}^{*\frac{1}{2}}) \frac{\partial f_{p_2}^*}{\partial y^*} \right] \\ & -\frac{K}{4(\cos^2 \alpha + K \sin^2 \alpha)} \left[(1 - f_{q_1}^{*\frac{1}{2}}) \frac{\partial f_{q_1}^*}{\partial y^*} + (1 - f_{q_2}^{*\frac{1}{2}}) \frac{\partial f_{q_2}^*}{\partial y^*} \right] \\ & -\frac{\mu_p}{4} \left[f_{p_1}^{*-1} \frac{\partial f_{p_1}^*}{\partial y^*} \left(\frac{\partial f_{p_1}^*}{\partial z^*} \dot{z}^* + \frac{\partial f_{p_1}^*}{\partial y^*} \dot{y}^* + \frac{\partial f_{p_1}^*}{\partial \theta^*} \dot{\theta}^* \right) \right. \\ & \quad \left. + f_{p_2}^{*-1} \frac{\partial f_{p_2}^*}{\partial y^*} \left(\frac{\partial f_{p_2}^*}{\partial z^*} \dot{z}^* + \frac{\partial f_{p_2}^*}{\partial y^*} \dot{y}^* + \frac{\partial f_{p_2}^*}{\partial \theta^*} \dot{\theta}^* \right) \right] \\ & -\frac{\mu_q}{4} \left[f_{q_1}^{*-1} \frac{\partial f_{q_1}^*}{\partial y^*} \left(\frac{\partial f_{q_1}^*}{\partial z^*} \dot{z}^* + \frac{\partial f_{q_1}^*}{\partial y^*} \dot{y}^* + \frac{\partial f_{q_1}^*}{\partial \theta^*} \dot{\theta}^* \right) \right. \\ & \quad \left. + f_{q_2}^{*-1} \frac{\partial f_{q_2}^*}{\partial y^*} \left(\frac{\partial f_{q_2}^*}{\partial z^*} \dot{z}^* + \frac{\partial f_{q_2}^*}{\partial y^*} \dot{y}^* + \frac{\partial f_{q_2}^*}{\partial \theta^*} \dot{\theta}^* \right) \right] \\ & + M\lambda(\ddot{\phi}^* \sin \phi^* + \dot{\phi}^{*2} \cos \phi^*) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\theta}^* = & -\frac{L}{4(\cos^2 \alpha + K \sin^2 \alpha)} \left[(1 - f_{p_1}^{*-1/2}) \frac{\partial f_{p_1}^*}{\partial \theta^*} + (1 - f_{p_2}^{*-1/2}) \frac{\partial f_{p_2}^*}{\partial \theta^*} \right] \\
 & -\frac{LK}{4(\cos^2 \alpha + K \sin^2 \alpha)} \left[(1 - f_{q_1}^{*-1/2}) \frac{\partial f_{q_1}^*}{\partial \theta^*} + (1 - f_{q_2}^{*-1/2}) \frac{\partial f_{q_2}^*}{\partial \theta^*} \right] \\
 & -\frac{\mu_p}{4} \left[f_{p_1}^{*-1} \frac{\partial f_{p_1}^*}{\partial \theta^*} \left(\frac{\partial f_{p_1}^*}{\partial z^*} \dot{z}^* + \frac{\partial f_{p_1}^*}{\partial y^*} \dot{y}^* + \frac{\partial f_{p_1}^*}{\partial \theta^*} \dot{\theta}^* \right) \right. \\
 & \quad \left. + f_{p_2}^{*-1} \frac{\partial f_{p_2}^*}{\partial \theta^*} \left(\frac{\partial f_{p_2}^*}{\partial z^*} \dot{z}^* + \frac{\partial f_{p_2}^*}{\partial y^*} \dot{y}^* + \frac{\partial f_{p_2}^*}{\partial \theta^*} \dot{\theta}^* \right) \right] \\
 & -\frac{\mu_q}{4} \left[f_{q_1}^{*-1} \frac{\partial f_{q_1}^*}{\partial \theta^*} \left(\frac{\partial f_{q_1}^*}{\partial z^*} \dot{z}^* + \frac{\partial f_{q_1}^*}{\partial y^*} \dot{y}^* + \frac{\partial f_{q_1}^*}{\partial \theta^*} \dot{\theta}^* \right) \right. \\
 & \quad \left. + f_{q_2}^{*-1} \frac{\partial f_{q_2}^*}{\partial \theta^*} \left(\frac{\partial f_{q_2}^*}{\partial z^*} \dot{z}^* + \frac{\partial f_{q_2}^*}{\partial y^*} \dot{y}^* + \frac{\partial f_{q_2}^*}{\partial \theta^*} \dot{\theta}^* \right) \right] \\
 & + LM\lambda^2 \ddot{\phi}^*
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

ただし, 8 個の無次元パラメータ $H, B, L, K, M, \lambda, \mu_p, \mu_q$ は,

$$\begin{aligned}
 H = \frac{h}{l}, \quad B = \frac{b}{l}, \quad L = \frac{ml^2}{J}, \quad K = \frac{k_q}{k_p}, \quad M = \frac{\Delta m}{m}, \quad \lambda = \frac{r}{l}, \\
 \mu_p = \frac{c_p}{\sqrt{2m(k_p \cos^2 \alpha + k_q \sin^2 \alpha)}}, \quad \mu_q = \frac{c_q}{\sqrt{2m(k_p \cos^2 \alpha + k_q \sin^2 \alpha)}}
 \end{aligned}$$

で定義され, 添字 * のついた量は無次元量を表すが, 以後これを省略する. さらに数式処理 Mathematica[21] を援用し, 復元項については 3 次の非線形項まで, 減衰項については 1 次の線形項のみを考慮して Taylor 展開を行うと支配方程式は以下のようなになる.

$$\begin{aligned}
 \ddot{z} + z = & -2\mu_{zz} \dot{z} + M\lambda(-\ddot{\phi} \cos \phi + \dot{\phi}^2 \sin \phi) \\
 & + \alpha_{yy} y^2 + \alpha_{y\theta} y\theta + \alpha_{\theta\theta} \theta^2 + \alpha_{zz} z^2 \\
 & + \alpha_{yyz} y^2 z + \alpha_{yz\theta} yz\theta + \alpha_{zzz} z^3 + \alpha_{z\theta\theta} z\theta^2
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{y} + K_{yy} y + K_{y\theta} \theta = & -2\mu_{yy} \dot{y} - 2\mu_{y\theta} \dot{\theta} + M\lambda(\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) \\
 & + \beta_{yz} yz + \beta_{z\theta} z\theta + \beta_{yyy} y^3 + \beta_{yy\theta} y^2 \theta \\
 & + \beta_{yzz} yz^2 + \beta_{y\theta\theta} y\theta^2 + \beta_{zz\theta} z^2 \theta + \beta_{\theta\theta\theta} \theta^3
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\theta} + K_{\theta\theta} \theta + K_{\theta y} y = & -2\mu_{\theta\theta} \dot{\theta} - 2\mu_{\theta y} \dot{y} + LM\lambda^2 \ddot{\phi} \\
 & + \gamma_{yz} yz + \gamma_{z\theta} z\theta + \gamma_{yyy} y^3 + \gamma_{yy\theta} y^2 \theta \\
 & + \gamma_{yzz} yz^2 + \gamma_{y\theta\theta} y\theta^2 + \gamma_{zz\theta} z^2 \theta + \gamma_{\theta\theta\theta} \theta^3
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

ここで, $K_{y\theta}, \dots, \mu_{zz}, \dots, \alpha_{yy}, \dots, \gamma_{\theta\theta\theta}$ は, 前述の 8 個の無次元パラメータからなる各非線形復元項の係数であり, これらの項は幾何学的非線形性によって生じ

たものである。

また, $\sqrt{K_{yy}}$ および $\sqrt{K_{\theta\theta}}$ は, y 方向および θ 方向のみの運動に拘束した場合の各方向の固有角振動数 ω_y, ω_θ を表す. さらに式 (2.5)~(2.7) は, 弾性支持面が剛体の重心より低いことに起因して線形部分についても y と θ に関して連成していることが分かる. この線形復元定数, つまり各方向の固有角振動数は, 傾斜角 α によって適当に変更可能である. そこで本論文においては, 内部共振条件の一つである各方向の固有角振動数の比が 2:1:1 である条件をできるだけ容易に満たすようにするため, この性質を用い, さらにばね定数およびその配置を選ぶことにより, 非連成支持を実現する. この非連成支持に関して, 座標軸を剛体の慣性主軸に一致させることにより慣性独立の条件を満たすことは明らかである. また, 弾性独立の条件を満たすようにするには, 式 (2.5)~(2.7) において連成する線形復元定数 $K_{y\theta}, K_{\theta y}$ を 0 になるようにすればよい. ここでこれら線形復元定数は以下のように記述される.

$$K_{yy} = \frac{\sin^2 \alpha + K \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + K \sin^2 \alpha} \quad (2.8)$$

$$K_{y\theta} = \frac{H(\sin^2 \alpha + K \cos^2 \alpha) - B/2(1 - K) \sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha + K \sin^2 \alpha} \quad (2.9)$$

$$K_{\theta\theta} = \frac{L\{B^2(\cos^2 \alpha + K \sin^2 \alpha) + H^2(\sin^2 \alpha + K \cos^2 \alpha) - BH(1 - K) \sin 2\alpha\}}{\cos^2 \alpha + K \sin^2 \alpha} \quad (2.10)$$

$$K_{\theta y} = \frac{L\{H(\sin^2 \alpha + K \cos^2 \alpha) - B/2(1 - K) \sin 2\alpha\}}{\cos^2 \alpha + K \sin^2 \alpha} \quad (2.11)$$

これにより, 連成する線形復元定数は $LK_{y\theta} = K_{\theta y}$ であるため, $K_{y\theta} = 0$ を満たせばよいことがわかる. そこで解析モデルのパラメータ決定に関しては, 2:1:1 の内部共振となり弾性独立を満たすように $K_{yy} = K_{\theta\theta} = 1/4, K_{y\theta} = 0$ の条件で求める.

2.4 結言

以上の検討結果から, 三自由度防振支持系の幾何学的非線形を考慮した支配方程式 (2.5)~(2.7) が導かれた. 以下の章ではこの方程式をもとに検討を行う.

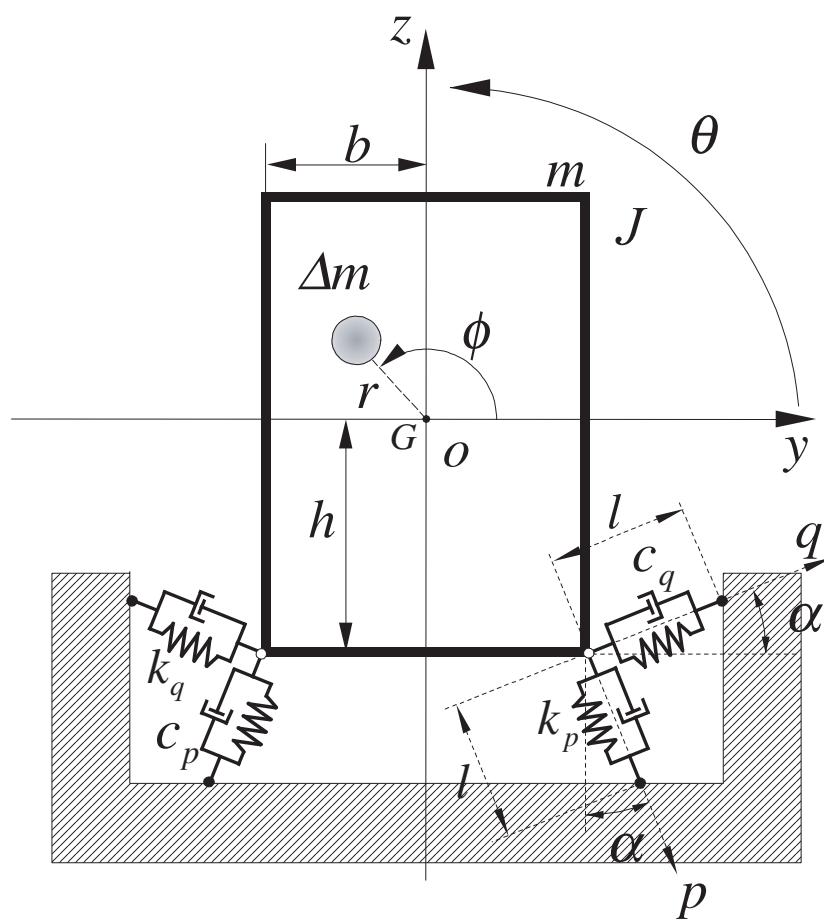
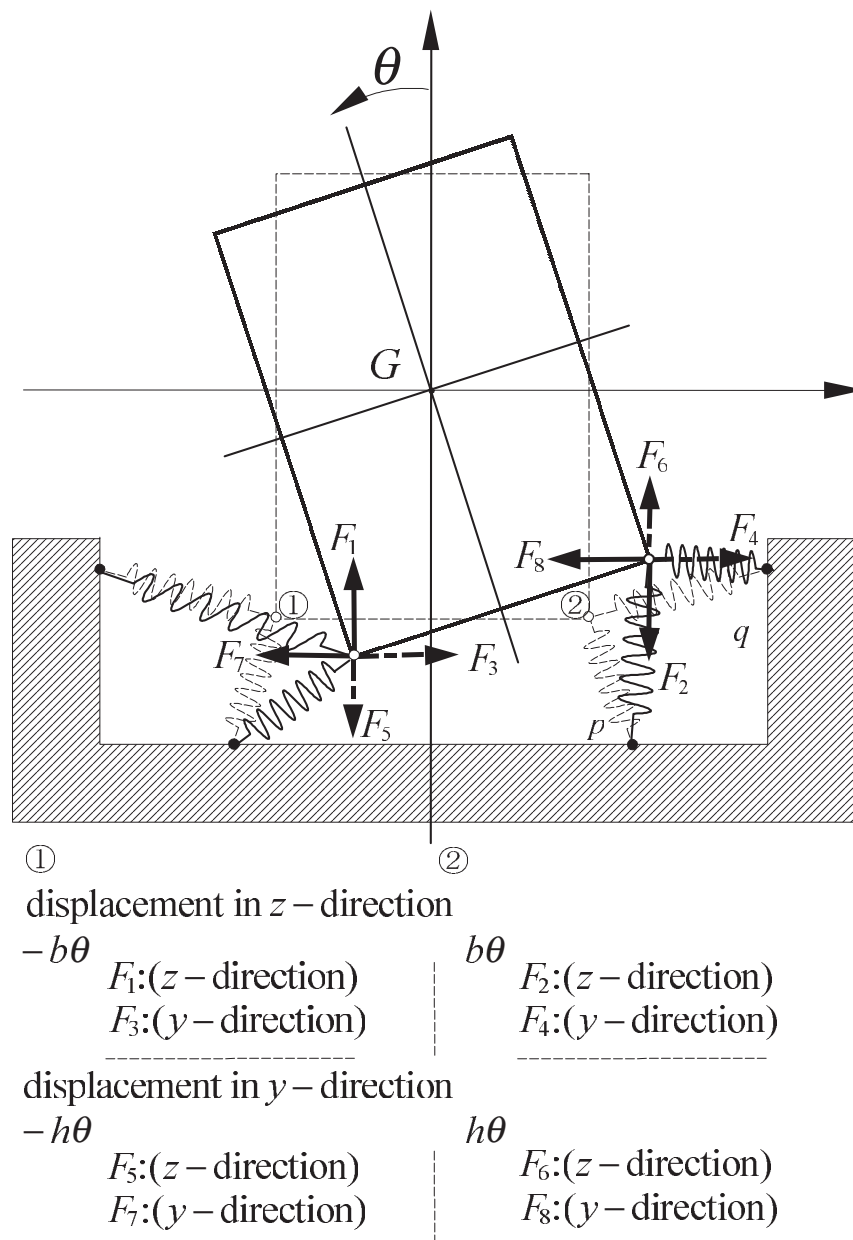


Fig. 2.1 Analytical Model of a Three-Degrees-of-Freedom System

Fig. 2.2 Rotating Strength of Each Points Because of Rotation Angle θ

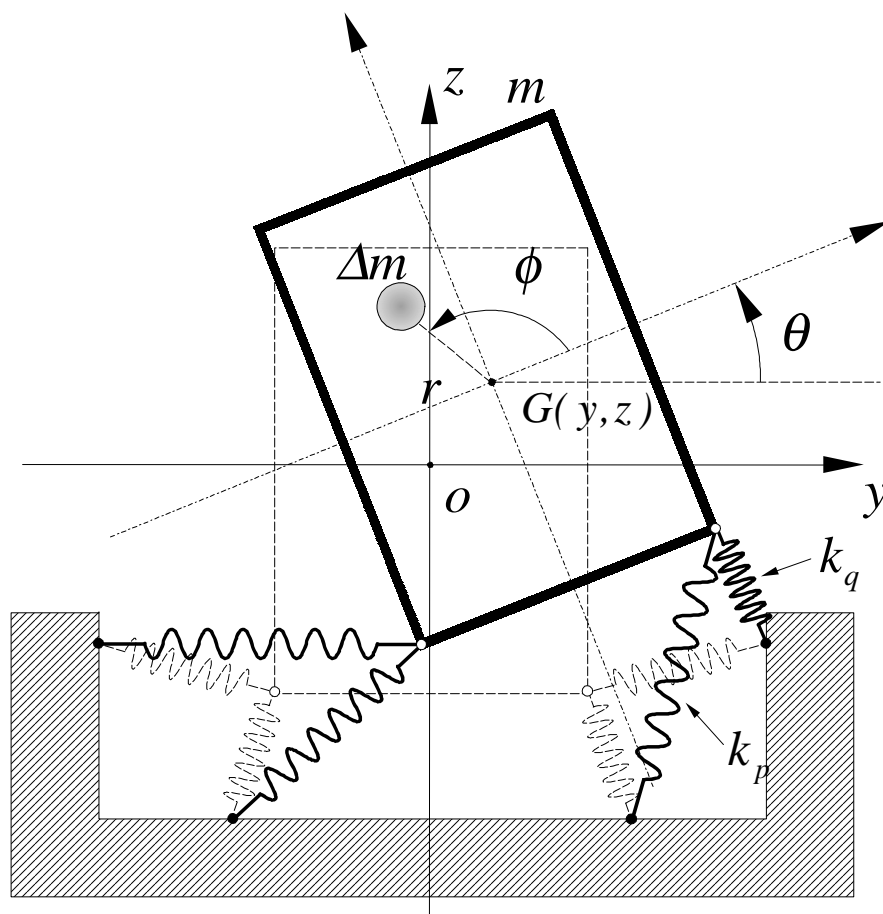


Fig. 2.3 Movement of Analytical Model

第3章

内部共振が存在しない場合の定常振動

3.1 序言

船用主機関などの防振支持系に生じる複雑な振動現象は、通常、多自由度の連立常微分方程式の形に定式化され、それが線形であればモード座標空間において非連成化することができる [9][10]。

しかしこのようなモード解析は、基本的には線形問題に適用され、系に非線形特性が含まれている場合、非線形項は連成したまま残る [12]。そこで、従来、船用主機関などの防振支持系に生じる複雑な振動現象で、非線形効果を考慮する必要がある場合、非線形項は連成させた状態で支配方程式を取り扱い、主に数値シミュレーションによる理論解析がなされてきた。

一方、コンピュータの発達に伴い数式処理の活用が盛んになり、このような非線形効果を考慮しなければならない系の振動解析も、数値シミュレーション以外に、解析的な取り扱いが可能となってきた。

すなわち、これら連成状態の非線形項を処理する有効な手段の一つとして、標準形の方法 [22][11] が考えられる。標準形の方法では、非線形関数であらわされる座標変換式を用いることにより、支配方程式に含まれる非線形性を可能な限り取り除き、現象の支配方程式が最も単純な形を取るような座標系に変換することが可能である。この方法の欠点の一つは、従来、多量の解析計算を要することであったが、数式処理の援用により、比較的容易に計算を行うことが出来るようになった。

ところで、1 章にも述べた様に、船用主機関の防振支持系における複雑な振動現象の中で、比較的定格回転数の低い機関を防振支持した場合に、非線形項の影響を調べなければならない問題の発生が予想される。防振支持系は、経験上、その固有振動数と加振振動数の比（固有振動数/加振振動数）を $1/3$ 以下にできれば機関から基礎に伝わる力の伝達率（振動伝達率）を実用上問題ない範囲まで十分小さくすることができる。しかし系の固有振動数を低く設定するといっても、低回転数の機関に対し振動数比を $1/3$ 以下とする条件は、使用する防振材（防振ゴムやコイルばね）の荷重限界や、系の安定性の問題から自ずと制限がある。

このため複数個の固有振動数の中で、機関回転数範囲に対し低く出来る固有振動数のグループと高くするグループを作るように防振材のばね定数や配置を選定し、両グループの間の周波数範囲で機関を運転し、共振を避ける形が選定されることがある。

また船用主機関の場合，機関出力は定格回転数に対する部分負荷回転数比の3乗に比例して変化するため，使用される回転数範囲は広くなり，全領域について上記の条件を満足することは困難となる．

よって，系の共振を避けることができても，回転数範囲の下限または上限付近で運転される時，機関の振幅が大きくなることが起こり得る．

このような場合には，系の非線形効果を考慮する必要がある，時として非線形振動特有の現象が発生することが考えられる．

本章では，このように振動振幅が大きく系の非線形効果が問題となるような，船用主機関の防振支持系の振動現象を明確にすることを目的として，剛体の三自由度防振支持系 [18][23] を取り上げる．

まず最初に，剛体の三自由度防振支持系の模型実験を行うことにより，系に発生する振動現象を観察して，非線形効果の特徴，つまり本文中に述べる高調波成分の発生を確認する．

そして，2章で求められた三自由度防振支持系の運動を支配する方程式，すなわち，最初に，得られた非同次の非線形連立常微分方程式について，線形部分の対角化つまりモード解析を行う。つぎに，実験的に確認された高調波成分に着目して，標準形の方法により，方程式に含まれる連成状態にある高次非線形項を可能な限り減らし，本質的な非線形項を含む方程式を体系的に誘導する．このとき多量の解析計算を数式処理により行うため，途中の計算過程で数式処理の援用に適した工夫をする．

3.2 模型実験

3.2.1 実験装置

実験装置の概略を図 3.2 に，その諸元を表 3.1 に示す．これは，図 2.1 において $\alpha = 0$ とした，図 3.1 の解析モデルに基づいて作成したものであり，軟鋼製の剛体をコイルばねで支持した．

なお，剛体を支持する際，剛体とばねの接続部分に関しては回転支持とし，土台との接続部分に関しては固定支持とした．また，剛体の設計に関しては，回転円盤の中心位置と剛体の重心位置とを一致するように調整した．

さらに，リニアガイドなどの拘束機構を使用せずに，平面運動を実現させるた

め，剛体内の部品の配置を前後対称となるようにした．加振源としては，不釣り合い質量を有する円盤（フライホイール）をギヤードモータによって回転させるものとした．

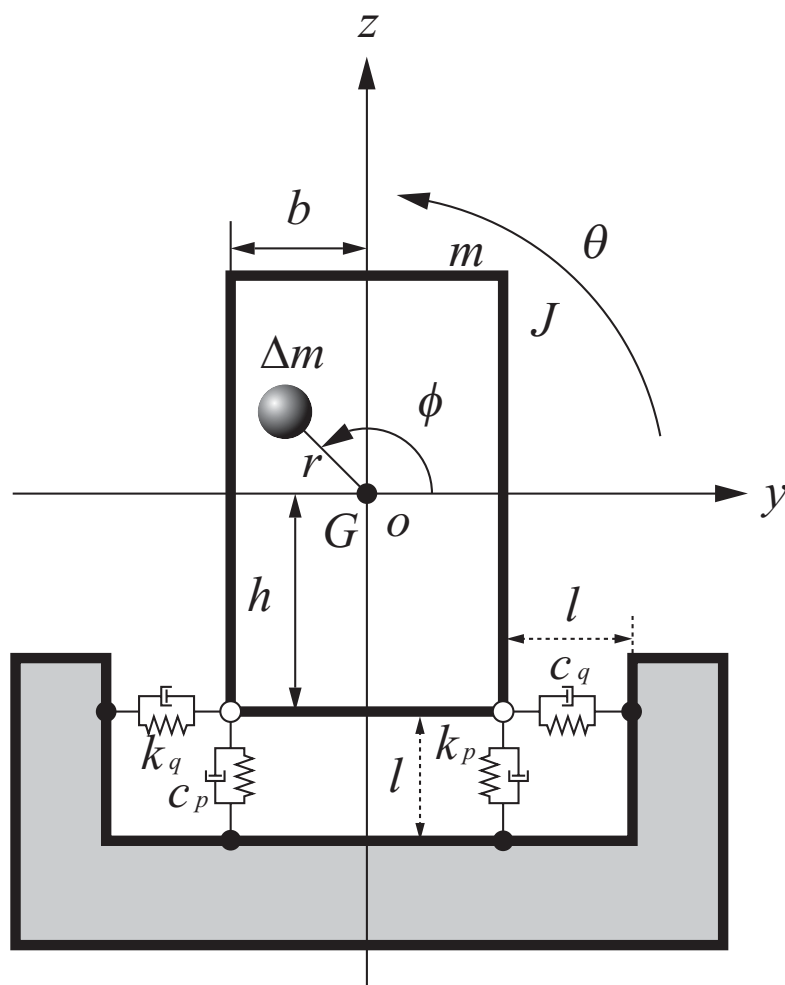


Fig. 3.1 Analytical model of three-degrees-of-freedom system

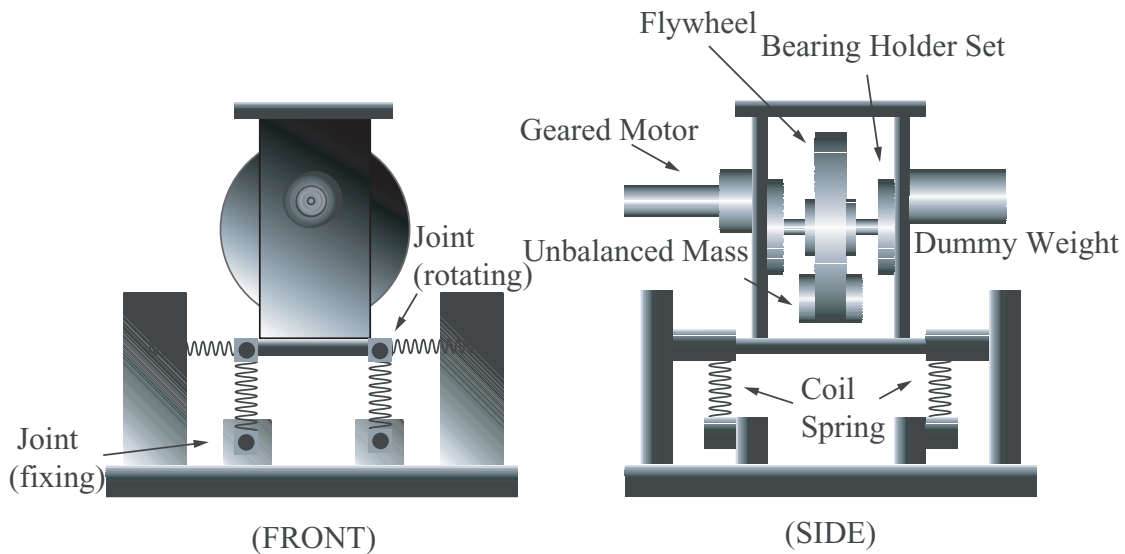


Fig. 3.2 Schematic of experimental apparatus

Table 3.1 Experimental parameters

$m = 3.974kg, \Delta m = 0.216kg, J = 8.936 \times 10^{-3}kgm^2$
$b = 25mm, h = 74.5mm, r = 30mm, l = 30mm$
$k_p = 1.910 \times 10^4 N/m, c_p = 2.23N \cdot s/m$
$k_q = 9.364 \times 10^2 N/m, c_q = 1.88N \cdot s/m$

3.2.2 実験方法

重心の上下・左右方向変位である $z \cdot y$ の測定については、模型の重心位置に白色の点を付し、その点の挙動を CCD Camera で観測し、Width Analyzer で自動追跡し、位置信号を電圧に変換することにより行った。一方、重心回りの回転角 θ の測定については、剛体の上面で H3065 センサヘッドが受光した距離情報を C2935 コントローラで傾きの出力に変換した。

これらの z, y, θ に関する信号に関して、Lowpass Filter により 30Hz 以上のものをカットしたうえで、FFT Analyzer によって振動波形観測および周波数分析

を行った。

以上の測定方法を用いて、まず、系を自由振動させたときの振動波形から、それぞれの固有振動数を調べるとともに、粘性減衰定数およびばね定数を同定した。また、剛体の慣性モーメントについては、ばねを取り外した状態において剛体の上部を支点として振り子となしてその周期により同定した。

3.2.3 実験結果

図 3.3 は、代表的な例としておもりの回転数を上下方向の固有振動数 (15.6Hz) のほぼ半分の 7.8Hz に設定した場合の重心の上下、左右方向変位 z, y および回転角 θ の時刻歴と周波数分析結果である。ここでは、表 3.1 に示す代表値により無次元化したものを示してある。これにより z 方向において加振振動数とその 2 倍の高調波成分が現れている。また、 y, θ についてはほとんど単一の振動数成分しか存在しない。

3.3 三自由度防振支持系支配方程式の非線形部分の簡単化

本節では、防振支持された剛体の三自由度強制振動について 2 章で求めた支配方程式をもとに、基礎方程式の線形部分を対角化したのち、標準形の方法を用いて非線形部分を簡単にする。そして、この結果に基づいて理論解析を行い、三自由度の非線形振動のメカニズムについて考察する。

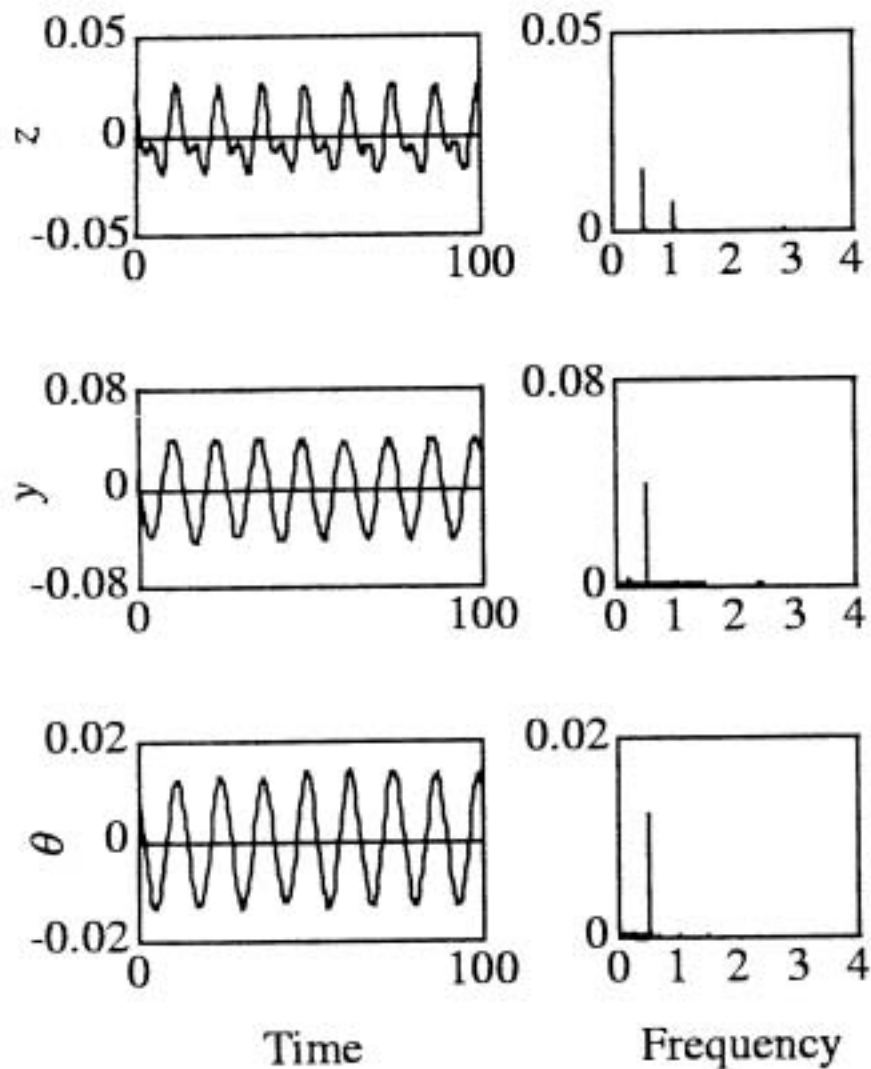


Fig. 3.3 Time history and Fourier spectrum
(Experimental results)

3.3.1 支配方程式の変形

2章において求められた支配方程式 (2.5) ~ (2.7) をばねの傾斜角 $\alpha = 0$,

$$K_{yy} = K, \quad K_{y\theta} = KH, \quad K_{\theta y} = LKH, \quad K_{\theta\theta} = L(B^2 + KH^2),$$

$$\mu_{zz} = \mu_p, \quad \mu_{yy} = \mu_q, \quad \mu_{\theta\theta} = L(\mu_p B^2 + \mu_q H^2), \quad \mu_{\theta y} = \mu_q LH,$$

と書いて書き直すと

支配方程式は以下のようなになる .

$$\begin{aligned} \ddot{z} + z = & -2\mu_p \dot{z} + M\lambda(-\ddot{\phi} \cos \phi + \dot{\phi}^2 \sin \phi) \\ & + \alpha_{yy} y^2 + \alpha_{y\theta} y\theta + \alpha_{\theta\theta} \theta^2 + \alpha_{yyz} y^2 z \\ & + \alpha_{yz\theta} yz\theta + \alpha_{zzz} z^3 + \alpha_{z\theta\theta} z\theta^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} + Ky + KH\theta = & -2\mu_q \dot{y} - 2\mu_q H\dot{\theta} + M\lambda(\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) \\ & + \beta_{yz} yz + \beta_{z\theta} z\theta + \beta_{yyy} y^3 + \beta_{yy\theta} y^2 \theta \\ & + \beta_{yzz} yz^2 + \beta_{y\theta\theta} y\theta^2 + \beta_{zz\theta} z^2 \theta + \beta_{\theta\theta\theta} \theta^3 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + L(B^2 + KH^2)\theta + LKH y = & -2\mu_p LB^2 \dot{\theta} - 2\mu_q LH^2 \dot{\theta} \\ & - 2\mu_q LH \dot{y} + LM\lambda^2 \ddot{\phi} \\ & + \gamma_{yz} yz + \gamma_{z\theta} z\theta + \gamma_{yyy} y^3 + \gamma_{yy\theta} y^2 \theta \\ & + \gamma_{yzz} yz^2 + \gamma_{y\theta\theta} y\theta^2 + \gamma_{zz\theta} z^2 \theta + \gamma_{\theta\theta\theta} \theta^3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここで 8 個の無次元パラメータのうち $\alpha = 0$ としたことにより μ_q, μ_p のみが 2 章と異なり ,

$$\mu_q = \frac{c_q}{\sqrt{2mk_p}}, \quad \mu_p = \frac{c_p}{\sqrt{2mk_p}}$$

で定義される .

また , 式 (3.1) ~ (3.3) の 23 個の非線形項の係数 $\alpha_{yy}, \dots, \beta_{yz}, \dots, \gamma_{yz}, \dots$ は , H, B, L, K の関数として決定される .

解析モデルの無次元パラメータを表 3.2 に示す . また基準とした船用主機 (出力 1029kW, 回転数 390min^{-1}) の無次元パラメータも表 3.3 に参考として示す .

Table 3.2 Nondimensional parameters

$H = 2.483, B = 0.833, L = 0.40$
$K = 4.903 \times 10^{-2}, M = 5.435 \times 10^{-2}, \lambda = 1.0$
$\mu_q = 4.825 \times 10^{-3}, \mu_p = 5.723 \times 10^{-3}$

表 3.2 からわかるとおり , 力学的相似モデルは実機と比較して現象があらわれ易いモデルとなっている . しかし高調波発生などに関わる系の本質的な性質は受け継がれている .

Table 3.3 (Parameters of the marine diesel engine)

$$\begin{aligned}
 H &= 12.66, B = 6.841, L = 1.193 \times 10^{-2} \\
 K &= 0.4108, M = 2.517 \times 10^{-4}, \lambda = 2.985 \\
 \mu_q &= 7.251 \times 10^{-2}, \mu_p = 0.1131
 \end{aligned}$$

3.3.2 基礎方程式の線形部分の対角化

多自由度系の線形振動を解析するための一般的な応答解析法については、よく知られているモード解析法がある。

式 (3.1)~(3.3) において、左辺の線形振動項のみを考える場合、 z 方向は独立であるが、 y, θ 方向は連成しているので、この部分を座標変換により、モード分離する。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} z \\ y \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & K & KH \\ 0 & LKH & L(B^2 + KH^2) \end{bmatrix}$$

とおくと式 (3.1)~(3.3) は、

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3.4}$$

という行列の形に表される。ここで、 \mathbf{A} の固有値を求めると、

$$\begin{aligned}
 \omega_1^2 &= 1 \\
 \omega_2^2, \omega_3^2 &= \frac{1}{2} [K + L(B^2 + KH^2)] \pm \frac{1}{2} \sqrt{\{K + L(B^2 + KH^2)\}^2 - 4KLB^2}
 \end{aligned}$$

また固有ベクトルは、

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ (\omega_2^2 - K)/KH \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ (\omega_3^2 - K)/KH \end{bmatrix}$$

次に、固有ベクトルを並べた行列 $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3]$ を用いた座標変換 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{u}$, ($\mathbf{u} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3]^t$) を式 (3.4) に施すと、

$$\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{u} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{b} \tag{3.5}$$

となる．ここで，

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix}$$

であり，式 (3.5) の左辺は非連成となる．更に数式処理を用いて整理すると，以下の方程式が得られる．

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 + \omega_1^2 \hat{u}_1 = & -2\hat{\mu}_{11}\hat{u}_1 + \hat{A}_1(-\ddot{\phi} \cos \phi + \dot{\phi}^2 \sin \phi) \\ & + \alpha_{22}\hat{u}_2^2 + \alpha_{23}\hat{u}_2\hat{u}_3 + \alpha_{33}\hat{u}_3^2 + \alpha_{111}\hat{u}_1^3 \\ & + \alpha_{122}\hat{u}_1\hat{u}_2^2 + \alpha_{123}\hat{u}_1\hat{u}_2\hat{u}_3 + \alpha_{133}\hat{u}_1\hat{u}_3^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_2 + \omega_2^2 \hat{u}_2 = & -2\hat{\mu}_{22}\hat{u}_2 - 2\hat{\mu}_{23}\hat{u}_3 + \hat{A}_2(\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) + \hat{B}_2\ddot{\phi} \\ & + \beta_{12}\hat{u}_1\hat{u}_2 + \beta_{13}\hat{u}_1\hat{u}_3 + \beta_{112}\hat{u}_1^2\hat{u}_2 + \beta_{113}\hat{u}_1^2\hat{u}_3 \\ & + \beta_{222}\hat{u}_2^3 + \beta_{223}\hat{u}_2^2\hat{u}_3 + \beta_{233}\hat{u}_2\hat{u}_3^2 + \beta_{333}\hat{u}_3^3 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_3 + \omega_3^2 \hat{u}_3 = & -2\hat{\mu}_{32}\hat{u}_2 - 2\hat{\mu}_{33}\hat{u}_3 + \hat{A}_3(\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) + \hat{B}_3\ddot{\phi} \\ & + \gamma_{12}\hat{u}_1\hat{u}_2 + \gamma_{13}\hat{u}_1\hat{u}_3 + \gamma_{112}\hat{u}_1^2\hat{u}_2 + \gamma_{113}\hat{u}_1^2\hat{u}_3 \\ & + \gamma_{222}\hat{u}_2^3 + \gamma_{223}\hat{u}_2^2\hat{u}_3 + \gamma_{233}\hat{u}_2\hat{u}_3^2 + \gamma_{333}\hat{u}_3^3 \end{aligned} \quad (3.8)$$

ただし， $\alpha_{ij}, \alpha_{ijk}, \beta_{ij}, \beta_{ijk}, \gamma_{ij}, \gamma_{ijk} (i, j, k = 1, 2, 3)$ および $\hat{\mu}_{np} (n, p = 1, 2, 3)$ は，式 (3.1) ~ (3.3) の各係数が座標変換により修正されたものである．また， \hat{u}_1 は z 方向変位を表わし， \hat{u}_2, \hat{u}_3 はそれぞれ θ 方向， y 方向が支配的なモード座標上の変位である．このように，減衰項を除く線形部分はモード分離されたが，非線形部分は連成している．そこで非線形項に対処するため次節で標準形の方法を用いる．

3.3.3 標準形の方法を用いた非線形部分の簡単化

前節で考慮されなかった非線形部分について，標準形の方法を適用する．すなわち，以下では模型実験における実験装置のパラメータを有する場合の式 (3.5) の標準形を導く．

ϵ を微小パラメータとして， $\hat{u}_n = \epsilon u_n, \hat{\mu}_{np} = \epsilon \mu_{np}, \hat{A}_n = \epsilon A_n (n, p = 1, 2, 3)$ とおき，式 (3.6)~(3.8) の 2 次，3 次の非線形項 f_{n1}, f_{n2} をそれぞれ

$\hat{f}_{n1} = \epsilon^2 f_{n1}$, $\hat{f}_{n2} = \epsilon^3 f_{n2}$ とおくと以下のようなになる .

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = & -2\epsilon\mu_{11}\dot{u}_1 + A_1\Omega^2 \sin \Omega t \\ & + \epsilon f_{11}(u_1, u_2, u_3) + \epsilon^2 f_{12}(u_1, u_2, u_3) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = & -2\epsilon\mu_{22}\dot{u}_2 - 2\epsilon\mu_{23}\dot{u}_3 + A_2\Omega^2 \cos \Omega t \\ & + \epsilon f_{21}(u_1, u_2, u_3) + \epsilon^2 f_{22}(u_1, u_2, u_3) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_3 + \omega_3^2 u_3 = & -2\epsilon\mu_{32}\dot{u}_2 - 2\epsilon\mu_{33}\dot{u}_3 + A_3\Omega^2 \cos \Omega t \\ & + \epsilon f_{31}(u_1, u_2, u_3) + \epsilon^2 f_{32}(u_1, u_2, u_3) \end{aligned} \quad (3.11)$$

以下では 3.2.3 の実験結果に着目して, $\Omega = \dot{\phi} = \omega_1/2$ の場合を取り扱う . ここで,

$$u_n = \zeta_n + \bar{\zeta}_n, \quad \dot{u}_n = i\omega_n(\zeta_n - \bar{\zeta}_n), \quad x = e^{i\Omega t} \quad (n = 1, 2, 3) \quad (3.12)$$

で定義される複素数 ζ_n および x を導入すると, 式 (3.9)~(3.11) は以下のように 1 階の微分方程式で表される .

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 = & i\omega_1\zeta_1 - \frac{A_1\Omega^2}{4\omega_1}(x - \bar{x}) \\ & - \frac{i\epsilon}{2\omega_1}[f_{11}(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \zeta_3, \bar{\zeta}_3) - 2i\mu_{11}\omega_1(\zeta_1 - \bar{\zeta}_1)] \\ & - \frac{i\epsilon^2}{2\omega_1}f_{12}(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \zeta_3, \bar{\zeta}_3) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_2 = & i\omega_2\zeta_2 - \frac{iA_2\Omega^2}{4\omega_2}(x + \bar{x}) - \frac{i\epsilon}{2\omega_2}[f_{21}(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \zeta_3, \bar{\zeta}_3) \\ & - 2i\mu_{22}\omega_2(\zeta_2 - \bar{\zeta}_2) - 2i\mu_{23}\omega_3(\zeta_3 - \bar{\zeta}_3)] \\ & - \frac{i\epsilon^2}{2\omega_2}f_{22}(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \zeta_3, \bar{\zeta}_3) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_3 = & i\omega_3\zeta_3 - \frac{iA_3\Omega^2}{4\omega_3}(x + \bar{x}) - \frac{i\epsilon}{2\omega_3}[f_{31}(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \zeta_3, \bar{\zeta}_3) \\ & - 2i\mu_{32}\omega_2(\zeta_2 - \bar{\zeta}_2) - 2i\mu_{33}\omega_3(\zeta_3 - \bar{\zeta}_3)] \\ & - \frac{i\epsilon^2}{2\omega_3}f_{32}(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \zeta_3, \bar{\zeta}_3) \end{aligned} \quad (3.15)$$

(a) $O(1)$ の簡単化 [11]

まず, ζ_n について未知数 δ_{n1}, δ_{n2} を用いて以下に示される座標変換を導入する.

$$\zeta_n = \eta_n + \delta_{n1}x + \delta_{n2}\bar{x} \quad (n = 1, 2, 3) \quad (3.16)$$

上式を式 (3.13) に代入すると次の様な式が得られる .

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 = & i\omega_1\eta_1 + i \left[(\omega_1 - \Omega)\delta_{11} - \frac{A_1\Omega^2}{4i\omega_1} \right] x \\ & + i \left[(\omega_1 + \Omega)\delta_{12} + \frac{A_1\Omega^2}{4i\omega_1} \right] \bar{x} + O(\epsilon) \end{aligned}$$

いま , $\Omega \neq \omega_1$ であるから ,

$$\delta_{11} = -\frac{iA_1\Omega^2}{4\omega_1(\omega_1 - \Omega)} \quad , \quad \delta_{12} = \frac{iA_1\Omega^2}{4\omega_1(\omega_1 + \Omega)} \quad (3.17)$$

と置くことにより x, \bar{x} の項を消去することができる . このとき式 (3.13) は次のような形となる .

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 = & i\omega_1\eta_1 + \epsilon F_{11}(\eta_1, \bar{\eta}_1, \eta_2, \bar{\eta}_2, \eta_3, \bar{\eta}_3, x, \bar{x}) \\ & + \epsilon^2 F_{12}(\eta_1, \bar{\eta}_1, \eta_2, \bar{\eta}_2, \eta_3, \bar{\eta}_3, x, \bar{x}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

また , 式 (3.14),(3.15) についても同様にして x, \bar{x} の項を消去することができ , 以下のようになる .

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_2 = & i\omega_2\eta_2 + \epsilon F_{21}(\eta_1, \bar{\eta}_1, \eta_2, \bar{\eta}_2, \eta_3, \bar{\eta}_3, x, \bar{x}) \\ & + \epsilon^2 F_{22}(\eta_1, \bar{\eta}_1, \eta_2, \bar{\eta}_2, \eta_3, \bar{\eta}_3, x, \bar{x}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_3 = & i\omega_3\eta_3 + \epsilon F_{31}(\eta_1, \bar{\eta}_1, \eta_2, \bar{\eta}_2, \eta_3, \bar{\eta}_3, x, \bar{x}) \\ & + \epsilon^2 F_{32}(\eta_1, \bar{\eta}_1, \eta_2, \bar{\eta}_2, \eta_3, \bar{\eta}_3, x, \bar{x}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

ただし , $F_{n1}, F_{n2}(n = 1, 2, 3)$ は , それぞれ式 (3.13) ~ (3.15) の右辺の $O(\epsilon), O(\epsilon^2)$ の各項が式 (3.16) の座標変換により修正されたものである .

(b) $O(\epsilon)$ の簡単化

次に η_n について以下の座標変換を導入する .

$$\eta_n = \xi_n + \epsilon h_{n1}(\xi_1, \bar{\xi}_1, \xi_2, \bar{\xi}_2, \xi_3, \bar{\xi}_3, x, \bar{x}) \quad (n = 1, 2, 3) \quad (3.21)$$

これによって式 (3.18) は ,

$$\dot{\xi}_1 = i\omega_1\xi_1 + \epsilon g_{11} + O(\epsilon^2) \quad (3.22)$$

となり, $O(\epsilon)$ の項 g_{11} は以下のような形で表される.

$$\begin{aligned}
 g_{11} = & -i\omega_1 \left(\frac{\partial h_{11}}{\partial \xi_1} \xi_1 - \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{\xi}_1} \bar{\xi}_1 - h_{11} \right) \\
 & -i\omega_2 \left(\frac{\partial h_{11}}{\partial \xi_2} \xi_2 - \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{\xi}_2} \bar{\xi}_2 \right) - i\omega_3 \left(\frac{\partial h_{11}}{\partial \xi_3} \xi_3 - \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{\xi}_3} \bar{\xi}_3 \right) \\
 & -i\Omega \left(\frac{\partial h_{11}}{\partial x} x - \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{x}} \bar{x} \right) \\
 & + F_{11}(\xi_1, \bar{\xi}_1, \xi_2, \bar{\xi}_2, \xi_3, \bar{\xi}_3, x, \bar{x})
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

ここで, F_{11} の $\xi_1 \dots \bar{x}$ についての関数形より h_{11} が次のような多項式であるとする.

$$\begin{aligned}
 h_{11} = & \Delta_{11}\xi_1 + \Delta_{12}\bar{\xi}_1 + \Delta_{13}x + \Delta_{14}\bar{x} + \Delta_{15}\xi_2^2 + \Delta_{16}\xi_2\bar{\xi}_2 \\
 & + \Delta_{17}\xi_2\xi_3 + \Delta_{18}\xi_2\bar{\xi}_3 + \Delta_{19}\xi_2x + \Delta_{110}\xi_2\bar{x} + \Delta_{111}\xi_2^2 \\
 & + \Delta_{112}\bar{\xi}_2\xi_3 + \Delta_{113}\bar{\xi}_2\bar{\xi}_3 + \Delta_{114}\bar{\xi}_2x + \Delta_{115}\bar{\xi}_2\bar{x} \\
 & + \Delta_{116}\xi_3^2 + \Delta_{117}\xi_3\bar{\xi}_3 + \Delta_{118}\xi_3x + \Delta_{119}\xi_3\bar{x} \\
 & + \Delta_{120}\bar{\xi}_3^2 + \Delta_{121}\bar{\xi}_3x + \Delta_{122}\bar{\xi}_3\bar{x} + \Delta_{123}x^2 \\
 & + \Delta_{124}x\bar{x} + \Delta_{125}\bar{x}^2
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

式 (3.24) を式 (3.23) に代入して, $\xi_i, \bar{\xi}_i, x, \bar{x}$ ($i = 1, 2, 3$) からなる項の係数をまとめる. たとえば $\bar{\xi}_1$ の係数は $2i\omega_1\Delta_{12} + \mu_{11}$ となる. そこでこの係数が 0 となるように Δ_{12} を定めると $\bar{\xi}_1$ 項を消去することができる.

また, 他の項に関しても同様に $\Delta_{13}, \Delta_{14}, \dots$ の値を定めることにより消去することができるが, ξ_1 および x^2 の係数には Δ_{11} および Δ_{123} を含まないためその項を消去することができない. すなわち式 (3.23) に注目したとき, $\Omega = \dot{\phi} = \omega_1/2$ の場合, 右辺第 1 項から導かれる ξ_1 および第 8 項から導かれる x^2 から $i\omega_1$ という係数 (固有値) を生ずる. このとき, 右辺第 3 項の係数 (固有値) が同じ $i\omega_1$ であることから, この項が有する ξ_1, x^2 と前述の 2 つの項が相殺される. 以上の結果, h_{11} の有する 25 個の項のうち 2 項だけが残り, 式 (3.22) は次式の様な標準形になる.

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1 = & i\omega_1\xi_1 - \frac{\epsilon}{2\omega_1} [2\mu_{11}\omega_1\xi_1 + i(\alpha_{22}\Gamma_{12}^2 \\
 & + \alpha_{23}\Gamma_{12}\Gamma_{13} + \alpha_{33}\Gamma_{13}^2)x^2] + O(\epsilon^2)
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

ただし,

$$\Gamma_{12} = \frac{A_2\Omega^2}{2(\omega_2^2 - \Omega^2)}, \quad \Gamma_{13} = \frac{A_3\Omega^2}{2(\omega_3^2 - \Omega^2)}$$

であり, α_{ij} は $\hat{\alpha}_{ij}$ が式 (3.16) の座標変換により修正されたものを表す.

式 (3.19), (3.20) についても同様にして, 以下の様な標準形が得られる.

$$\dot{\xi}_2 = i\omega_2\xi_2 - \epsilon\mu_{22}\xi_2 + O(\epsilon^2) \quad (3.26)$$

$$\dot{\xi}_3 = i\omega_3\xi_3 - \epsilon\mu_{33}\xi_3 + O(\epsilon^2) \quad (3.27)$$

標準形の導出に関する理論的背景 [22] については, 付録に示す.

3.3.4 パラメータの高調波成分への影響

標準形の方程式 (3.25)~ (3.27) を調べることで現象の把握が容易になる. すなわち, 式 (3.25) には x^2 の項が存在する. これが高調波を生み出す項であり, この項が直接的に高調波成分に影響を与えていることから, x^2 の係数を調べることによって各無次元パラメータ B, H, \dots の高調波成分への影響を把握することが出来る. 例として, 剛体の無次元幅 B と式 (3.25) の x^2 の係数の関係を図 3.4 に示す. この図より, B を変化させた際の x^2 の係数の推移の様子, 即ち無次元パラメータ B の高調波成分への影響を把握することが出来る. さらに, 式 (3.26), (3.27) においては $O(\epsilon)$ までの解析では非線形項はすべて消去され, 非線形項の影響が現れるのは $O(\epsilon^2)$ 以下であることがわかる.

3.3.5 解析的近似解

次に, 式 (3.25)~(3.27) の標準形を利用して解析解を求める. まず座標変換式から,

$$u_1 = \xi_1 + \bar{\xi}_1 - \frac{iA_1\Omega^2(x - \bar{x})}{2(\omega_1^2 - \Omega^2)} + \epsilon(h_{11} + \bar{h}_{11}) + O(\epsilon^2) \quad (3.28)$$

$$u_2 = \xi_2 + \bar{\xi}_2 + \frac{A_2\Omega^2(x - \bar{x})}{2(\omega_2^2 - \Omega^2)} + \epsilon(h_{21} + \bar{h}_{21}) + O(\epsilon^2) \quad (3.29)$$

$$u_3 = \xi_3 + \bar{\xi}_3 + \frac{A_3\Omega^2(x - \bar{x})}{2(\omega_3^2 - \Omega^2)} + \epsilon(h_{31} + \bar{h}_{31}) + O(\epsilon^2) \quad (3.30)$$

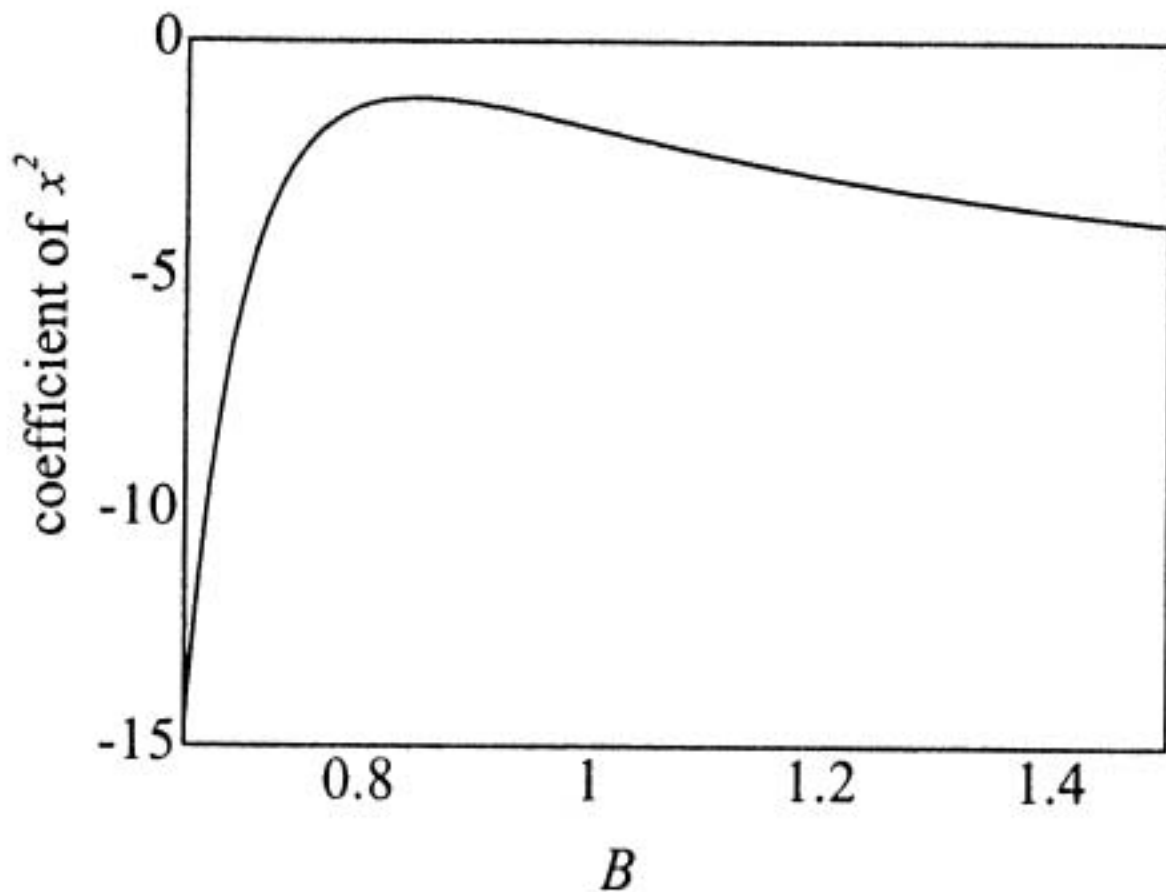


Fig. 3.4 Effect of the dimensionless parameter B on the superharmonic element

と表される。ここで、

$$\xi_n = \frac{1}{2} a_n e^{i(\omega_n t + \beta_n)}, \quad (n = 1, 2, 3) \text{ および } x = e^{i\Omega t}$$

を式 (3.25)~(3.27) , 式 (3.28)~(3.30) に代入すると , 定常状態において ,

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 = & \epsilon \left[\frac{A_1 \Omega^2}{\omega_1^2 - \Omega^2} \sin \Omega t + a_1 \cos(2\Omega t + \gamma_1) \right] \\ & + \epsilon^2 [2\Delta_{124} + 2(\Delta_{13} + \Delta_{14}) \cos \Omega t] + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_2 = & \frac{\epsilon A_2 \Omega^2}{\omega_2^2 - \Omega^2} \cos \Omega t \\ & + \epsilon^2 [(\Delta_{211} + \Delta_{218})a_1 \cos(3\Omega t + \gamma_1) + 2i(\Delta_{227} - \Delta_{228}) \sin 2\Omega t \\ & + (\Delta_{212} + \Delta_{217})a_1 \cos(\Omega t + \gamma_1) + 2i(\Delta_{25} - \Delta_{26}) \sin \Omega t] \\ & + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_3 = & \frac{\epsilon A_3 \Omega^2}{\omega_3^2 - \Omega^2} \cos \Omega t \\ & + \epsilon^2 [(\Delta_{311} + \Delta_{318})a_1 \cos(3\Omega t + \gamma_1) + 2i(\Delta_{327} - \Delta_{328}) \sin 2\Omega t \\ & + (\Delta_{312} + \Delta_{317})a_1 \cos(\Omega t + \gamma_1) + 2i(\Delta_{35} - \Delta_{36}) \sin \Omega t] \\ & + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (3.33)$$

また , 式 (3.25)~(3.27) より振幅と位相を表す方程式は以下のようになる .

$$\begin{cases} \dot{a}_1 & = -\epsilon \mu_{11} a_1 - \frac{\epsilon}{\omega_1} (\alpha_{22} \Gamma_{12}^2 + \alpha_{23} \Gamma_{12} \Gamma_{13} + \alpha_{33} \Gamma_{13}^2) \sin \gamma_1 \\ a_1 \dot{\gamma}_1 & = -(2\Omega - \omega_1) a_1 - \frac{\epsilon}{\omega_1} (\alpha_{22} \Gamma_{12}^2 + \alpha_{23} \Gamma_{12} \Gamma_{13} + \alpha_{33} \Gamma_{13}^2) \cos \gamma_1 \end{cases} \quad (3.34)$$

ただし , $\gamma_1 = \beta_1 - (2\Omega - \omega_1)t$ である . また , 式 (3.31)~(3.33) における Δ_k (k : 自然数) は式 (3.24) に代表される座標変換式における係数である . 式 (3.31)~(3.34) に表 3.4 に示す実験装置のパラメータを実際に代入すると , 図 3.5 の時刻歴とその周波数分析結果が得られる . この場合 , \hat{u}_1 方向に関して加振振動数 $\Omega = 0.5$ とその 2 倍の成分 1 が顕著に現れている .

Table 3.4 Coefficients on normal forms

$\Gamma_{11} = -0.906$	$\Gamma_{12} = 0.174$	$\Gamma_{13} = -2.996$
$\Delta_{13} = -0.519$	$\Delta_{14} = -0.173$	$\Delta_{124} = -1.218$
$\Delta_{25} = -0.242i$	$\Delta_{26} = -0.030i$	$\Delta_{211} = 0.083$
$\Delta_{212} = -0.491$	$\Delta_{217} = -0.062$	$\Delta_{218} = -0.033$
$\Delta_{227} = -0.181i$	$\Delta_{228} = -0.039i$	$\Delta_{35} = -1.822i$
$\Delta_{36} = -0.853i$	$\Delta_{311} = -1.378$	$\Delta_{312} = -5.700$
$\Delta_{317} = 2.668$	$\Delta_{318} = 1.081$	$\Delta_{327} = 2.010i$
$\Delta_{328} = 1.394i$	$a_1 = 2.138$	$\gamma_1 = -4.712$

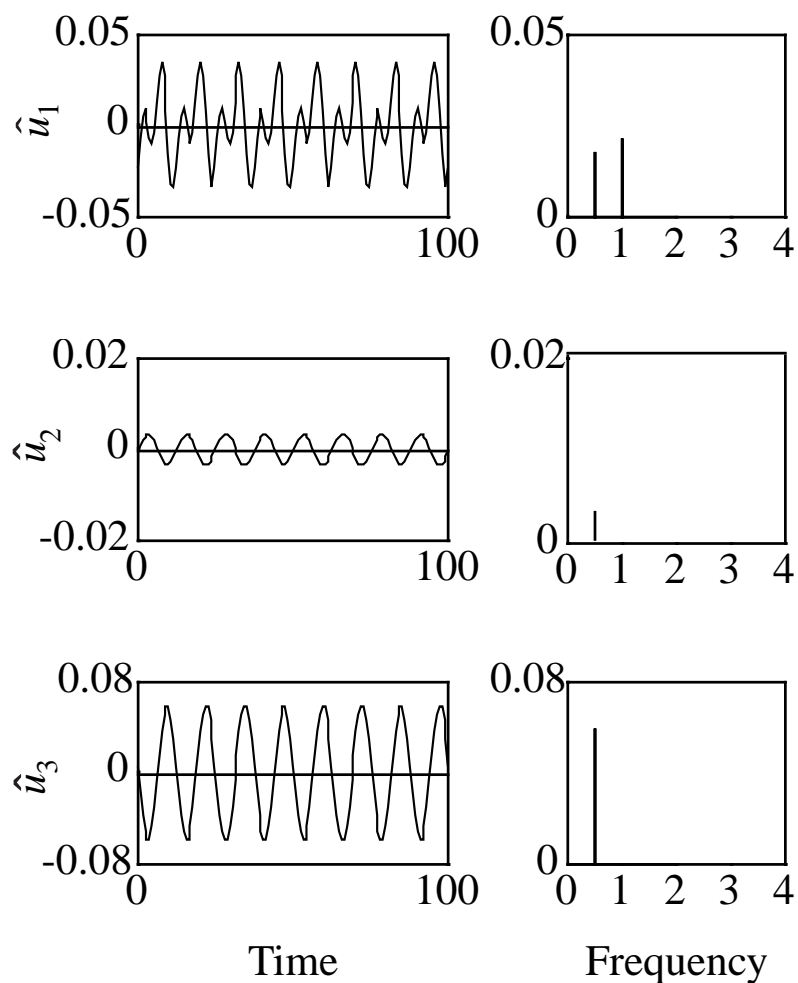


Fig. 3.5 Time history and Fourier spectrum
(Analytical results)

3.3.6 数値解との比較

ここでは、前節における標準形を用いて求めた解析解の妥当性を検討するために Runge-Kutta 法による数値解との比較検討を行う。

図 3.6 は式 (3.6) ~ (3.8) を Runge-Kutta 法により、直接解いて求めた時刻歴と、その周波数分析結果である。これを図 3.5 と比較すると、 \hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3 とともによく一致しており、解析解が妥当であることがわかる。なお、図 3.3 の模型実験の結果と比較すると、解析解の \hat{u}_1 つまり z の高調波成分の大きさについては差が認められる。このことは系のモデル化ならびに実験装置の複雑さなどに依存していることが予測され、今後の課題である。

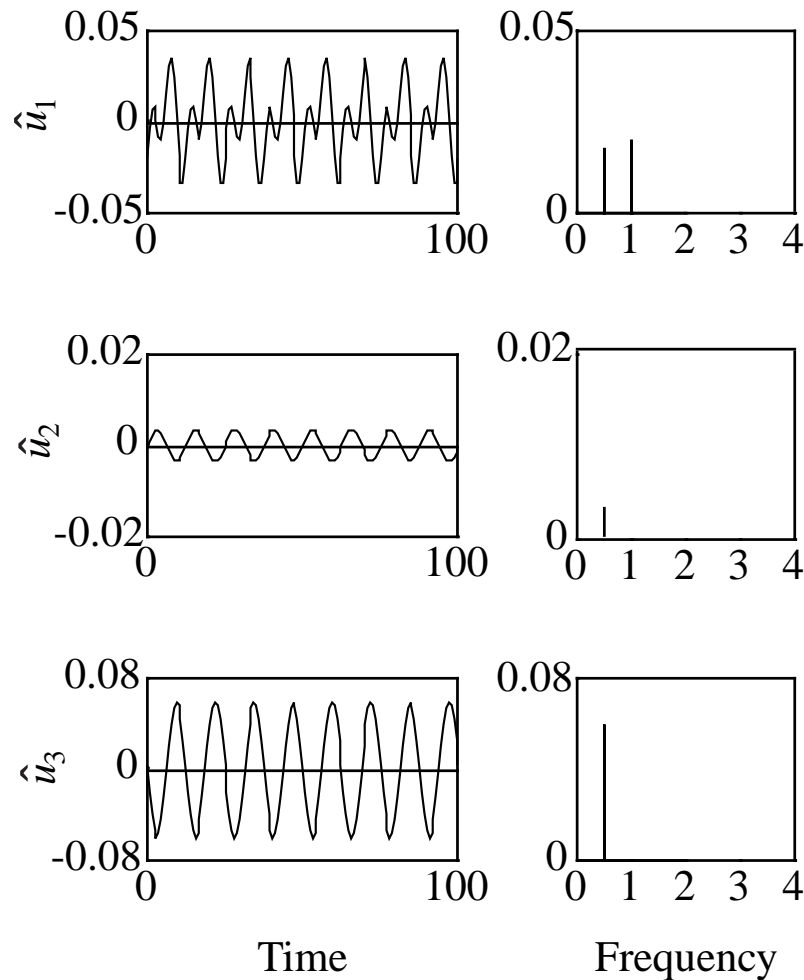


Fig. 3.6 Time history and Fourier spectrum
(Simulated results)

3.4 結言

本章では，防振支持系に生じる非線形振動現象の基本的な問題として，弾性支持された剛体の三自由度，つまり上下，左右，ローリングの非線形強制振動を取り上げた．

最初に，回転体の防振支持系の模型実験を行い，加振振動数の2倍の振動数をもつ高調波振動成分（2次の超調波共振）の存在を確認した．

つぎに，実験的に確認された高調波成分を含む振動現象の理論解析を，数式処理の援用に適した解析手法をもちいて以下に示す手順で行った．

すなわち

- (1) Lagrange の方程式をもちいて系の運動方程式を求め，その線形部分を対角化した．
- (2) 複素座標ならびに変数を一つ増やすことにより，3つの複素未知関数についての一階の微分方程式に変換した．
- (3) 多数の非線形項を有する変換後の状態方程式に対して，標準形の方法を適用した．

その結果，

- 高調波成分へのパラメータの影響を見通し良く調べることが可能である方程式，つまり標準形の方程式を求めることが出来た．
- 標準形の方程式を考察することで，現象に影響を与えるパラメータを把握することが可能となった．そして得られた標準形の方程式より求められる解析的近似解は，Runge-Kutta 法による数値解と良く一致している．

第4章

内部共振が存在する場合の定常振動

4.1 序言

多自由度系の線形連成振動の解析には、よく知られているように、モード解析が広く用いられてきた。

一方、同様の概念を非線形系へ拡張することが、従来より検討されて来た [12]。多自由度系の非線形連成振動の解析では、当然、振動方程式の解に対して重ね合わせの原理が適用できない。しかし、振動の共振現象は、正規モードの近傍で発生する。したがって、非線形系の場合も、正規モードを求めることは、振動解析の基礎として重要なことである [13]。また、多自由度系の非線形振動における Nonlinear Normal Modes (以降、NNMs と略記する) を求めることの実用上の有用性については、次数を減少させたモデルからでも要求精度を満たす結果が得られる可能性が示され、計算時間短縮による制御への応用や [14]、非線形モードの局在化から、衝撃と振動絶縁への応用が示唆されている [15]。

このような状況下において、Rosenberg ら [13] は、非線形性を有する系に対して線形の正規モードの考え方を拡張することにより、以下の条件を満たした運動を NNMs と定義した。すなわち、

- ・全ての座標が同じ周期で周期運動する。
- ・全ての座標が同時に平衡位置を通過する。
- ・全ての座標が同時に最大変位をもつ。

しかし、Rosenberg らによる上記の NNMs の定義は抽象的であり、以降の研究者によって NNMs の求め方に違いがある [24]。すなわち、Vakakis [25] らは、多自由度系の振動に対して、任意の質点の変位はある一質点の変位の関数としてあらわされるとして、NNMs を求めている。これに対して、Shaw [14] は、多自由度系の振動に対して、任意の質点の運動すなわち変位と速度は、ある一質点の変位と速度とにより記述されるとして、NNMs を求め、Nayfeh [26]~[28] は Shaw の考え方により連続体の場合の NNMs を求めている。本章では、最初に述べた古典的な Vakakis の方法に沿って、NNMs を求めることにする。

さらに、NNMs はその性質から Similar modes と Nonsimilar modes に分けることができる [13][15]。すなわち Vakakis [25] らは、多自由度線形振動系と同様、モード座標 [9] 間に直線関係がある場合の NNMs を、Similar modes と呼ぶことにしている。これに対して、多自由度非線形振動系の多くに見られる、モード座標間に直線関係が無い場合の NNMs のことを、Nonsimilar Modes と呼ぶことに

している。

Similar modes を持つ系は非常に特殊な系であるにもかかわらず，計算の容易さから，多くの研究がなされてきた [15]。一方，Nonsimilar modes を持つ系は，実際の機械システムにあらわれる可能性が高いにもかかわらず，計算が複雑であることなどから，具体的な解析モデルでの検討が目下のところ見当たらない。

そこで本章では，Nonsimilar modes を持つ系の例として，傾斜支持した防振系を取り上げる。ここで解析の簡略化のため上下方向変位・左右方向変位・ローリングの三自由度をもつ系を考えた上で，非線形連成の存在下で定常応答を求めるため，それぞれの固有角振動数の比が約 $2:1:1$ で内部共振現象が発生する場合の NNMs を求める。そして，求めた NNMs をもちいて，不釣合いを有する支持物体の回転に伴う強制振動の解析結果および実験結果を考察する。

最初に，2章で求めた三自由度防振支持系 [4][23] の非線形連立常微分方程式に基づき，内部共振の存在下における非線形自由振動系を考え，NNMs を求め，その安定性を理論的に調べる。さらに，不釣合いを有する支持物体の回転に伴う定常強制振動を考える。定常強制振動については，多重尺度法を用いて振幅方程式を導き，加振角振動数に対する振幅特性，位相特性を理論的に求める。そして非線形自由振動系における，NNMs と強制振動の応答との関係を理論的に明確にする。最後に，解析モデルに基づいた相似模型実験を行い，理論解析との比較，検討を行う。

4.2 定常振動解析のための理論解析

4.2.1 自由振動系

線形系で非減衰の場合の振動モードを求めることは，強制振動を考える上でも重要な意味があった。非線形系においても，NNMs を求めることは系としての性質を明確にするものであり，後述する強制振動の解析にも繋がるものである。

非線形ノーマルモードの導出

非線形ノーマルモードを導くために、2章の式(2.5)~(2.7)において、 $K_{yy} = \omega_y^2$, $K_{\theta\theta} = \omega_\theta^2$ と書き換えて整理すると図2.1のモデルに関する支配方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \omega_z^2 z = & -2\mu_{zz}\dot{z} + M\lambda(-\ddot{\phi} \cos \phi + \dot{\phi}^2 \sin \phi) \\ & + \alpha_{yy}y^2 + \alpha_{y\theta}y\theta + \alpha_{\theta\theta}\theta^2 + \alpha_{zz}z^2 \\ & + \alpha_{yyz}y^2z + \alpha_{y\theta\theta}y\theta^2 + \alpha_{zzz}z^3 + \alpha_{z\theta\theta}z\theta^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \omega_y^2 y = & -2\mu_{yy}\dot{y} - 2\mu_{y\theta}\dot{\theta} - K_{y\theta}\theta + M\lambda(\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) \\ & + \beta_{yz}yz + \beta_{z\theta}z\theta + \beta_{yyy}y^3 + \beta_{yy\theta}y^2\theta \\ & + \beta_{yzz}y^2z + \beta_{y\theta\theta}y\theta^2 + \beta_{zz\theta}z^2\theta + \beta_{\theta\theta\theta}\theta^3 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \omega_\theta^2 \theta = & -2\mu_{\theta\theta}\dot{\theta} - 2\mu_{\theta y}\dot{y} - K_{\theta y}y + LM\lambda^2\ddot{\phi} \\ & + \gamma_{yz}yz + \gamma_{z\theta}z\theta + \gamma_{yyy}y^3 + \gamma_{yy\theta}y^2\theta \\ & + \gamma_{yzz}y^2z + \gamma_{y\theta\theta}y\theta^2 + \gamma_{zz\theta}z^2\theta + \gamma_{\theta\theta\theta}\theta^3 \end{aligned} \quad (4.3)$$

ここで、非連成支持の条件を満たすように線形連成ばね定数 $K_{y\theta}, K_{\theta y}$ はできるだけ小さく設定しており、無視できる。各項の係数 $\omega_y, \dots, K_{y\theta}, \dots, \mu_{zz}, \dots, \alpha_{yy}, \dots, \beta_{yz}, \dots, \gamma_{yz}, \dots$ は以下に示す8個の無次元パラメータから成り、それぞれ $H = h/l, B = b/l, L = ml^2/J, K = k_q/k_p, M = \Delta m/m, \lambda = r/l, \mu_p = c_p/\sqrt{2m(k_p \cos^2 \alpha + k_q \sin^2 \alpha)}, \mu_q = c_q/\sqrt{2m(k_p \cos^2 \alpha + k_q \sin^2 \alpha)}$ で定義される。

ここで、減衰の無い自由振動系を考え、この系におけるNNMsを求める。まず、微小パラメータを $\epsilon = \mu_{zz}$ とし、各方向の変位が $O(\epsilon)$ 程度であると考え、 $z = \epsilon z_1, y = \epsilon y_1, \theta = \epsilon \theta_1$ とおくと、式(4.1)~(4.3)は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + \omega_z^2 z_1 = & \epsilon (\alpha_{yy}y_1^2 + \alpha_{y\theta}y_1\theta_1 + \alpha_{\theta\theta}\theta_1^2 + \alpha_{zz}z_1^2) \\ & + \epsilon^2 (\alpha_{yyz}y_1^2z_1 + \alpha_{y\theta\theta}y_1\theta_1^2 + \alpha_{zzz}z_1^3 + \alpha_{z\theta\theta}z_1\theta_1^2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \omega_y^2 y_1 = & \epsilon (\beta_{yz}y_1z_1 + \beta_{z\theta}z_1\theta_1) \\ & + \epsilon^2 (\beta_{yzz}y_1z_1^2 + \beta_{y\theta\theta}y_1\theta_1^2 + \beta_{zz\theta}z_1^2\theta_1 + \beta_{\theta\theta\theta}\theta_1^3) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \omega_\theta^2 \theta_1 = & \epsilon (\gamma_{yz}y_1z_1 + \gamma_{z\theta}z_1\theta_1) \\ & + \epsilon^2 (\gamma_{yzz}y_1z_1^2 + \gamma_{y\theta\theta}y_1\theta_1^2 + \gamma_{zz\theta}z_1^2\theta_1 + \gamma_{\theta\theta\theta}\theta_1^3) \end{aligned} \quad (4.6)$$

ここで、 $\omega_z \approx 2\omega_y \approx 2\omega_\theta$ である場合を考え、 y, θ の離調パラメータ σ_y, σ_θ を以下のようにおく。

$$\omega_z = 2\omega_y + \epsilon\sigma_y \quad , \quad \omega_z = 2\omega_\theta + \epsilon\sigma_\theta$$

次に,それぞれの NNMs 上において z_1, θ_1 を y_1 の関数であらわすことができると仮定し,その関数を $\hat{z}_1(y_1), \hat{\theta}_1(y_1)$ とする. z, θ を基準にして求めた関数については後述する. また,各方向の非線形項も含めた復元力の項を $f_z(y_1), f_y(y_1), f_\theta(y_1)$ と表すと,式 (4.4)~(4.6) は以下ようになる.

$$\ddot{y}_1 \frac{\partial \hat{z}_1(y_1)}{\partial y_1} + \dot{y}_1^2 \frac{\partial^2 \hat{z}_1(y_1)}{\partial y_1^2} + f_z(y_1) = 0 \quad (4.7)$$

$$\ddot{y}_1 + f_y(y_1) = 0 \quad (4.8)$$

$$\ddot{y}_1 \frac{\partial \hat{\theta}_1(y_1)}{\partial y_1} + \dot{y}_1^2 \frac{\partial^2 \hat{\theta}_1(y_1)}{\partial y_1^2} + f_\theta(y_1) = 0 \quad (4.9)$$

上の3式は同じ変数 y_1 についての方程式であるため,各係数は等しい. また,未知数である \dot{y}_1 は,式 (4.8) が1変数の保存系の式であるため,初期値を $y_1(0) = a_y, \dot{y}_1(0) = 0$ とすることにより,エネルギー保存則から,

$$\dot{y}_1 = \sqrt{2 \int_{y_1}^{a_y} f_y(\xi) d\xi} \quad (4.10)$$

となる. 上式と式 (4.8) を式 (4.7),(4.9) に代入すると以下の2式を得る.

$$-f_y(y_1) \frac{\partial \hat{z}_1(y_1)}{\partial y_1} + 2 \frac{\partial^2 \hat{z}_1(y_1)}{\partial y_1^2} \int_{y_1}^{a_y} f_y(\xi) d\xi + f_z(y_1) = 0 \quad (4.11)$$

$$-f_y(y_1) \frac{\partial \hat{\theta}_1(y_1)}{\partial y_1} + 2 \frac{\partial^2 \hat{\theta}_1(y_1)}{\partial y_1^2} \int_{y_1}^{a_y} f_y(\xi) d\xi + f_\theta(y_1) = 0 \quad (4.12)$$

式 (4.7)~(4.9) の3式は等しいことから,この2式において y_1 の各次数の係数は零となる.

また,上式において初期条件を考え,

$$-f_y(a_y) \cdot \left. \frac{\partial \hat{z}_1(y_1)}{\partial y_1} \right|_{y_1=a_y} + f_z(a_y) = 0 \quad (4.13)$$

$$-f_y(a_y) \cdot \left. \frac{\partial \hat{\theta}_1(y_1)}{\partial y_1} \right|_{y_1=a_y} + f_\theta(a_y) = 0 \quad (4.14)$$

という2つの条件式を得る.

次にモードの形状をあらわす関数 $\hat{z}_1(y_1), \hat{\theta}_1(y_1)$ について考える. 本章での解

析モデルは, Nonsimilar Modes を持つと仮定し, 関数を求める.

まず, $\widehat{z}_1(y_1), \widehat{\theta}_1(y_1)$ を ϵ でべき級数展開する. ϵ の各次の係数を $\widehat{z}^{(n)}(y_1), \widehat{\theta}^{(n)}(y_1), (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ とすると,

$$\begin{aligned}\widehat{z}_1(y_1) &= \widehat{z}^{(0)}(y_1) + \widehat{z}^{(1)}(y_1) \epsilon + \widehat{z}^{(2)}(y_1) \epsilon^2 + \dots \\ \widehat{\theta}_1(y_1) &= \widehat{\theta}^{(0)}(y_1) + \widehat{\theta}^{(1)}(y_1) \epsilon + \widehat{\theta}^{(2)}(y_1) \epsilon^2 + \dots\end{aligned}$$

次に, 各オーダーの係数を y_1 でべき級数展開し, その係数を $a_i^{(n)}, b_i^{(n)}, (i = 0, 1, 2, 3, \dots)$ とすると,

$$\begin{aligned}\widehat{z}^{(n)}(y_1) &= a_0^{(n)} + a_1^{(n)} y_1 + a_2^{(n)} y_1^2 + a_3^{(n)} y_1^3 + \dots \\ \widehat{\theta}^{(n)}(y_1) &= b_0^{(n)} + b_1^{(n)} y_1 + b_2^{(n)} y_1^2 + b_3^{(n)} y_1^3 + \dots\end{aligned}$$

これらを式 (4.11), (4.12) に代入し, ϵ の各オーダーごとに y_1 の係数が零となる条件を求めていく. また, 同時に初期条件である式 (4.13), (4.14) を満たす条件を考える.

$O(\epsilon^0)$ の計算により, $\widehat{z}^{(0)}(y_1) = a_0^{(0)} + a_2^{(0)} y_1^2$, $\widehat{\theta}^{(0)}(y_1) = b_1^{(0)} y_1$ のように求まる. ただし, $a_2^{(0)} = -2a_0^{(0)}/a_y^2$ である. また, $a_0^{(0)}, b_1^{(0)}$ については, このオーダーの計算では決定できない値であり, より高次の計算により求められる値である.

次に $O(\epsilon)$ の計算により, 先のオーダーで決定できなかった $a_0^{(0)}, b_1^{(0)}$ について,

$$\begin{aligned}4\beta_{yz}a_0^{(0)2} + 4\beta_{z\theta}a_0^{(0)2}b_1^{(0)} - \alpha_{yy}a_y^2 - 4\sigma_y a_0^{(0)} \\ - \alpha_{y\theta}a_y^2 b_1^{(0)} - \alpha_{\theta\theta}a_y^2 b_1^{(0)2} = 0\end{aligned}\quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{yz}a_0^{(0)} - \beta_{yz}a_0^{(0)}b_1^{(0)} + \gamma_{z\theta}a_0^{(0)}b_1^{(0)} \\ - \beta_{z\theta}a_0^{(0)}b_1^{(0)2} + (\sigma_y - \sigma_\theta)b_1^{(0)} = 0\end{aligned}\quad (4.16)$$

という 2 つの方程式が得られる. また, このオーダーの計算から, 係数 $\widehat{z}^{(1)}(y_1), \widehat{\theta}^{(1)}(y_1)$ は以下のように求まる.

$$\widehat{z}^{(1)}(y_1) = a_0^{(1)} + a_2^{(1)} y_1^2 + a_4^{(1)} y_1^4 \quad (4.17)$$

$$\widehat{\theta}^{(1)}(y_1) = b_1^{(1)} y_1 + b_3^{(1)} y_1^3 \quad (4.18)$$

ただし, $a_0^{(1)}, b_1^{(1)}$ はこのオーダーの計算では決定できない値である. 以上の計算により,

$$\begin{aligned}\widehat{z}_1(y_1) &= a_0^{(0)} + a_2^{(0)} y_1^2 + \epsilon \left(a_0^{(1)} + a_2^{(1)} y_1^2 + a_4^{(1)} y_1^4 \right) \\ &\quad + O(\epsilon^2)\end{aligned}\quad (4.19)$$

$$\widehat{\theta}_1(y_1) = b_1^{(0)} y_1 + \epsilon \left(b_1^{(1)} y_1 + b_3^{(1)} y_1^3 \right) + O(\epsilon^2) \quad (4.20)$$

となる．また，これらを式 (4.7)，(4.9) に代入すると以下の方程式を得る．

$$\ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 + \epsilon \Lambda y_1^3 + O(\epsilon^2) = 0 \quad (4.21)$$

ただし，

$$\omega^2 = \frac{1}{4} - \epsilon \left(\frac{1}{2} \sigma_y + \beta_{yz} a_0^{(0)} + \beta_{z\theta} a_0^{(0)} b_1^{(0)} \right) + \frac{1}{4} \epsilon^2 \sigma_y^2$$

$$\Lambda = \frac{2}{a_y^2} \left(\beta_{yz} a_0^{(0)} + \beta_{z\theta} a_0^{(0)} b_1^{(0)} \right)$$

である．また，以降の計算では $O(\epsilon^2)$ については微小であると考え，無視する．初期値を $y_1(0) = a_y, \dot{y}_1(0) = 0$ としたときのこの方程式の近似解から， $y(t)$ は以下のようなになる．

$$y(t) = \epsilon a_y \cos \nu t + O(\epsilon^2) \quad (4.22)$$

ただし， $\nu = \omega + 3\epsilon \Lambda a_y^2 / 8\omega$ である．また，他の変数は以下のようなになる．

$$z(t) = \epsilon a_z \cos 2\nu t + O(\epsilon^2) \quad (4.23)$$

$$\theta(t) = \epsilon a_\theta \cos \nu t + O(\epsilon^2) \quad (4.24)$$

ただし， $a_z = -a_0^{(0)}, a_\theta = b_1^{(0)} a_y$ である．

次に，初期値として与える a_y について考える．先に示した計算により，本報のモデルにおいて NNMs は y_1 の初期値である a_y に依存している．そのため，系が複数のモードを持つ場合， a_y の値を一定であると考えると各モードでのエネルギーの総和が一定に定まらない．今考えている系は保存系であるため，系の持つエネルギーが異なる運動ではその性質の違いをうまく捉えることができない．そこで，モード上における系の Hamiltonian を $\mathcal{H}(y_1, \dot{y}_1)$ とし，この値が等しいモードについて考える．

ここで，初期条件を次のように与える． $z(0) = \epsilon \hat{z}_1(a_y), y(0) = \epsilon a_y, \theta(0) = \epsilon \hat{\theta}_1(a_y), \dot{z}(0) = \dot{y}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ ．このことから $t = 0$ のとき，系の運動エネルギーの総和は零となる．また，このときの各方向のポテンシャルエネルギーを $V_z(0), V_y(0), V_\theta(0)$ とすると，先に求められた $\hat{z}_1(y_1), \hat{\theta}_1(y_1)$ を用いて以下のよう

に表される．

$$V_z(0) = \frac{1}{2}\epsilon a_0^{(0)2} + \epsilon^2 \left\{ \frac{1}{2}\alpha_{zz}a_0^{(0)2} - \frac{3}{4} \left(\alpha_{yy} + \alpha_{y\theta}b_1^{(0)} + \alpha_{\theta\theta}b_1^{(0)2} \right) a_0^{(0)}a_y^2 \right\} + O(\epsilon^3) \quad (4.25)$$

$$V_y(0) = \frac{1}{8}\epsilon a_y^2 - \frac{1}{4}\epsilon^2\sigma_y a_y^2 + O(\epsilon^3) \quad (4.26)$$

$$V_\theta(0) = \frac{1}{8}\epsilon b_1^{(0)2} a_y^2 - \frac{1}{4}\epsilon^2\sigma_\theta b_1^{(0)2} a_y^2 + O(\epsilon^3) \quad (4.27)$$

よって，このときの Hamiltonian $\mathcal{H}(a_y, 0)$ は以下のように表せる．

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(a_y, 0) = h = & \epsilon \left(\frac{1}{2}a_0^{(0)2} + \frac{1}{8}a_y^2 + \frac{1}{8}b_1^{(0)2} a_y^2 \right) \\ & + \epsilon^2 \left\{ \frac{1}{2}\alpha_{zz}a_0^{(0)2} - \frac{3}{4} \left(\alpha_{yy} + \alpha_{y\theta}b_1^{(0)} + \alpha_{\theta\theta}b_1^{(0)2} \right) a_0^{(0)}a_y^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{4}\sigma_y a_y^2 - \frac{1}{4}\sigma_\theta b_1^{(0)2} a_y^2 \right\} + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (4.28)$$

ここまでは， y を基準にしてモードを求めてきた．しかし， $z \gg y, \theta \gg y$ となるようなモードが存在する場合には，それらを求めることができていないので， z, θ を基準に取り，求める必要がある．まず， θ を基準にした場合であるが， y と θ の固有角振動数がほぼ等しく，また 2 変数の運動方程式が同じ形の項を持つ事から， y を基準にした場合に求まるモードと同じものが求まる．次に， z を基準にした場合，他の 2 変数を $y_1(z_1), \theta_1(z_1)$ という関数で表せるとすると以下のようなになる．

$$\hat{y}_1(z_1) = \epsilon^2 \hat{y}^{(2)}(z_1) + O(\epsilon^3) \quad (4.29)$$

$$\hat{\theta}_1(z_1) = \epsilon^2 \hat{\theta}^{(2)}(z_1) + O(\epsilon^3) \quad (4.30)$$

ここで， z を基準にして求まるモードは z のみが励振され，他の変数がほとんど励振されないモードである．

以上より， y, θ を基準にして求められたモードは，線形で連成していないにもかかわらず，各変位が同程度のオーダーで運動する．したがって，これらは内部共振現象の影響を受けて運動するモードである．また， z を基準にして求められたモードは，ほぼ z のみを変位を持つモードである．このことから，非線形項の影響はほとんどなく，線形のモードとほぼ同じである．

離調パラメータに対する応答性

今、各方向の固有角振動数比がほぼ $2:1:1$ であり、内部共振が発生する条件を満たしている。このような系は、固有角振動数の変動に対しその性質を大きく変化させることが予想される。そこで、 σ_θ を一定とし、 σ_y を変動させたとき、系の性質がどのように変わるかを、NNMs を用いて観察する。なお、式 (4.1)~(4.3) において実験より同定された無次元パラメータを表 4.1 に示し、以後この値を元に数値解を求める。 $\sigma_\theta = 1, h = 0.5$ のとき、 a_z, a_y, a_θ の σ_y に対する応答を図 4.1 に示す。

Table 4.1 Coefficients on governing equations

$\omega_z = 1.000$	$\omega_y = 0.501$	$\omega_\theta = 0.503$
$K_{y\theta} = 0.001$	$K_{\theta y} = 0.002$	
$\mu_{zz} = 0.042$	$\mu_{yy} = 0.022$	$\mu_{y\theta} = 0.019$
$\mu_{\theta\theta} = 0.044$	$\mu_{\theta y} = 0.021$	
$\alpha_{yy} = -0.305$	$\alpha_{y\theta} = -1.325$	$\alpha_{\theta\theta} = -2.140$
$\alpha_{zz} = -0.218$	$\beta_{yz} = -0.610$	$\beta_{z\theta} = -1.325$
$\gamma_{yz} = -1.453$	$\gamma_{z\theta} = -4.695$	

この図から、この系における NNMs は離調パラメータの変動により、その形状、数、安定性を変化させることがわかる。特に、 $\sigma_y = 0$ では z と y の固有角振動数比が完全に 2:1 となるため、この近傍では影響をより受けやすいと言える。なお、この場合の安定判別は Rand による方法 [29] に外乱の式の安定判別を組み合わせで行った。

背骨曲線

線形系では、1 自由度で強制振動した場合、その振幅によらず、固有角振動数で加振した場合に主共振となり、最大振幅をとる。また、多自由度の場合においても、モード座標上での固有角振動数で主共振となる。しかし、非線形系の場合、振幅によって固有角振動数が変調されるため、1 自由度系については背骨曲線 (Backbone Curve) が求められ、強制振動の応答性を調べるための指標の一つとして用いられてきた。

しかし、非線形連成した多自由度系においては初期変位の組み合わせにより、変調量が幾通りにも変わってしまい、指標となる値をつかむことができない。特に、内部共振のような非線形振動現象が発生する系では、初期変位の組み合わせが非常に大きな影響を及ぼす。そこで、線形の多自由度系と同様にモード上での固有角振動数に注目する。

式 (4.22) から、NNMs 上での y の固有角振動数の変調量は、以下ようになる。

$$\varsigma_y = \left(\omega + \frac{3}{8\omega} \epsilon \Lambda a_y^2 \right) - \omega_y \quad (4.31)$$

また、これにより z, θ についても変調量が以下のように決まる。

$$\varsigma_z = 2 \left(\omega + \frac{3}{8\omega} \epsilon \Lambda a_y^2 \right) - \omega_z \quad (4.32)$$

$$\varsigma_\theta = \left(\omega + \frac{3}{8\omega} \epsilon \Lambda a_y^2 \right) - \omega_\theta \quad (4.33)$$

以上のことから、 a_y を変動させたときのモードを求め、このときの固有角振動数の変調量と各方向の振幅の軌跡を背骨曲線とする。

ここで、各方向の振幅の符号を位相差を用いて表すことにする。すなわち、

モード上での近似解を以下のおく．

$$z(t) = \epsilon|a_z| \cos(2\nu t + \phi_z) + O(\epsilon^2) \quad (4.34)$$

$$y(t) = \epsilon|a_y| \cos(\nu t + \phi_y) + O(\epsilon^2) \quad (4.35)$$

$$\theta(t) = \epsilon|a_\theta| \cos(\nu t + \phi_\theta) + O(\epsilon^2) \quad (4.36)$$

ここで， a_z と a_y が同符号の場合には $\phi_z - 2\phi_y = 0$ であり，異符号の場合には $\phi_z - 2\phi_y = \pi$ である．また， a_y と a_θ に関しては，同符号の場合 $\phi_y - \phi_\theta = 0$ ，異符号の場合 $\phi_y - \phi_\theta = \pi$ である．これらは，各モードの運動パターンの違いをあらわすものである．たとえば， $\phi_z - 2\phi_y = 0$ の場合，剛体の重心が $z - y$ 平面内において下に凸の 2 次曲線上を動くことをあらわし， $\phi_z - 2\phi_y = \pi$ の場合は，上に凸の 2 次曲線上を動くことをあらわしている．

図 4.2 に背骨曲線を示す．また，このときの各曲線の位相差を表 4.2 に示す．これらから，位相差と固有角振動数の変調量は互いに関係を持っていることがわ

Table 4.2 Phases of backbone curves

No	$\phi_z - 2\phi_y$	$\phi_\theta - \phi_y$
i	π	0
ii	π	π
iii	0	π
iv	0	0

かる．モード上における運動は一つの変位について考えていけばよい．そこで， y についての方程式である式 (4.5) について考える．この式において， $\epsilon\beta_{yz}y_1z_1$ によって変調される固有角振動数の量は $\epsilon\{1 - 3/(4\omega)\}\beta_{yz}a_z$ である． $\omega \approx 1/2$ であるから $\{1 - 3/(4\omega)\} < 0$ であり，表 4.1 より $\beta_{yz} < 0$ である．また， $\phi_y = 0$ であると考えると，曲線 i については，位相差から $a_z < 0$ である．よって，この項による変調量はマイナスとなり，ソフトスプリングとなるように働く．特に，この項は y, z の連成項であるため，重心位置が上に凸の 2 次曲線上を移動する場合 ($\phi_z - 2\phi_y = \pi$) は，ソフトスプリングに働き，逆に下に凸の放物線上を動く場合 ($\phi_z - 2\phi_y = 0$) は，ハードスプリングに働く．また， $\beta_{z\theta}z_1\theta_1$ によって変調される量は $\epsilon\{1 - 3/(4\omega)\}\beta_{z\theta}a_\theta/a_y$ である．このことから，この項については z と

y , y と θ の位相差が影響してくる． y と θ の位相差 $(\phi_\theta - \phi_y)$ が零となる場合， $\beta_{yz}y_1z_1$ と同じように働く．つまり，重心位置が上に凸の放物線上を動き，剛体の左右動に伴い上端が外側に振られる運動をするとき，両項ともソフトスプリングに働く．この運動に対応するのが，曲線 i であるため，背骨曲線の中でもっともソフトスプリングの特性を示す．このときの運動を図 4.3 に示す．

4.2.2 強制振動系

次に z, y, θ の角振動数が $\omega_z \approx 2\omega_y \approx 2\omega_\theta \approx 1$ の条件において，加振角振動数 $\dot{\phi} = \Omega \approx 1$ である z 方向の主共振の場合を考える．ここで式 (4.2) の右辺第 5 項 $\beta_{yz}yz$ は， $\beta_{yz} \sin t \cdot y$ と変形され係数励振項となり， y が $1/2$ の固有角振動数成分で励振される．また，この角振動数成分により式 (4.1) の右辺第 3 項 $\alpha_{yy}y^2$ は z の固有角振動数成分である 1 の角振動数成分をもち， z を励振させる．同様に内部共振による一連のメカニズムにより，左右対称であるにもかかわらず θ も励振されると考えられる．

解析的近似解の導出

$\Omega \approx 1$ のとき，無次元微小パラメータ ϵ を $\epsilon = \mu_{zz}$ として，各減衰係数を $O(\epsilon)$ ，加振項の係数 $M\lambda$ および各線形連成ばね定数を $O(\epsilon^2)$ と評価し，評価後の係数を $\hat{}$ を用いて表す．これにより 2 次の非線形項と減衰項が同じオーダーになるようにする．さらに 4.2.1 で用いたと同じ離調パラメータ σ_y, σ_θ 加振角振動数の離調パラメータ σ を導入し，

$$\omega_z = 2\omega_y + \epsilon\sigma_y, \quad \omega_z = 2\omega_\theta + \epsilon\sigma_\theta, \quad \Omega = \omega_z + \epsilon\sigma \quad (4.37)$$

と定義する．そこで式 (4.1) ~ (4.3) の近似解を以下のようにおく．

$$z = \epsilon z_1(T_0, T_1, \dots) + \epsilon^2 z_2(T_0, T_1, \dots) + \dots \quad (4.38)$$

$$y = \epsilon y_1(T_0, T_1, \dots) + \epsilon^2 y_2(T_0, T_1, \dots) + \dots \quad (4.39)$$

$$\theta = \epsilon \theta_1(T_0, T_1, \dots) + \epsilon^2 \theta_2(T_0, T_1, \dots) + \dots \quad (4.40)$$

ただし， $T_n = \epsilon^n t (n = 0, 1, 2, \dots)$ であり，多重尺度法を適用することにより式 (4.38) ~ (4.40) の各成分を求める．また，永年項を生じない条件より以下のように

な振幅方程式が得られる．

$$D_1 A_z = -\frac{i}{2\omega_z} \left\{ -2i\omega_z \widehat{\mu_{zz}} A_z - i\frac{\widehat{M\lambda}}{2} (\omega_z + \epsilon\sigma)^2 e^{i\sigma T_1} \right. \\ \left. + \alpha_{yy} A_y^2 e^{-i\sigma_y T_1} + \alpha_{y\theta} A_y A_\theta e^{-i(\sigma_y + \sigma_\theta) T_1/2} \right. \\ \left. + \alpha_{\theta\theta} A_\theta^2 e^{-i\sigma_\theta T_1} \right\} \quad (4.41)$$

$$D_1 A_y = -\frac{i}{2\omega_y} \left\{ -2i\omega_y \widehat{\mu_{yy}} A_y - 2i\omega_\theta \widehat{\mu_{y\theta}} A_\theta e^{i(\sigma_y - \sigma_\theta) T_1/2} \right. \\ \left. + \beta_{yz} \overline{A_y} A_z e^{i\sigma_y T_1} + \beta_{z\theta} A_z \overline{A_\theta} e^{i(\sigma_y + \sigma_\theta) T_1/2} \right\} \quad (4.42)$$

$$D_1 A_\theta = -\frac{i}{2\omega_\theta} \left\{ -2i\omega_\theta \widehat{\mu_{\theta\theta}} A_\theta - 2i\omega_y \widehat{\mu_{\theta y}} A_y e^{i(\sigma_\theta - \sigma_y) T_1/2} \right. \\ \left. + \gamma_{yz} \overline{A_y} A_z e^{i(\sigma_y + \sigma_\theta) T_1/2} + \gamma_{z\theta} A_z \overline{A_\theta} e^{i\sigma_\theta T_1} \right\} \quad (4.43)$$

ここで $A_i, \overline{A_i}$ ($i = z, y, \theta$) は複素振幅， $D_n = \partial/\partial T_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) である．さらに，式 (4.41) ~ (4.43) を時間が陽に現れない自律系に変換して複素振幅を実数で表すために，以下の極座標系 (a_i, ϕ_i) ($i = z, y, \theta$) を用いて変換を行うと， $A_z = \frac{1}{2} a_z e^{i\phi_z} e^{i\sigma T_1}$ ， $A_y = \frac{1}{2} a_y e^{i\phi_y} e^{i(\sigma + \sigma_y) T_1/2}$ ， $A_\theta = \frac{1}{2} a_\theta e^{i\phi_\theta} e^{i(\sigma + \sigma_\theta) T_1/2}$ より各方

向の振幅 a_i と位相 ϕ_i の時間変化を表す方程式は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 a'_z &= -\widehat{\mu_{zz}}a_z - \frac{\widehat{M\lambda}(\omega_z + \epsilon\sigma)^2}{2\omega_z} \cos \phi_z \\
 &\quad - \frac{1}{4\omega_z} \{ \alpha_{yy}a_y^2 \sin(\phi_z - 2\phi_y) + \alpha_{y\theta}a_ya_\theta \sin(\phi_z - \phi_y - \phi_\theta) \\
 &\quad \quad + \alpha_{\theta\theta}a_\theta^2 \sin(\phi_z - 2\phi_\theta) \}
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}
 a_z\phi'_z &= -\sigma a_z + \frac{\widehat{M\lambda}(\omega_z + \epsilon\sigma)^2}{2\omega_z} \sin \phi_z \\
 &\quad - \frac{1}{4\omega_z} \{ \alpha_{yy}a_y^2 \cos(\phi_z - 2\phi_y) + \alpha_{y\theta}a_ya_\theta \cos(\phi_z - \phi_y - \phi_\theta) \\
 &\quad \quad + \alpha_{\theta\theta}a_\theta^2 \cos(\phi_z - 2\phi_\theta) \}
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
 a'_y &= -\widehat{\mu_{yy}}a_y - \widehat{\mu_{y\theta}}\frac{\omega_\theta}{\omega_y}a_\theta \cos(\phi_y - \phi_\theta) \\
 &\quad + \frac{1}{4\omega_y} \{ \beta_{yz}a_ya_z \sin(\phi_z - 2\phi_y) \\
 &\quad \quad + \beta_{z\theta}a_z a_\theta \sin(\phi_z - \phi_y - \phi_\theta) \}
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
 a_y\phi'_y &= -\frac{\sigma + \sigma_y}{2}a_y + \widehat{\mu_{y\theta}}\frac{\omega_\theta}{\omega_y}a_\theta \sin(\phi_y - \phi_\theta) \\
 &\quad - \frac{1}{4\omega_y} \{ \beta_{yz}a_ya_z \cos(\phi_z - 2\phi_y) \\
 &\quad \quad + \beta_{z\theta}a_z a_\theta \cos(\phi_z - \phi_y - \phi_\theta) \}
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
 a'_\theta &= -\widehat{\mu_{\theta\theta}}a_\theta - \widehat{\mu_{\theta y}}\frac{\omega_y}{\omega_\theta}a_y \cos(\phi_y - \phi_\theta) \\
 &\quad + \frac{1}{4\omega_\theta} \{ \gamma_{yz}a_ya_z \sin(\phi_z - \phi_y - \phi_\theta) \\
 &\quad \quad + \gamma_{z\theta}a_z a_\theta \sin(\phi_z - 2\phi_\theta) \}
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
 a_\theta\phi'_\theta &= -\frac{\sigma + \sigma_\theta}{2}a_\theta - \widehat{\mu_{\theta y}}\frac{\omega_y}{\omega_\theta}a_y \sin(\phi_y - \phi_\theta) \\
 &\quad - \frac{1}{4\omega_\theta} \{ \gamma_{yz}a_ya_z \cos(\phi_z - \phi_y - \phi_\theta) \\
 &\quad \quad + \gamma_{z\theta}a_z a_\theta \cos(\phi_z - 2\phi_\theta) \}
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

ただし、' は T_1 に関する微分を表している。また、近似解は式 (4.37) ~ (4.40) よ

り以下のようになる．

$$z = \epsilon a_z \sin(\Omega t + \phi_z) + \frac{\epsilon^2}{2} \left\{ \alpha_{yy2} a_y^2 + \alpha_{\theta\theta2} a_\theta^2 + \alpha_{zz2} a_z^2 + \alpha_{y\theta2} a_y a_\theta \cos(\phi_y - \phi_\theta) - \alpha_{zz1} a_z^2 \cos(2\Omega t + 2\phi_z) \right\} + O(\epsilon^3) \quad (4.50)$$

$$y = \epsilon a_y \sin\left(\frac{\Omega}{2} t + \phi_y\right) - \frac{\epsilon^2}{2} \left\{ \beta_{yz1} a_y a_z \cos\left(\frac{3}{2}\Omega t + \phi_z + \phi_y\right) + \beta_{z\theta1} a_z a_\theta \cos\left(\frac{3}{2}\Omega t + \phi_z + \phi_\theta\right) - \frac{\widehat{M}\lambda\Omega^2}{(\omega_y^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t \right\} + O(\epsilon^3) \quad (4.51)$$

$$\theta = \epsilon a_\theta \sin\left(\frac{\Omega}{2} t + \phi_\theta\right) - \frac{\epsilon^2}{2} \left\{ \gamma_{yz1} a_y a_z \cos\left(\frac{3}{2}\Omega t + \phi_z + \phi_y\right) + \gamma_{z\theta1} a_z a_\theta \cos\left(\frac{3}{2}\Omega t + \phi_z + \phi_\theta\right) \right\} + O(\epsilon^3) \quad (4.52)$$

これにより z は主として加振角振動数成分である Ω 成分で， y, θ は主として加振角振動数成分の $1/2$ 倍である $\Omega/2$ 成分で振動することがわかる．また， $O(\epsilon^2)$ で z は直流成分および 2Ω の角振動数成分， y, θ は $3\Omega/2$ の角振動数成分が含まれる．ただし式 (4.50) ~ (4.52) の各項の係数は， $\alpha_{yy2} = \alpha_{yy}/\omega_z^2$ ， $\alpha_{y\theta2} = \alpha_{y\theta}/\omega_z^2 - (\omega_y - \omega_\theta)^2$ ， $\alpha_{\theta\theta2} = \alpha_{\theta\theta}/\omega_z^2$ ， $\alpha_{zz1} = -\alpha_{zz}/3\omega_z^2$ ， $\alpha_{zz2} = \alpha_{zz}/\omega_z^2$ ， $\beta_{yz1} = \beta_{yz}/\omega_y^2 - (\omega_y + \omega_z)^2$ ， $\beta_{z\theta1} = \beta_{z\theta}/\omega_y^2 - (\omega_z + \omega_\theta)^2$ ， $\gamma_{yz1} = \gamma_{yz}/\omega_\theta^2 - (\omega_y + \omega_z)^2$ ， $\gamma_{z\theta1} = \gamma_{z\theta}/\omega_\theta^2 - (\omega_z + \omega_\theta)^2$ である．

振幅方程式から得られる応答

定常振幅 a_z, a_y, a_θ および定常位相 $\phi_z, \phi_y, \phi_\theta$ は，各方向の振幅と位相を表す式 (4.44) ~ (4.49) の時間変動項を 0 として Newton 法を用いて数値的に解を求める．また，その際の解の安定性の判別は，Routh-Hurwitz の判別法を用いて行う．図

4.4 に加振力（不釣り合い質量と剛体の質量比） $\widehat{M}\lambda = 2.98, 4.00$ のときの振幅特性を示す．同図において実線は安定な定常解，破線は不安定な解を表しており， y および θ については式 (4.51), (4.52) から加振角振動数の $1/2$ 倍成分の応答を表す．ここで式 (4.51), (4.52) において a_z^2 の項が存在せず加振の影響が直接効いてこないため， y, θ 方向の主共振とは異なり $a_z \neq 0, a_y = 0, a_\theta = 0$ の単モード共振と $a_z \neq 0, a_y \neq 0, a_\theta \neq 0$ の多モード共振 [30] が可能となる．ただし，実際は y 方向に強制項が存在するため Ω 成分で振動するが，ここでは式 (4.50) ~ (4.52) において $O(\epsilon)$ で支配的な a_z, a_y, a_θ が 0 であるか否かで単モード共振と多モード共振を区別することにする．

まず，単モード共振の場合， $a_y = 0, a_\theta = 0$ であることから，非線形項の影響を無視でき，線形の場合とほぼ同じ形状をとる．このとき，系は内部共振が発生していないと判断される．また，このときの応答曲線は図 4.2 の背骨曲線 v に沿って現れていることがわかる．前節でも述べたが，背骨曲線 v は内部共振の影響を受けていないモードに対応するものであり，このことから両者の関係は妥当である．

次に多モード共振の場合，内部共振の影響により $a_y \neq 0, a_\theta \neq 0$ である．このときの応答曲線は，背骨曲線 $i \sim iv$ に沿ってあらわれている．特に，背骨曲線 i, iv の周りに注目すると，加振振幅の増加に伴う応答曲線の極値の移動が，この背骨曲線に沿っていることがわかる．このことから，多自由度系の強制振動の応答曲線が，保存系での NNMs から求めた背骨曲線と一定の関係を持ってあらわれることがわかった．特に，今回用いた系については，2 次の非線形項の影響であるにもかかわらず，その背骨曲線が大きく傾き，加振振幅の増加に伴い励振領域が大きく広がることが確認された．

なお，図 4.4 において z 方向の振幅は Ω が 1 付近で加振力の大きさの影響を受けない．このことは以下の様に考えられる．すなわち式 (4.1) ~ (4.3) の右辺には，非線形項の中に係数励振力，強制外力に相当する項が存在し， $\Omega = 1$ の近傍では $z - y, z - \theta$ の間で内部共振に伴うエネルギーの授受が行われる．この時 z 方向は加振力の変化に対し位相をずらしながらエネルギーの授受が行われるため， a_z は加振力により変化しないものと解釈される．なお，式 (4.44) ~ (4.49) もこの関係を表すものと考えられる．また，式 (4.1) で非線形項を取り除いた方程式の解は，線形強制振動の解析的に求めた通常良く知られている解に帰着する．

4.3 実験

理論解析において，内部共振による非線形連成の影響により複雑な現象を引き起こすことが明らかとなった．そこで本章では，解析モデルに基づいた模型実験を行い，理論解析によって得られた結果と比較検討する．

4.3.1 実験装置

本実験装置の概要を図 4.6 に示す．ここでは，図 2.1 の解析モデルに示されるように，軟鋼製の剛体 ($78 \times 120 \times 125\text{mm}$, 4.5kg) の両下端を上下方向および左右方向に対し α の傾斜角を有するコイルばねにより支持した．加振源としては，不釣り合い質量を有する回転円盤をギヤードモータによって回転させるものとした．重心の上下および左右方向変位の測定には，重心位置に取り付けた発光ダイオードの挙動を光ポジションセンサで受光することにより，また，重心周りのローリング角の測定は，姿勢検出型近距離センサを用いることにより行った．

4.3.2 実験結果

まず， $\widehat{M\lambda} = 2.98$ の場合，図 4.7 に $\Omega = 0.80$ (有次元で 12.2Hz) で y, θ が励振されない状態，図 4.8 に $\Omega = 0.93$ (有次元で 14.2Hz) で y, θ が励振された状態の結果を示す．これによると内部共振の影響がない図 4.7 においては， z, y とともに加振角振動数で振動しており， $1/2$ 倍成分はない．次に図 4.8 において内部共振の影響により y, θ は，加振角振動数の $1/2$ 倍成分が突出している．定常回転においては θ 方向には加振力が存在せず，加振角振動数と異なる成分が無視できないほど存在することは線形系では考えられない．これにより模型実験においても幾何学的非線形項の存在と，それによる内部共振現象の発生が確認でき，理論解析結果と定性的に一致する．

次に，図 4.9 に加振振幅 $\widehat{M\lambda} = 2.98, 4.00$ で定常加振したときの周波数応答の振幅特性を示す．ここで， y, θ は加振角振動数の $1/2$ 倍成分の振幅であり，両者とも $\Omega = 1$ 近傍で励振されている．また，この領域で z に関しても線形解析とは違った挙動を示しており，内部共振現象が発生していると判断される．さらに，

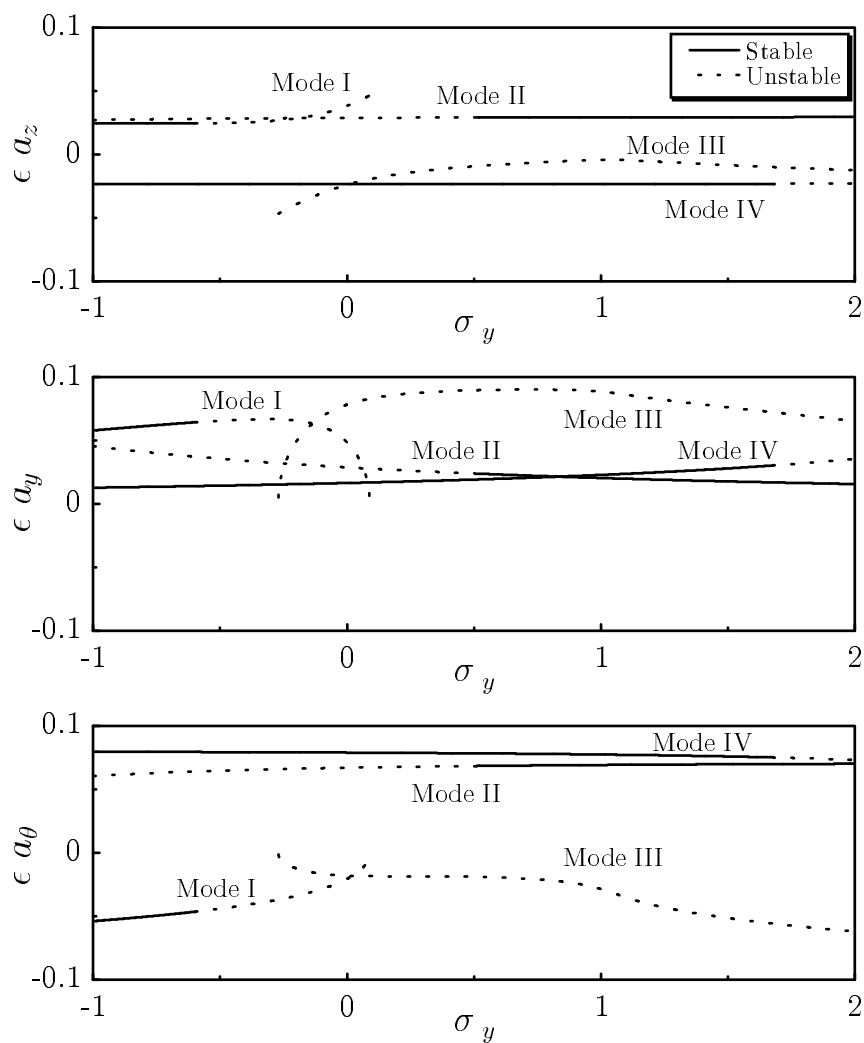
加振振幅を増加させることにより，この現象が発生する領域が広がるといった理論解析と同様の傾向が現れる．なお，ここで加振振幅を増加させた場合，理論解析と異なり $\Omega < 1$ の領域において内部共振発生領域が， $\Omega > 1$ のそれに比較して低周波側まで広がっているが，この原因としては「理論解析で使用したパラメータと実験装置のそれとの誤差によりバックボーンカーブの形状が左右非対称になった．」と「低周波側で y, θ の共振の影響により強制振動項が質量を加振した．」が考えられるが，特定は困難であった．

4.4 結言

本章では，上下方向変位，左右方向変位およびローリングの三自由度をもつ傾斜防振支持系を取り上げ，それぞれの固有角振動数の比が 2:1:1 の内部共振条件を満たす場合の非線形連成振動について，NNMs を用いてその振動特性を明確にした．本章において得られた主な理論的結論を以下に述べる．

- 非線形の非減衰自由振動系において NNMs の存在を確かめた．その振動モードは内部共振の影響により，線形の振動モードとは性質が大きく異なった．
- 内部共振が発生する系において，NNMs は非減衰線形系の固有角振動数の微小な変動に対しても，大きな影響を受け，モードの数や形状を変動させる．
- NNMs に対応する背骨曲線が得られ，減衰がない非線形の強制振動系において，同じ振動モードを持つ解が背骨曲線の近傍に存在する．
- 減衰が存在する強制振動系においても，背骨曲線に対応する解が存在する．また，その応答性が背骨曲線の影響を受ける．

模型実験においても非線形連成による内部共振現象が発生し，理論解析で予測された θ 方向つまりローリングの励振，および三自由度傾斜防振支持系における周波数応答との定性的一致を確認した．

Fig. 4.1 Effects of σ_y on NNMs

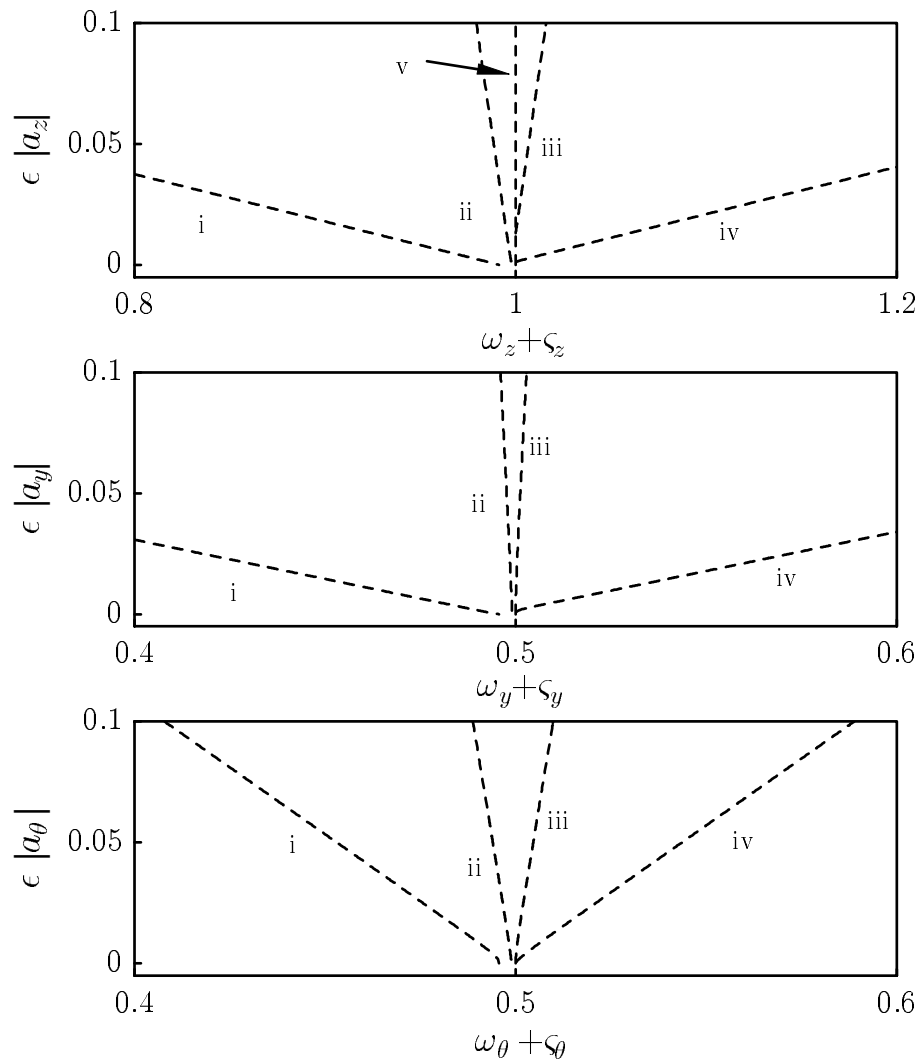


Fig. 4.2 Backbone curves

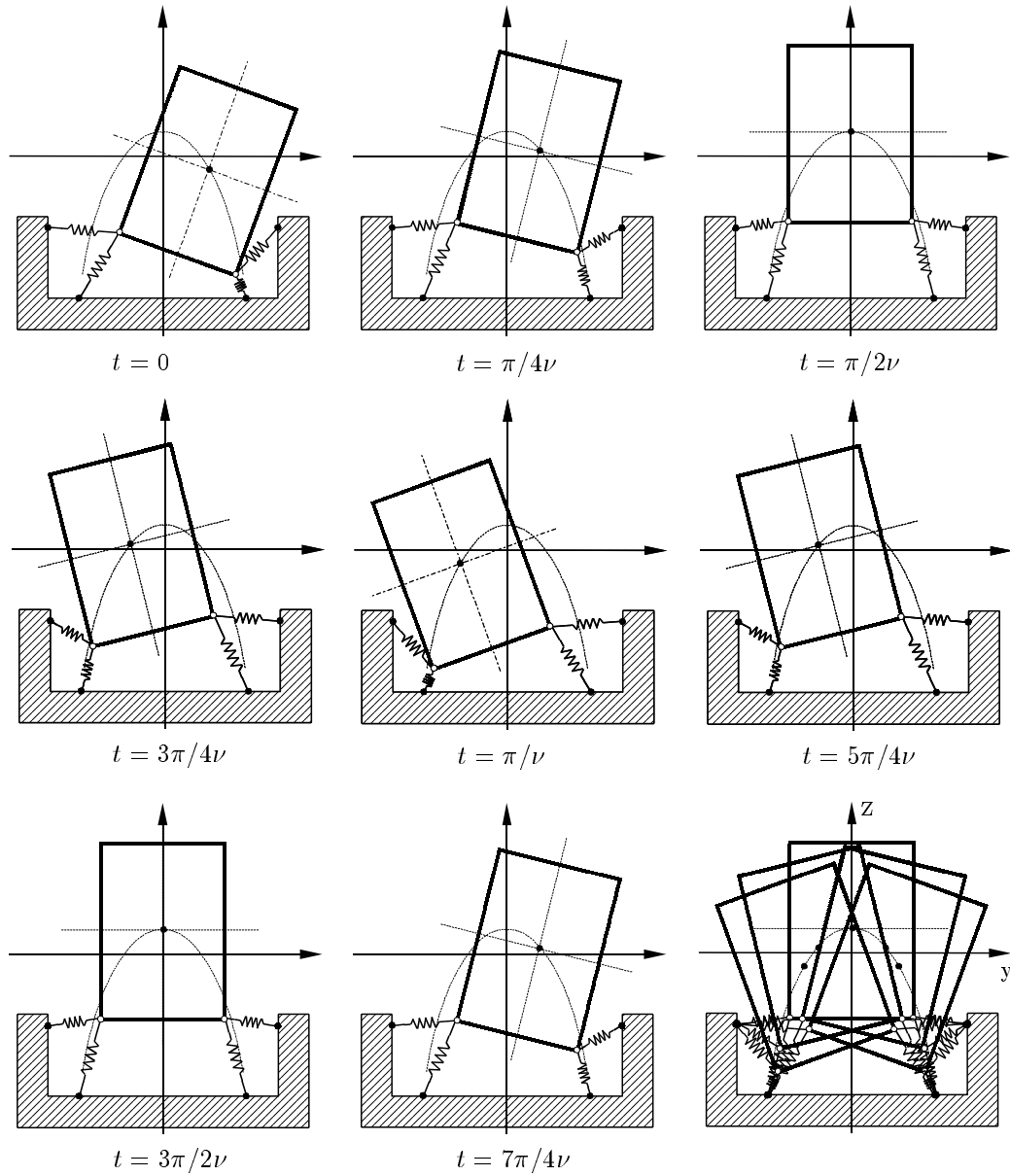


Fig. 4.3 Motion of Mode I

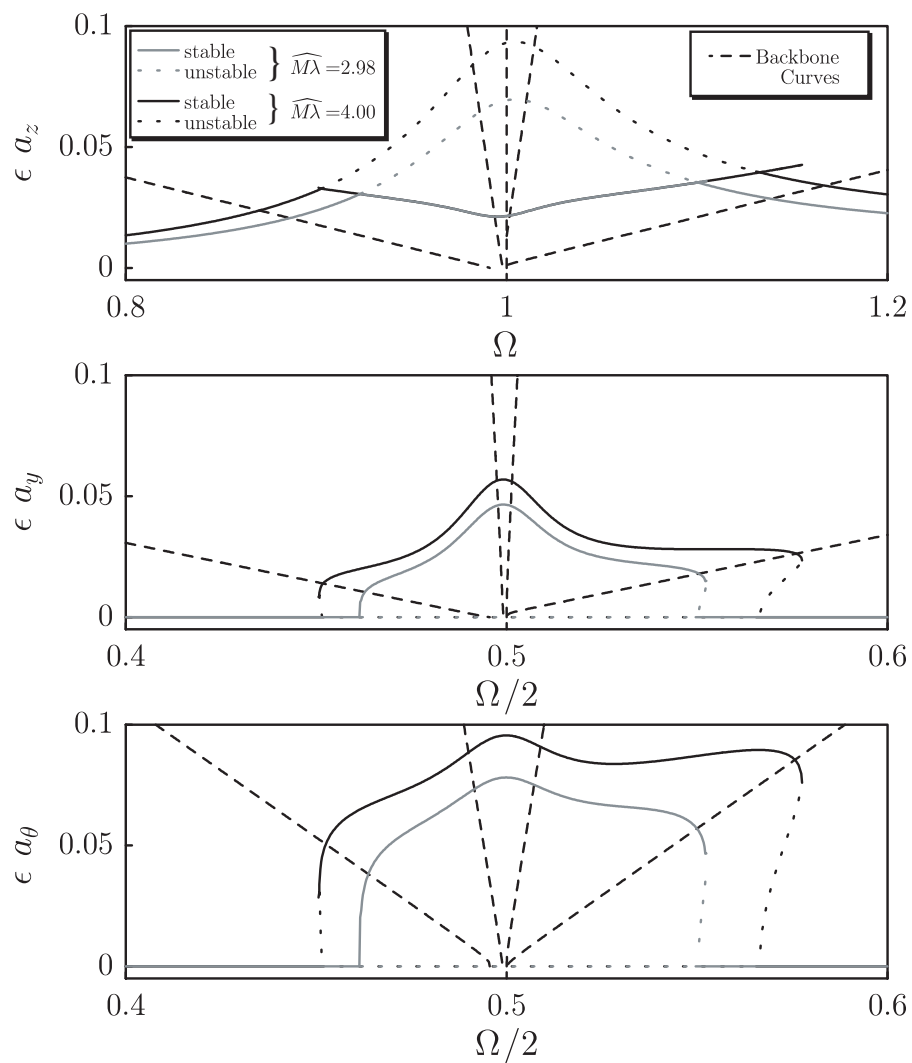
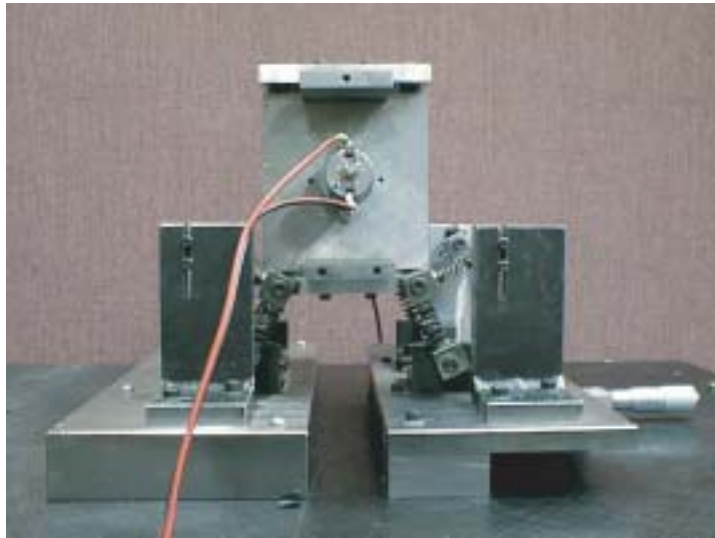


Fig. 4.4 Frequency response curves ($\widehat{M\lambda} = 2.98, 4.00$)



(a)front



(b)side

Fig. 4.5 Experimental setup

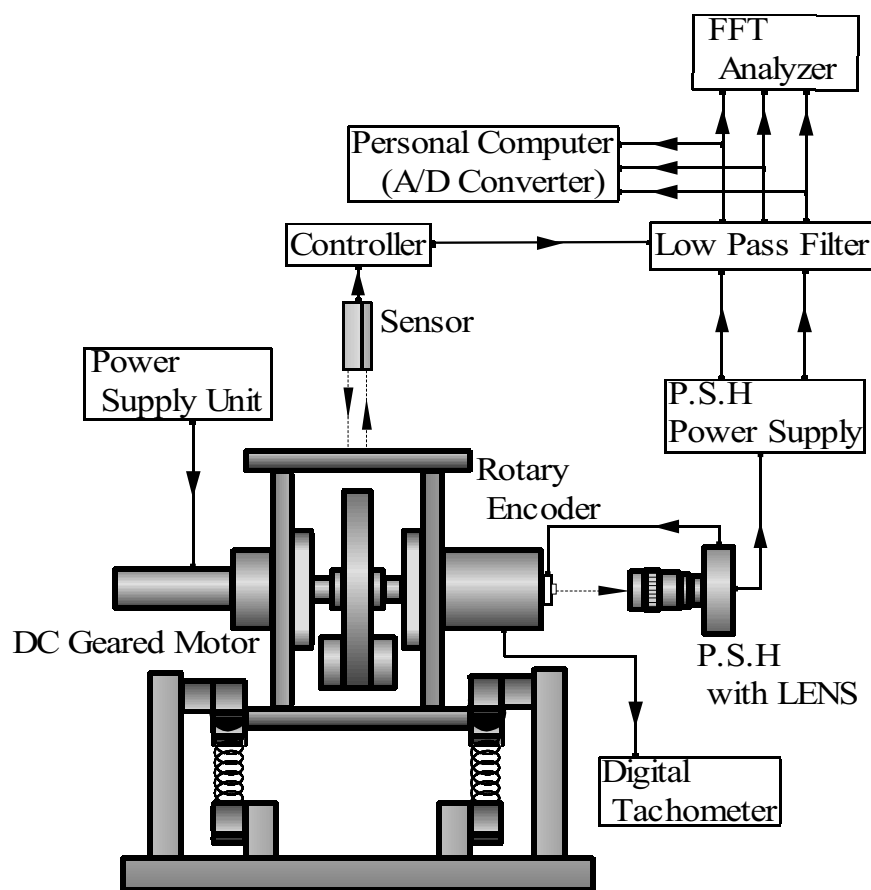


Fig. 4.6 Schematic of experimental apparatus

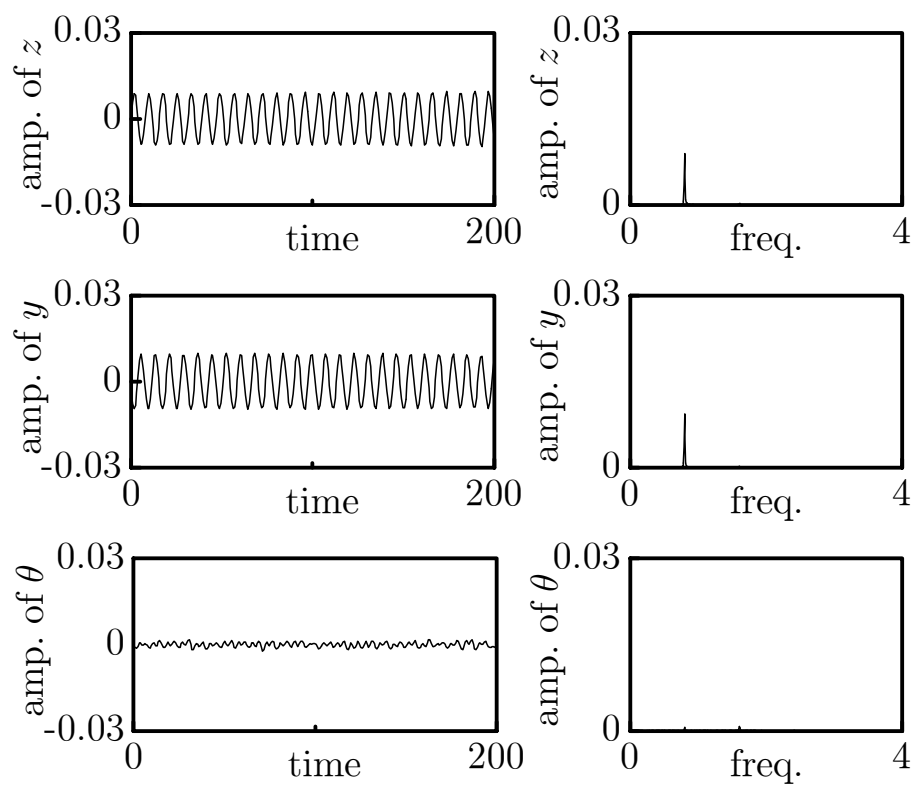


Fig. 4.7 Time histories and spectra ($\Omega = 0.80, \widehat{M}\lambda = 2.98$)

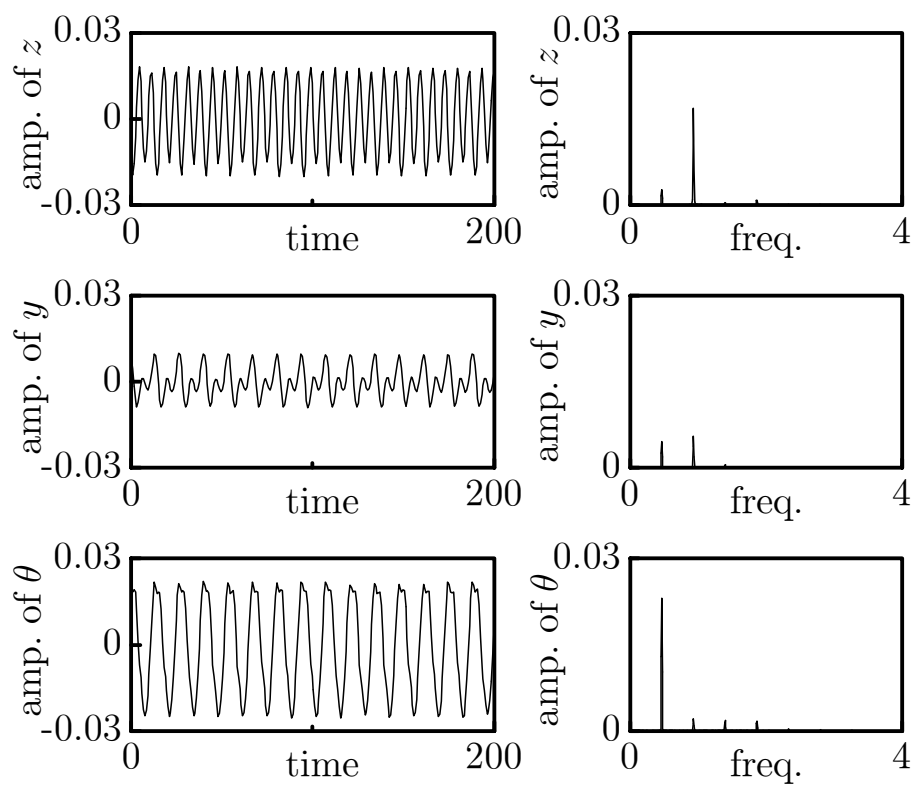


Fig. 4.8 Time histories and spectra ($\Omega = 0.93, \widehat{M}\lambda = 2.98$)

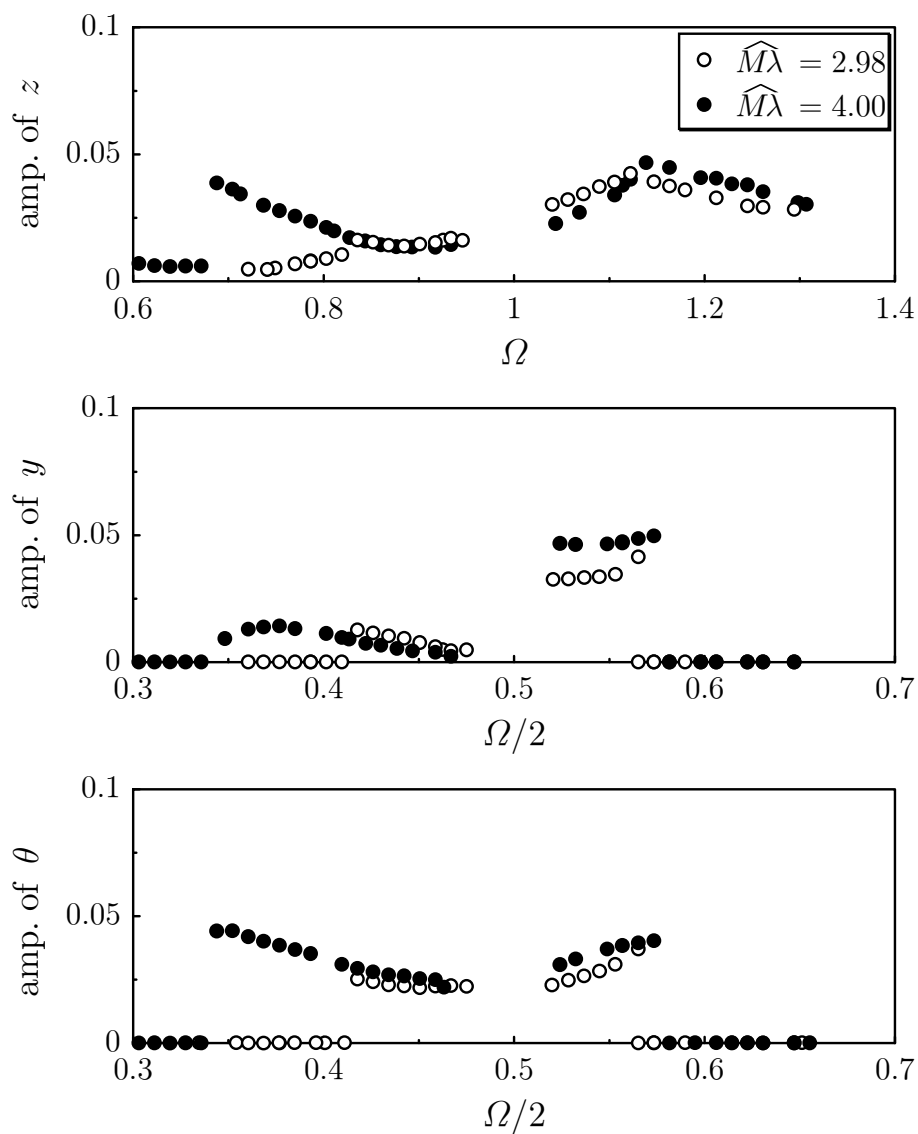


Fig. 4.9 Frequency response curves experimentally ($\widehat{M\lambda} = 2.98, 4.00$)

第 5 章

内部共振が存在する場合の過渡振動

5.1 序言

ディーゼル機関や電動機などの回転機械の防振支持系は，一般に多自由度系となり複雑な振動挙動を示す．その挙動の一部は，線形および非線形領域においてモード間の相互作用によって生じるものと考えられ，非線形力学的観点から非常に興味深い問題である．

本章では，傾斜支持方式 [2][3][31] で支持された剛体の面内運動つまり三自由度系に着目して，過渡応答時の内部共振の影響を調べるため，その支持部分の変位についての幾何学的非線形性に起因した $2:1:1$ の内部共振 (*Internal Resonance*)[16] を考慮に入れた防振支持系を解析対象とする．すなわち，一自由度防振支持系を対象に多くの研究が行われてきた共振点通過現象 [7][8][32] について，より複雑な三自由度防振支持系の場合に拡張すると共に，内部共振つまり非線形項を介したモード連成のある場合を取り上げる．

さらに実際の回転機械の防振支持系においては，定常応答より，発停時に必ず起る共振点通過時の挙動がより重要となるが [17][33][34][35]，従来，このときの回転角速度 $\dot{\phi}$ は一定に増加，あるいは減少するものとして扱われている．しかし共振状態では，駆動源が直流モータの場合であれば，電圧が一定に上昇しているにもかかわらず，実際には回転角速度は停滞する例などが見られる．このような共振点通過現象を再現するためには，モータの電気回路特性 [19] を考慮に入れ，トルクではなく電圧を入力として，防振支持系，モータの回転角および電気回路に関する支配方程式を連立させて解くことが必要となる．

以上の状況に鑑み，本章では最初に，防振支持系を上下方向変位 z ，左右方向変位 y ，ローリング θ の三自由度に単純化したモデルを用い， z, y, θ および直流モータの回転角 ϕ ，電流 i を支配する方程式を導く．

次に，三自由度防振支持系の解析に先立って，駆動トルクと負荷トルクとの大小関係が共振点通過現象に与える影響を知るため三自由度防振支持系の方程式を z 方向のみの一自由度に低次元化した．そして共振点通過に大きな影響をもつトルクの上限值を変化させ，その基本的特性を理論的に確認した．その上で，三自由度非線形振動系における内部共振が起る場合と起らない場合について，電流制限が共振点通過に及ぼす影響などを理論的に解明した．

最後に，単純な回転機械の三自由度防振支持系の実験装置をもちいた実験を行い，解析結果を検証した．

5.2 直流モータの電気回路を考慮した支配方程式の誘導

図 2.1 から導かれた 2 章の式 (2.5)~(2.7) において, $K_{yy} = \omega_y^2$, $K_{\theta\theta} = \omega_\theta^2$, 連成項 $K_{y\theta} = K_{\theta y} = 0$ とおき, 復元項については 2 次の幾何学的非線形項まで, 減衰項については 1 次の線形項を考慮して, 剛体の上下方向, 左右方向変位 z, y およびローリング θ の支配方程式は以下ようになる. ただし, z, y はばね取付け長さ l , 時間 t は z 方向の固有角振動数の逆数 $\sqrt{m/2(k_p \cos^2 \alpha + k_q \sin^2 \alpha)}$ で, それぞれ無次元化する.

$$\ddot{z} + z = -2\mu_{zz}\dot{z} + M\lambda(-\ddot{\phi} \cos \phi + \dot{\phi}^2 \sin \phi) + \alpha_{yy}y^2 + \alpha_{y\theta}y\theta + \alpha_{\theta\theta}\theta^2 + \alpha_{zz}z^2 \quad (5.1)$$

$$\ddot{y} + \omega_y^2 y = -2\mu_{yy}\dot{y} - 2\mu_{y\theta}\dot{\theta} + M\lambda(\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) + \beta_{yz}yz + \beta_{z\theta}z\theta \quad (5.2)$$

$$\ddot{\theta} + \omega_\theta^2 \theta = -2\mu_{\theta\theta}\dot{\theta} - 2\mu_{\theta y}\dot{y} + LM\lambda^2\ddot{\phi} + \gamma_{yz}yz + \gamma_{z\theta}z\theta \quad (5.3)$$

また, Δm を回転させる直流モータの回転角 ϕ , 電流 i に関する支配方程式は以下のように表される.

$$\ddot{\phi} = -\mu_{\phi\phi}\dot{\phi} + K_{\phi i}i - L_r(\ddot{z} \cos \phi - \ddot{y} \sin \phi) \quad (5.4)$$

$$\dot{i} + K_{ii}i = -\mu_{i\phi}\dot{\phi} + K_{ii}v \quad (5.5)$$

ここで i は公称電圧 V_0 を端子間抵抗 R で割った V_0/R で, 入力電圧 v は V_0 で, それぞれ無次元化されている.

無次元係数 $\omega_y, \dots, \mu_{zz}, \dots, \alpha_{yy}, \dots, \beta_{yz}, \dots, \gamma_{yz}, \dots$ は無次元パラメータ $H = h/l$, $B = b/l$, $L = ml^2/J$, $K = k_p/k_q$, $M = \Delta m/m$, $\lambda = r/l$, および

$$\mu_p = \frac{c_p}{\sqrt{2m(k_p \cos^2 \alpha + k_q \sin^2 \alpha)}},$$

$$\mu_q = \frac{c_q}{\sqrt{2m(k_p \cos^2 \alpha + k_q \sin^2 \alpha)}}$$

の関数として求められる [20]. また無次元係数 $\mu_{\phi\phi}$, $K_{\phi i}$, L_r , K_{ii} , $\mu_{i\phi}$ は以下のように表される.

$$\mu_{\phi\phi} = \frac{C}{J_\phi \omega_z^2}, K_{\phi i} = \frac{k_t V_0}{J_\phi R \omega_z^2}, L_r = \frac{\Delta m r l}{J_\phi},$$

$$K_{ii} = \frac{R}{L_e \omega_z}, \mu_{i\phi} = \frac{k_e R}{L_e V_0}$$

ここで C は軸受けの摩擦抵抗, J_ϕ はロータの慣性モーメント, k_t はトルク定数, L_e は端子間インダクタンス, k_e は起電力定数である. 式 (5.1)~(5.5) において無次元量を表す添え字 * は省略した.

5.3 上下動のみに拘束した一自由度防振支持系の共振点通過

三自由度系の検討に先立ち, 共振点通過の基本的特性を把握するために, 電気回路の影響を無視すると共に上下方向のみの一自由度系の検討を行う. 5.2 節で導かれた支配方程式のうち式 (5.1), (5.4) をもちい, z 方向の固有角振動数を通過する場合について考察する. 式 (5.1) の非線形項を 0 とおき, 式 (5.4) において $\ddot{y} = 0$ とおくと, 式 (5.1), (5.4) は以下ようになる.

$$\ddot{z} + 2\mu_{zz}\dot{z} + z = M\lambda(-\ddot{\phi} \cos \phi + \dot{\phi}^2 \sin \phi) \quad (5.6)$$

$$\ddot{\phi} = (L_T - R_T) - L_r \ddot{z} \cos \phi \quad (5.7)$$

ここで, L_T, R_T はそれぞれ駆動トルク $K_{\phi i} i$, 負荷トルク $\mu_{\phi\phi} \dot{\phi}$ を表しており, ばねの傾斜角 $\alpha = 0$ の場合である. また, これは *Dimentberg* らの研究 [8] における支持剛性切り替えがない, 一自由度の主共振の場合に相当する.

これらの支配方程式を, $z = A \cos(\phi + \xi)$, $\dot{z} = -A\Omega \sin(\phi + \xi)$, $\dot{\phi} = \nu$ として書き改め, A, ξ および $\dot{\phi}$ が時間とともにゆっくり変化するものとして, 一周期で積分して平均化を行う. その結果, 次の 3 つの振幅方程式が得られる.

$$\dot{A} = -\mu_{zz}A - \frac{M\lambda}{2\Omega} (\nu^2 \cos \xi - \dot{\nu} \sin \xi) \quad (5.8)$$

$$\dot{\xi} = \Omega - \nu - \frac{M\lambda}{2\Omega A} (\nu^2 \cos \xi + \dot{\nu} \sin \xi) \quad (5.9)$$

$$\dot{\nu} = (L_T - R_T) + \frac{L_r \Omega}{2} \left\{ A(\nu + \dot{\xi}) \sin \xi - \dot{A} \cos \xi \right\} \quad (5.10)$$

なお, 一周期での平均値を表す * は省略した. これらの定常応答を調べるために, 式 (5.8)~(5.10) の時間変動項を 0 とおき ξ, A を消去してトルク L_T, R_T と ν の関係を求め, $\Omega = 1$ とおくと以下ようになる. ここで $S(\nu)$ は系のすべての負荷トルクを表す.

$$\begin{aligned} L_T(\nu) &= S(\nu) \\ &= R_T(\nu) + \frac{\mu_{zz} M^2 \lambda^2 L \nu^3}{4((\nu - 1)^2 + \mu_{zz}^2)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

これは、トルクのバランスを表す方程式である。右辺第1項は摩擦、第2項は振動による負荷トルクを表している。 $L_T(\nu)$ と $S(\nu)$ の関係を図5.1に示す。これによれば $L_T(\nu)$ の値により式(5.11)の根の数は変化する。

L_{T1} の場合、根は一つであり、その位置は共振領域外であるため必ず共振点を通過できる。 L_{T3} の場合において、 ν_{rl}, ν_{ru} は共振領域にあり ν_{rl} での共振は安定しているのに対し、 ν_{ru} では不安定であることが知られている。 ν_{rl} 付近では微小外乱を与えても、 ν_{rl} に戻る。しかしながら、 ν_{ru} 付近では、外乱が加わると、 ν_{ru} から離れ、 ν_{rl} あるいは ν_{pr} に落ち着く。

L_{T2} は $S(\nu)$ と接しており、半ば静的に共振点を通過する。このように、時間をかけて共振点を通過する場合の L_{T2} 、あるいは $S(\nu)$ と接しているときの $L_T(\nu)$ の値は共振点を通過できる、もしくは共振状態で捕捉される場合の臨界値に相当する。このときの余剰トルク $T = L_T(\nu) - R_T(\nu)$ は式(5.11)において $\nu = 1$ とすることにより以下のように求められる。

$$\tilde{T} = \frac{(M\lambda)^2 L}{4\mu_{zz}}$$

この \tilde{T} は、一般に共振点通過に関して調べるときの基準値としてもちいることができる。

5.4 三自由度防振支持系の共振点通過

5.4.1 内部共振が起らない場合

ここでは、本論文で扱っている三自由度防振支持系の共振点通過のうち、特に内部共振が起らない場合を考える。そのため傾斜支持の角度 α を変えて固有角振動数の比を簡単な整数比からずらし、内部共振が起らない状態にした。

回転体の共振点通過においては、駆動トルクが十分に与えられれば速やかに通過でき、不十分な場合には共振点で回転が停滞し、通過に時間を費やす。さらに駆動トルクが小さくなると共振点で捕捉される。

本研究では電流 i を制限してこの状況を作り出した。そして、電流制限の影響による共振点通過の状況を見るために、電流を制限しない場合、その最大値の30%、および20%に制限する場合について数値計算を行った。このときの数値計算結果を図5.2～5.4に示す。これによれば、図5.2の場合にはロータの回転はスムーズに上昇して共振点を通過しており、図5.3の場合には z 方向の振幅の増加

と共振状態にある時間の延長，回転の停滞が見られ，定格回転に達するまで i が上限にあり，図 5.4 の場合，回転は共振点で捕捉されこれを越えられず， i は上限値のままとなっている． θ の振幅はいずれの場合にも小さい．

なお，電流制限値を与えた数値解析は，Runge-Kutta 法の係数（4 次の精度の式を用いたため，一つの一階の方程式につき 4 個ある）を 1 個求める度に，その計算の前に，また 1 ステップ進んだ値を計算した前後に，電流が制限電流を超えているかどうかチェックし，制限電流を超えている場合には電流に制限電流を与えて以降の解析を実施した．

5.4.2 内部共振が起る場合

ここでは，内部共振が起る場合の共振点通過について考える．

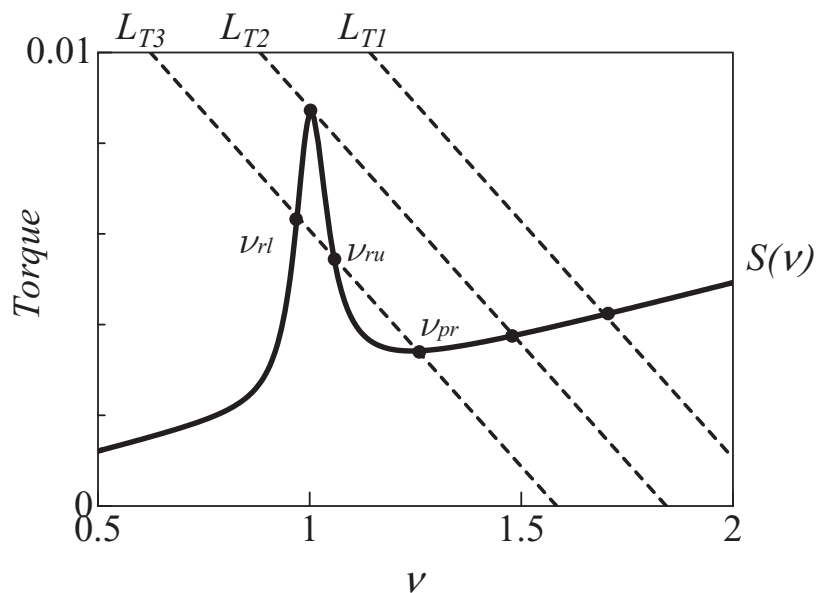


Fig. 5.1 Torque balance

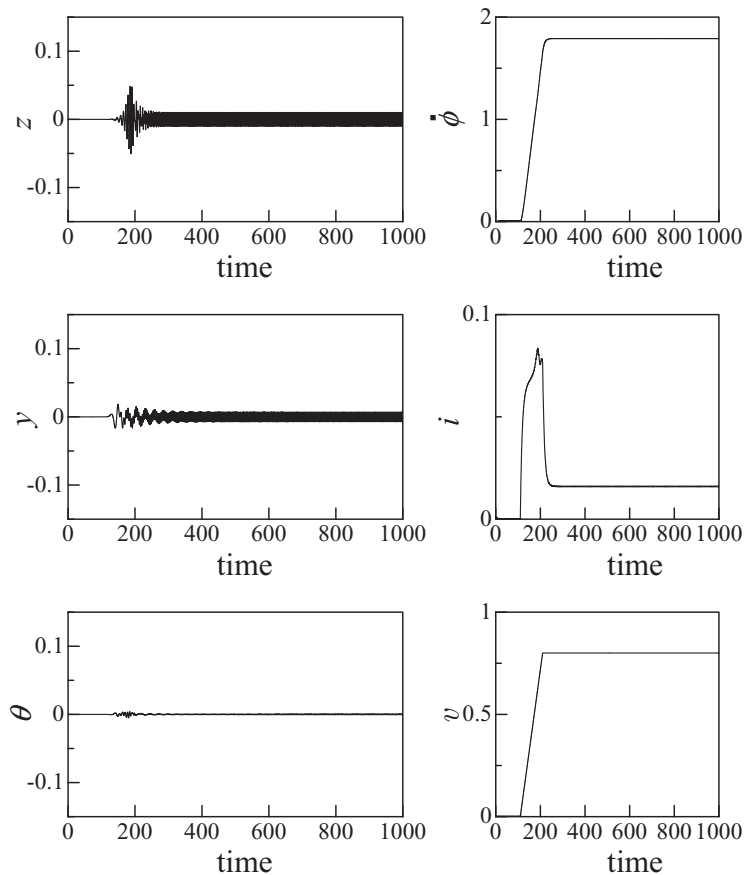


Fig. 5.2 Transient time histories without an internal resonance (Current i is not limited, simulation)

Runge-Kutta 法による数値解

まず支配方程式 (5.1)~(5.5) について電流を制限なし，その最大値の 20% および 15% に制限して数値計算を行った結果を示す．

初めに電流を制限しない場合を図 5.5 に示す．共振点付近においても $\dot{\phi}$ が停滞することなく，スムーズに通過している様子が見受けられる．

次に電流が 20% に制限された場合を図 5.6 に示す． z 方向の共振点付近で $\dot{\phi}$ が停滞し， y, θ 方向の振幅が増加して内部共振の影響が出ている．内部共振が起らない場合には 20% の電流制限値では共振点を通過出来なかったにもかかわらず，内部共振が起るこの場合にはこの制限値でも共振点を通過する．これは内部共振により，次項に述べる理由で負荷トルクが小さくなり共振点通過が容易になるた

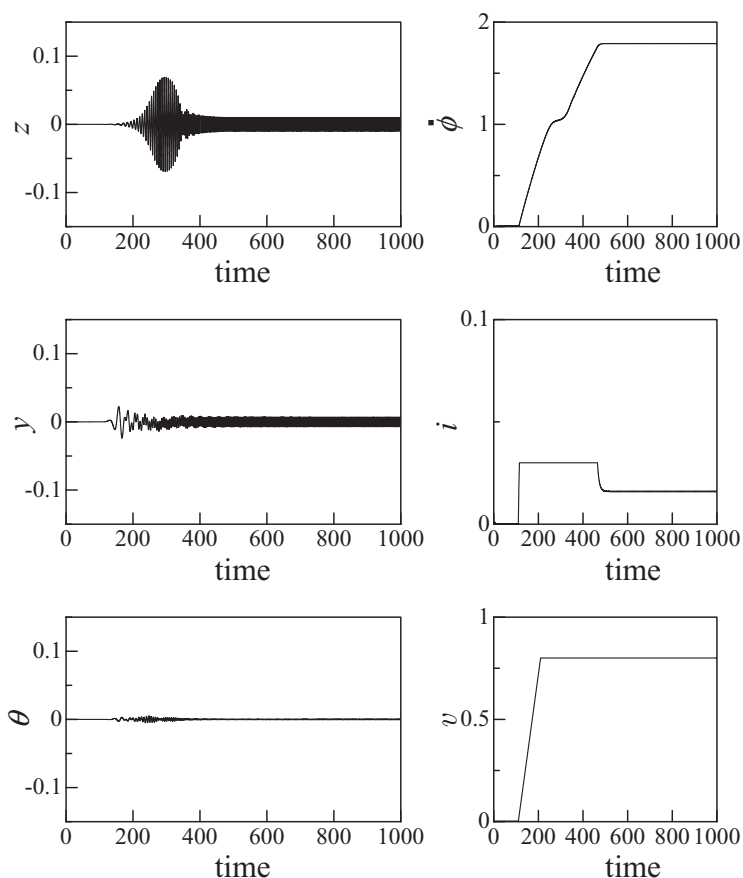


Fig. 5.3 Transient time histories without an internal resonance (Limit on current i is 30%, simulation)

めであると思われる。

最後に電流を 15%に制限した図 5.7 では z 方向の共振点通過時に内部共振が起り、前図の場合と同様に z 方向の振幅が減少し y, θ 方向の振幅が増加するが、もはや回転の上昇は起らず捕捉される。

平均法による解析的近似解

Dimentberg らの研究のように、一自由度系では共振点近傍のトルク特性を表す式を、解析的な解を用いて式 (5.11) のように直接求めることができる。一方、本研究のように多自由度系で非線形項が連成している場合は、これを直接導くこと

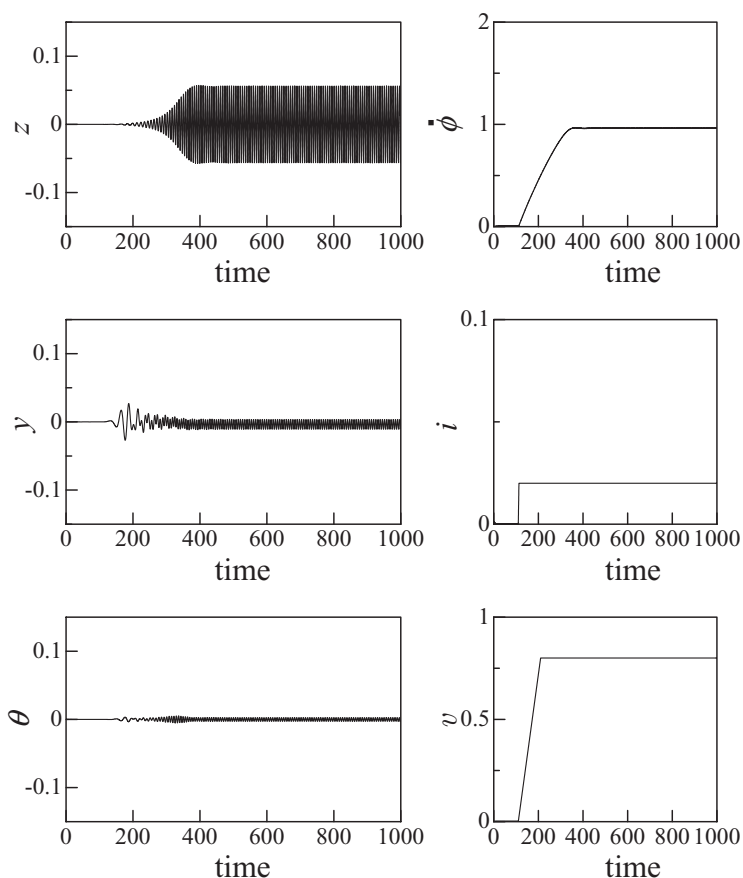


Fig. 5.4 Transient time histories without an internal resonance (Limit on current i is 20%, simulation)

は困難であるため、振幅方程式を数値計算することにより求めた。

(a) 振幅方程式 z 方向の固有角振動数 1 近傍で不釣り合い質量を回転させたときの振幅方程式を、平均法を用いて求める。ここで、主要成分のみを対象に考え、 $z = a_z \cos(\phi + \xi_z)$, $y = a_y \cos(\phi/2 + \xi_y)$, $\theta = a_\theta \cos(\phi/2 + \xi_\theta)$, $\dot{\phi} = \nu$

とおく、 z 方向の固有周期 2π で平均化を行なうことによって以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{a}_z = & -\mu_{zz}a_z - \frac{M\lambda}{2} (\nu^2 \cos \xi_z - \dot{\nu} \sin \xi_z) \\ & - \frac{1}{4} \{ \alpha_{yy} a_y^2 \sin(\xi_z - 2\xi_y) \\ & + \alpha_{y\theta} a_y a_\theta \sin(\xi_z - \xi_y - \xi_\theta) + \alpha_{\theta\theta} a_\theta^2 \sin(\xi_z - 2\xi_\theta) \} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_z = & 1 - \nu + \frac{M\lambda}{2a_z} (\nu^2 \sin \xi_z + \dot{\nu} \cos \xi_z) \\ & - \frac{1}{4a_z} \{ \alpha_{yy} a_y^2 \cos(\xi_z - 2\xi_y) \\ & + \alpha_{y\theta} a_y a_\theta \cos(\xi_z - \xi_y - \xi_\theta) + \alpha_{\theta\theta} a_\theta^2 \cos(\xi_z - 2\xi_\theta) \} \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\nu} = & - \left(\mu_{\phi\phi} - \frac{1}{2} L_r a_z \cos \xi_z + \frac{2}{3\pi} L_r \omega_y a_y \cos \xi_y \right) \nu \\ & + K_{\phi i} i + \frac{1}{2} L_r \left(\dot{a}_z \sin \xi_z + a_z \dot{\xi}_z \cos \xi_z \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{4}{3\pi} L_r \omega_y \left(\dot{a}_y \sin \xi_y - a_y \dot{\xi}_y \cos \xi_y \right) \\ \dot{i} = & -K_{ii} i - \mu_{i\phi} \nu + K_{ii} v \end{aligned} \quad (5.15)$$

なお一周期分の平均値を表す $\bar{}$ は省略した。同様にして、 z 方向の固有周期の 2 倍

の 4π で平均化を行うことによって以下の式を得る .

$$\begin{aligned}\dot{a}_y &= -\mu_{yy}a_y - \mu_{y\theta}\frac{\omega_\theta}{\omega_y}a_\theta \cos(\xi_y - \xi_\theta) \\ &\quad + \frac{1}{4\omega_y} \left\{ \beta_{yz}a_ya_z \sin(\xi_z - 2\xi_y) \right. \\ &\quad \left. + \beta_{z\theta}a_z a_\theta \sin(\xi_z - \xi_y - \xi_\theta) \right\}\end{aligned}\quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}a_y\dot{\xi}_y &= -\left(\frac{\nu}{2} - \omega_y\right)a_y + \mu_{y\theta}\frac{\omega_\theta}{\omega_y}a_\theta \sin(\xi_y - \xi_\theta) \\ &\quad - \frac{1}{4\omega_y} \left\{ \beta_{yz}a_ya_z \cos(\xi_z - 2\xi_y) \right. \\ &\quad \left. + \beta_{z\theta}a_z a_\theta \cos(\xi_z - \xi_y - \xi_\theta) \right\}\end{aligned}\quad (5.17)$$

$$\begin{aligned}\dot{a}_\theta &= -\mu_{\theta\theta}a_\theta - \mu_{\theta y}\frac{\omega_y}{\omega_\theta}a_y \cos(\xi_y - \xi_\theta) \\ &\quad + \frac{1}{4\omega_\theta} \left\{ \gamma_{yz}a_ya_z \sin(\xi_z - \xi_y - \xi_\theta) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{z\theta}a_z a_\theta \sin(\xi_z - 2\xi_\theta) \right\}\end{aligned}\quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}a_\theta\dot{\xi}_\theta &= -\left(\frac{\nu}{2} - \omega_\theta\right)a_\theta - \mu_{\theta y}\frac{\omega_y}{\omega_\theta}a_y \sin(\xi_y - \xi_\theta) \\ &\quad - \frac{1}{4\omega_\theta} \left\{ \gamma_{yz}a_ya_z \cos(\xi_z - \xi_y - \xi_\theta) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{z\theta}a_z a_\theta \cos(\xi_z - 2\xi_\theta) \right\}\end{aligned}\quad (5.19)$$

(b) トルク特性 内部共振が起る場合の負荷トルクについて, z 方向の固有角振動数近傍で数値計算を行った結果を, 図 5.8 に破線で示す. この結果は, 振幅方程式 (5.14) において時間で微分された項を 0 とし,

$$K_{\phi i}i = \left(\mu_{\phi\phi} - \frac{1}{2}L_r a_z \cos \xi_z + \frac{2}{3\pi}L_r \omega_y a_y \cos \xi_y \right) \nu$$

と式を変形することで, 求めることができる.

内部共振が起る場合と起らない場合の負荷トルクの特性格線を比較してみると, 負荷トルクの値が最大となる回転速度が, z 方向の共振点 $\nu = 1$ からずれていることがわかる. また最大値も内部共振が起らないときに比べ, 約 63% 程度に小さくなっている.

内部共振が起る場合には z 方向の共振点近傍において, y および θ 方向も励振される. このとき z 方向の振動のエネルギーがモータの負荷トルクに影響しない θ 方向の振動にも分散される. その分, 負荷トルクのうちの振動によるトルクの最

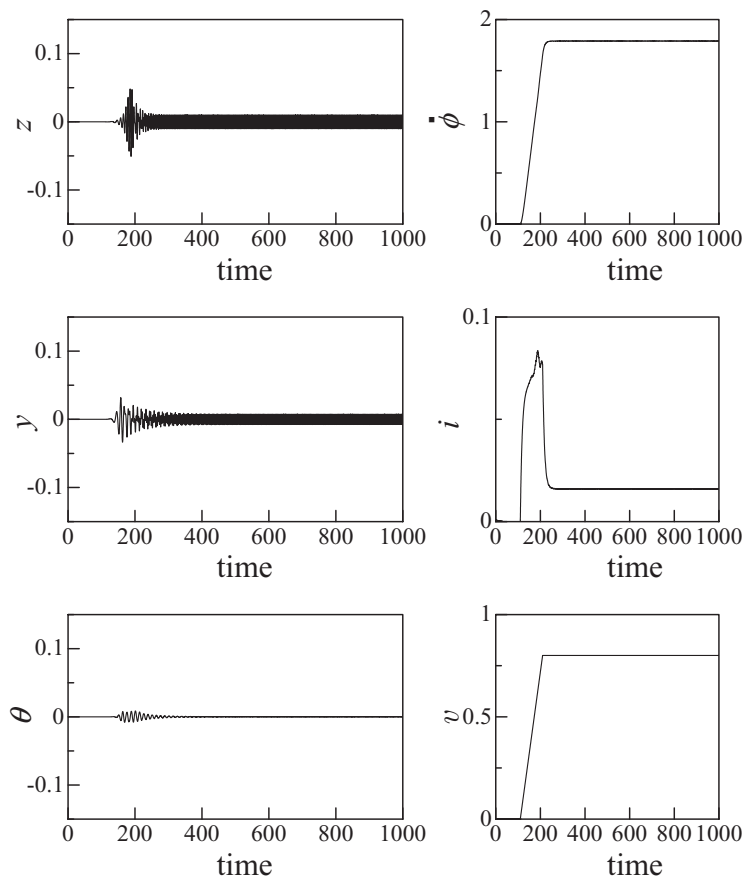


Fig. 5.5 Transient time histories with an internal resonance (Current i is not limited, simulation)

大値も小さくなると考えられる。

よって、解析上同じ駆動トルクを与えた場合、内部共振が起らないときに共振点を通り過ぎてくても、それが起るときは駆動トルクが上記の減少した負荷トルクを上回れば共振点を通り過ぎることができる。

5.5 実験

5.4の理論解析において、条件によっては非線形連成の影響による内部共振が起り得ることが明らかとなった。このことは、現実の系でも非線形項の影響が無

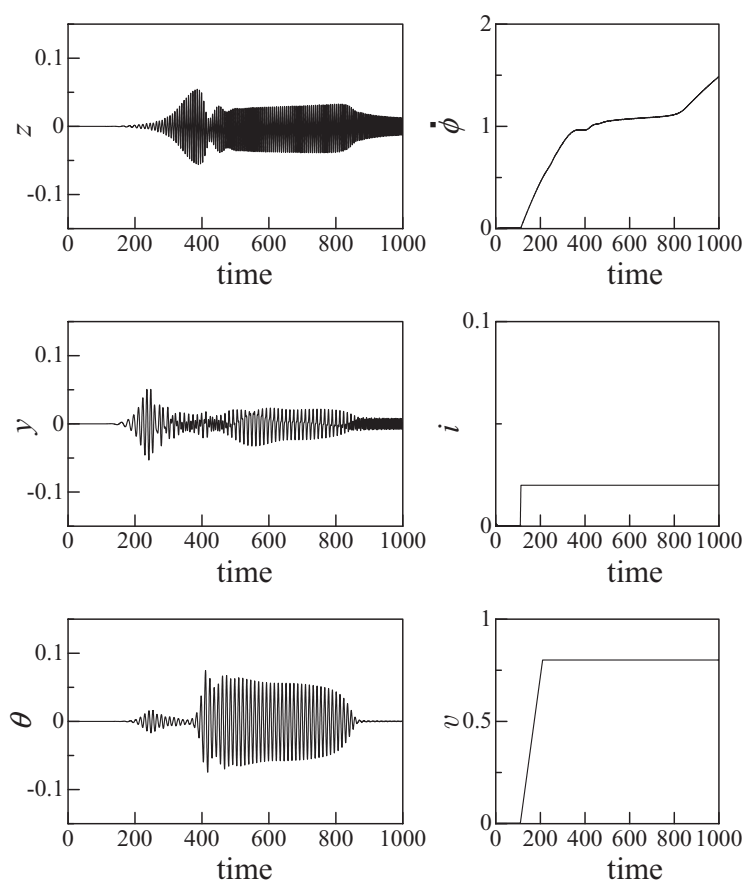


Fig. 5.6 Transient time histories with an internal resonance (Limit on current i is 20%, simulation)

視できないものとなる可能性を示しており,これを現実の機械系や模型で確認することが重要な意味を持つ.そこで本章では,2章の解析モデルに基づいた相似模型実験を行い,現象の発生を確認するとともに5.4の理論解析によって得られた結果と比較する.

5.5.1 実験装置

実験装置は4章と同一のものを持ちその概要を図5.9,5.10に示す.ここでは,平面運動を実現させるため $y-z$ 平面に関して質量が対称になるように部品を配置してある.この装置の詳細は2章による.なお,系を自由振動させたときの変位の時刻歴とその周波数分析結果から, p 軸および q 軸方向の粘性減衰係数

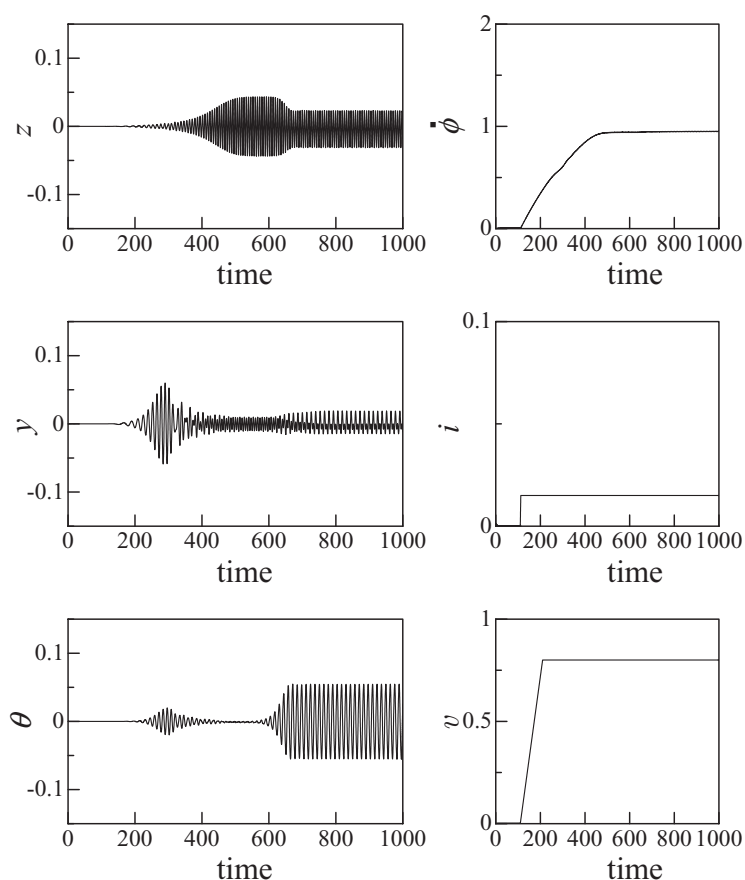


Fig. 5.7 Transient time histories with an internal resonance (Limit on current i is 15%, simulation)

c_p, c_q ならびにばね定数 k_p, k_q を同定した。

5.5.2 実験結果

前節までの解析で、電流に制限を与えると回転体の共振点通過時の挙動が変化することがわかった。そこで以下では電流を制限しない場合、また電源装置の電流制限機能を用いてその最大値の 40% および 30% に制限した場合の実験を行った。

ここで解析の時と同じ制限割合を設定しなかったのは、実験時の装置の安定性と、制限しない場合の電流が装置と解析とで異なり、解析と同様の結果を出すためにはこの値を取る必要があったためである。図 5.11 は実験で使用する範囲で電

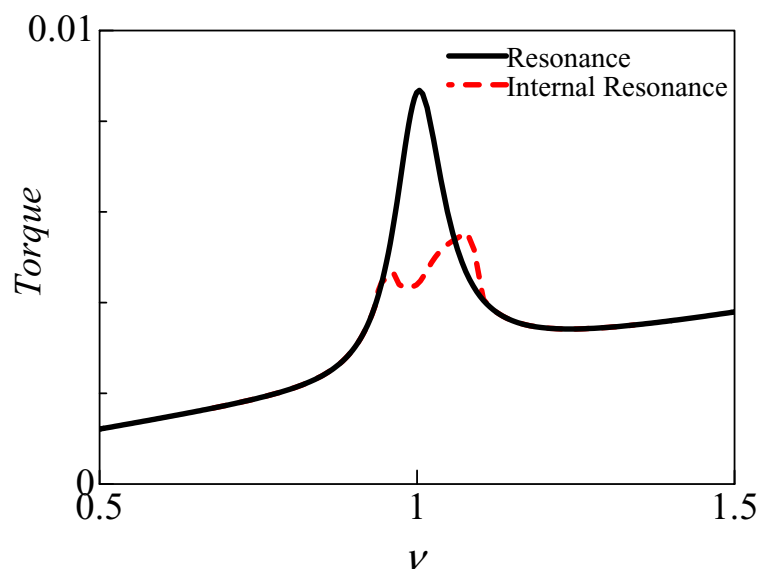


Fig. 5.8 Torque curve

力が不足しないよう電流 i を制限しない場合（最大値は有次元で 0.85A ）、図 5.12 は制限しない場合の最大値の 40%（有次元で 0.34A ）に、図 5.13 は同じく 30%（有次元で 0.26A ）にした場合の実験結果である。なお、不平衡質量 Δm 、電圧上昇速度 \dot{v} は、すべての場合について同一の値である。

これらの結果から、図 5.11 の場合には z, y, θ 各方向の振幅はそれぞれの共振点通過時にもさほど増加せず、ロータの角速度 $\dot{\phi}$ はすみやかに上昇し途中の停滞は見られない。電流 i はロータが回転上昇中のみ最大値をとり、定格回転速度に達すると定常値に下がり安定する。電圧 v も角速度と同様の傾向を示している。

次に、図 5.12 の場合、 z 方向の共振点近傍で角速度が停滞し、共振点通過に時間がかかっている。この時、 y, θ 方向の振幅が増加しており内部共振が起っていると判断される。これに伴い電流も長く上限値を維持し、電圧は回転と同様に上昇途中で停滞が見られる。

最後に、図 5.13 の場合、 z 方向の共振点で捕捉され、通過できなくなってしまう。電流は上限値のままであり、そして、 z 方向の共振点通過時に y と θ 方向の変位も増加し、内部共振が起っていると思われるが、その値は大小の変化を繰り返す。

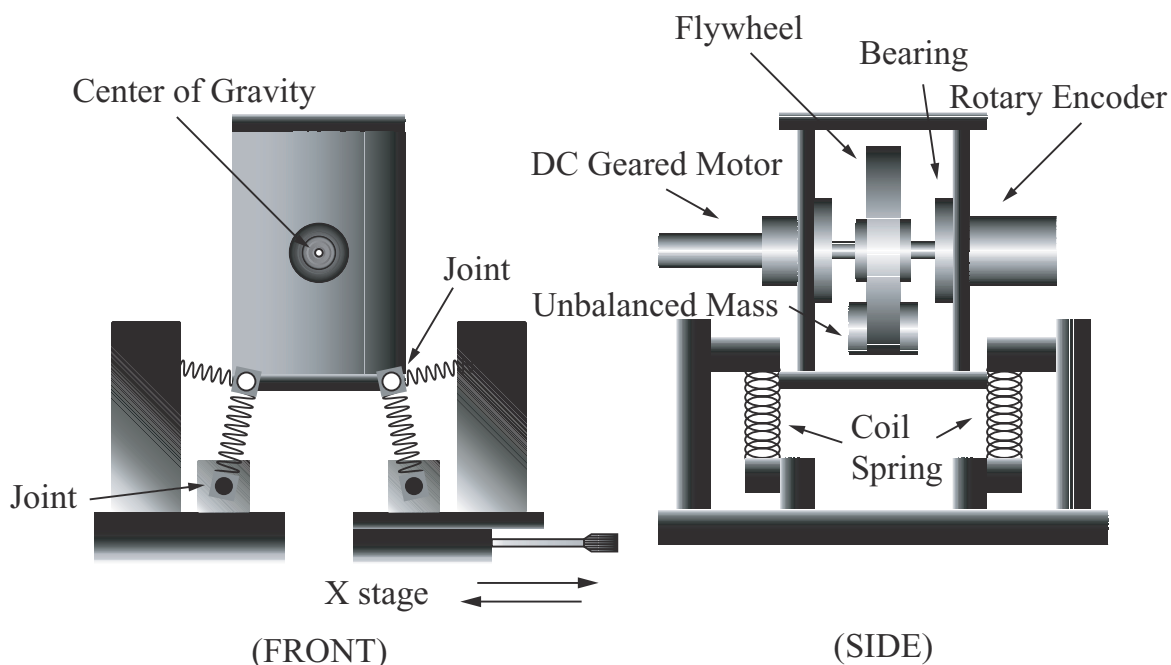


Fig. 5.9 Experimental schematic

返している。

これらを図 5.5~5.7 のシミュレーション結果と比較すると図 5.11 と図 5.5 は良く一致しており，図 5.12 と図 5.6 では制限電流が図 5.12 の方が大きい分共振点通過時間が短くなっていると考えられる．図 5.13 と図 5.7 を比較すると共振点を通過できないという結果は同様であるが，図 5.7 では z 方向の共振点で角速度が一定になって無次元時間で 200 程度後に， z 方向の振幅が減少すると同時に y, θ 方向の振幅が増加している．これについては内部共振の影響で z 方向から y, θ 方向にエネルギーが移行したと考えられるが，図 5.13 では z 方向の共振に伴い， y と θ 方向も内部共振により振幅が増大し，すべての方向で脈動が見られる．この原因は現時点では明確ではない．

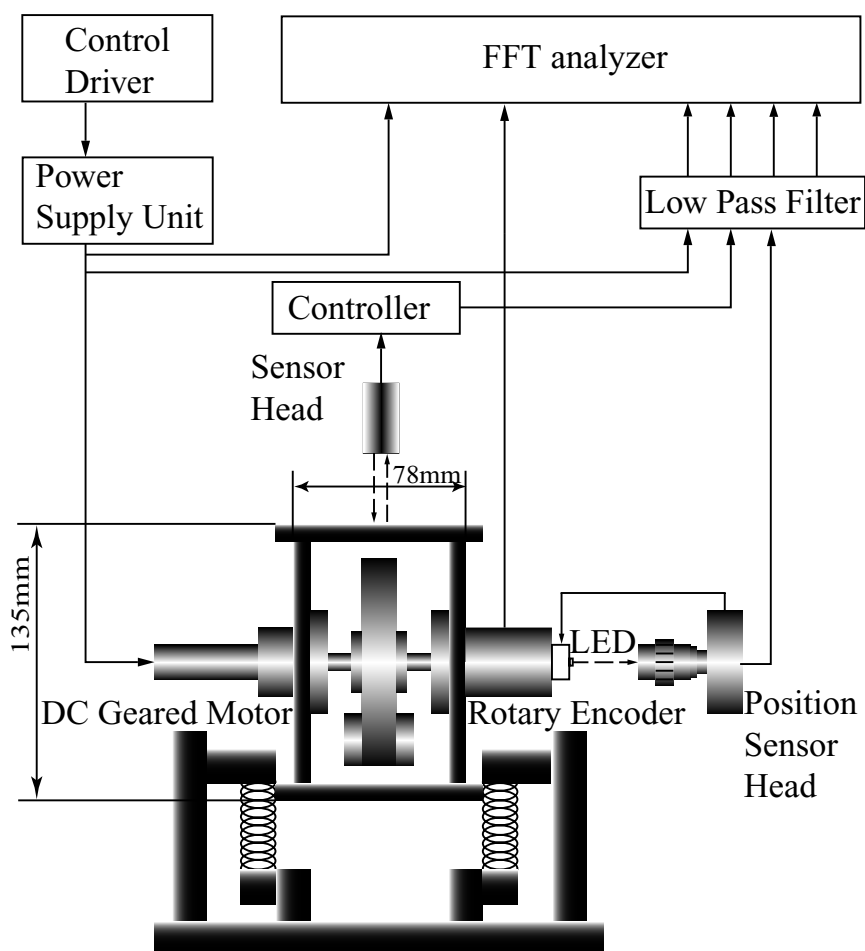


Fig. 5.10 Experimental setup

5.6 結言

本章では，回転体の共振点通過時の複雑な挙動を明らかにするための基礎的研究として，駆動源に直流モータをもちいた三自由度防振支持系の共振点通過現象を理論的ならびに実験的に調べた．

理論解析は，防振支持系およびモータの電気回路に関する支配方程式を連立さ

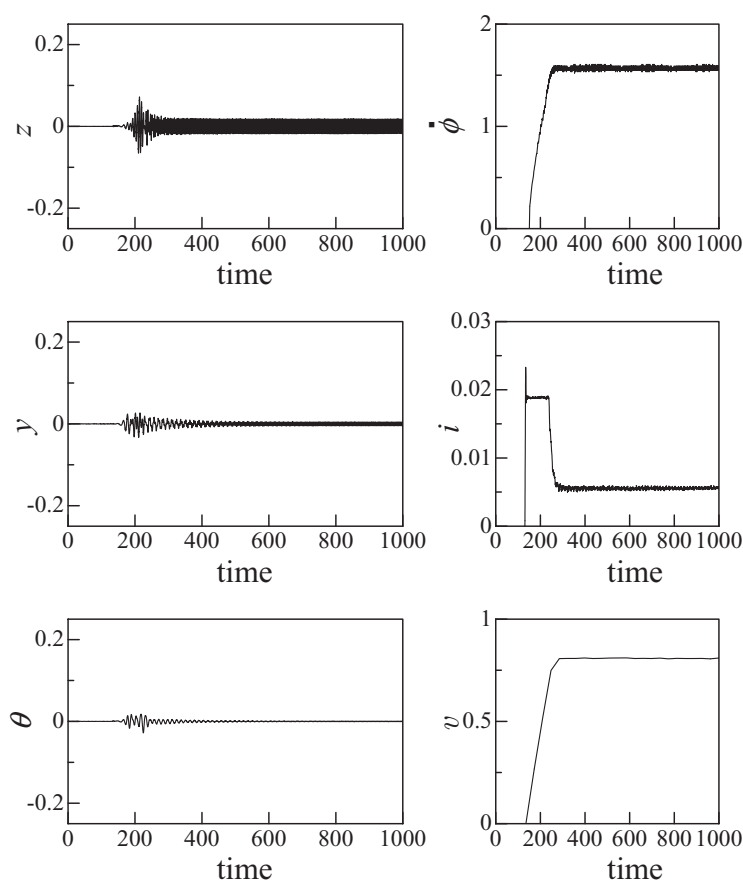


Fig.5.11 Transient time histories with an internal resonance (Current i is not limited, experimental result)

せて、電圧を入力として、共振点通過現象を調べた。最初に駆動トルクと負荷トルクとの大小関係が共振点通過現象に与える影響を明確にしておくため、電気回路の影響を無視すると共に上下方向のみの一自由度防振支持系の解析を行った。次に、内部共振がない場合の傾斜支持された三自由度防振支持系の共振点通過時の挙動を調べた上で、 $2:1:1$ の内部共振の条件を満たす場合の共振点通過について解析を行った。その結果、主に以下のことが理論的に明らかになった。

- 内部共振の有無にかかわらず、電流の制限をしない場合にロータの角速度が共振点を抜けられても、電流を制限すると共振点での停滞が起る。さらに電流制限の度合いを大きくすると、共振状態から抜けられなくなる。
- 上下振動の共振点において、電流制限を行った場合、内部共振が起らない場合に共振点を通過出来なくとも、内部共振が起る場合には剛体のローリング

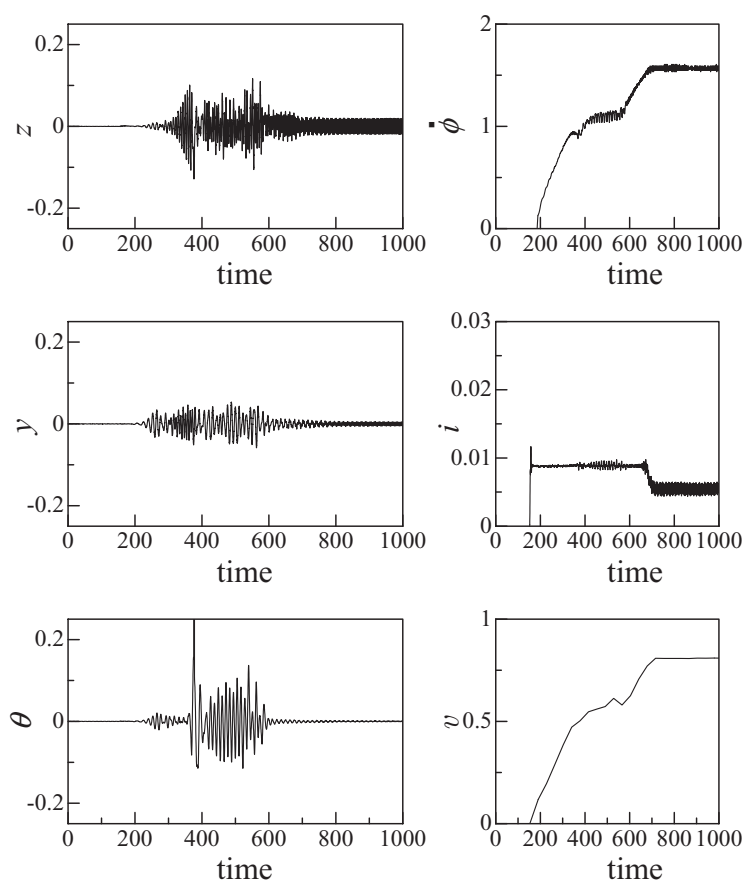


Fig. 5.12 Transient time histories with an internal resonance (Limit on current i is 40%, experimental result)

振動増加による負荷トルクの減少により，この負荷トルクを上回る駆動トルクがあれば共振点通過が可能になる．

この理由は以下のように説明される．すなわち上下方向の主共振による振幅増加後，内部共振により剛体の上下振動から左右およびローリング振動へエネルギーが移行する．この結果，上下振動の振幅が減少し，左右およびローリング振動の振幅が増加する．しかし，移行したエネルギーのうちローリングの振幅を増加させた分は，直流モータの回転についての方程式から分るように，負荷トルクに影響を及ぼさないため，全体として負荷トルクが小さくなり，共振点通過が可能になるものと理論的に解釈される．

さらに，内部共振現象の発生を含む解析結果を検証するために，三自由度防振支持系の単純なモデルをもちいて実験を行った．その主な結果として，

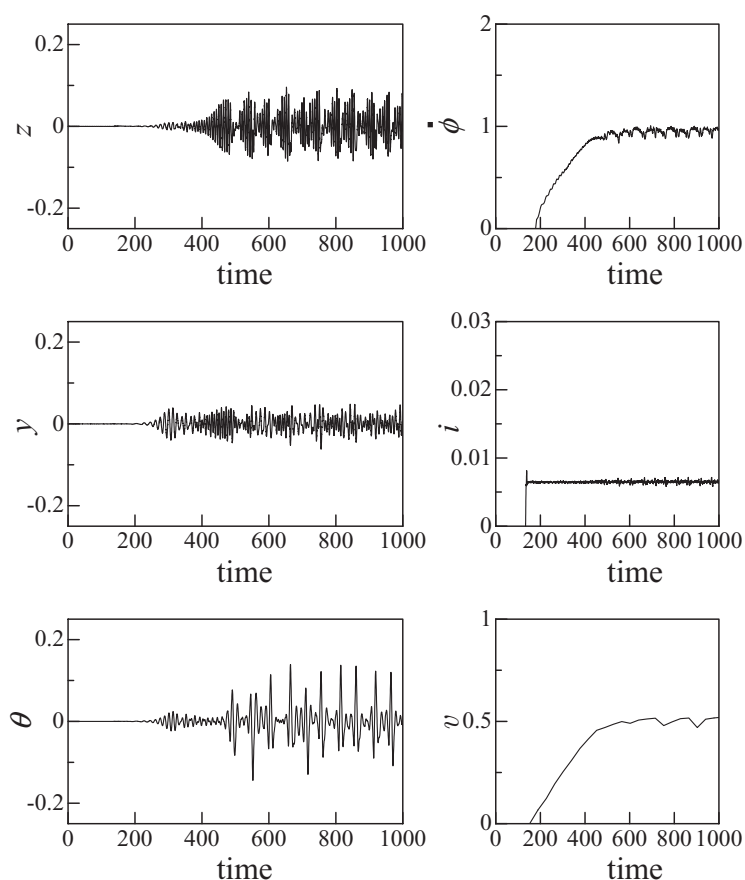


Fig. 5.13 Transient time histories with an internal resonance (Limit on current i is 30%, experimental result)

- 上記の二つの理論解析結果は、単純な三自由度防振支持系の装置をもちいた実験により、定性的に確認された。
- 本研究では直流モータの電気回路特性を考慮した支配方程式を導いたが、ロータの角速度と電流の時間的変化の対応が、解析と実験で傾向的によく合っている。

なお本章では触れなかったが、ロータの共振点通過時の挙動に影響を及ぼす可能性のあるパラメータとして印加電圧の時間変化率が考えられる。これは共振点通過時の最大振幅、その発生時刻などに影響すると思われるが、ここでは今後の課題として指摘するに止める。

第 6 章

結論

ディーゼル機関は、その経済性ゆえに古くから使用され、現在に至るもその特性がさらに改善されている。その一方で騒音・振動の発生源でもあるディーゼル機関に対して、これらの発生メカニズムや周囲の環境への伝播を抑制する努力も古くから続けられている。そして、発電用ディーゼル機関に開発・適用されて来た防振支持が、近年いくつかの技術課題を克服することにより船用主ディーゼル機関にも適用されるようになった。

しかしながら、騒音・振動に対して、依然として多くの課題を残している。そして、従来から用いられている設計手法、運転に付随して見られる現象を取り扱う場合の対応の多くは線形範囲のものである。従って、非線形振動に対する対応は、現象が複雑な事、系の自由度が大きいことなどから、目下のところほとんど手がつけられていない課題である。

このような状況下において、本研究では、ディーゼル機関防振支持系の非線形振動現象を調べるにあたり、系を三自由度つまり面内における上下、左右およびローリング振動系からなる防振支持系にモデル化した。このモデルを用いて導いた支配方程式は多くの非線形項を持ち、それらは連成状態で存在するため、力学系を最も簡単にして取り扱いを容易にする方法の一つである標準形の方法を用いて方程式から非線形性を除いた。このとき、その計算量が膨大になるため数式処理を援用した。

次に、内部共振が存在する条件下における多自由度非線形振動系の定常応答を調べるため、非線形ノーマルモード (NNMs) の解析、及び現実の防振支持系で見られる共振点通過現象の解析を内部共振の存在の有無を考慮して行い、その影響を調べた。さらにこれらを確認するため防振支持系の相似模型実験を行った。その結果、三自由度防振支持系の非線形振動について主に以下の様な結論を得た。

1. 内部共振が存在しない場合の定常振動

- (a) 標準形の方程式を求めることができ、高調波成分へのパラメータの影響を容易に調べることができる解析的な取り扱いができた。
- (b) 標準形の方程式から解析的近似解をもとめ、これが数値解と良く一致すること、実験で再現された非線形振動の特徴を正確に表現していることを確認した。

2. 内部共振が存在する場合の定常振動

- (a) 非減衰・非線形自由振動系において NNMs の存在を確かめた。
- (b) NNMs は内部共振が発生する系において、非減衰線形系の固有振動数

の微小な変動に対しても，大きな影響を受けモードの数や形状を変化させる．

(c) NNMs に対応する背骨曲線が得られ，減衰がない非線形の強制振動系において，同じ振動モードを持つ解が存在する．

(d) 減衰が存在する強制振動系においても，背骨曲線に対応する解が存在する．また，その応答性が背骨曲線の影響を受ける．

3. 内部共振が存在する場合の過渡振動

(a) 内部共振の有無にかかわらず，電流の制限をしない場合にロータの角速度が共振点を抜けられても，電流を制限すると共振点で停滞が起る．

(b) 上下振動の共振点において，電流制限を行った場合，内部共振が起らない場合に共振点を通過出来なくても，内部共振が起る場合には共振点通過が可能になる場合がある．

(c) 上記の二つの理論解析結果は，単純な三自由度防振支持系の装置を用いた実験により，定性的に確認された．

(d) 本研究では直流モータの電気回路特性を考慮した支配方程式を導いたが，ロータの角速度と電流の時間的变化の対応が，解析と実験で傾向的に良く合っている．

これらのことから，防振支持系において，幾何学的非線形を考慮するとき，非線形方程式中に存在する連成状態にある高次非線形項を解析的に取り扱う手法として標準形の方法の有効性が確認出来た．なお本論文では，内部共振の無い場合に標準形の方法を適用したが，内部共振のある場合について方程式の非線形性を除くことが必要となる場合にも適用可能である．

また，線形系で用いられるモード解析を，内部共振が存在する条件下で非線形領域に拡張した場合の定常応答の成分に相当する NNMs の存在や，その性質を調べる事ができた．

すなわち，これらの非線形振動系に適用される手法が防振支持系を非線形解析する時に有効であることがわかった．

さらに，現実にかかる頻度の高い共振点通過現象の中で，内部共振の存在の有無が，駆動トルクの大小により，共振点で捕捉されるかどうかを左右する事があり得ることを知る事が出来た．

以上の成果は，防振支持系においてより静粛かつすみやかに共振点を通過できる可能性や，不要な高調波振動成分の低減等への応用の可能性が考えられる．

謝辞

以上，本研究では，従来ほとんど未解明であった多自由度防振支持系の非線形振動現象に対する，幾つかの基礎的な解析手法の適用を検討すると共に，その基本的な非線形振動特性を理論的に解明すると共に，船用主ディーゼル機関の相似模型実験により理論解析結果の妥当性を確認した．この結果，ディーゼル船用主機関で実際に発生する面外振動も含めた複雑な振動現象の中で，線形振動では説明不可能な振動現象に対して，非線形振動の可能性を注意深く検討することが可能になる．

本研究は，著者が株式会社新潟鐵工所在職中に始まり，その倒産と新潟トランス株式会社発足から4年弱の10年以上の長きにわたり多くの方々のご指導，ご協力によりまとめる事が出来たものである．

研究の基本的な方針から具体的な進め方に至るまで終始ご指導いただき，仕事にかまけて遅れ気味になる小生を終始励ましてくださった慶應義塾大学教授 吉沢正紹先生，慶應義塾大学名誉教授 辻岡康先生に深く感謝いたします．

また，本論文作成にあたり，貴重なご助言とご指導を頂いた慶應義塾大学教授 三井公之先生，菅泰雄先生，前野隆司先生，筑波大学教授 藪野浩司先生に厚く御礼申し上げます．

次に，これらの研究を実施するにあたり解析，実験などで終始小生を助けてくださった大学院生 伊東圭昌様，城戸輝希様，菱沼卓也様，海野大博様，大石弘幸様，佐藤一茂様，山下範晃様，山本毅様，中村昌和様，川名良様，丹下知彦様と種々ご協力頂いた吉沢・杉浦研究室の皆様から心から感謝致します．

さらに，小生にこの機会を与えて下さった慶應義塾大学名誉教授 安藤常世先生，元新潟鐵工所専務取締役 奥村知也様に心から感謝致します．

最後に仕事と研究で多忙な小生を終始支えてくれた妻に心から感謝します．

参考文献

- [1] 大築ほか，建築学大系，彰国社
- [2] 木内石，機械力学，(1979)，培風館．
- [3] 西村源六郎，振動工学，(1969)，誠文堂新光社．
- [4] 米沢徹・加藤武男，小型船用主機関防振すえ付けに関する研究，内燃機関，**22-283**, (1983),9-16.
- [5] Tokoyoda,T.,Miura,N.,Shibuya,T.,Nagasawa,H.,Elastic Mounting of Four-Stroke Low Speed Marine Diesel Engine, Proceedings of ISME Yokohama'95 , vol.11(1995) 7-12
- [6] 日本鉄道車両工業会，防振ゴム，(1982)
- [7] 井上，引原，弾性軸を有するロータ系の振れ回りに伴う回転速度動揺分岐現象，電気学会論文誌・D分冊，(1998),**Vol.118-D No.11**,1266-1271.
- [8] Dimentberg, M.F., McGovern, L., Norton, R.L., Chapdelaine, J., and Harrison, R., Dynamics of an Unbalanced Shaft Interacting with a Limited Power Supply, *Nonlinear Dynamics*, (1997), **13**, 171-187
- [9] 日本機械学会編，モード解析の基礎と応用，(1986)，丸善
- [10] 長松昭男，モード解析，(1988)，培風館，58-60.
- [11] Nayfeh, A.H., *Method of Normal Forms*, (1993), John Wiley & Sons, Inc, 35-49.
- [12] 佐藤壽芳，機械工学年鑑特集，機誌，**90-825**(1987),41.
- [13] Rosenberg, R.M., On Nonlinear Vibrations of Systems with Many Degrees of Freedom , *Advances in Applied Mechanics*, (1966), **9**, 155-242.
- [14] Shaw, S.W., and Pierre, C., Normal Modes for Nonlinear Vibration, *Journal of Sound and Vibration*, (1993), **164**, 85-124.
- [15] Vakakis, A.F., Manevitch, L.I., Mikhlin, Y.V., Pilipchuk, V.N., and Zevin,

- A.A., *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*, (1996), John Wiley & Sons, Inc.
- [16] Nayfeh, A.H., and Mook, D.T., *Nonlinear Oscillations*, (1979), John Wiley & Sons Inc.
- [17] Evan-Iwanowski, R.M., *Resonance Oscillations in Mechanical Systems*, (1976), Elsevier Scientific Publishing Company.
- [18] 常世田哲郎ほか 3 名, ディーゼル機関防振支持系の発停時の挙動について, 機構論, **930-63**, E(1993), 428-430.
- [19] 日本機械学会編, 電磁力応用機器のダイナミクス, (1990), コロナ社
- [20] 城戸輝希, 多自由度系の非線形振動解析, 慶応義塾大学大学院理工学研究科修士論文, (1995).
- [21] Wolfram, S., *Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer*, (1991), Addison-Wesley Publishing Company.
- [22] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, (1990), Springer-Verlag New York, 211-217.
- [23] 三橋邦宏ほか 2 名, 同期式能動防振支持の能動制振による安定化, 機論, **59-558**, C (1993), 353-356.
- [24] 藪野浩司, 機械システム非線形現象の新しい切り口, 日本機械学会, 学生対象セミナー, No.01-46, 資料
- [25] Vakakis, A.F., *Nonlinear Dynamics*, (1992), **3**, 123-143.
- [26] Nayfeh, A.H., and Nayfeh, S.A., Nonlinear normal modes of a continuous system with quadratic nonlinearities, *Journal of Vibration and Acoustics*, (1993), **117**(2), 199-205.
- [27] Nayfeh, A.H., and Nayfeh, S.A., On Nonlinear Modes of Continuous Systems, *Journal of Vibration and Acoustics*, (1994), **116**(1), 129-136.
- [28] Nayfeh, A.H., *Nonlinear Interactions*, (2000), John Wiley & Sons Inc.
- [29] Rand, R.H., Pak, C.H., and Vakakis, A.F., Bifurcation of nonlinear normal modes in a class of two degree of freedom systems, *Acta Mechanica[Suppl]*, (1992), **3**, 129-145.
- [30] 葉建瑞・安田仁彦, 1:1:1 の内部共振の条件を満たす三自由度系の非線形振動解析, 機論, **63-613**, C (1997), 2967-2975.
- [31] 常世田哲郎ほか, 三自由度防振支持系の Nonlinear Normal Modes, 機論, **68-671**, C (2002), 1950-1958

-
- [32] Rand, R.H., et al., Dynamics of Spinup Through Resonance, *Int. J. Non-linear Mechanics*, (1992), **27**, 489-502.
- [33] Quinn, D.D., Resonance Capture in a Three Degree-of-Freedom Mechanical System, *Nonlinear Dynamics*, (1997), **14**, 309-333.
- [34] 石田幸男・ほか 2 名, 非線形ばね特性を持つ回転軸系の危険速度通過時の振動, *機論*, **52**-478, C (1986), 1764-1771.
- [35] 能見公博, 下端に質量を持つ弦の共振点通過現象, *機論*, **63**-610, C (1997), 1835-1841.

著者論文目録

主論文に関する原著論文

1. 常世田哲郎・城戸輝希・佐藤一茂・吉沢正紹, 高調波成分を含む3自由度防振支持系の非線形強制振動解析(数式処理の援用による標準形の方法の適用), 日本機械学会論文集(C編)66巻650号, pp.3242-3249, (2000-10).
2. 常世田哲郎・山下範晃・山本毅・吉沢正紹, 三自由度防振支持系の Nonlinear Normal Modes(内部共振の存在する場合), 日本機械学会論文集(C編)68巻671号, pp.1950-1958, (2002-7).
3. 常世田哲郎・川名良・佐藤一茂・吉沢正紹, 三自由度防振支持系の共振点通過現象, 日本機械学会論文集(C編)72巻719号, pp.2034-2041, (2006-7).

その他の論文

1. 宮田弘市・井上知昭・内山祐一・常世田哲郎, 振動台加振によるディーゼル機関地震応答測定・評価法の検証, 日本機械学会論文集(C編)57巻533号, pp.100-105, (1991-1).
2. 常世田哲郎・小林智次・鈴木忠義, 内燃力発電設備による障害と対策, 電気設備学会誌 Vol.12, No.2, pp.149-162, (1992-2).

国際会議発表

1. Ryo KAWANA*, Tetsuro TOKOYODA, Kazushige SATO, Masatsugu YOSHIZAWA, Toshihiko SUGIURA, PASSAGE THROUGH RESONANCE IN A THREE-DEGREE-OF-FREEDOM VIBRATION ISOLATION SYSTEM, 2005 ASME International Design Engineering Technical Conference CD-ROM Proceedings, 85171, (IDETC 2005, Long Beach, California, USA).
2. Tetsuro TOKOYODA, Nobuyuki MIURA*, Tsuneyoshi SHIBUYA, Hideki

-
- NAGASAWA, Elastic Mounting of Four-Stroke Low-Speed Marine Diesel Engine, The Fifth International Symposium on Marine Engineering, (ISME 1995, Yokohama, Japan), pp.7-12, (1995).
3. Zhili HAN*, Tetsuro TOKOYODA, Kazushige SATO, Yoshiaki ITOH, Matusugu YOSHIKAWA, Yasushi TSUJIOKA, TRANSIENT NONLINEAR OSCILLATION OF A DIESEL ENGINE ON A SIMPLE ELASTIC FOUNDATION (PASSAGE THROUGH RESONANCE IN CASE OF STOP-AND-START), Proceedings of 2nd International Conference on Nonlinear Mechanics, (ICNM II, Beijing, China), pp.769-772, (1993).

国内学会発表

1. 常世田哲郎*・韓智力・伊東圭昌・吉沢正紹, ディーゼル機関防振系の発停時の挙動について, (No.930-63) 日本機械学会第 71 期全国大会講演論文集 (Vol.E), pp.428-430, (1993-10).
2. 常世田哲郎*・菱沼卓也・城戸輝希・吉沢正紹, 多自由度系の非線形振動現象の解析 (連立常微分方程式に対する標準形の適用), 日本機械学会 (No.95-8 I) 機械力学・計測制御講演論文集 (Vol.B), pp.70-73, (1995-8).
3. 常世田哲郎*・佐藤一茂・川名良・吉沢正紹, 三自由度防振支持系の共振点通過現象, Dynamics and Design Conference 2004 CD-ROM 論文集, 講演番号 658, (2004-9).
4. 城戸輝希*・菱沼卓也・常世田哲郎・吉沢正紹, ディーゼル機関防振系の挙動解析における数式処理の利用, (No.940-54) 日本機械学会第 7 回計算力学講演会講演論文集, pp.136-137, (1994-11).
5. 城戸輝希*・菱沼卓也・常世田哲郎・吉沢正紹, 多自由度系の非線形振動解析, (No.95-10) 日本機械学会第 73 期全国大会講演論文集 (V), pp.83-84, (1995-9).
6. 菱沼卓也*・常世田哲郎・城戸輝希・吉沢正紹, 非線形多自由度系の過渡的振動解析, No.96-1, 日本機械学会第 73 期通常総会講演会講演論文集 (I), pp.153-154, (1996-4).
7. 大石弘幸*・菱沼卓也・常世田哲郎・吉沢正紹, 機械システムに発生する非線形振動の解析手法についての検討, No.97-1, 日本機械学会第 74 期通常総会講演会講演論文集 (I), pp.212-213, (1997-3).
8. 海野大博*・常世田哲郎・大石弘幸・吉沢正紹, 内部共振を含む 3 自由度非線形振動の理論的考察, No.98-1, 日本機械学会第 75 期通常総会講演会講演論文集 (I), pp.9-10, (1998-3).
9. 山下範晃*・海野大博・常世田哲郎・杉浦壽彦, 3 自由度防振支持系の非線形振動 (内部共振による分岐現象), No.99-1, 日本機械学会 1999 年度年次大会講演論文集 (II), pp.167-168, (1999-7).
10. 山下清隆*・佐藤一茂・海野大博・常世田哲郎, 三自由度防振支持系の過渡的振動 (ウェーブレット変換を用いた解析), No.99-1, 日本機械学会 1999 年度年次大会講演論文集 (II), pp.199-200, (1999-7).
11. 川名良*・中村昌和・常世田哲郎・吉沢正紹, 多自由度防振支持系の Nonlinear Normal Modes についての基礎的考察, 日本機械学会 (No.04-5) Dynamics and

Design Conference 2004 CD-ROM 論文集, 講演番号 435, (2004-9).

付録

付録 A

簡単化の例

以下の議論では式 (3.9) の簡単化を例に挙げる．まず，式 (3.9) を複素座標に変換した式 (3.13) を次のように書き直す．

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= i\omega_1 \zeta_1 + F_{10}(x, \bar{x}) + \epsilon F_{11}(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \zeta_3, \bar{\zeta}_3) \\ &\quad + \epsilon^2 F_{12}(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \zeta_3, \bar{\zeta}_3)\end{aligned}\tag{A.1}$$

ただし，

$$\begin{aligned}F_{10} &= -\frac{A_1 \Omega^2}{4\omega_1}(x - \bar{x}) \\ F_{11} &= -\frac{i}{2\omega_1}[f_{11}(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \zeta_3, \bar{\zeta}_3) - 2\mu_{11}i\omega_1(\zeta_1 - \bar{\zeta}_1)] \\ F_{12} &= -\frac{i}{2\omega_1}f_{12}(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \zeta_3, \bar{\zeta}_3)\end{aligned}$$

である．ここで式 (B.1) に座標変換

$$\zeta_1 = \eta_1 + h_{10}(x, \bar{x})\tag{A.2}$$

を施すと，

$$\dot{\eta}_1 = i\omega_1 \eta_1 + i\omega_1 h_{10} - \frac{\partial h_{10}}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial h_{10}}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} + F_{10}(x, \bar{x}) + O(\epsilon)\tag{A.3}$$

となる．このとき，

$$-\left(i\omega_1 h_{10} - \frac{\partial h_{10}}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial h_{10}}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}}\right) = F_{10}(x, \bar{x})\tag{A.4}$$

となるように $h_{10}(x, \bar{x})$ を選べば， $F_{10}(x, \bar{x})$ を消去することができる．なお，式 (B.4) は未知関数 $h_{10}(x, \bar{x})$ についての線形方程式である．ここで，線形ベクトル

空間

$$H_0 = \text{span}\{x, \bar{x}\}$$

を考える．いま， $h_{10} = \delta_{11}x + \delta_{12}\bar{x}$ とすると， $h_{10}(x, \bar{x})$ は H_0 の要素であり，写像

$$h_{10} \mapsto - \left(i\omega_1 h_{10} - \frac{\partial h_{10}}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial h_{10}}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} \right) \quad (\text{A.5})$$

は H_0 から H_0 への線形写像である [22]．なお，このとき式 (B.2) は式 (3.16) に一致する．

また，写像 (B.5) より導かれる作用素

$$L_0(h_{10}) = \left(i\omega_1 h_{10} - \frac{\partial h_{10}}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial h_{10}}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} \right)$$

を考えると， H_0 は，

$$H_0 = L_0(H_0) \oplus G_0$$

と表される．ただし， G_0 は $L_0(H_0)$ の補空間である．一般に， F_{10} が $L_0(h_{10})$ の値域に入っていれば， $O(1)$ の項は全て消去できる．式 (B.1) の場合は実際にこの条件に当てはまっているので， $O(1)$ の項，すなわち x, \bar{x} の項を消去できて，本文中の式 (3.18) が導かれる．

次に $O(\epsilon)$ の簡単化について考える．式 (B.1) は，上述の $O(1)$ に関する座標変換の影響で高次の項が修正されて，式 (3.18) の様に見える．ここで式 (3.21) で表される座標変換

$$\eta_1 \mapsto \xi_1 + \epsilon h_{11}(\xi_1, \bar{\xi}_1, \xi_2, \bar{\xi}_2, \xi_3, \bar{\xi}_3, x, \bar{x})$$

を施すと，式 (3.18) は，式 (3.22) の形に変換される．これに対し，線形ベクトル空間

$$H_1 = \text{span}\{\xi_1, \bar{\xi}_1, x, \bar{x}, \xi_2^2, \bar{\xi}_2^2, \xi_3^2, \bar{\xi}_3^2, x^2, \bar{x}^2, \\ \xi_2 \bar{\xi}_2, \xi_3 \bar{\xi}_3, \xi_2 \xi_3, \xi_2 \bar{\xi}_3, \bar{\xi}_2 \xi_3, \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3, \xi_2 x, \xi_2 \bar{x}, \\ \bar{\xi}_2 x, \bar{\xi}_2 \bar{x}, \xi_3 x, \xi_3 \bar{x}, \bar{\xi}_3 x, \bar{\xi}_3 \bar{x}, x \bar{x}\}$$

を定めると， h_{11} ，すなわち，式 (3.24) は H_1 の要素である．このとき，

$$L_1(h_{11}) = \left(i\omega_1 h_{11} - \frac{\partial h_{11}}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 - \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{\xi}_1} \dot{\bar{\xi}}_1 \right. \\ \left. - \frac{\partial h_{11}}{\partial \xi_2} \dot{\xi}_2 - \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{\xi}_2} \dot{\bar{\xi}}_2 - \frac{\partial h_{11}}{\partial \xi_3} \dot{\xi}_3 - \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{\xi}_3} \dot{\bar{\xi}}_3 \right. \\ \left. - \frac{\partial h_{11}}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} \right) \quad (\text{A.6})$$

とすると, H_1 は

$$H_1 = L_1(H_1) \oplus G_1$$

と表され, G_1 に入っている項だけが残るように h_{11} を選ぶことができる. 式 (3.18) の場合は,

$$G_1 = \text{span} \{ \xi_1, x^2 \} \\ - \frac{1}{2\omega_1} [2\mu_{11}\omega_1\xi_1 + i(\alpha_{22}\Gamma_{12}^2 + \alpha_{23}\Gamma_{12}\Gamma_{13} + \alpha_{33}\Gamma_{13}^2)x^2] \in G_1$$

となり, 式 (3.25) が導かれる. $O(\epsilon^2)$ 以上についても同様のメカニズムで簡単化がなされる. つまり, 各オーダーでの計算においては, $L_k(H_k)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) の補空間に入るような項だけが新しい座標系に存在するように座標変換を行う. もし, $L_k(H_k) = H_k$ であれば $O(\epsilon^k)$ の項は全て消去できる.

付録 B

非線形部分の簡単化のメカニズム

以下の議論では式 (3.9) の簡単化を例に挙げる．まず，式 (3.9) を複素座標に変換した式 (3.13) を次のように書き直す．

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 = i\omega_1\zeta_1 + F_{10}(x, \bar{x}) + \epsilon F_{11}(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \zeta_3, \bar{\zeta}_3) \\ + \epsilon^2 F_{12}(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \zeta_3, \bar{\zeta}_3)\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

ただし，

$$\begin{aligned}F_{10} &= -\frac{A_1\Omega^2}{4\omega_1}(x - \bar{x}) \\ F_{11} &= -\frac{i}{2\omega_1}[f_{11}(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \zeta_3, \bar{\zeta}_3) - 2\mu_{11}i\omega_1(\zeta_1 - \bar{\zeta}_1)] \\ F_{12} &= -\frac{i}{2\omega_1}f_{12}(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \zeta_3, \bar{\zeta}_3)\end{aligned}$$

である．ここで式 (B.1) に座標変換

$$\zeta_1 = \eta_1 + h_{10}(x, \bar{x})\quad (\text{B.2})$$

を施すと，

$$\dot{\eta}_1 = i\omega_1\eta_1 + i\omega_1h_{10} - \frac{\partial h_{10}}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial h_{10}}{\partial \bar{x}}\dot{\bar{x}} + F_{10}(x, \bar{x}) + O(\epsilon)\quad (\text{B.3})$$

となる．このとき，

$$-\left(i\omega_1h_{10} - \frac{\partial h_{10}}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial h_{10}}{\partial \bar{x}}\dot{\bar{x}}\right) = F_{10}(x, \bar{x})\quad (\text{B.4})$$

となるように $h_{10}(x, \bar{x})$ を選べば, $F_{10}(x, \bar{x})$ を消去することができる. なお, 式 (B.4) は未知関数 $h_{10}(x, \bar{x})$ についての線形方程式である. ここで R^1 上に標準基底 $e_1 = 1$ を取り, この基底に関する座標を x, \bar{x} で表すと, 線形ベクトル空間

$$H_0 = \text{span}\{x, \bar{x}\}$$

をつくることができる. いま, $h_{10} = \delta_{11}x + \delta_{12}\bar{x}$ とすると, $h_{10}(x, \bar{x})$ は H_0 の要素であり, 写像

$$h_{10} \mapsto - \left(i\omega_1 h_{10} - \frac{\partial h_{10}}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial h_{10}}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} \right) \quad (\text{B.5})$$

は H_0 から H_0 への線形写像である [22]. また, $F_{10}(x, \bar{x})$ は明らかに H_0 の要素とみなすことができる. なお, このとき式 (B.2) は式 (3.16) に一致する.

また, 写像 (B.5) より導かれる作用素

$$L_0(h_{10}) = \left(i\omega_1 h_{10} - \frac{\partial h_{10}}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial h_{10}}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} \right)$$

を考えると, H_0 は,

$$H_0 = L_0(H_0) \oplus G_0$$

と表される. ただし, G_0 は $L_0(H_0)$ の補空間である. もし, F_{10} が $L_0(h_{10})$ の値域に入っていれば, $O(1)$ の項は全て消去できる. 式 (B.1) の場合は実際にこの条件に当てはまっているので $O(1)$ の項, すなわち x, \bar{x} の項を消去できて, 式 (3.18) が導かれる.

次に $O(\epsilon)$ の簡単化について考える. 式 (B.1) は, 上述の $O(1)$ に関する座標変換の影響で高次の項が修正されて, 式 (3.18) の様に見える. ここで式 (3.21) で表される座標変換

$$\eta_1 \mapsto \xi_1 + \epsilon h_{11}(\xi_1, \bar{\xi}_1, \xi_2, \bar{\xi}_2, \xi_3, \bar{\xi}_3, x, \bar{x})$$

を施すと, 式 (3.18) は, 式 (3.22) の形に変換される. これに対し, 線形ベクトル空間

$$H_1 = \text{span}\{\xi_1, \bar{\xi}_1, x, \bar{x}, \xi_2^2, \bar{\xi}_2^2, \xi_3^2, \bar{\xi}_3^2, x^2, \bar{x}^2, \\ \xi_2 \bar{\xi}_2, \xi_3 \bar{\xi}_3, \xi_2 \xi_3, \xi_2 \bar{\xi}_3, \bar{\xi}_2 \xi_3, \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3, \xi_2 x, \xi_2 \bar{x}, \\ \bar{\xi}_2 x, \bar{\xi}_2 \bar{x}, \xi_3 x, \xi_3 \bar{x}, \bar{\xi}_3 x, \bar{\xi}_3 \bar{x}, x \bar{x}\}$$

を定めると, h_{11} , すなわち, 式 (3.24) は H_1 の要素である. このとき,

$$\begin{aligned}
 L_1(h_{11}) = & \left(i\omega_1 h_{11} - \frac{\partial h_{11}}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 - \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{\xi}_1} \dot{\bar{\xi}}_1 \right. \\
 & - \frac{\partial h_{11}}{\partial \xi_2} \dot{\xi}_2 - \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{\xi}_2} \dot{\bar{\xi}}_2 - \frac{\partial h_{11}}{\partial \xi_3} \dot{\xi}_3 - \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{\xi}_3} \dot{\bar{\xi}}_3 \\
 & \left. - \frac{\partial h_{11}}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} \right) \quad (\text{B.6})
 \end{aligned}$$

とすると, H_1 は

$$H_1 = L_1(H_1) \oplus G_1$$

と表せて, G_1 に入っている項だけが残るように h_{11} を選ぶことができる. 式 (3.18) の場合は,

$$G_1 = \text{span} \{ \xi_1, x^2 \} - \frac{1}{2\omega_1} [2\mu_{11}\omega_1\xi_1 + i(\alpha_{22}\Gamma_{12}^2 + \alpha_{23}\Gamma_{12}\Gamma_{13} + \alpha_{33}\Gamma_{13}^2)x^2] \in G_1$$

となり, 式 (3.25) が導かれる. $O(\epsilon^2)$ 以上についても同様のメカニズムで簡単化がなされる. つまり, 各オーダーでの計算においては, $L_k(H_k)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) の補空間に入るような項だけが新しい座標系に存在するように座標変換を行う. もし, $L_k(H_k) = H_k$ であれば $O(\epsilon^k)$ の項は全て消去できる.

付録 C

振動解析における共鳴項の物理的な解釈

式 (3.25) においては, ξ_1 および x^2 の項だけが残る. ここで, 式 (B.6) の演算に注目したとき, 右辺第 2 項から導かれる ξ_1 および第 8 項から導かれる x^2 から $i\omega_1$ という係数 (固有値) を生じる. このとき, 右辺第 1 項の係数 (固有値) が同じ $i\omega_1$ であることから, この項が有する ξ_1, x^2 と前述の 2 つの項が相殺される (共鳴). 換言すれば, 共鳴項は時間と共に増大する項 (永年項) を生じるが, 非共鳴項はこれを生じないので一連の座標変換後, 共鳴項だけが微分方程式に存在する. なお, 式 (B.6) の演算によって ξ_1, x^2 の 2 項が消去されるため, 線形作用素 $L_1(\cdot)$ は H_1 上, 可逆ではなくなる. すなわち, 式 (3.13) から, $O(\epsilon^k)$ の項を消去できるための十分条件は線形作用素 $L_k(\cdot)$ が H_k 上可逆であることである. また, 消去できなかった 2 項が張る空間について次の関係が得られる.

$$\text{span}\{\xi_1, x^2\} \in \ker(L_1(H_1))$$

付録 D

直流モータについて

ブラシ付き直流モータは，回転速度制御およびトルク制御の容易さから，従来から可変速運転を必要とする幅広い用途に用いられてきた [19]．以後，ブラシ付き直流モータのことを簡単に，直流モータと呼ぶ．まず，動作原理を考える．簡単の為に電機子コイルは 1 巻きとし，本研究で用いたものと同様に，界磁極に永久磁石を用いたものを考える．電機子コイルが一様な磁束密度 $B[\text{Wb}]$ の中に置かれている．コイル面の法線方向と磁束の方向とのなす角を $\dot{\phi}t[\text{rad}]$ として，コイルに電機子電流 $i[\text{A}]$ を流すと，ローレンツ力によりコイルに回転力が働く．そのトルク τ は

$$\tau = abBi \sin \dot{\phi}t \quad [\text{Nm}] \quad (\text{D.1})$$

となる．ただし， $a[\text{m}]$ ， $b[\text{m}]$ はコイル辺長である．

また，導体が磁束の中を移動すると導体には電圧が誘起される．電機子コイルの回転角速度を $\dot{\phi}[\text{rad/s}]$ とすれば，この誘起電圧 e_a はファラデー電磁誘導の法則により

$$e_a = abB\dot{\phi} \sin \dot{\phi}t \quad [\text{V}] \quad (\text{D.2})$$

となる．トルク方向が常に一定となるように，ブラシと整流子により電機子電流 i を切り替える．簡単のために，電機子電流 i の大きさは誘起電圧 e_a によらず一定と仮定した．これは，コイルの回転角速度 $\dot{\phi}$ が小さいため誘起電圧 e_a が小さく，電機子電流 i がコイルの抵抗のみによって決定する場合に相当する．トルク τ はこのままでは大きなリップル分を含んでいる．トルク τ の平滑化は，複数の電機子コイルを回転軸の周りに均等に配置し，またそれに応じて，整流子を同

様に分割することにより実現できる．平滑化により，トルク τ および誘起電圧 e_a は，角度 $\dot{\phi}t$ によらずほぼ一定となり，

$$\tau = K_T i \quad [Nm] \quad (D.3)$$

$$e_a = K_E \dot{\phi} \quad [V] \quad (D.4)$$

と表現できる．コイル辺長さ a, b ，磁束密度 B ，その他のコイルの巻き数などは，モータの構造によって決まる定数であるので， K_T, K_E は定数である． K_T, K_E はそれぞれ，トルク定数および起電力定数と呼ばれる．このように複数個のコイルを用いる場合にも，式 (D.1) および式 (D.2) から容易にわかるように， $K_T = K_E$ である．なお，実際には磁束密度 B は，電機子電流 i により変化する（電機子反作用）．しかしながら，界磁極に永久磁石を用いる直流モータにおいては，永久磁石の作る磁束が電機子電流の作る磁束に比べて十分に大きく，電機子反作用の影響は無視してもさしつかえない．

実際の直流モータの電気的作用を示すのに，等価回路が用いられる．これを，図 D.1 に示す．

直流モータの記号は，その特徴であるブラシを描いて表す．電機子コイルのインダクタンス（電機子インダクタンス） L ，および電機子コイルの抵抗（電機子抵抗） R は，通常，直流モータの記号の外に描かれる．この等価回路から第 2 章の式 (2.6) が導かれる．

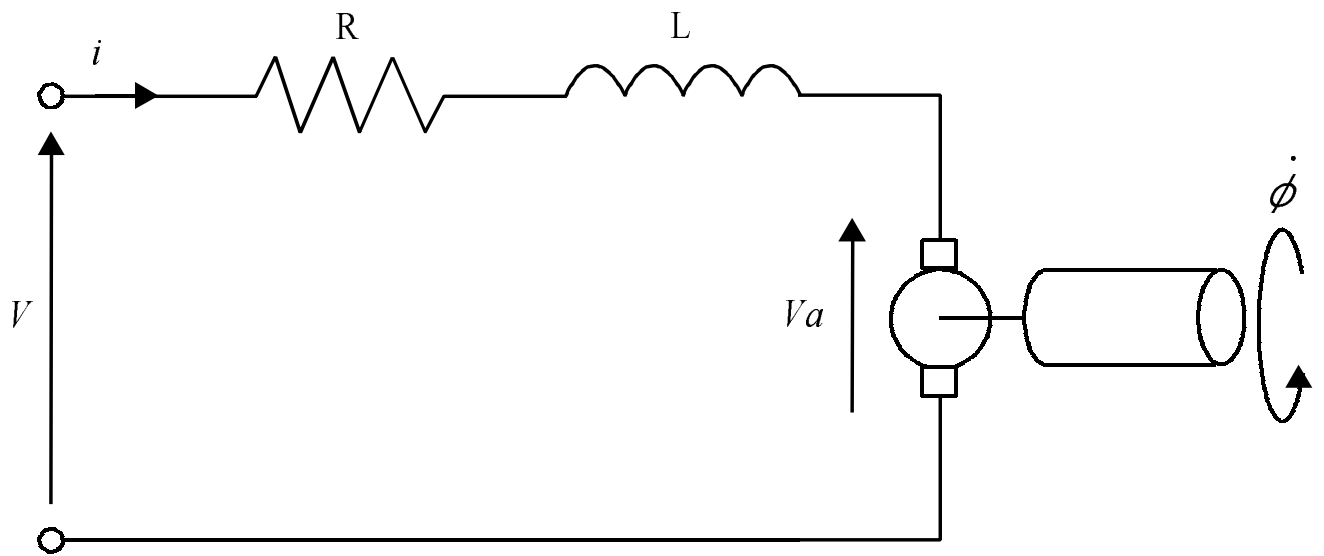


Fig. D.1 Equivalent Circuit of DC motor

付録 E

Routh-Hurwitz の判別法

平衡点付近の安定性は特別な場合を除き平衡点付近の線形近似で判断できる。
平衡点を

$$(b_{zr0}, b_{zi0}, b_{yr0}, b_{yi0}, b_{\theta r0}, b_{\theta i0})$$

とし, この点で以下の微係数をとる.

$$\begin{aligned} \xi_{zr} &= b_{zr} - b_{zr0}, \quad \xi_{zi} = b_{zi} - b_{zi0}, \quad \xi_{yr} = b_{yr} - b_{yr0}, \quad \xi_{yi} = b_{yi} - b_{yi0}, \\ \xi_{\theta r} &= b_{\theta r} - b_{\theta r0}, \quad \xi_{\theta i} = b_{\theta i} - b_{\theta i0} \end{aligned}$$

よってこの線形近似は,

$$\dot{\xi} = B \xi \tag{E.1}$$

となる. ただし,

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_{zr} \\ \xi_{zi} \\ \xi_{yr} \\ \xi_{yi} \\ \xi_{\theta r} \\ \xi_{\theta i} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial b'_{zr}}{\partial b_{zr}} & \frac{\partial b'_{zr}}{\partial b_{zi}} & \frac{\partial b'_{zr}}{\partial b_{yr}} & \frac{\partial b'_{zr}}{\partial b_{yi}} & \frac{\partial b'_{zr}}{\partial b_{\theta r}} & \frac{\partial b'_{zr}}{\partial b_{\theta i}} \\ \frac{\partial b'_{zi}}{\partial b_{zr}} & \frac{\partial b'_{zi}}{\partial b_{zi}} & \frac{\partial b'_{zi}}{\partial b_{yr}} & \frac{\partial b'_{zi}}{\partial b_{yi}} & \frac{\partial b'_{zi}}{\partial b_{\theta r}} & \frac{\partial b'_{zi}}{\partial b_{\theta i}} \\ \frac{\partial b'_{yr}}{\partial b_{zr}} & \frac{\partial b'_{yr}}{\partial b_{zi}} & \frac{\partial b'_{yr}}{\partial b_{yr}} & \frac{\partial b'_{yr}}{\partial b_{yi}} & \frac{\partial b'_{yr}}{\partial b_{\theta r}} & \frac{\partial b'_{yr}}{\partial b_{\theta i}} \\ \frac{\partial b'_{yi}}{\partial b_{zr}} & \frac{\partial b'_{yi}}{\partial b_{zi}} & \frac{\partial b'_{yi}}{\partial b_{yr}} & \frac{\partial b'_{yi}}{\partial b_{yi}} & \frac{\partial b'_{yi}}{\partial b_{\theta r}} & \frac{\partial b'_{yi}}{\partial b_{\theta i}} \\ \frac{\partial b'_{\theta r}}{\partial b_{zr}} & \frac{\partial b'_{\theta r}}{\partial b_{zi}} & \frac{\partial b'_{\theta r}}{\partial b_{yr}} & \frac{\partial b'_{\theta r}}{\partial b_{yi}} & \frac{\partial b'_{\theta r}}{\partial b_{\theta r}} & \frac{\partial b'_{\theta r}}{\partial b_{\theta i}} \\ \frac{\partial b'_{\theta i}}{\partial b_{zr}} & \frac{\partial b'_{\theta i}}{\partial b_{zi}} & \frac{\partial b'_{\theta i}}{\partial b_{yr}} & \frac{\partial b'_{\theta i}}{\partial b_{yi}} & \frac{\partial b'_{\theta i}}{\partial b_{\theta r}} & \frac{\partial b'_{\theta i}}{\partial b_{\theta i}} \end{bmatrix}$$

これにより, B の固有値を求める方程式は,

$$a_0 \lambda^6 + a_1 \lambda^5 + a_2 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_4 \lambda^2 + a_5 \lambda + a_6 = 0 \tag{E.2}$$

となる．ここで式 (E.2) の係数 a_n とその行列式 H_n が $a_n > 0, H_n > 0$ ($n = 1, \dots, 6$) の条件を満たすとき安定となる．

ただし，

$$\begin{aligned}
 H_1 &= a_1 \\
 H_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \\
 H_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \\
 H_4 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} \\
 H_5 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} \\
 H_6 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

付録 F

装置図面

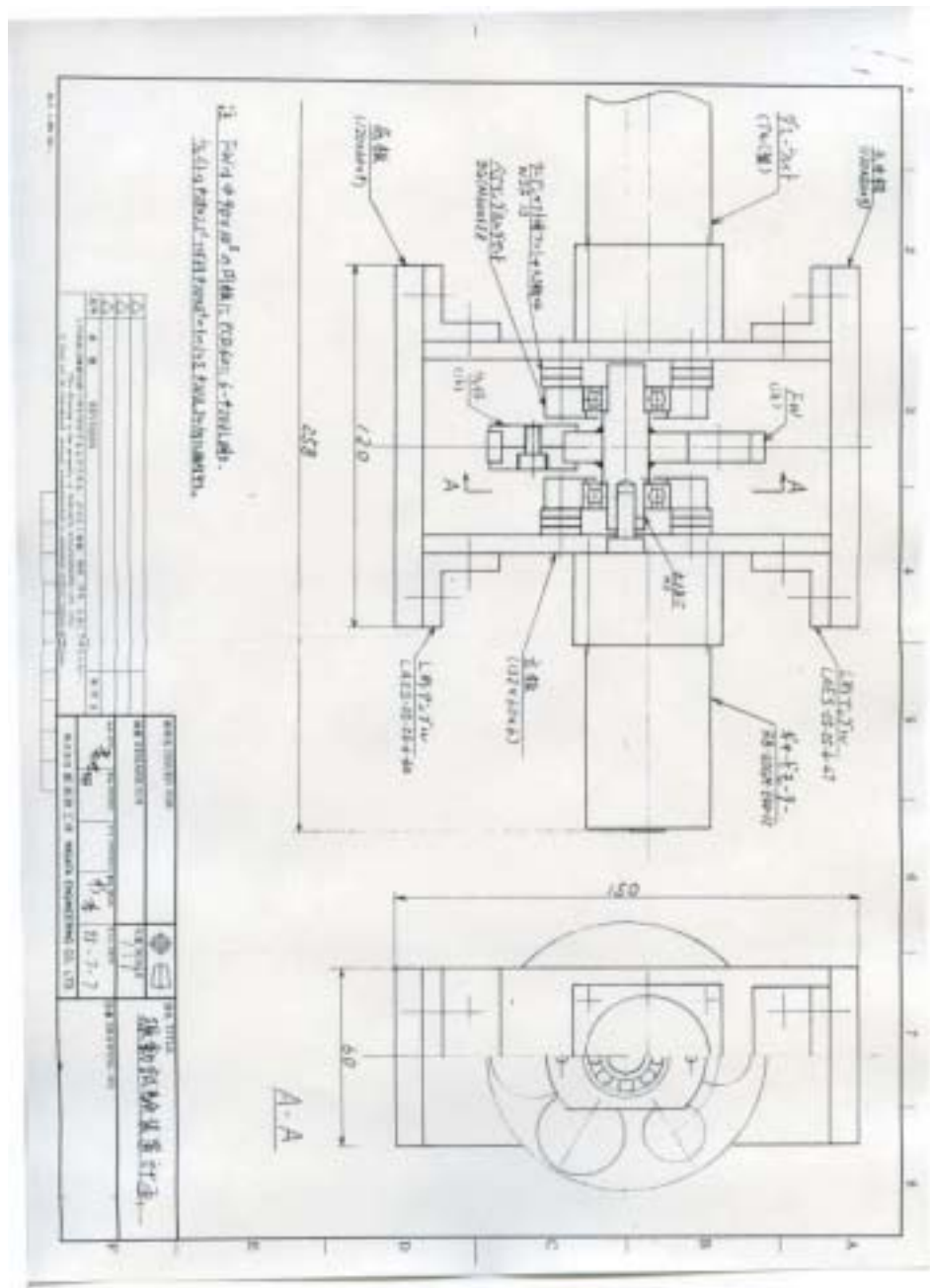


Fig. F.1 振動試験装置計画

表紙 部品表						
計号 ITEM NO.	部品番号 PART NO.	部品名称 TITLE	材質 MATERIAL	数量 QUANTITY	標準仕図番 STANDARD DRAWING NO.	備 考 REMARKS
		ギヤードモーター	コウエウ	1	RB-409H-6012	ミタテ電研
U99070030		减速机	A7075P-7B	1		*
U99070040		フライホイール	SS400	1		*
V99070050		ウェイト #1	+	3		*
V99070060		” #2	+	3		*
A00970510		ボルト	12.9	3		★ MSX10
		スプラインシャフト	コウエウ	5	MSW3	ミタテ
		ベアリングホルダセット	+	2	BGON60012A	+
		ワッシャー	+	12	WSF-13	+
A00970520		ボルト	12.9	4		★ M4x20
		ブレイク	コウエウ	2	SSA-130-60-6	ミタテ(直孔)
		コイテ	+	+	SSA-120-60-7	+
		レバーアングル	+	2	LAES-25-25-6-67	+
		” x7L	+	2	LAES-25-25-6-60	+
A00970512		ボルト	12.9	16		★ M5x12
V99070230		バネウツ	SS400	4		*
V99070240		” #2	+	8		*
V99070250		カム	STPG370	4		★ *
		シヨルダ-ボルト	コウエウ	4	MSB6.5-15	ミタテ
		”	+	4	MSB10-15	+
		”	+	4	MSB10-70	+

製 作 者 DRAWN BY	製 図 者 DESIGNED BY	検 査 者 CHECKED BY	承認 者 APPROVED BY	工程 課 PROCESSING	組立 課 ASSEMBLY
備 考 REMARK: O.K.				図 名 DRAWING TITLE シンドウシケンクミタテ	
承認 者 APPROVED BY	検 査 者 CHECKED BY	製 図 者 DESIGNED BY	製 作 者 DRAWN BY	図 番 DRAWING NO.	
株 式 公 司 新 潟 工 務 有 限 公 司 新 潟 工 務 有 限 公 司 NIIGATA ENGINEERING CO., LTD.					
This drawing is the property of NIIGATA ENGINEERING CO., LTD. It shall not be distributed, utilized, communicated or published without express permission.					

Fig. F.2 シンドウシケンクミタテ

仕様 REVISION						
行号 ROW NO.	部品番号 PART NO.	部品名称 TITLE	材質 MATERIAL	数量 QTY	標準記号 STANDARD SYMBOL	備考 REMARK
		シヤウケンクミタテ	コウニョウ	4	MKA10-30	ミスミ
A31300800		ロツクナット	SS400	4		☆ M8
V99070260		ワッシャー	SS400	2		☆ # L30x30x5
		ワッシャー		1		☆
A10700435		モ-ワッシャー	SS400	8		☆
		バネ * A	コウニョウ	4	WR10-30	ミスミ
		” * B	”	4	WF10-30	”
		” * C	”	4	WL10-30	”
		” * D	”	4	WM10-30	”
		” * E	”	4	WM13-30	”
		” * F	”	4	WH10-30	”
		” * G	”	4	WH13-30	”
					(追加) 4 枚 所掌外	
製作者 DRAWN BY		検出者 CHECKED BY		工程コード PROCESS CODE		承認者 APPROVED BY
備考 REMARK/注				承認者 DRW. TITLE		
				シンドウケンクミタテ		
承認者 CHK APPROVED	検出者 CHK CHECKED	製作者 CHK DRAWN	検出者 CHK CHECKED	図番 DRAWING NO.		
香田				24.9.1		
株式会社 新潟鉄工所 産業機事業部				NIGATA ENGINEERING CO., LTD.		
<small>この図面は産業機事業部工場の所有するものであり、無断で複製、転写、貸与、引渡してはなりません。 This drawing is the property of NIGATA ENGINEERING CO., LTD. It shall not be reproduced, copied, communicated or published without express permission.</small>						

Fig. F.3 シンドウケンクミタテ

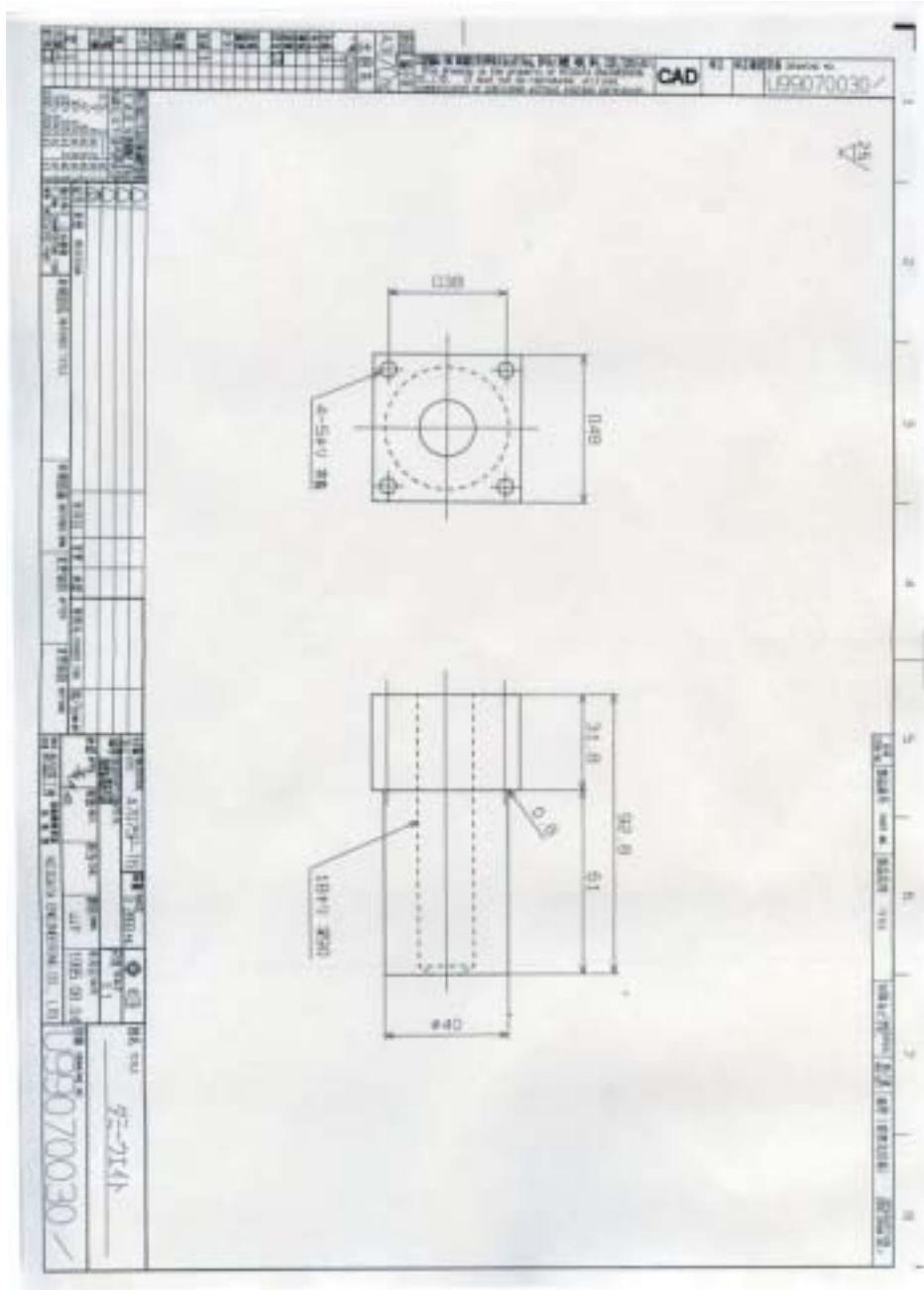


Fig. F.4 ダミーウエイト

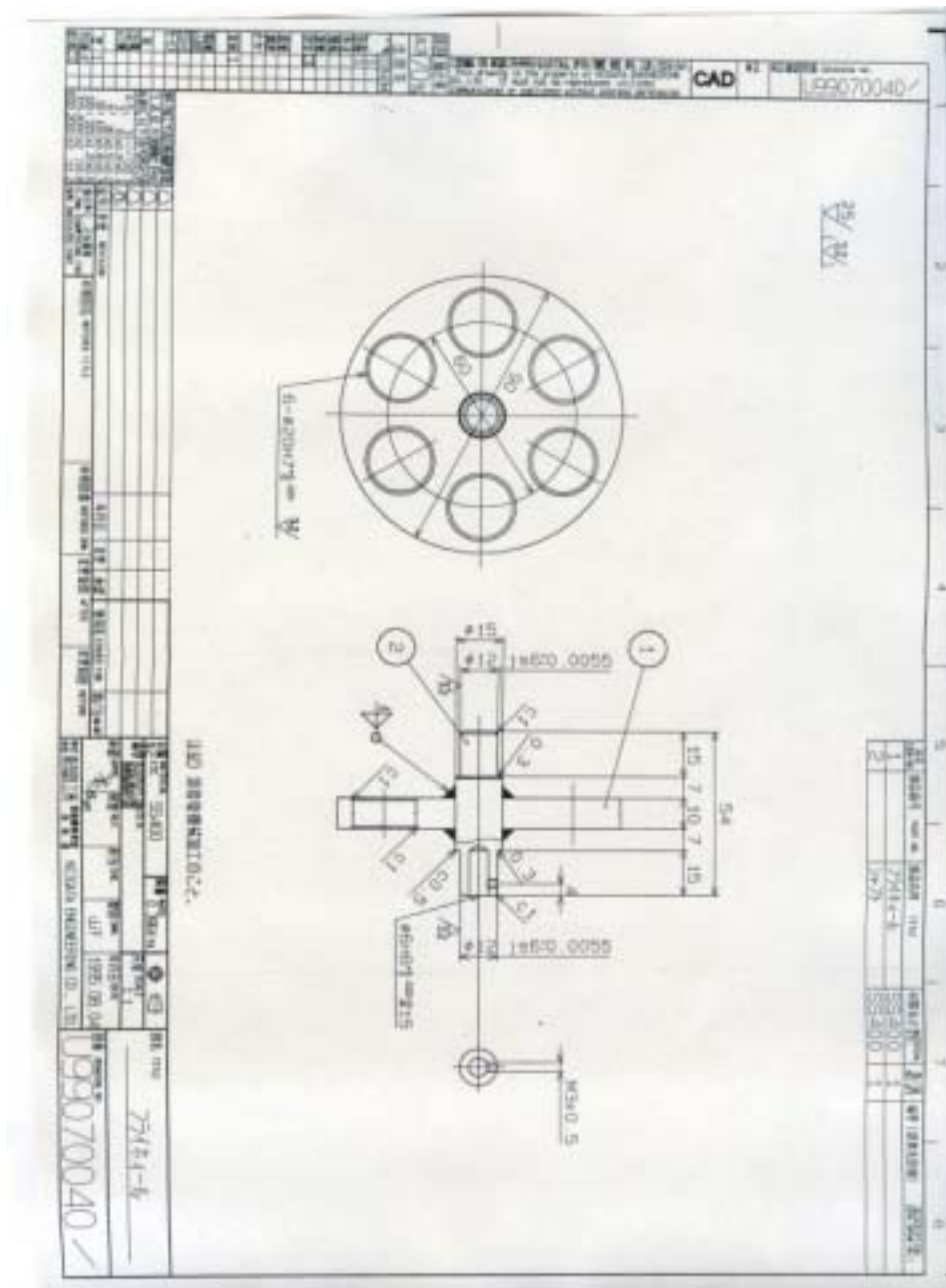


Fig. F.5 フライホイール

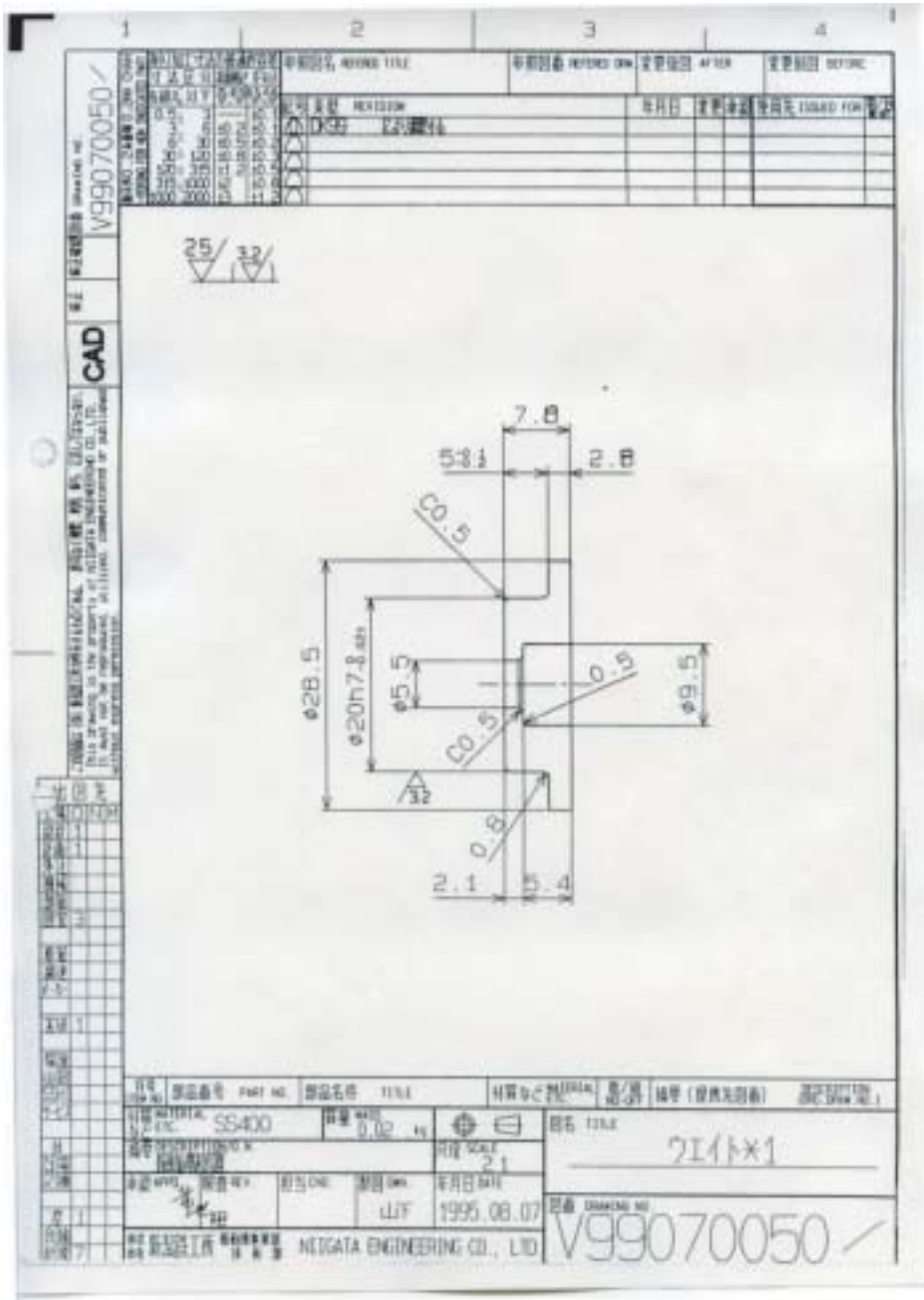


Fig. F.6 ウェイト*1

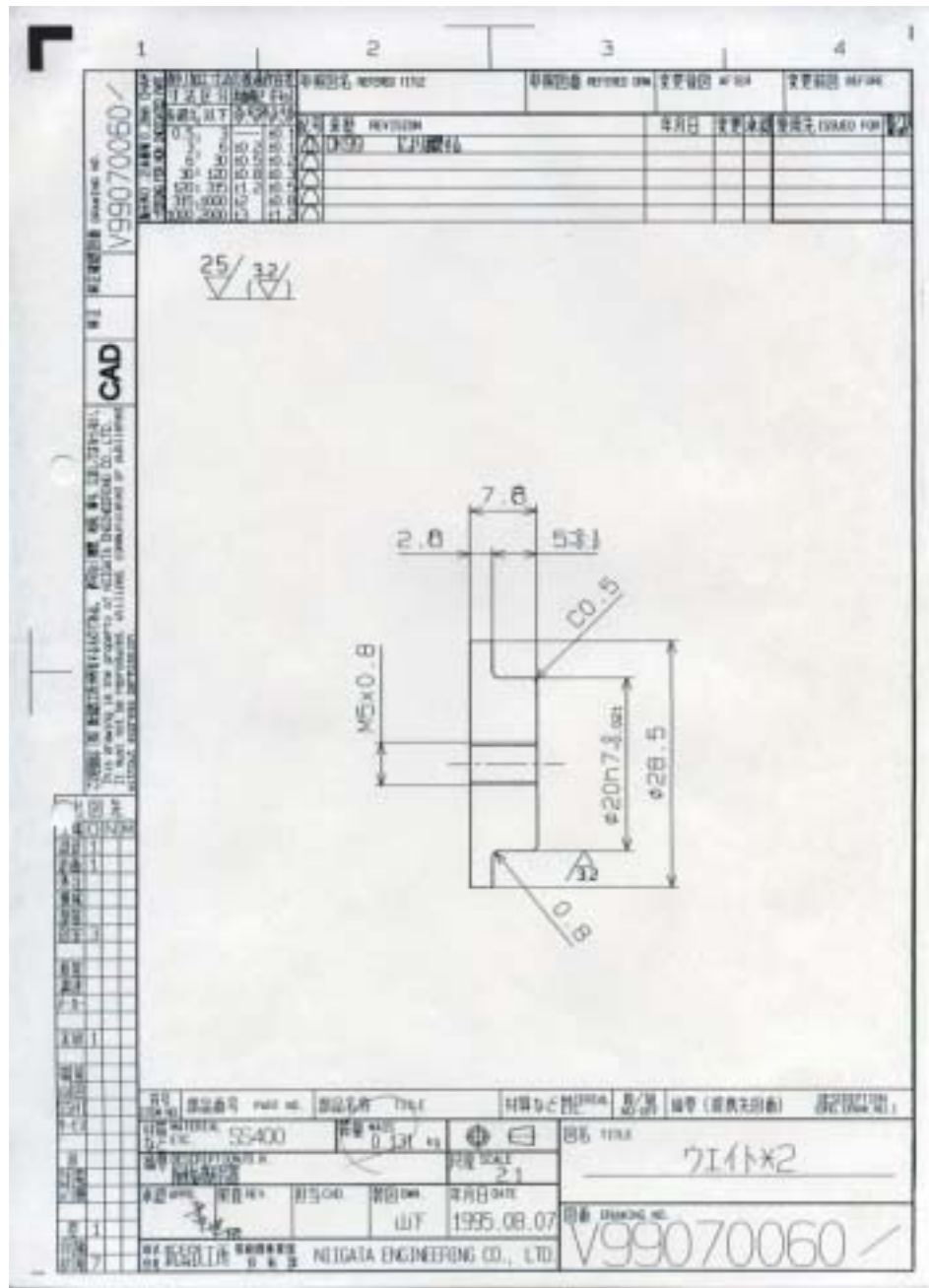


Fig. F.7 ウエイト * 2

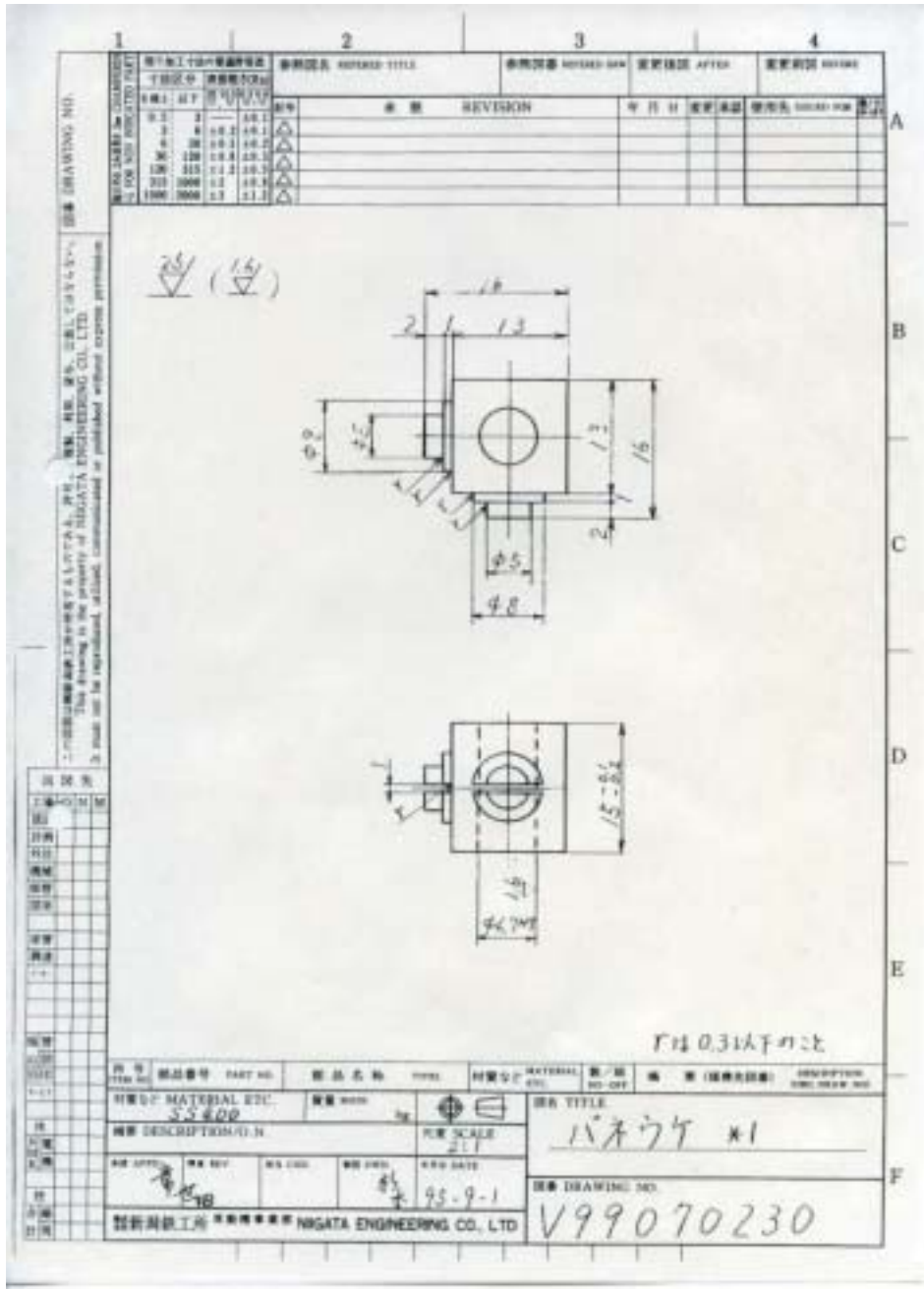


Fig. F.8 バネウケ * 1

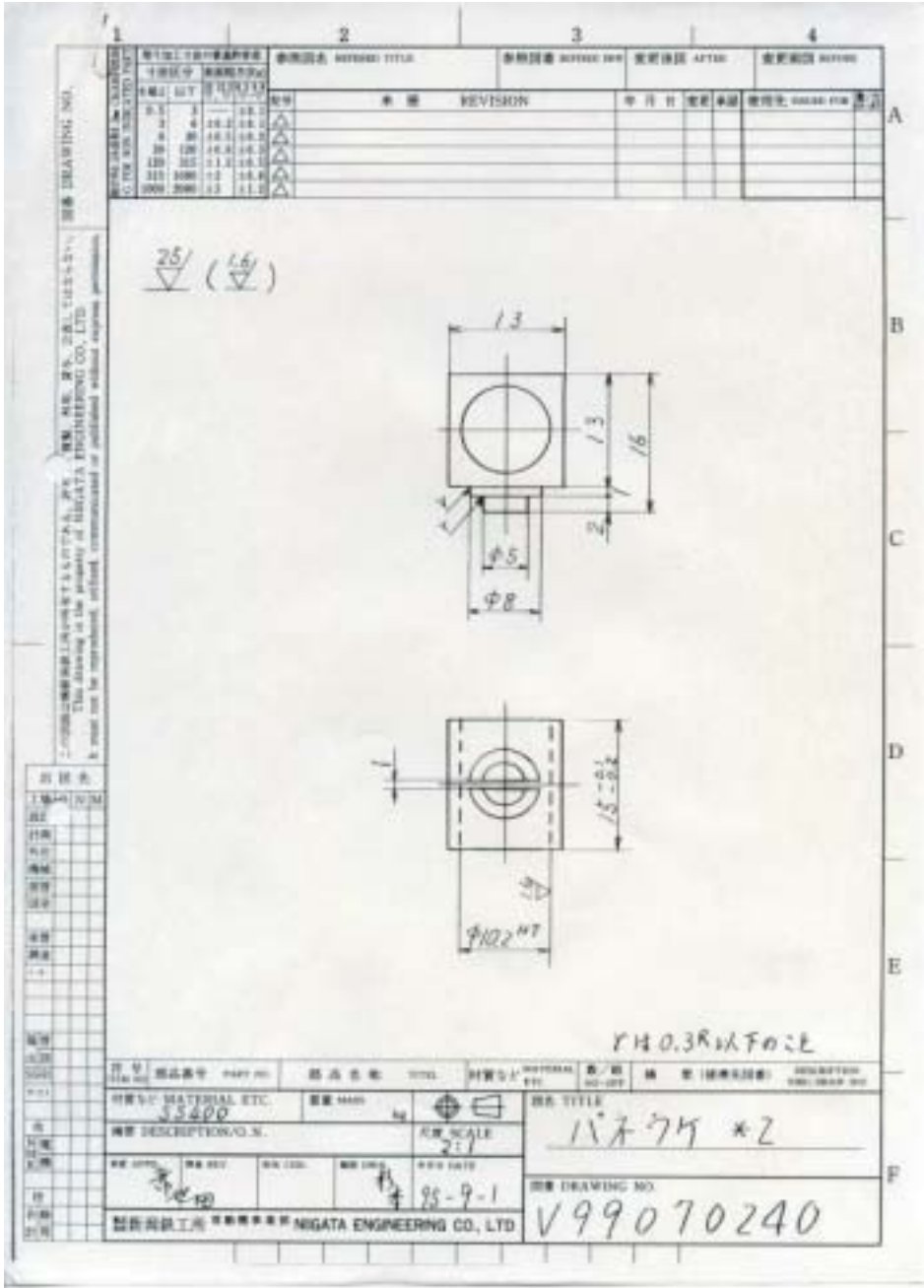


Fig. F.9 バネウケ * 2

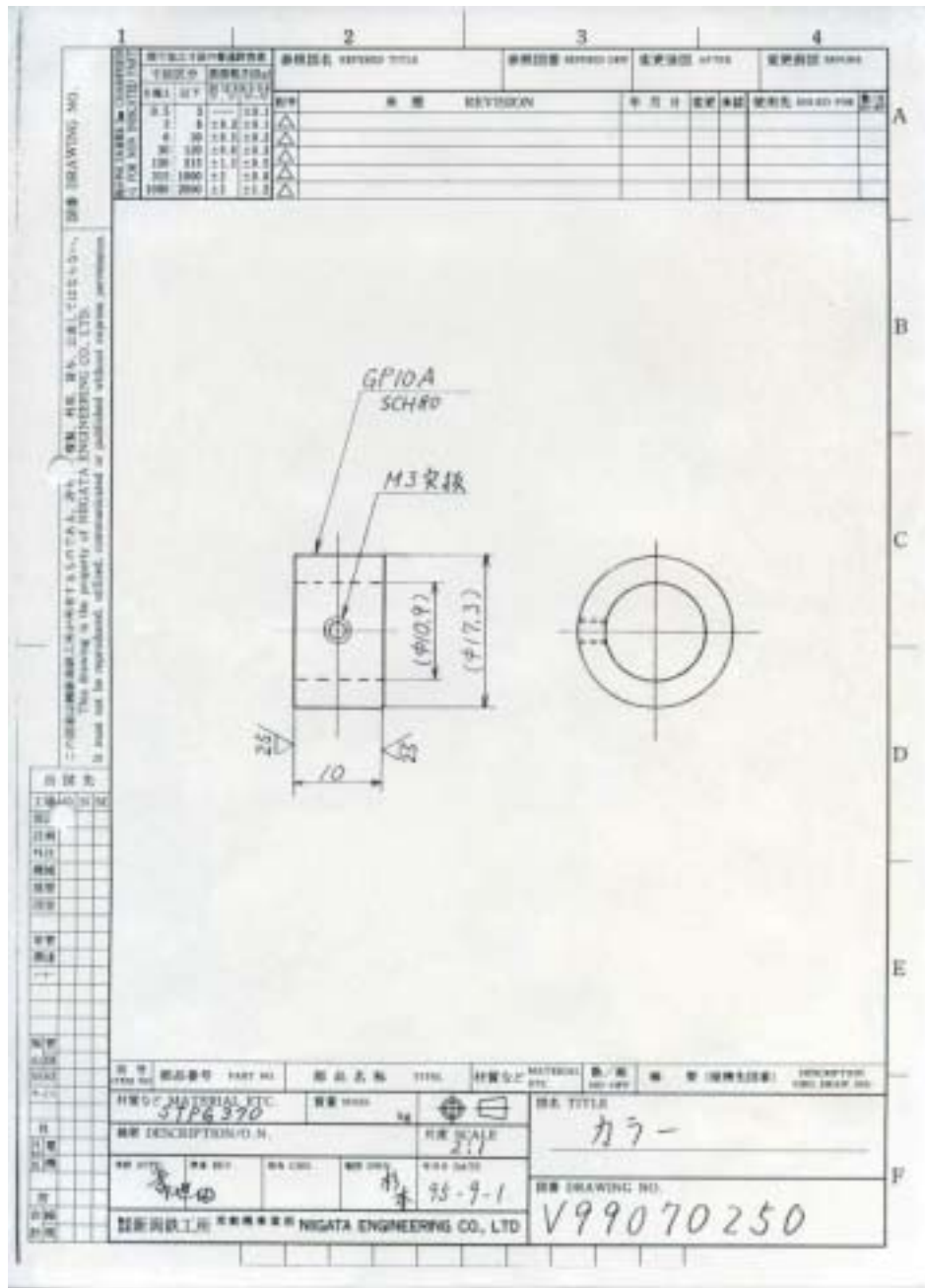


Fig.F.10 カラー

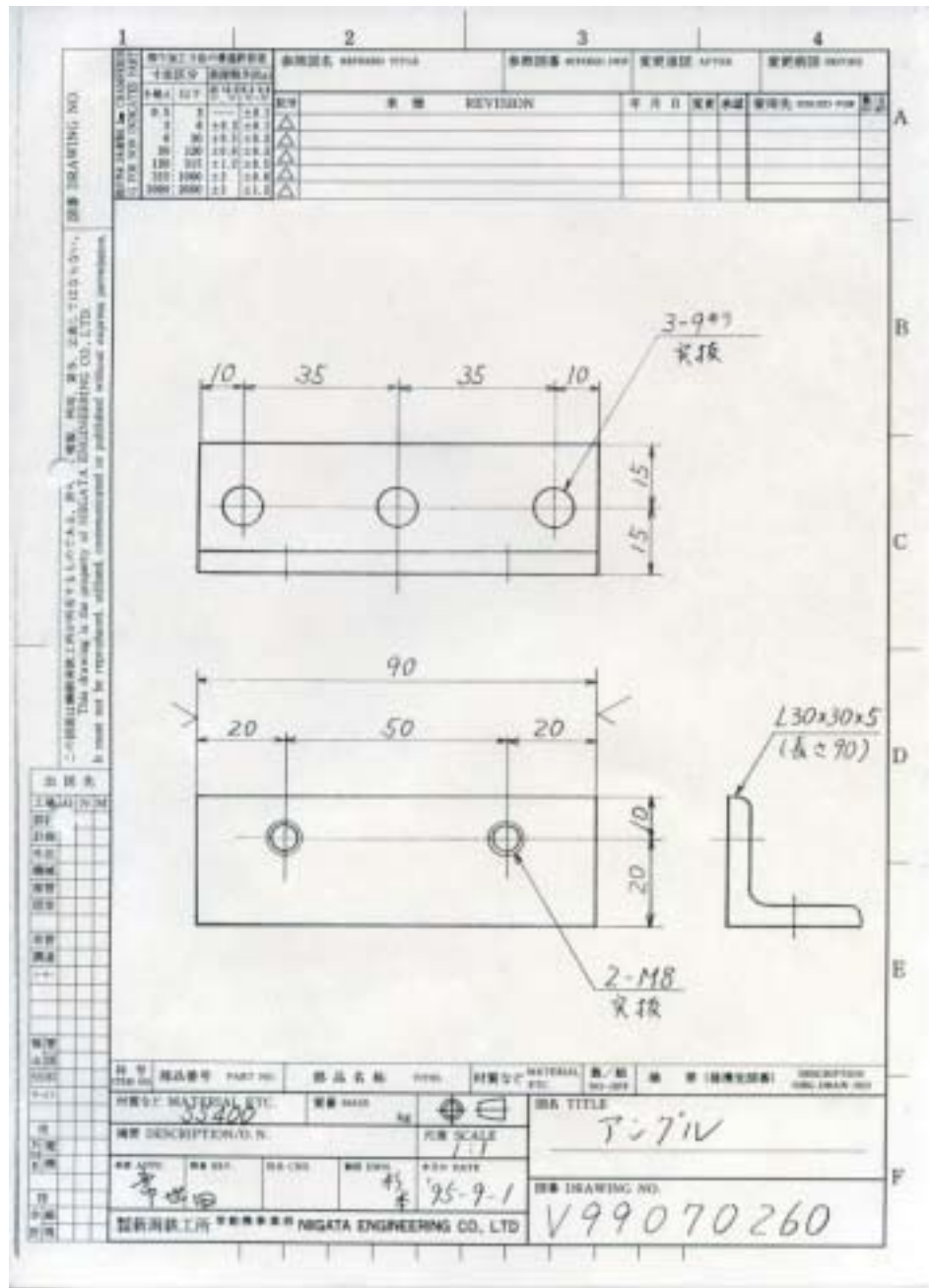


Fig.F.11 アングル