

レーザー・プリンタにおけるクリーナ・ブレードの自励振動  
- 摩擦力を介したモード連成の影響 -

平成18年度

笠 間 稔

# 目次

<b>1</b>	<b>緒論</b>	<b>1</b>
1.1	序言	1
1.2	研究の背景	1
1.2.1	電子写真方式による画像形成プロセス	1
1.2.2	クリーナ・ブレードに求められる特性	7
1.2.3	クリーナ・ブレードの異音問題	8
1.2.4	クリーナ・ブレード異音発生機構に関する研究	9
1.2.5	自励振動発生機構に関する研究	10
1.3	本研究の目的および構成	15
<b>2</b>	<b>実機における異音の観察とその特徴</b>	<b>17</b>
2.1	序言	17
2.2	実機における定量的把握	18
2.2.1	異音の発生場所	18
2.2.2	異音の原因となる自励振動の特徴	18
2.2.3	乾性摩擦モデルと異なる特徴	19
2.3	自励振動に関わる振動系の特定	26
2.3.1	感光体の検証	26
2.3.2	クリーナ・ブレード部の検証	31
2.4	結言	34
<b>3</b>	<b>自励振動発生機構の検討</b>	<b>35</b>
3.1	序言	35
3.2	単純要素モデルの抽出	36
3.2.1	実験装置の概要	36
3.2.2	異音の特徴再現結果	37
3.3	自励振動発生機構に関する理論的検討	43
3.3.1	多自由度連成自励振動モデル	43
3.3.2	クリーナ・ブレード自励振動モデル	44
	(1) 有限要素を用いた基礎方程式	44

(2) 摩擦による連成力を考慮した連成振動モデル	45
3.3.3 数値計算による妥当性検証	46
3.4 二自由度系の連成における自励振動発生条件	54
3.5 結言	56
<b>4 不安定振動モードに関する非線形振動方程式の導出</b>	<b>57</b>
4.1 序言	57
4.2 不安定振動モードに関する非線型振動方程式の定式化	58
4.3 多重尺度法による非線形定常周期解の導出	63
4.4 非線形定常周期解の二自由度系への再構成	64
4.5 定常振幅の理論式と非線形項 $\delta$ の決定	68
4.6 結言	72
<b>5 ケース・スタディによる設計への適用検討</b>	<b>73</b>
5.1 序言	73
5.2 クリーナ・ブレード部の設計	75
5.2.1 ブレードの設計パラメータ	75
5.2.2 設計変更パラメータの選定と範囲	78
5.3 数値計算による定常振幅予測	79
5.3.1 定常振幅の予測	79
5.3.2 実験による妥当性検証	81
5.4 ケース・スタディからの自励振動抑制のための設計への提言	89
5.4.1 ケース・スタディによる定常振幅値分布の可視化	89
5.4.2 安定条件式からの考察	90
5.4.3 定常振幅に関する理論式からの考察	91
5.4.4 自励振動抑制のための設計への提言	92
5.5 結言	99
<b>6 結論</b>	<b>100</b>
<b>謝辞</b>	<b>103</b>
<b>参考文献</b>	<b>104</b>

**付録 A 振幅の成長を抑制する非線形成分の検討** **110**

**著者論文目録** **114**

# 本論文で用いた主な記号

$A_4$	:	定常状態に達した場合の複素振幅の 4 次モード成分
$A_5$	:	定常状態に達した場合の複素振幅の 5 次モード成分
$A_s$	:	定常状態に達した場合の複素振幅
$[A_F]$	:	ブレードと感光体の接触点における反力に対する各モードの寄与率を要素とする行列
$E$	:	ブレードのヤング率
$\{F\}$	:	ブレードと感光体の接触部に作用する摩擦力を要素とする列ベクトル
$\{F'\}$	:	モード変位と速度に関する未知非線形成分を要素とする列ベクトル
$\{F_N\}$	:	ブレードと感光体の接触点における垂直抗力
$[K]$	:	有限要素モデルの剛性行列
$L_b$	:	ブレードの長さ
$L_f$	:	ブレードの自由長
$[M]$	:	有限要素モデルの質量行列
$N$	:	有限要素モデルの節点数
$\{P\}$	:	固有ベクトル $\{\psi\}$ に対応する随伴ベクトル
$R$	:	$A_4$ と $A_5$ の複素振幅比
$[R]$	:	一階化された二自由度モード連成系の速度項の係数行列
$T_b$	:	ブレードの厚さ
$\{Z\}$	:	4 次モードと 5 次モードの変位と速度を要素とする状態ベクトル
$a$	:	ブレードと感光体の接触点における反力に対する各モードの寄与率
$d$	:	ブレードの初期設定位置からの押し付け量
$f_4$	:	モード変位と速度に関する未知非線形成分
$f_5$	:	モード変位と速度に関する未知非線形成分
$n$	:	モードの数
$q_u$	:	非線形項を含めたモード変位 $\xi$ の実部
$q_4$	:	連成を起こす 4 次モードのモード変位
$q_5$	:	連成を起こす 5 次モードのモード変位

$\{q\}$	:	モード変位を要素とするベクトル
$x_\eta$	:	ブレードの有限要素モデルにおいて定常状態に達した場合の任意の節点番号 $\eta$ における振動振幅
$x_{exp}$	:	定常状態に達した場合のブレード上の振動振幅の実測値
$\{x\}$	:	有限要素モデルの各節点の釣り合い位置からの変位ベクトル
$[\Gamma]$	:	一階化された二自由度モード連成系の変位項の係数行列
$[\Phi]$	:	質量正規化固有関数ベクトルを列要素とする固有関数行列
$[\Omega]$	:	各モードの固有角振動数を対角要素とする正方行列
$\{\Psi\}$	:	連成後の各固有値に対応する固有関数ベクトル
$\{\phi\}$	:	質量正規化固有関数ベクトル
$\beta$	:	ブレード先端部のたわみ角度
$\delta$	:	モード速度の 3 乗で表される非線形項の係数
$\varepsilon$	:	$\lambda_{ur}$ と $\lambda_{ui}$ の比で表される無次元パラメータ
$\theta$	:	感光体とブレードの初期設定角度
$\theta_w$	:	感光体とブレードの当接角度
$\lambda$	:	連成する二自由度系における固有値
$\lambda_1$	:	$\lambda$ の中で実部が正の複素数である固有値
$\lambda_{ur}$	:	複素固有値 $\lambda_1$ の実部 (振動の成長率)
$\lambda_{ui}$	:	複素固有値 $\lambda_1$ の虚部 (振動の振動数)
$\mu$	:	ブレードと感光体の接触点における摩擦係数
$\nu_4$	:	4 次モードのモード変位 $q_4$ の無次元量
$\nu_5$	:	5 次モードのモード変位 $q_5$ の無次元量
$\nu_u$	:	$q_u$ の無次元量
$\nu_{u0}$	:	$\nu_u$ を無次元パラメータで展開したときの $\varepsilon^0$ に対応する項
$\nu_{u1}$	:	$\nu_u$ を無次元パラメータで展開したときの $\varepsilon^1$ に対応する項
$\xi$	:	非線形項を含めたモード変位
$\tau$	:	時間の無次元量
$\tau_0$	:	$\tau$ に代わる時間尺度
$\tau_1$	:	$\tau$ に代わる時間尺度
$\phi_{4\eta}$	:	ブレードの有限要素モデルにおいて任意の節点番号 $\eta$ に対応する 4 次モードの固有関数の成分
$\phi_{5\eta}$	:	ブレードの有限要素モデルにおいて任意の節点番号 $\eta$ に対応する 5 次モードの固有関数の成分

# 第 1 章

## 緒論

### 1.1 序言

電子写真方式によるレーザー・プリンタにおいて、クリーナ・ブレードと感光体表面との摩擦に起因する自励振動によって、高周波数成分を持つ非常に耳障りな音が放射される場合がある。この問題は古くから知られているにも関わらず、未だに製品開発時の試行錯誤的な努力によって、多大な時間をかけて解決されているのが現状であり、問題の再発の危険性を常に内包している。そこで、この異音の原因である自励振動の発生機構の理論的解明とこれに基づく根本的解決策の提示が切望されている。

本章では、まず研究の背景として、レーザー・プリンタの構造と電子写真プロセスの概要を述べ、クリーナ・ブレードの役割を明らかにする。次に、本研究で取り上げる異音の概要と、関連する研究の状況について述べ、本研究の位置付けを明らかにする。最後に、本研究の目的を明確にするとともに、本論文の構成を示す。

### 1.2 研究の背景

#### 1.2.1 電子写真方式による画像形成プロセス

電子写真方式[1,2,3,4]による普通紙複写機やレーザー・プリンタに代表される画像形成装置は、視覚を介して情報を記録・伝達するための機器である。近年では、画質、印字速度の大幅な向上により、オフィスから個人まで広く普及し、情報化社会を支える重要な役割を担っている。

本研究では、このような電子写真方式によるレーザー・プリンタを主な研究対

象とする。本節では、電子写真方式による画像形成プロセスについて説明する。電子写真方式は、1938年にチェスター・カールソンらによって発明され、以降基本的な画像形成プロセスは変わっていない。電子写真方式の画像形成プロセスは、光導電現象を利用して感光体上に静電的な電荷の像（静電潜像）を形成し、着色した帯電微粒子（トナー）を静電力で静電潜像に付着させて可視像を得る。図 1.1 に電子写真方式の 6 つの基本プロセスを示す。

- (1) **帯電** このプロセスでは、光導電性を有する感光体（電荷を発生する電荷発生層と電荷を輸送する電荷輸送層の 2 層構造の有機材料を表面に塗布した薄肉の円筒）表面に、所望の帯電電圧を有する電荷層が形成される。現在のレーザー・プリンタでは、電荷供給ローラを感光体に接触させて電荷移動による帯電を行うローラ帯電方式[5,6,7]が主流となっている。従来の放電ワイヤ方式[8]に代表される非接触帯電方式と比較して、ローラ帯電方式では、オゾン発生量が少ない、印加電圧を低く抑えられる等の利点がある。電荷供給ローラは鉄、銅合金等の導電性金属芯と、電荷供給層となる導電カーボン粉を混合したウレタン・ゴムで構成されている。金属芯は高圧電源に接続され、通常の画像形成プロセスでは、約 1-1.5kV の電圧が印加される。
- (2) **露光** 次の露光プロセスでは、感光体上に形成された電荷層にレーザー光が照射され、画像データに対応した静電潜像が形成される。画像データに対応したデジタル信号に基づいて半導体レーザーがスイッチングされ、感光体表面を走査する[9]。レーザー光の照射には、反射面を複数有する回転多面鏡（ポリゴンミラー）が利用される。数万 rpm で高速回転する回転多面鏡にレーザー光が反射、偏向し、感光体表面を走査露光する。レーザー光の照射した画像に相当する部分では、感光体表面の帯電電荷が除電され、電位が減衰する。
- (3) **現像** 次の現像プロセスでは、トナーを静電潜像に付着させることにより感光体上に視認可能な画像が形成される。このプロセスでは、正電荷に帯電したキャリアと呼ばれる導電性磁性粒子とトナーを混合した現像剤が用いられる。キャリアとの摩擦帯電によりトナーは 5-30 $\mu$ C/g の比電荷をもち、静電力によりキャリア表面に付着している。多極の固



定磁石の周囲に回転可能なスリーブ部を設けた現像ローラが、トナーを付着させたキャリアを磁力によってスリーブ上に吸引・搬送する。スリーブには画像部電位と非画像部電位の間電位に設定されたバイアス電圧が印加され、感光体に近接する現像領域では、画像部と非画像部で逆向きの電界が形成される。形成された電界の作用によって、帯電したトナーのみが感光体表面の画像領域に移動し、現像が行われる[10,11,12,13]。

- (4) **転写** このプロセスでは、感光体上に現像されたトナーの静電力による記録紙への移動と付着が行われる。帯電プロセスと同様にローラ帯電器により、記録紙が数 100～数 kV 程度に帯電され、その際発生する静電気力によってトナーが記録紙上に移動・付着する[14]。
- (5) **定着** 転写プロセスによって紙の上に移動・付着したトナーは、単に静電力によって紙に付着しているだけである。定着プロセスでは、熱と圧力によるトナーの記録紙への溶融・固着が行われる。ハロゲン・ランプなどの熱源を内蔵するヒートローラと両端をバネによって加圧・支持されたローラにより、画像を保持した用紙に熱と圧力が加えられる。通常のトナーは 200℃ 前後の温度で軟化・溶融し、用紙表面の繊維などに浸透したのち、冷却・固化して固着する。
- (6) **クリーニング** 転写プロセス後の感光体上には、未転写のトナーや帯電プロセスの際に生じたオゾン、窒素酸化物などの活性物質およびそれ等の反応生成物(以後、これらを放電生成物と総称する)が残留している。クリーニング・プロセスでは、これらの残留物の除去と清掃が行われる。感光体に現像されたトナーのうち、20%程度は転写プロセス後に感光体上に残留する。また、トナー以外にも紙粉や帯電時の放電生成物等が感光体上に残留している。これらの残留物が次の画像形成プロセスに持ち越された場合、帯電、露光、現像の各プロセスに悪影響を及ぼす。現在は、弾性ゴム・ブレードを感光体表面に押し当てて、残留物を機械的な力で除去するクリーナ・ブレード方式[15]が主流である。弾性ゴム・ブレード(以後、単にブレードと称す)の材料としては、耐磨耗性、耐オゾン腐食性、耐トナー腐食性といった材料特性

に加え、残留物を確実に除去するための真直度の高いエッジを形成しやすいといった点から、熱硬化型ポリウレタン・ゴムが用いられている [16]。ブレードはプレス成型された鋼板や押し出し成型のアルミ板に接着固定もしくは一体成型され、感光体の軸方向全長にわたって均一な当接角度と押圧力を与える。ブレードの感光体に対する設置方式には、押圧力と摩擦力の合力がブレードを圧縮する方向にはたらく角度で設置されるドクター方式と、ブレードを伸張する方向にはたらく角度で設置されるワイパー方式があり、近年では前者の方式が主流である。

図 1.2 に、一般的なレーザー・プリンタの構造の概要を示す [17]。図中、時計回りに回転する感光体の周囲には、前述した 6 つのプロセスを行うデバイスが配置されている。まず、ローラ帯電器によって感光耐表面上に数百 V の電位を持つ電荷層が形成される。次に、レーザー露光装置によって、感光体上に画像信号に従ってレーザー・ビームが照射され、レーザーが照射された部分はローラ帯電器により付与された帯電電位が消失する。この結果、感光体上には所望の画像に対応した静電潜像が形成される。そして現像ローラから供給されるトナーによって静電潜像が現像される。形成されたトナー像の回転位置と同期を取って給紙ローラが回転し、給紙トレイ内の記録紙を図中の一点鎖線で示す経路に従って感光体へと搬送する。感光体上に現像されたトナー像は、転写ローラの放電に伴う静電力によって記録紙側へと移動、転写される。その後、定着器で圧力と熱を加えられてトナーが記録紙上に固着され、排紙口に設けられた排紙ローラによって機外へと排出される。感光体上に残留するトナー、紙粉、放電生成物等がクリーナ・ブレードにより除去され、次の画像形成プロセスへと移行する。

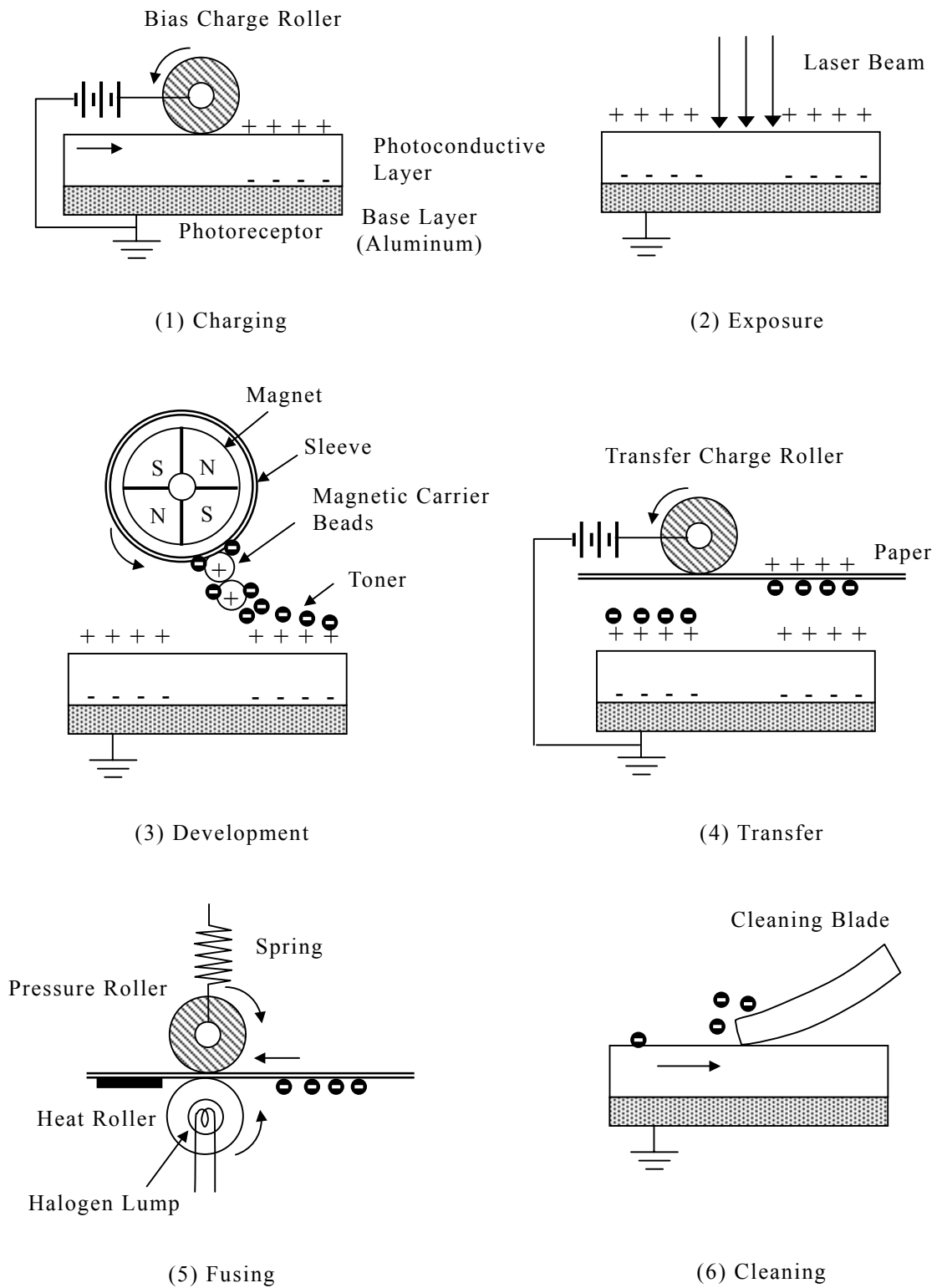


Fig.1.1 Processes of Electrophotography

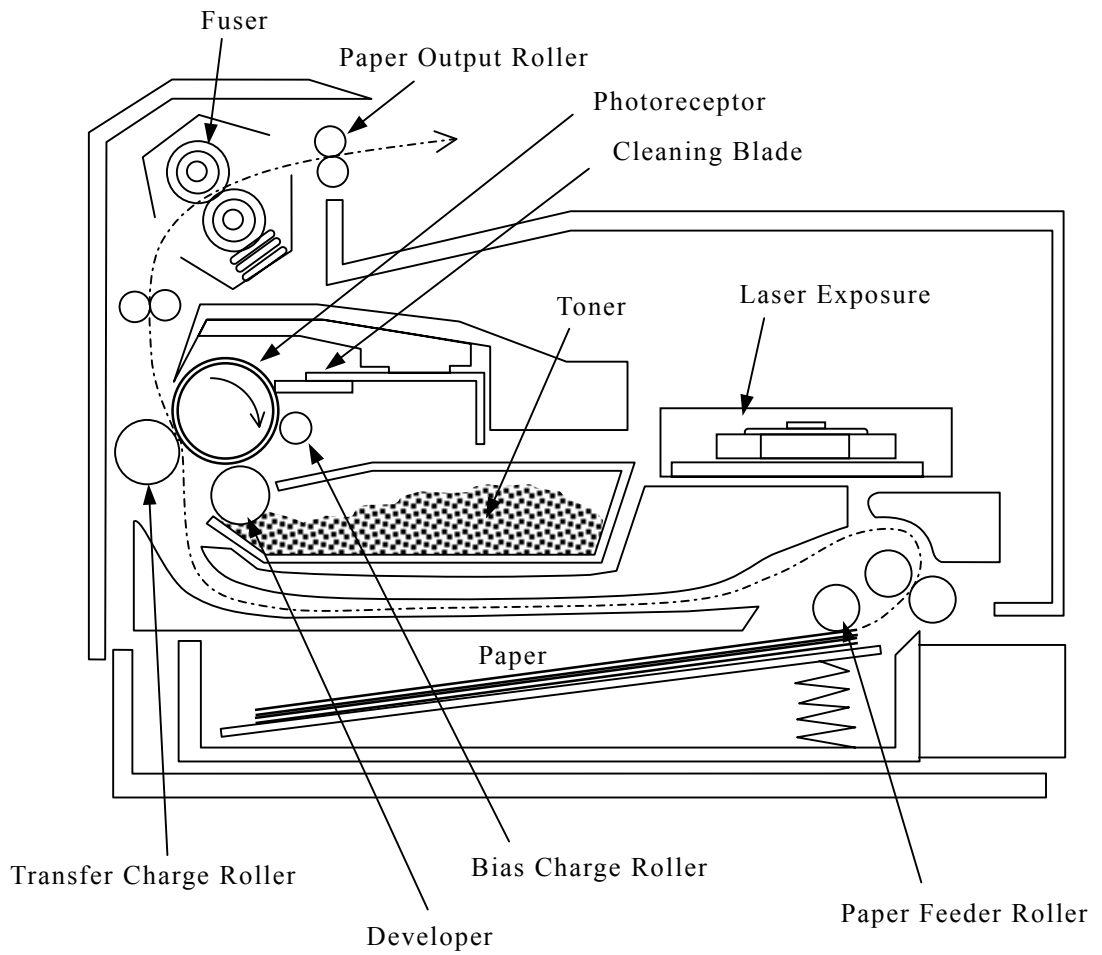


Fig.1.2 Schematic Diagram of a Laser Printer

### 1.2.2 クリーナ・ブレードに求められる特性

ブレードの先端部(エッジ)における感光体上のトナー・残留物除去・清掃は、感光体との摩擦力による回転方向に追従したエッジ部の弾性変形と復元の繰り返しによって、せき止めたトナー・残留物を弾き飛ばすことで実現されている。つまり、電子写真装置の基幹部品である感光体に対して最も強く物理的に接触している部位がクリーナ・ブレードである。したがって、クリーナ・ブレードの材料選択や設置条件の決定には、感光体やトナーの特性との関係を十分に検討する必要がある。効率的な残留物の除去と長期にわたる画質維持性を両立するためのクリーナ・ブレードに求められる特性は以下の4点に要約される[18]。

感光体を傷つけない適度な柔軟性(ゴム硬度, 弾性率)

安定した押圧力を維持するための小さな永久ひずみ特性

トナーのすり抜けを生じず、かつ摩擦によって生じる微振動を吸収する適度な反発弾性

エッジの局部的欠損や磨耗を回避するための高い強度(モジュラス)

しかし、静電潜像形成、現像、転写といったプロセスに比較して、クリーニング・プロセスのメカニズムを含めた体系的な理論構築[19]には整備が不十分な点が多く、未だに試行錯誤的な開発手法にとどまっているのが現状である。

### 1.2.3 クリーナ・ブレードの異音問題

オフィスの一角に配置される複写機に比べ、使用者の近くに置かれる機会が多いレーザ・プリンタでは、高速・高画質といった主機能の向上以外にも、知的生産活動を妨げない静粛性、特に不快感を伴う異音発生防止が重要となる。現状では、前節で述べたクリーナ・ブレードの特性を全て満足し、かつ異音の発生を回避し得るブレード材料および設置条件を多大な時間と手間をかけて試行錯誤的に決定している。

図 1.3 に特許庁で公開されている特許公報からクリーナ・ブレードの異音に関する特許の出願件数を年代別にまとめたものを示す。この問題が 1990 年代以前から存在し、現在にいたるまで増加傾向にあることがわかる。

これは、クリーナ・ブレードの特性と異音回避を両立するブレード材料および設置条件が製品ごとに異なるため、問題再発の危険性を抱えたまま試行錯誤的な対策法から脱却できていないことを示唆している。さらに、画質向上のためのトナー粒子の小径化により、クリーナ・ブレード先端にはたらく摩擦力は増加の一途を辿っており、異音回避をさらに困難にしていることが背景にあると考えられる。

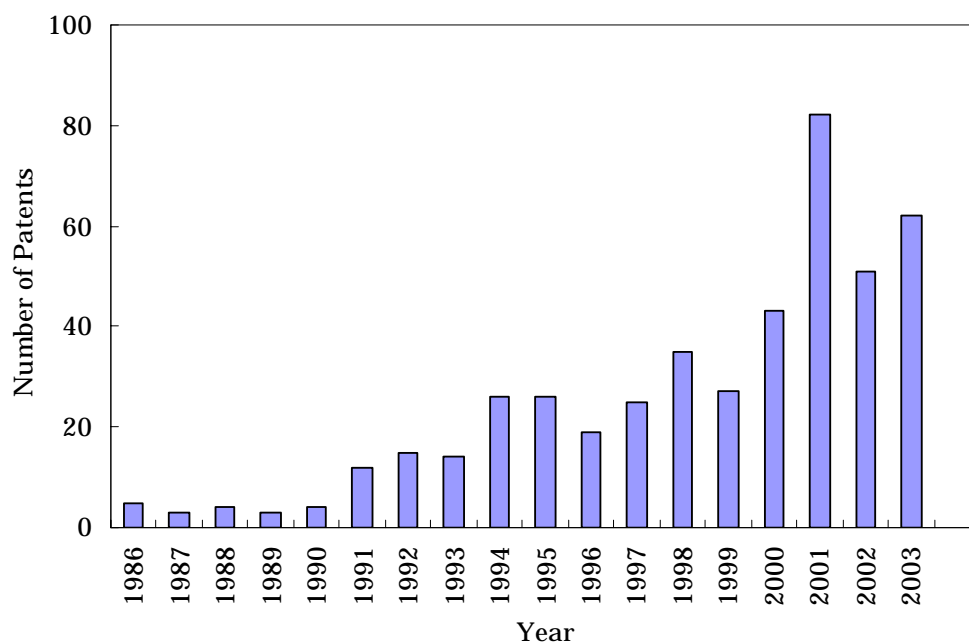


Fig.1.3 Number of Patents concerning Unforeseen Noise of Cleaning Blade

### 1.2.4 クリーナ・ブレード異音発生機構に関する従来研究

クリーナ・ブレードの異音(以後,単に異音と称する)の発生機構を解明する研究としては,この現象をブレードと感光体の摩擦による自励振動として捉える考え方が主流である.これは,この異音が,異音の周波数に一致する外部加振源がない,駆動部の回転数を変更しても異音の周波数が変化しない,異音の周波数はクリーナ・ブレード近傍の構造物の固有振動数に一致する,といった自励振動特有の性質を示しており,強制加振による共振現象とは異なるためである.

このような観点から,中村は,感光体を放射部とする異音に着目した[20].そして,クリーナ・ブレードと感光体の乾性摩擦によって感光体のねじれ振動が励起される機構を明らかにした.また,Kawamotoは,感光体が停止する直前や,回転を開始した直後に発生する異音に着目した.そして,摩擦係数の速度勾配が負となるクリーナ・ブレードの自励振動の発生機構に関し,帯電ローラの強制振動に起因するクリーナ・ブレードと感光体の接触部における垂直効力の変動を含めて明らかにした[21].

これらの研究成果では振動部位が前者は感光体,後者はクリーナ・ブレードという違いがある.したがって,異音を生じさせる自励振動の発生機構は単一ではなく,複数存在することを示唆していると考えられ,上記報告事例以外にもクリーナ・ブレードの異音を引き起こす自励振動現象が存在する可能性がある.

### 1.2.5 自励振動発生機構に関する研究

自励振動現象の不安定振動の発生機構を、微小外乱に対する系の安定性(漸近安定性)を問題とする線形安定性理論[22,23,24]の観点で捉えれば、これは複素平面上の固有値の挙動を解析する複素固有値問題に帰着される。

具体的には、系の静的平衡状態近傍での微小外乱に対する支配方程式の特性方程式(固有値方程式)を求め、そこに含まれるシステム・パラメータを変化させ、対応する固有値が描く軌跡を調べる。このとき、系に含まれる全ての固有値の軌跡が、実部が負の領域に留まるならば、系の応答は漸近安定となる。固有値の軌跡が、実部が正の領域に含まれるものが一つでも存在すれば、系の応答は不安定となる。

複素平面上における固有値の位置と系の応答の関係は次のようになる。[22,25]

- (1) **固有値が実数である場合** 系の応答は振動ではなく、時間の経過と共に単調に増減する指数関数となる。固有値が正の実数である場合、系の応答は発散する。これを物理的な意味からダイバージェンス型不安定と呼ぶ。また、分岐理論の立場では、ピッチホーク分岐と呼ばれる。
- (2) **固有値が複素数である場合** 系の応答は振動となる。固有値の虚部は振動の振動数を表し、固有値の実部は振幅の成長率を表す。固有値が正の実部を持つ複素数である場合には、振幅が指数関数的に増大する振動となる。これを物理的な意味からフラッタ型不安定と呼ぶ。また、分岐理論の立場では、ホップ分岐と呼ばれる。
- (3) **固有値が純虚数である場合** 微小外乱に対する系の応答は定常振動となり、中立安定と呼ばれる。

後述するように、自励振動現象の不安定振動の発生機構を現象論から見た場合、負減衰、時間遅れ、多自由度系の連成、連続体の不安定振動の4つに大別される。しかし、複素固有値問題の観点から考えれば、上記の4つはいずれもフラッタ型不安定として不安定振動の発生機構を統一的に説明することができる。



自励振動現象の不安定振動の発生機構を現象論的に分類すれば、以下の4つのタイプに集約される[26].

- (1) **負減衰** 質量  $m$  , 減衰係数  $c$  , ばね定数  $k$  , 変位  $x$  の外力が作用しない一自由度振動系を考える .

$$m \ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1.1)$$

$c^2 < 4mk$  のとき , 式(1.1)の系の固有値の実部すなわち振動の成長率は , 速度項の係数(減衰係数)の正負に依存する . 減衰係数が負であるとき , 速度項は負減衰としてはたらしき , 不安定振動を生じる[27] . 先にあげた文献[20,21]の発生機構はこの範疇に入る .

クリーナ・ブレード以外の事例としては , 複写機の定着器に用いられるスプリング・クラッチにおけるスティック・スリップについて摩擦係数やギャップの影響を調べた事例[28] , ポンプのサージング[29] , 流体励起振動のギャロッピング[30]などがある .

- (2) **時間遅れ** 復元力項に時間遅れ  $h$  を有する一自由度振動系を考える .

$$m \ddot{x} + c\dot{x} + kx(t-h) = 0 \quad (1.2)$$

$h$  が微小であるとき ,  $x(t-h)$  をテーラー展開して  $x(t-h) = x - h\dot{x}$  と近似すれば , 式(1.2)は次式のように書き改められる .

$$m \ddot{x} + (c - kh)\dot{x} + kx = 0 \quad (1.3)$$

$c/k < h$  のとき , 式(1.3)の系の固有値の実部が正となって , 負減衰のときと同様に不安定振動を生じる . 一方 ,  $h$  が微小ではなく , 特性方程式を超越方程式として扱う場合には , 系の安定性を特性方程式の求解による固有値問題に帰着することができない . この場合には , ニュートン法による数値計算で特性根を求める方法や , 偏角原理に基づくナイキストの安定判別法を用いて安定性を判別する .

この時間遅れに起因する自励振動としては、工作機械の再生びびり[31,32,33]、フィードバック制御系のむだ時間による発振現象[34, 35]、接触回転系のパターン形成現象[36,37,38,39]などがこれにあたる。また非線形復元項に時間遅れを有し、さらに外力による励振項と係数励振項を同時に持つ系の動的挙動を扱った研究[40]がある。

**(3) 多自由度系の連成** 線形多自由度振動系において、剛性行列や減衰行列が実対称正定値行列ではなく非対称性を有することによって、系の固有値に正の実部を持つ複素数の根が現れ、不安定振動を生じる。例として次式のような減衰のない二自由度振動系を考える。

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \{\ddot{x}\} + \begin{bmatrix} k_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & k_2 \end{bmatrix} \{x\} = \{0\} \quad (1.4)$$

式(1.4)の特性方程式は次式で与えられる。

$$\lambda^4 + \frac{k_1 + k_2}{m_1 m_2} \lambda^2 + \frac{k_1 k_2 - \beta_1 \beta_2}{m_1 m_2} = 0 \quad (1.5)$$

式(1.5)は $\lambda^2$ に関する二次代数方程式であるので、 $\lambda^2$ が複素数の解を持てば、正の実部を持つ特性根が必ず存在する。したがって、式(1.4)の系が不安定となる条件は、次式で与えられる。

$$\left( \frac{k_1 - k_2}{m_1 m_2} \right)^2 + \frac{4\beta_1 \beta_2}{m_1 m_2} < 0 \quad (1.6)$$

式(1.6)は、剛性行列の非対称性が大きく、かつ非対角成分が異符号を持つと成立する。一自由度系では、正の実部を持つ複素数となる固有値が現れる条件として、速度項の係数が重要な役割を果たす。これに対し、多自由度系では、式(1.4)の系のように速度項のない場合でも不安定振動を生じる固有値が出現する可能性がある。例えば、負減衰タイプの原因となる乾性摩擦の相対速度に対する摩擦力の負勾配とは異なり、多自由度系の連成では、相対速度が十分大きく、相対速

度に対する摩擦力の勾配が正となる領域でも不安定振動を生じる。

この多自由度系の連成に分類される事例としては、黒板上を移動するチョークのホッピング現象の解析[41,42]、磁気記録装置におけるコンタクト・スライダの安定解析[43,44]、油圧昇降装置における自励振動発生機構の研究[45]、切削ドリルの曲げとねじりの連成振動系の研究[46]、あるいは操舵系の蛇行現象[47]などがある。

これらの事例では、不安定振動を生じるメカニズムを、剛体と見なした振動体の重心位置での回転運動と並進運動の連成と捉えている。

- (4) 連続体の不安定振動** クリーナ・ブレードのような弾性体を扱った事例としては、自動車のワイパ・ブレードを二本の剛体棒が回転可能なジョイントで接続された二自由度系とみなした研究がある[48,49,50]。また、片持ち弾性送水管の横振動のように、弾性体の特定の固有振動が管内流により不安定化する場合がある[51,52]。この場合、連結送水管で不安定化した状態を物理的に説明できることから、(3)の多自由度系の連成と共通している。ただし、管内流速に依存して不安定化する固有モードが異なる点が本質的な特徴である。このようなある特定の固有振動モードの不安定化は、流体運動の安定性とも深い係わりがある[22,53]。

系の安定性を冒頭に述べた特性方程式の複素固有値問題に帰着させる解析手法は、自励振動による不安定振動発生の有無を判断する場合に有効である。しかし、系の安定性を線形安定理論に基づく漸近安定性として捉える範囲では、有限の外乱に対する安定性(完全安定性)あるいは微小外乱の成長過程を定量的に扱うことは出来ない。

そのような要請に対しては非線形安定性理論[22,24,53]の観点からの議論が必要になる。非線形安定性理論で取り扱われる問題としては、外乱の大きさに依存して安定から不安定に移るパラメータの大きさが変化する亜臨界問題(Subcritical Instability)と、不安定化した微小外乱の成長過程を取り扱う超臨界問題(Supercritical Instability)とに分けられる。

微小外乱の成長後の周期解を求める解析手法としては、位相面によるリミット・サイクルの解析、平均法や多重尺度法などの近似解析手法、および調和バランス法やシューティング法のような数値解析手法が用いられる。

前述した自励振動の研究事例では、自励振動の主機能への悪影響が大きく、発生自体の回避が主目的であるため、多くの場合複素固有値問題に基づく系の安定・不安定判別の検証にとどめたものが多い。

一方、本研究が対象とするクリーナ・ブレードにおける自励振動の場合、自励振動の振動数が数 kHz であり、振幅は高々数十 nm である。これに対し、トナー粒子の大きさは数  $\mu\text{m}$  あるため、クリーナ・ブレードの主機能であるトナー除去には大きな影響が無い。したがって、自励振動が発生したとしても、機械の通常稼働音以下の大きさであれば問題として認識されない。つまり、自励振動の発生回避は必須ではなく、むしろ微小外乱の成長過程と定常状態に至った後の振幅を決定する機構を解明し、このような状況を意図的に利用して、異音防止と清掃機能を両立するブレードの設計条件の範囲を広げることが重要となる。

## 1.3 本研究の目的および構成

本研究は、実機における現象の定量的観察から、文献[20,21]の報告例とは異なる特徴を持つクリーナ・ブレードの自励振動に起因した異音の存在を明らかにし、この異音の原因となる自励振動の発生機構を、非線形定常振動の挙動を含めて明らかにすることを主目的とする。

この目的を達成するために、本研究では以下の手順で検討を進める。

まず初めに、実機を構成する多数の部品から、異音の周波数に一致する固有振動数を持つ部位がブレード単体であることを明らかにする。そして、ブレード単体を単純支持したモデルによって実機と同じ特徴を持つ異音を再現できることを実験的に示す。

次に、この自励振動の発生機構を説明するモデルとして、多自由度連成モデルを提案する。具体的には、ブレード単体を有限要素モデルで表し、感光体とブレードの接触部における垂直抗力をブレードの固有振動モードの線形結合として表す。そして、この自励振動の発生機構が、近接した固有振動数を持つブレードの高次曲げモードと1次伸縮モードの摩擦力を介した不安定モード連成[54]であることを示す。さらに、連成後のモードの固有値が正の実部を持つ複素数となって、自励振動が発生する条件を明らかにする。

次に、発散振動発生後の非線形定常振幅を明らかにするため、非線形振動方程式の導出を検討する。このとき、連成振動におけるモードの固有関数が直交していないという課題に対して、本研究では、各モードの固有関数ベクトルに直交する随伴ベクトル[55]を導入し、固有値が正の実部を持つ複素数となる不安定振動モードに関する非線形振動振幅方程式を抽出する。これを多重尺度法により解き、不安定振動モードのモード変位を定式化する。そして、定常振動時における二つのモードのモード変位を明らかにし、非連成時の固有関数ベクトルとの線形結合により定常振動時におけるブレード上の変位を定式化する。

最終的に、異音を防止するためのブレードの設計パラメータを変更した複数の事例について、実現象と理論計算結果との比較を行い、検討結果の妥当性を検証する。

本論文は全6章から構成されている。

第2章では、実機上における定量的な観察から、この異音の原因が自励

振動によるものであることを確認する。同時に、この異音の原因となる自励振動現象が、従来の摩擦係数の負減衰モデルの報告例[20,21]とは異なる特徴を有することを示す。そして、実機を構成する多数の部品から、異音の周波数に一致する固有振動数がどの部位に存在するのかを検証する。具体的には、感光体、クリーナ・ブレード部をそれぞれ加振して得られる加振応答波形の周波数分析を行う。そして、測定された振動の卓越周波数から、クリーナ・ブレードの固有振動数が異音の周波数に一致することを明らかにする。

第3章では、異音の周波数に一致する固有振動数を持つクリーナ・ブレード部について、ブレード単体を単純支持したモデルによる現象の再現を試みる。そして、ブレード単体実機と同じ摩擦力を与えて再現された自励振動が、実機の観察結果と同じ特徴を有していることを示す。

次に、この自励振動を多自由度系の連成振動[41,42,43,45,46,48,49,50]として考える。具体的には、連続体であるブレードを有限要素モデルで表し、ブレード接触部における摩擦力を変位と同様にモード分解する考え方を導入して、摩擦力を介したモードの連成振動として定式化する。この連成モデルに実機のパラメータを適用し、数値計算による安定解析を行う。この解析により、曲げ主体の高次振動モードと伸縮主体の低次振動モードとの連成によって、この自励振動が生じることを明らかにする。

第4章では、上記の発散振動発生後の二自由度の連成振動において、直交性が成立しない固有ベクトルに対し随伴ベクトルを用いた対角化を行う。さらに、発散振動発生後に振幅が非自明な定常状態に達するという観察結果を元に、その定常振幅を決定するための非線形項を物理的に考察する。そして、この非線形項と対角化により抽出されたモード変位で発散振動発生後の非線形振動方程式を定式化する。これを多重尺度法で解き、得られた解を発散振動発生後における曲げモード変位と伸縮モード変位の二自由度系に再構成する。再構成されたモード変位と非連成時の固有関数により定常振幅定常振動時におけるブレード上の変位を定式化し、実験値との比較から非線形項の係数を決定する。

第5章では、製品への具体的な応用を想定し、ブレードの厚さ、支持部の拘束点からブレード先端までの長さを変更したブレードの振動振幅の予測を行う。そして、これを実際に製作したブレードの実測結果と比較し、本研究の理論検討の妥当性と産業応用への有用性を示す。

第6章は、本論文の結論であり、本研究で得られた成果について総括する。

## 第 2 章

# 実機における異音の観察とその特徴

## 2.1 序言

クリーナ・ブレードと感光体の摩擦によって生じる異音について、文献[20,21]ではその原因となる自励振動の発生機構を、摩擦係数の負減衰として捉えた。すなわち、物体間の相対速度差が小さく、乾性摩擦力の相対速度に対する傾きが負となる領域において、減衰項が負減衰となる自励振動として発生機構を説明した。

さらに、文献[20]では感光体のねじれ振動を定式化し、各固有振動数における感光体に作用する摩擦力のモーメントの比較を行った。この結果、感光体の 2 次のねじれモードが最も励振されやすく、発生している異音の周波数がこのモードの固有振動数に一致することを示した。また、この自励振動の特徴として、機械が稼動し始めても必ず発生するとは限らず、非常に不安定であることが指摘されている。

一方、文献[21]では感光体の回転開始直後、または停止直前に不定期に発生する異音に着目した。そして、摩擦係数の負減衰に加え、帯電ローラが感光体を強制振動する際のクリーナ・ブレードと感光体の接触部における垂直抗力の変動を含め定式化を行った。この結果、異音の原因となる振動は、摩擦係数の負減衰によるクリーナ・ブレードの自励振動に感光体の強制振動が加わった係数励振である可能性を示唆した。

本章では、実機上における定量的な観察から、この異音の原因が自励振動によるものであることを確認する。同時に、この異音の特徴を定量的に把握し、文献[20,21]の異音の特徴との比較から、この異音固有の特徴を明らかにする。

## 2.2 実機における定量的把握

### 2.2.1 異音の発生場所

実機における観察結果を述べる前に、異音の発生場所について説明する。図 2.1 は、レーザ・プリンタ内部のトナー・カートリッジの位置を示したものである。近年のレーザ・プリンタでは、感光体、クリーナ・ブレード、現像器、トナーを一体に実装するトナー・カートリッジ方式が主流である。トナー・カートリッジの外観を図 2.2 に、断面の構造を示したものを図 2.3 にそれぞれ示す。本研究が対象とする異音は、トナー・カートリッジ内部のクリーナ・ブレードと感光体の接触部で発生する。クリーナ・ブレードは、図 2.4 に示すように、プレス成型された鋼板の先端に熱硬化型ポリウレタン・ゴムを接着した構造になっている。クリーナ・ブレードは感光体の回転方向に対し、押圧力と摩擦力の合力が先端のゴム・ブレードを圧縮する方向にはたらく角度で設置されている。

以後の説明において、ブレードとはゴム・ブレード単体を指し、クリーナ・ブレード部とはゴム・ブレードと鋼板の板金部材を含めた部品全体を指す事とする。

### 2.2.2 異音の原因となる自励振動の特徴

本研究で取り上げる異音の特徴として、高い再現性がまずあげられる。文献[20]では、この自励振動が、機械の稼働開始後に必ず発生するとは限らず、非常に不安定であることが指摘されている。これに対し、本研究の対象とする異音の場合、次の二つの条件を満たすと非常に高い確率で再現することを実機における観察から確認している。両面印刷モードで連続稼働させ、ブレードの温度が 40 以上になる、感光体上にコロナ放電時に発生する放電生成物が付着している(経験的に放電生成物の付着により、感光体表面の摩擦係数が上昇する事が知られている)。

そこでまず、実機の排紙口に騒音計(小野測器, LA-230 コンデンサ・マイクロホン方式)を設置した。次に、両面印刷モードの連続稼働により、ブレードの温度上昇と感光体への放電生成物の付着を促進させた。そして、ブレードに装着した熱電対による温度の測定と、排紙口から放射される異音の周波数分析を行った。



図 2.5 にブレードの温度と周波数 4600Hz 成分の音圧の関係を示す。ブレードの温度が 37 になると異音が散発的に発生し始め、40 を超えると継続的に異音が発生するようになり、音圧も大きくなる。また、ブレードの温度が 42 における、異音発生直後の時間波形を図 2.6 に、周波数分析結果を図 2.7 に示す。主たる周波数成分は 4600Hz であり、9200Hz にはその高調波成分が存在することがわかる。

また、この異音が駆動系のギアの噛み合い、モータのコギングといった外部加振源による強制振動ではない事を確認するため、感光体の回転数を 50rpm(通常稼働時回転数)から 120rpm に変えた場合の異音の周波数分析を行った。結果を図 2.8 に示す。感光体の回転数が変わっても異音の周波数は変化していないことがわかる。

したがって、この異音の原因は外部加振源による強制振動ではなく、摩擦力に起因する自励振動であることがわかる。

### 2.2.3 乾性摩擦モデルと異なる特徴

2.1 節で述べたように、文献[20,21]における乾性摩擦モデルは、自励振動の発生機構を摩擦係数の負減衰として捉えている。このモデルでは、自励振動の発生は物体間の相対速度差が小さい領域に限られる。これは、文献[21]の異音が、感光体の回転開始直後、または停止直前において発生する特徴と矛盾しない。

一方、本研究で取り上げる異音は、ブレードと感光体の相対速度差が十分大きい定常回転中に発生する。感光体の回転数を 40rpm から 120rpm まで段階的に変化させた場合の異音の音圧測定結果を図 2.9 に示す。感光体の回転数の増加とともに、音圧が大きくなることがわかる。感光体の回転数の増加に伴い、感光体とブレード間の相対速度差は必然的に大きくなる。相対速度差が大きくなり、乾性摩擦力の相対速度に対する傾きが正に近くなれば、自励振動は起き難くなる。これは、図 2.9 の結果と矛盾する。

以上の結果から、この異音の原因となる自励振動は、相対速度が低い場合に発生する摩擦係数の負勾配に起因する自励振動とは発生機構が異なることが示唆される。

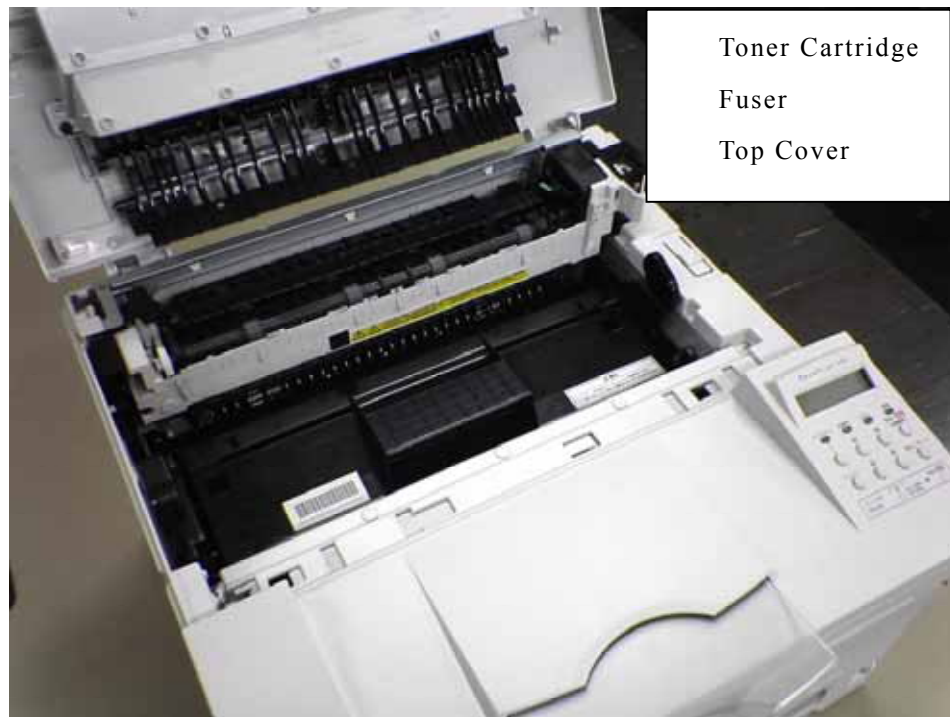


Fig.2.1 Position of a Toner Cartridge in a Laser Printer



Fig.2.2 Toner Cartridge

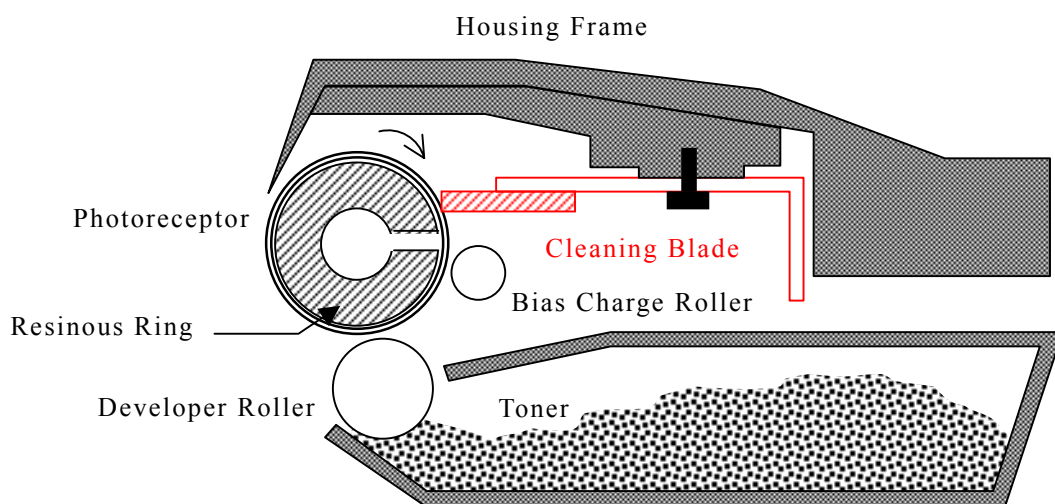


Fig.2.3 Schematic Diagram of a Toner Cartridge

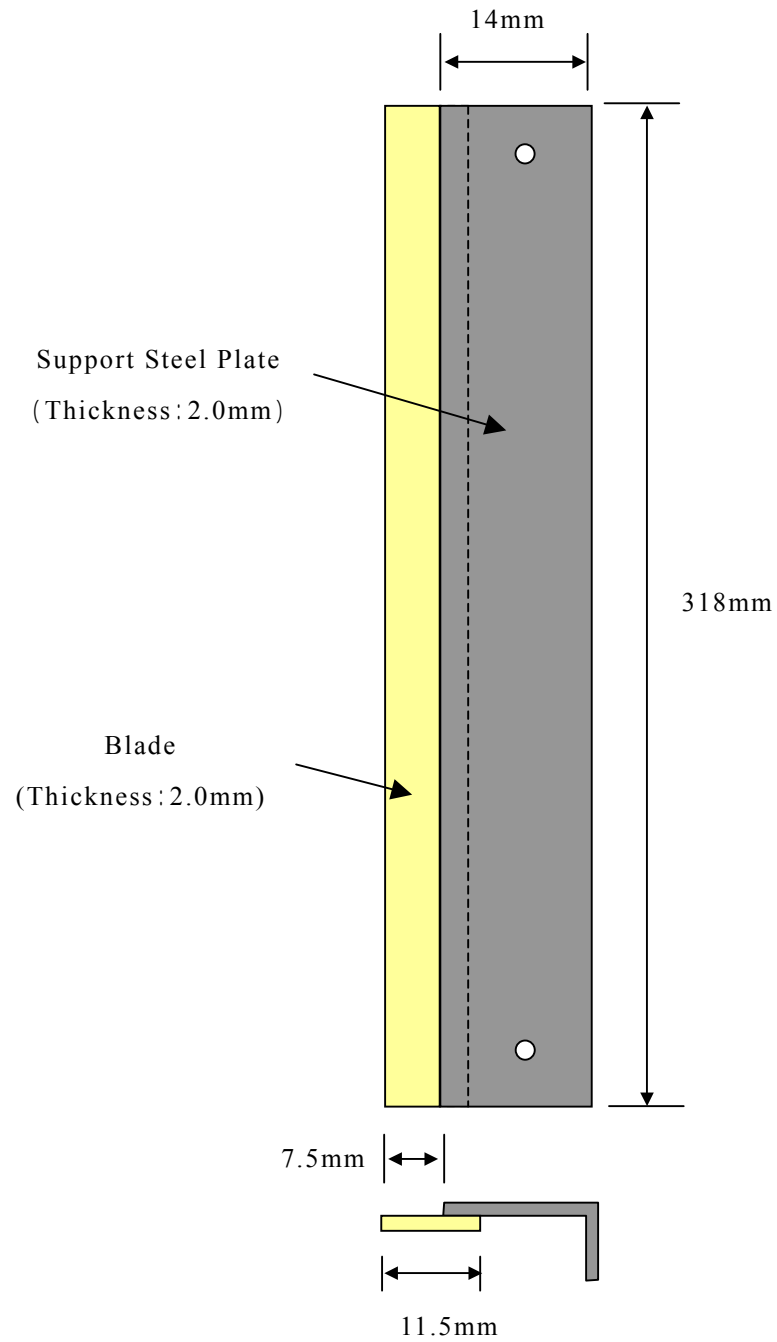


Fig.2.4 Dimension of a Cleaning Blade

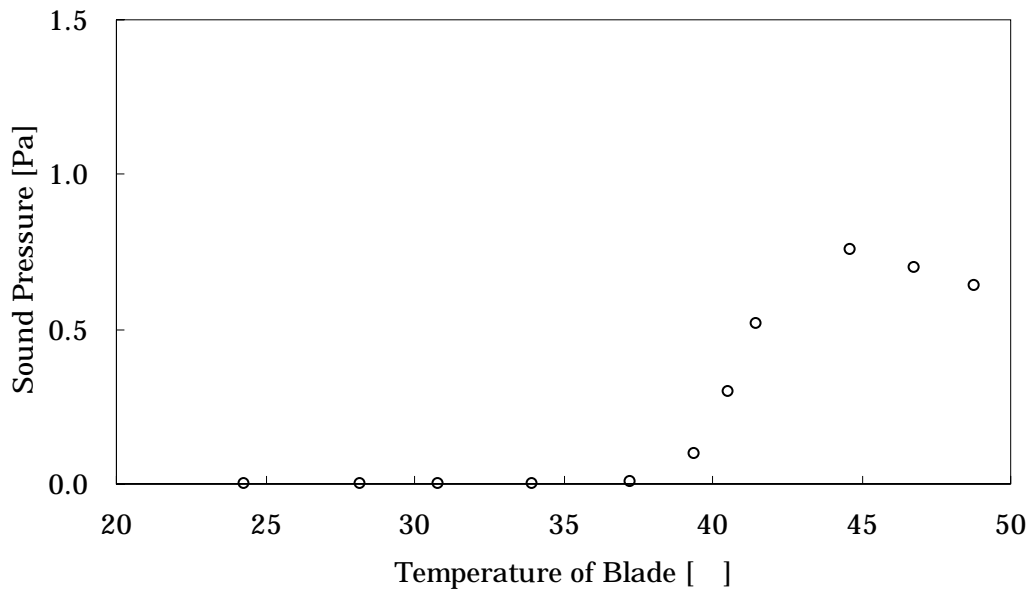


Fig.2.5 Relationship between Sound Pressure Level of Noise and Temperature of Blade

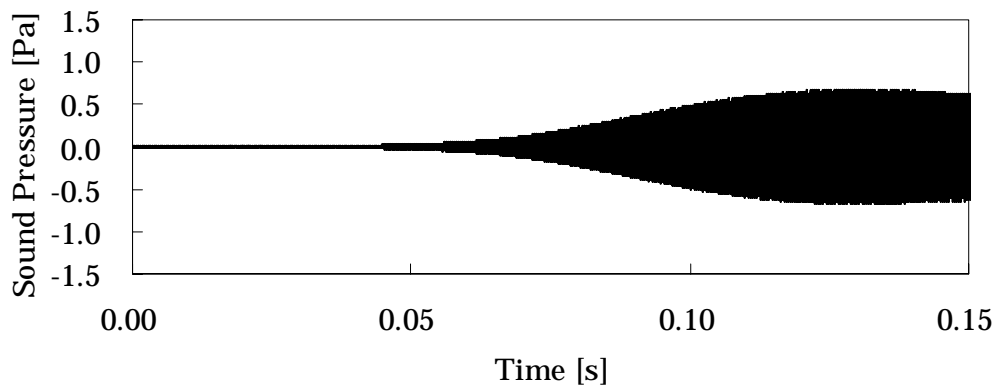


Fig.2.6 Time History of Unforeseen Noise

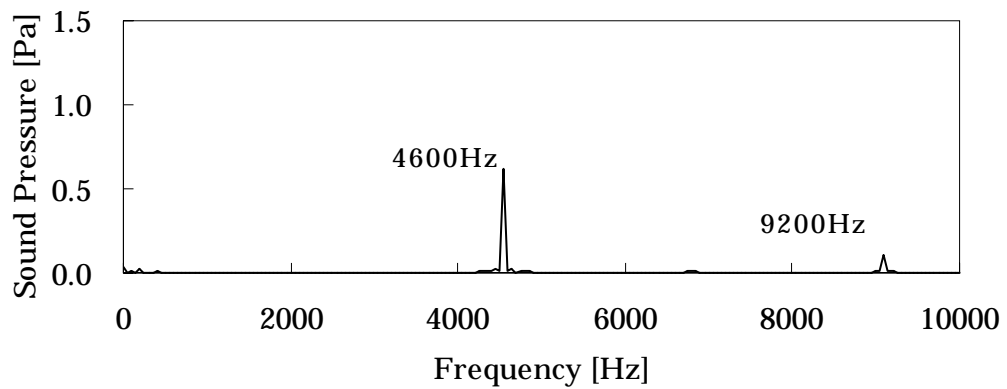


Fig.2.7 Frequency Analysis of the Unforeseen Noise

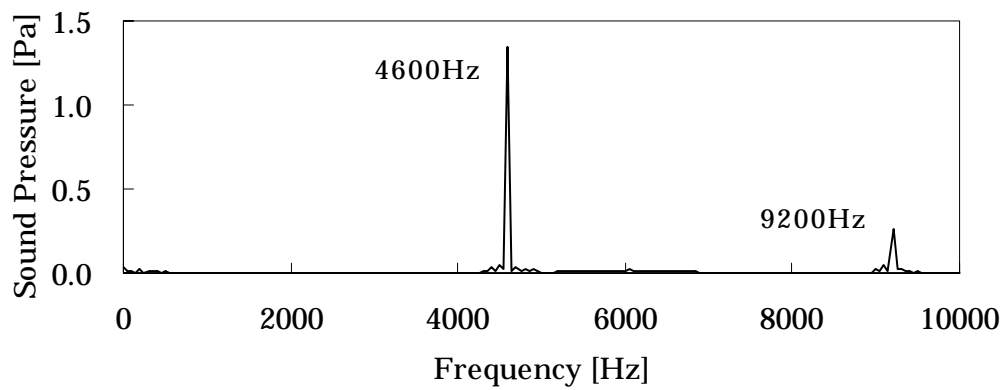


Fig.2.8 Frequency Analysis of the Unforeseen Noise for Variation of Photoreceptor Revolution Number ( 50rpm 120rpm )

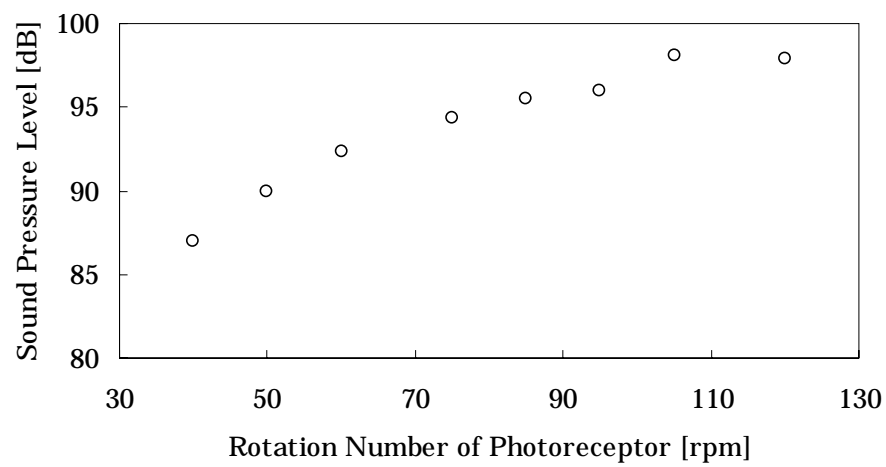


Fig.2.9 Relationship between Rotation Number of Photoreceptor and Sound Pressure Level of the Unforeseen Noise

## 2.3 自励振動に関わる振動系の特定

前節の異音の周波数分析結果より、この異音の原因は摩擦力に起因する自励振動であると考えられる。したがって、異音の周波数に近い固有振動数を持つ部位が存在するはずである。そこで、多数の部品によって構成されている実機から、異音の周波数に近い固有振動数がどの部位に存在するのかを検証した。

### 2.3.1 感光体の検証

今回の場合、候補として考えられるのは、ブレード単体、ブレードと板金部材を含めたクリーナ・ブレード部、そして感光体の3つである。文献[20]によれば、摩擦力によって感光体の2次のねじれ振動の固有振動モードが励振されることが指摘されている。そこで、文献[20]と同様の方法によって、感光体の固有振動数を測定した。

感光体の構成を図2.10に示す。感光体は、光導電層を塗布したアルミ中空管（以後、素管と称す）と、素管の内部に挿入されるABS（ACRYLONITRILE BUTADIENE STYRENE）樹脂製リング、素管の両端に圧入されるギア・フランジで構成されている。素管の内部に挿入されるABS樹脂製リングは、近年のレーザ・プリンタにおいて一般的に用いられている。この役割は、帯電ローラと感光体間に生じる静電力による加振力を減衰させることにある。これにより、帯電時に発生する騒音を大幅に抑制することができる。素管の大きさは、長さ348mm、外径30mm、厚み2mmである。

測定方法の概要を図2.11に示す。素管中央部にひずみゲージを配し、素管両端のフランジ・ギアのうち、片方をクランプで固定した。他方のギア・フランジに図2.12に示すような板金部材をネジ止めし、感光体の周方向に打撃加振を与えた。そして、その際に生じた周方向のねじれ振動を動ひずみ計（共和電業、DPM-603A）で測定した。

得られたひずみ信号の周波数分析結果を図2.13に示す。この結果において、6300Hzに卓越周波数が見られるものの、破線で示した異音の周波数4600Hz近辺には特に卓越した周波数は無いことがわかる。また、図2.14に示す素管内部のABS樹脂リングを外した場合の周波数分析結果を示す。両



者の比較から、素管内部に挿入された ABS 樹脂製リングの制振効果により、この感光体の固有振動数の共振峰は大きく減衰されていることがわかる。文献[20]における感光体には、この樹脂リングが挿入されていなかったため、感光体のねじれ振動が発生したものと考えられる。

したがって、文献[20]により報告された感光体のねじれ振動に起因する異音とは異なり、この感光体には、異音の周波数に相当する固有振動数は存在していないことがわかる。



Fig.2.10 Composition of Photoreceptor Assembly Unit



Fig.2.11 Measurement of Twisting Vibration of the Photoreceptor



Fig.2.12 Detail of Impulsive Excitation Method

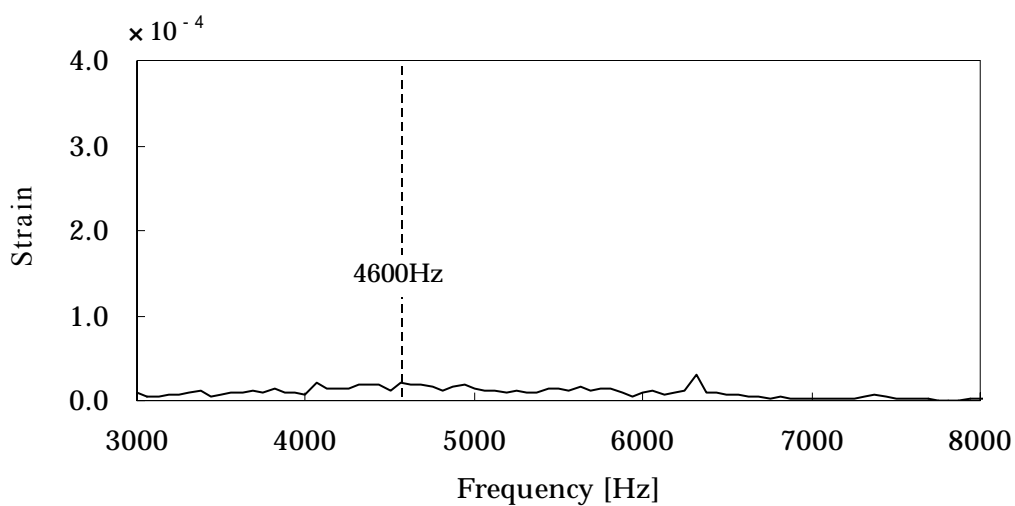


Fig.2.13 Frequency Analysis of Free Vibration of the Photoreceptor

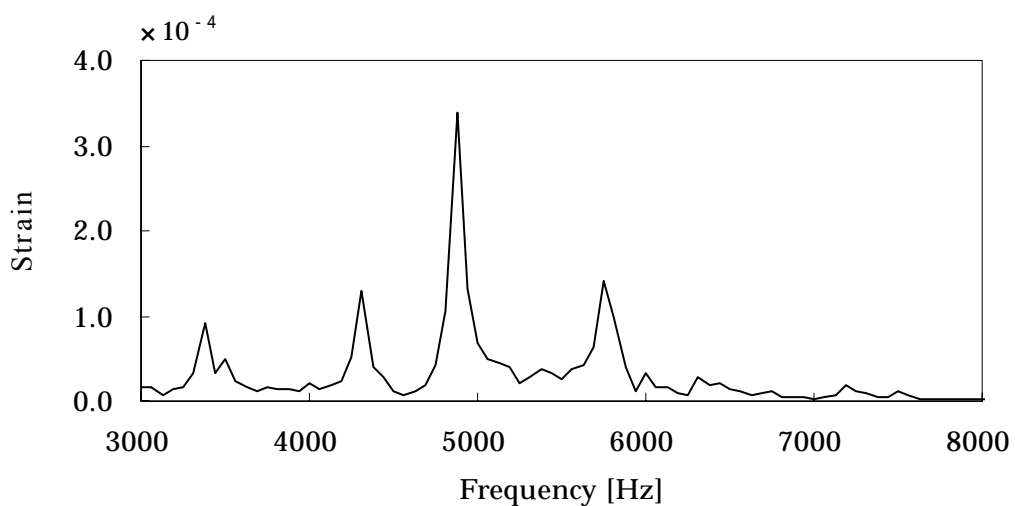


Fig.2.14 Frequency Analysis of Free Vibration of the Photoreceptor without Resinous Ring

### 2.3.2 クリーナ・ブレード部の検証

次に、ブレード、板金部材を含めたクリーナ・ブレード部の固有振動数を調べるため、図 2.15 に示すようにプロセス・カートリッジ・ユニットを、クリーナ・ブレード部と感光体が一体化された部分と、それ以外の部分とに分離した。そして、図 2.16 に示すように、樹脂製筐体の一部を切り欠いて、ブレードが接着されている板金部材とブレードの先端部を露出させた。次に、図 2.17 に示すように、露出した板金部材の先端部に打撃加振を与え、ブレード先端の自由振動をレーザー・ドップラー振動計（小野測器，LV-1100）で測定した。

ブレード先端の自由振動の周波数分析結果を図 2.18 に示す。この結果を見ると、ブレード先端の自由振動の卓越周波数に、異音の周波数である 4600Hz にほぼ一致するものが存在することがわかる。つまり、異音の周波数に一致する固有振動数はブレード単体、板金部材を含めたクリーナ・ブレード部に存在する。



Fig.2.15 Separation of Cleaning Blade and Photoreceptor from Process Cartridge Unit



Fi.2.16 Cutting Part of Cover

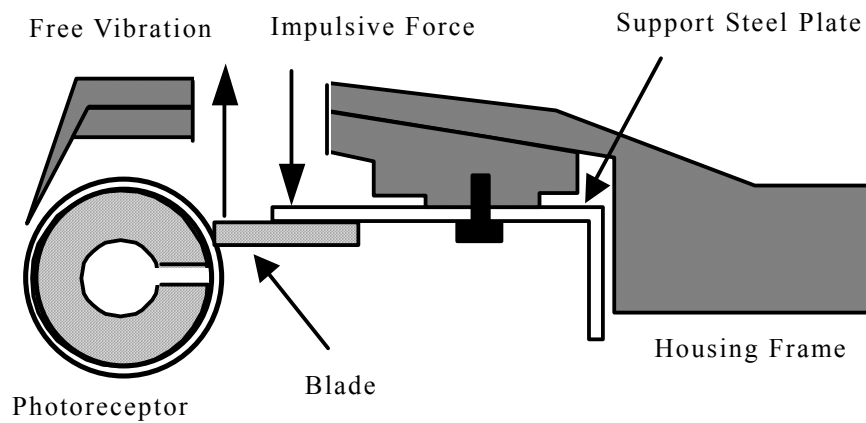


Fig.2.17 Measurement Point for Free Vibration of the Cleaning Blade Assembly

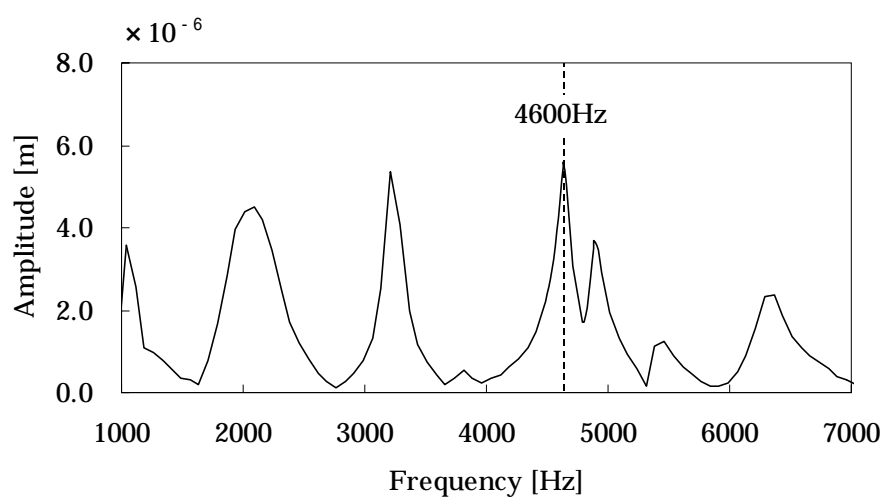


Fig.2.18 Frequency Analysis of Free Vibration of the Cleaning Blade Assembly

## 2.4 結言

本章では、実機における異音の特徴を定量的に把握するため、異音の周波数分析、構成部品の固有振動数の検証を行った。そして、これらの測定結果から、この異音の特徴を次のように明らかにした。

- 1) 感光体の回転数を変えても異音の周波数は変化しない。
- 2) 異音の周波数に一致する強制加振力を有する外部加振源が無い。
- 3) この異音は相対速度の大きい定常回転時に発生し、感光体の表面速度の増加とともに、音圧が大きくなる。したがって、相対速度が低い場合に発生する摩擦係数の負勾配に起因する自励振動[20,21]とは発生機構が異なる。
- 4) 異音の周波数はブレード単体、板金部材を含めたクリーナ・ブレード部の固有振動数に一致する。これは、感光体の固有振動数に起因する文献[20]の自励振動とは発生機構が異なる。

これらの特徴は、この異音の原因は摩擦力に起因する自励振動であるものの、その発生機構は、従来の報告例[20,21]とは異なることを示唆している。



## 第 3 章

# 自励振動発生機構の検討

### 3.1 序言

第 2 章では、実機における異音の特徴を定量的に把握し、従来の報告例 [20,21]とは異なることを明らかにした。この中で、この異音の周波数に一致する固有振動数がブレード単体とこれを支持する板金部材を含めたクリーナ・ブレード部に存在することを明らかにした。

ブレードと感光体の摩擦に起因する自励振動の発生機構の従来研究として、文献 [20]では感光体が振動系となる異音について、ブレードと感光体の摩擦によって感光体のねじれ振動が励起される機構を明らかにした。また、文献 [21]では感光体が停止する直前や、回転を開始した直後に発生する異音に着目した。そして乾性摩擦モデルに、帯電ローラが感光体を強制振動する際のブレードと感光体の接触部における垂直抗力の変動を含めて明らかにした。

これらの文献では、異音の原因となる自励振動の発生機構を、乾性摩擦の負減衰として捉えた。この場合、自励振動の発生はブレードと感光体の相対速度差が小さい場合に限定される。また、文献 [20]では、この自励振動が機械の稼働開始後に必ず発生するとは限らず、現象の再現性が低いことを指摘している。

しかしながら、本研究が対象とする異音は、原因となる自励振動の発生源が感光体ではなく、ブレードと感光体の相対速度差が十分大きな定常回転時に発生する。さらに、この異音の場合、両面印刷モードで連続稼働させ、ブレードの温度が 40 以上になる、感光体上に帯電による放電生成物が付着している、という二つの条件を満たすと非常に高い確率で再現するという特徴をもつ。したがって、文献 [20,21]の成果から、本研究が取り上げる異音の原因となる自励振動の発生機構を十分に説明することができない。

本章では、本研究が対象とする異音の原因となる自励振動の発生機構として、自励振動の発生部位を特定する。まず、自励振動に関わる振動系がクリーナ・ブレード部におけるブレード単体であると仮定し、ブレード単体を単純支持したモデルによる現象の再現により、この自励振動と同じ発生機構を持つ最も単純なモデルを抽出する。次に、連続体であるブレードを有限要素モデルで表し、数値計算による振動の線形安定性を解析する。この際、ブレード接触部における摩擦力を変位と同様にモード分解し、摩擦力を介したモードの連成振動として定式化する。この解析により、曲げ主体の高次振動モードと伸縮主体の低次振動モードとの連成によって、この自励振動が生じることが明らかにする。さらに、このモデルの固有値の安定条件から自励振動の発生条件を明らかにする。

## 3.2 単純要素モデルの抽出

### 3.2.1 実験装置の概要

ブレード単体による異音再現を検証するための実験装置の概要を図 3.1 および 3.2 に示す。クリーナ・ブレード部は実機のを流用し、図 3.3 に示すようにブレードが接着・支持されている板金部材の長手幅方向の7カ所を、厚さ 10mm のアルミ製支持ステージにネジで締結した。これにより、板金部材を支持ステージに一体化された剛体とみなした。また、感光体については、実機からギア・フランジを外した薄肉円筒部分と内部のリングを流用した。そして、感光体に駆動シャフトを貫通させ、回転速度を調節できる駆動モータにカップリングを介して連結した。さらに、異音の発生条件を意図的に満足させるため、ブレード温度を上昇させるためのセラミック・ヒータと、感光体に放電生成物を付着させるためのローラ帯電器を配した。

### 3.2.2 異音の特徴再現結果

この単純実験モデルにより、実機の異音と同じ特徴を持つ現象の再現を試みた。クリーナ・ブレード部を固定する支持ステージは、垂直および水平方向に可動するように構成されている。支持ステージの位置を調節し、ブレードの感光体に対する初期設定角度を  $27.0^\circ$  とし、その状態からの押しつけ量を  $1.2\text{mm}$  と実機と同じ値に設定した。以上の構成により、実機と同じ摩擦力を再現した。次に、セラミック・ヒータにより感光体表面を加熱し、感光体に接触するブレードの温度を上昇させた。さらに、ローラ帯電器に実機と同じ  $2.2\text{kV}$  の帯電電圧を印加して、感光体表面上に放電生成物を付着させた。

この結果、ブレード温度  $42^\circ\text{C}$  において、実機で確認された異音の周波数にほぼ近い  $4800\text{Hz}$  の卓越周波数を持つ異音の発生を確認した。実機における異音と単純実験モデルにおける異音の周波数分析結果を比較したものを図 3.4 に示す。

次に、モータの回転数を  $50\text{rpm}$  から  $120\text{rpm}$  に変えた場合の異音の周波数を図 3.5 に示す。実機と同様、感光体の回転数変更に対して異音の周波数は変化しておらず、この異音が外部加振源による共振現象ではないことがわかる。

さらに、感光体の回転数を  $40\text{rpm}$  から  $85\text{rpm}$  まで変化させた場合の音圧レベルの変化を図 3.6 に示す。これも実機と同様、回転数の増加とともに、音圧レベルが大きくなっていることがわかる。

以上の結果から、ブレード単体を単純支持した実験モデルにより、実機と同じ特徴を持つ異音を再現できることを示した。つまり、このモデルが実機で確認された自励振動と同じ発生機構を有する最も単純なモデル(以後、要素モデルと称す)と結論できる。



	Cleaning Blade Assembly		Speed Controller
	Photoreceptor		Thermo Controller
	Support Stage		Heater
	Drive Motor		

Fig3.1 Experimental Apparatus

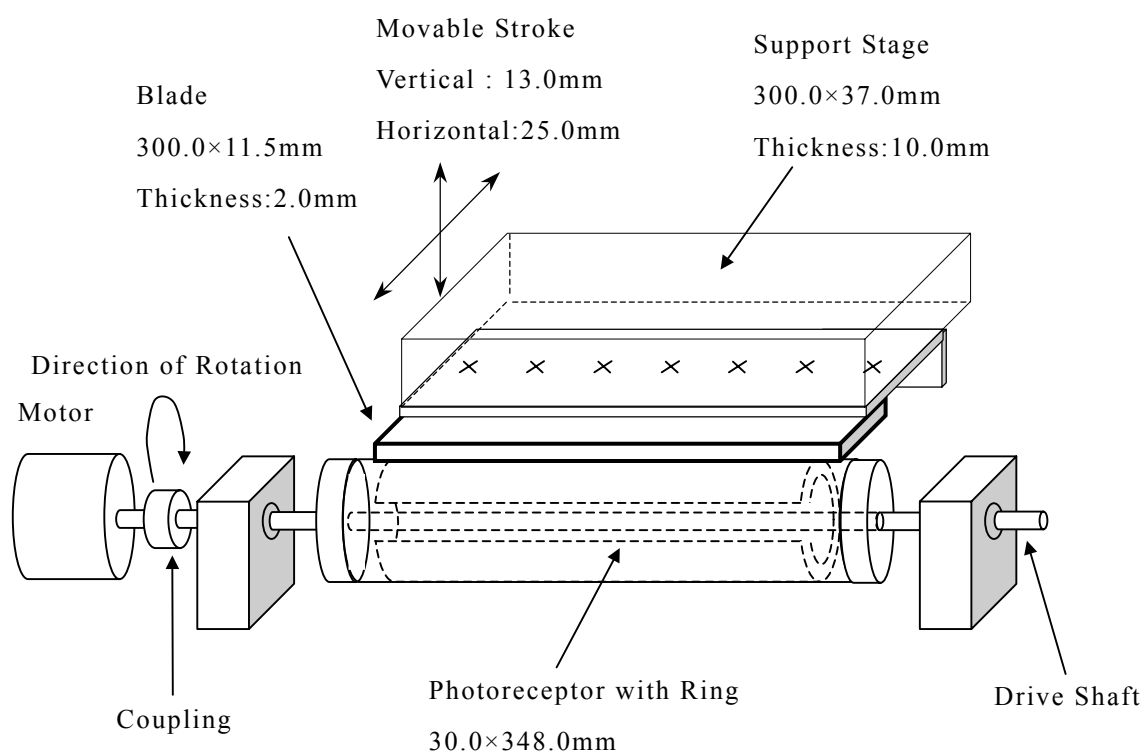
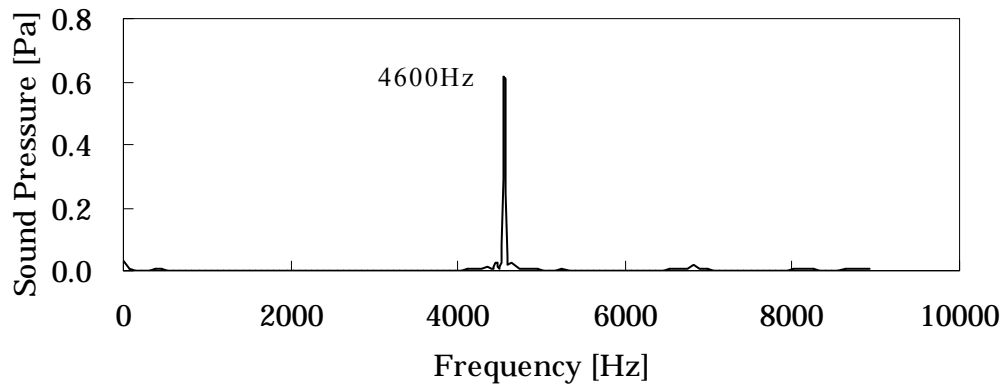


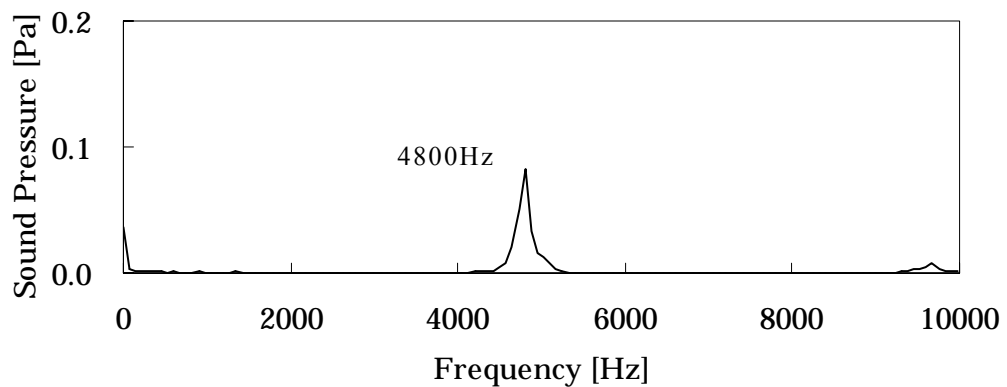
Fig.3.2 Detail of Drive System of Photoreceptor and Support of Cleaning Blade Assembly



Fig.3.3 Fixation of Cleaning Blade Assembly

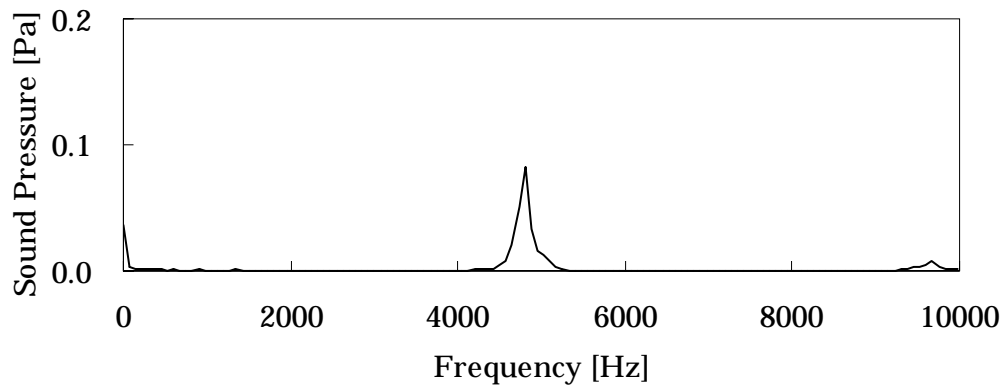


(a) Frequency of Unforeseen Noise in Actual Machine

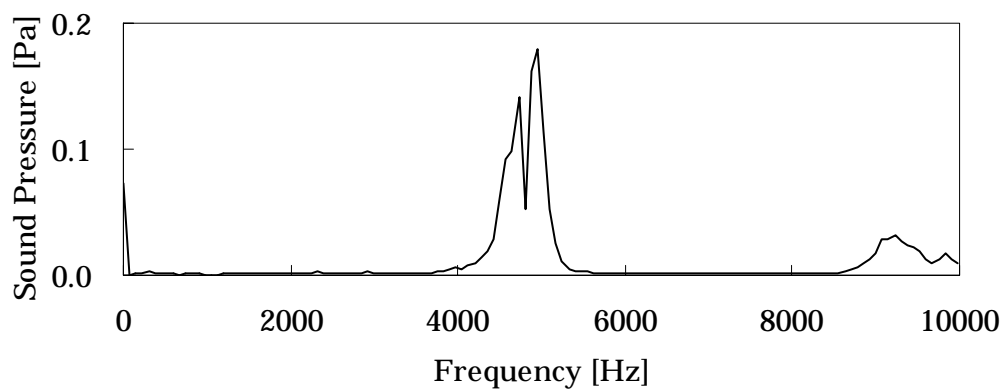


(b) Frequency of Unforeseen Noise in Simplified Model

Fig.3.4 Comparison between Actual Machine and Simplified Model  
about Frequency of Unforeseen Noise



(a) Frequency of Unforeseen Noise (Rotation Number=50rpm)



(b) Frequency of Unforeseen Noise (Rotation Number=120rpm)

Fig.3.5 Frequency Analysis of the Unforeseen Noise with the Variation of Rotation Speed

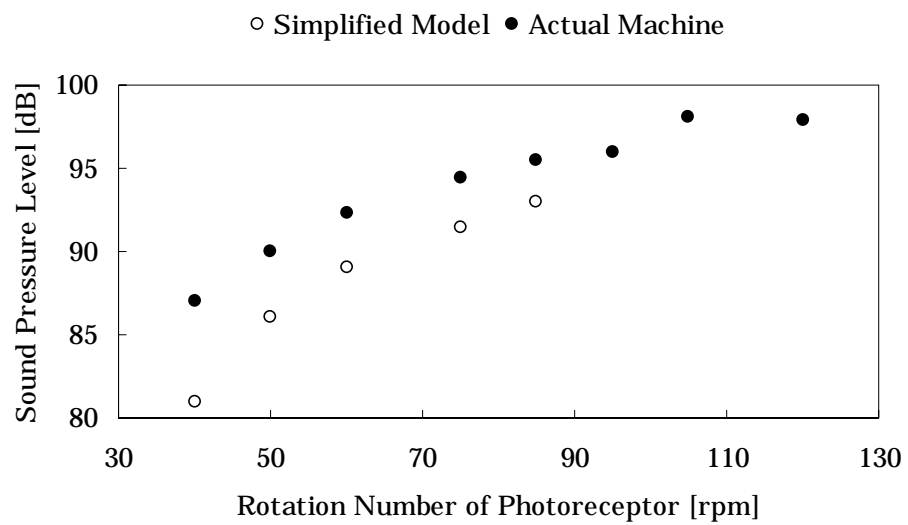


Fig.3.6 Comparison between Actual Machine and Simplified Model about Variation of Sound Pressure Level for Relative Velocity



### 3.3 自励振動発生機構に関する理論的検討

前節において、この異音の原因となる自励振動は、ブレード単体が振動系となっていることを明らかにした。さらに、ブレード単体を単純支持した実験モデルが、この自励振動の要素モデルとなっていることを示した。

本節では、この要素モデルを使い、自励振動の発生機構について理論的な検討を行う。本研究では、自励振動の発生機構を説明するモデルとして、多自由度系の連成モデルに着目した。そして、弾性体であるブレードを有限要素モデルで表し、ブレードと感光体の接触部における垂直抗力が変位に依存すると仮定し、垂直抗力をモード変位の線形結合として表現する多自由度モデルを提案する。

#### 3.3.1 多自由度連成自励振動モデル

第1章の1.2.5節で述べたように、線形多自由度振動系では、剛性行列や減衰行列が実対称正定値行列ではなく非対称性を有することによって、系の固有値が正の実部を持つ複素数となり、不安定振動を生じる。この場合、不安定振動の発生は、摩擦力の物体間の相対速度差に対する勾配の正負ではなく、摩擦係数の大きさに依存する。末岡らは、黒板上のチョークの自励振動について剛体であるチョークの並進と回転の二自由度系の運動方程式を定式化し、摩擦係数が剛性行列の非対称性によって系の固有値が正の実部を持つ複素数となることを示した[41,42]。同様に、剛性行列の非対称性に起因する自励振動の研究事例として、小野らによる磁気ディスク装置のコンタクト・スライダの例[43]や、桜井らの昇降機の例[45]がある。

これらの研究事例は、剛体の並進運動と回転運動が摩擦力を介した連成問題として捉えることができる。これに対し、本研究では弾性体であるブレードが持つ固有モードに着目し、本来独立であるモード間の振動が、特別な条件下において摩擦力を介して連成することを明らかにする。

### 3.3.2 クリーナ・ブレード自励振動モデル

#### (1) 有限要素を用いた基礎方程式

本研究では、弾性体であるブレードを多数の節点と要素から成る有限要素モデルとして考える。ただし、ブレードは、先端が感光体に接触した位置から所定量押しつけられ、平衡状態にあるものとする。

このブレードが摩擦力を受けて振動する場合には次式のように表される。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (3.1)$$

ここで、 $\{x\}$ は各節点における釣り合い位置からの変位を要素とする列ベクトルであり、 $\{F\}$ はブレードと感光体の接触部に作用する摩擦力を要素とする列ベクトルである。また、 $[M]$ 、 $[K]$ は質量行列、剛性行列をそれぞれ表している。

モード解析の理論[56]に従えば、変位 $\{x\}$ は、質量に対して正規化された各モードの固有関数ベクトル $\{\phi\}_i$  ( $i=1, \dots, n$ )を用いて次のように表現できる。

$$\{x\} = [\{\phi\}_1, \dots, \{\phi\}_n] \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} = [\Phi]\{q\} \quad (3.2)$$

ただし、 $n$ はモードの数、 $\{q\}$ は固有関数ベクトル $\{\phi\}_i$  ( $i=1, \dots, n$ )を基底ベクトルとするモード空間における変位量を要素とする列ベクトルを表す。式(3.2)を式(3.1)に代入すると、次式を得る。

$$\{\ddot{q}\} + [\Omega]^2 \{q\} = [\Phi]^T \{F\} \quad (3.3)$$

式(3.3)に含まれる $[\Omega]$ は、次式に示すような各モードに対応する固有角振動数 $\omega_n$ を対角成分に持つ正方行列となる。

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_n \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

以上が、摩擦力による連成を考慮しない場合の振動の基礎方程式となる。

## (2) 摩擦による連成力を考慮した連成振動モデル

次に、式(3.3)に摩擦による連成力を加える。いま、 $\{F\}$ の各要素は摩擦力であるので、摩擦係数  $\mu$ 、ブレードと感光体の接触部における垂直抗力ベクトル  $\{F_N\}$ によって

$$\{F\} = \mu \{F_N\} \quad (3.5)$$

と表される。ここで、垂直抗力は接触部における節点の変位に依存すると仮定し、構造力学の影響係数と類似の考え方にに基づき、垂直抗力ベクトル  $\{F_N\}$  を式(3.6)のように表現する。

$$\{F_N\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{Nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} = [A_F] \{q\} \quad (3.6)$$

ここに、 $N$  は節点の数、行列  $[A_F]$ の各成分は、接触部での反力に対する各モードの寄与率である。つまり、変位  $\{x\}$ と同様に、垂直抗力  $\{F_N\}$ もモード変位  $\{q\}$ の線形結合として表現できると仮定する。

式(3.5)、(3.6)を式(3.3)に代入すれば、

$$\{\ddot{q}\} + ([\Omega]^2 - \mu[\Phi]^T [A_F]) \{q\} = \{0\} \quad (3.7)$$

と表される。摩擦係数が0である場合には、式(3.7)のかっこ内の行列(以後、剛性行列と称す)は対角項だけに成分を持つため、この系の固有値は全て純虚数となる。これに対し、摩擦係数が値を持つ場合には、剛性行列に非対

称な成分が現れるため、系の固有値が正の実部を持つ複素数となる可能性が出てくる。

### 3.3.3 数値計算による線形安定性の検証

以上の摩擦力による連成振動モデルに実機のブレードの数値を適用し、式(3.7)の線形安定性を数値計算によって検証した。まず、汎用有限要素コード ANSYS を用いて図 3.7 に示す二次元有限要素モデルを作成した。適用した数値を表 3.1 に示す。ブレードの要素としては、4 節点アイソパラメトリック要素[57]を用いた。要素の分割方法としては、ANSYS の自動分割機能を用いた。図 3.8 に示すように、ブレードと感光体の接触点を中心とする半径 1mm の扇形の部分とそれ以外の二つの領域にブレードを分け、ブレードの長辺を 24 分割、その他の領域の境界線を 8 分割するように指定した。また、ブレードと感光体は一点（節点番号 1）のみで接触[58,59,60]し、両者は  $y$  軸方向には離間しないものと仮定した。さらに、ブレードが接着固定されている部分の  $x$  軸方向および  $y$  軸方向の変位を 0 に拘束した。

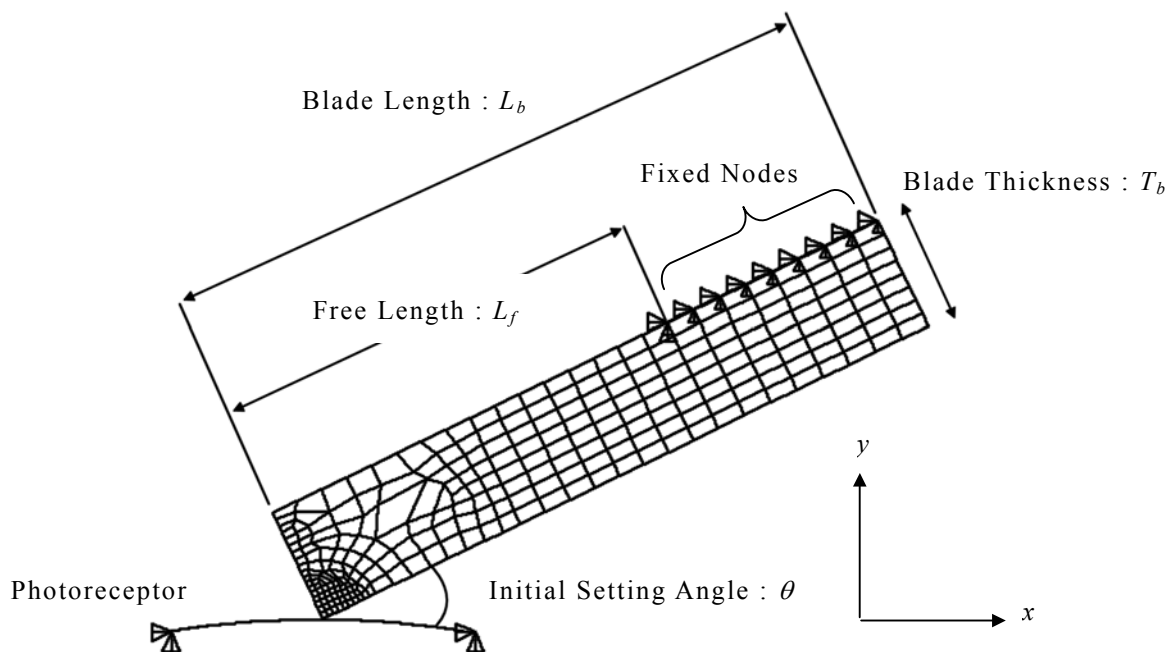


Fig.3.7 Finite Element Model of Blade

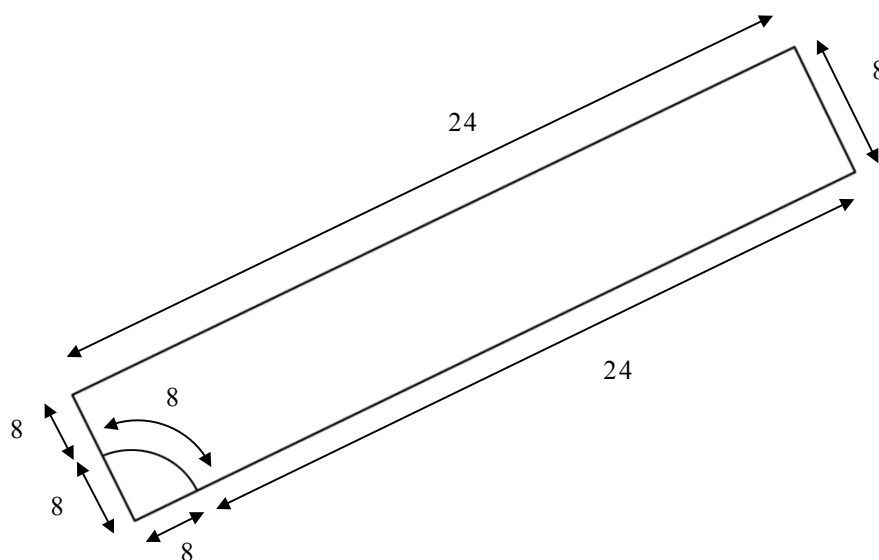


Fig.3.8 Number of Partitions for Automatic Meshing in ANSYS

Table 3.1 Parameters of the Numerical Simulation

Parameters	Values
Blade Length : $L_b$ [mm]	11.5
Free Length : $L_f$ [mm]	7.5
Blade Thickness : $T_b$ [mm]	2.0
Initial Setting Angle : $\theta$ [°]	27.0
Young's Modulus of Blade [MPa]	5.88
Density [kg/mm <sup>3</sup> ]	$1.5 \times 10^{-6}$
Poisson Ratio	0.495
Number of Elements	264

まず初めに、ブレードを初期設定位置から感光体に 1.2mm 押しつけた場合の大変形解析を行い、平衡状態における変形形状を求めた。解析結果を図 3.9 に示す。次に、この平衡状態における形状に対して固有値解析を行った。この解析により、各モードの固有振動数、固有関数および、接触点での反力に対する各モードの寄与率が求められる。いま、接触点は節点番号 1 のみであるので、式(3.7)における括弧内は式(3.8)のようになる。6 次までのモードの固有振動数、接触点である節点番号 1 に対応する固有関数ベクトルの第 1 成分および反力に対する各モードの寄与率を表 3.2 に示す。

$$\begin{aligned}
 & [\Omega]^2 - \mu[\Phi]^T[A_F] \\
 &= \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1N} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \omega_1^2 - \mu\phi_{11}a_{11} & -\mu\phi_{11}a_{12} & \cdots & -\mu\phi_{11}a_{1n} \\ -\mu\phi_{21}a_{11} & \omega_2^2 - \mu\phi_{21}a_{12} & \cdots & -\mu\phi_{21}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mu\phi_{n1}a_{11} & -\mu\phi_{n1}a_{12} & \cdots & \omega_n^2 - \mu\phi_{n1}a_{1n} \end{bmatrix} \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

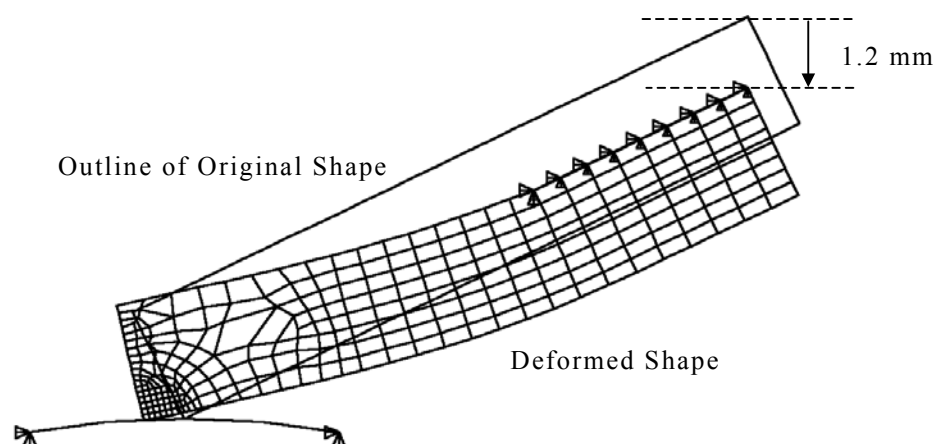


Fig.3.9 Deformation of the Blade with Interference=1.2mm

Table 3.2 Results of Eigenvalue Analysis of the Deformed Blade

Mode	Natural Frequency [Hz]	Factor of Eigenvector $\phi_{i1} (i=1, \dots, 6) [ \text{kg}^{-1/2} ]$	Contribution to Reaction Force $a_i (i=1, \dots, 6) [ \text{N m}^{-1} \text{kg}^{-1/2} ]$
1	1104.6	-20.0	-91971.7
2	1978.8	324.3	-116596.3
3	2836.9	4.6	-459826.8
4	4430.5	95.9	-542963.1
5	4687.5	-182.4	-221179.2
6	6040.2	278.5	256524.0



表 3.2 の結果を式(3.7)に代入し、摩擦係数  $\mu$  を 0 から 1.0 まで変化させた場合の固有値を根軌跡[61]として複素平面上に描画した。結果を図 3.10 に示す。一般的に、固有値の虚部は振動の固有角振動数  $\omega_n$  (以後、単に固有振動数と称す)を表し、実部は振動振幅の単位時間における変化率  $\zeta \omega_n$  (以後、成長率と称す)を表す。図 3.10 を見ると、摩擦係数の上昇に伴って、4 次と 5 次のモードが連成し、同一の振動数で振動するようになることがわかる。

一般的に知られているホップ分岐では、システム・パラメータの変化により、ある単独の複素固有値が振動数を変えながら負から正の成長率を持つ軌跡を描く。これに対し、図 3.10 の結果は二つの固有値が同一の振動数で正負の成長率を持つ特徴的な軌跡を描いている。これはハミルトニアン・ホップ分岐と呼ばれるモード連成パターンのひとつである[62,63,64]。本来、摩擦力は非保存力であるが、本研究では式(3.6)により、垂直抗力をモード変位の関数として表現している。このため、今回の安定解析結果における固有値の軌跡が、保存系に類似した分岐現象を呈したものと考察される。

図 3.11 に、4 次と 5 次のモードの根軌跡をより詳細に描画したものを示す。摩擦係数が 0 のときには、二つのモードは異なる固有振動数を持つ。しかし、摩擦係数が上昇するにつれて、互いに近づくように虚軸上を移動する。そして、摩擦係数が 0.44 を超えると、5 次モードの固有値の実部が正、つまり成長率が正となって系が不安定化する。このとき二つのモードの固有振動数は、同一の 4582Hz となり、実機で確認した異音の周波数 4600Hz にほぼ一致する。

連成を起した 4 次モードと 5 次モードの固有関数の形状を、それぞれ図 3.12 と図 3.13 に示す。図中、点線はブレードの原型を示し、最大変形時の外形を実線で示している。これらの結果から、4 次モードは垂直方向の変形である曲げ変形が支配的であり、5 次モードは水平方向の変形、つまり伸縮が支配的であることがわかる。

以上のように、実機の数値を適用した数値シミュレーションの結果、摩擦係数の上昇に伴って、4 次モードと 5 次モードが連成し、その固有値が正の実部を持つ複素数となる。その際、モードの固有振動数は実機における異音の周波数にほぼ一致した。したがって、この多自由度連成モデルは、本研究で取り上げた自励振動の発生機構を説明するモデルとして妥当である。

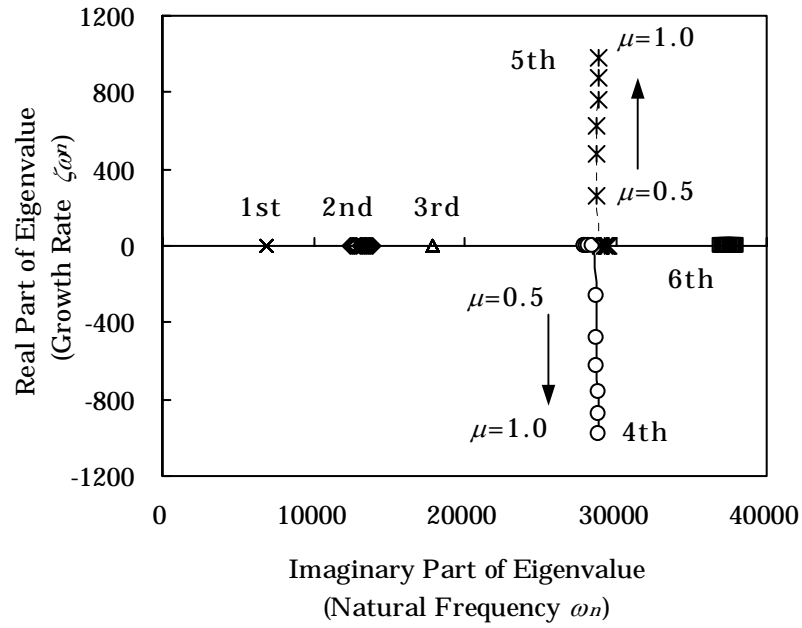


Fig.3.10 Root Locus with the Variation of Friction Coefficient

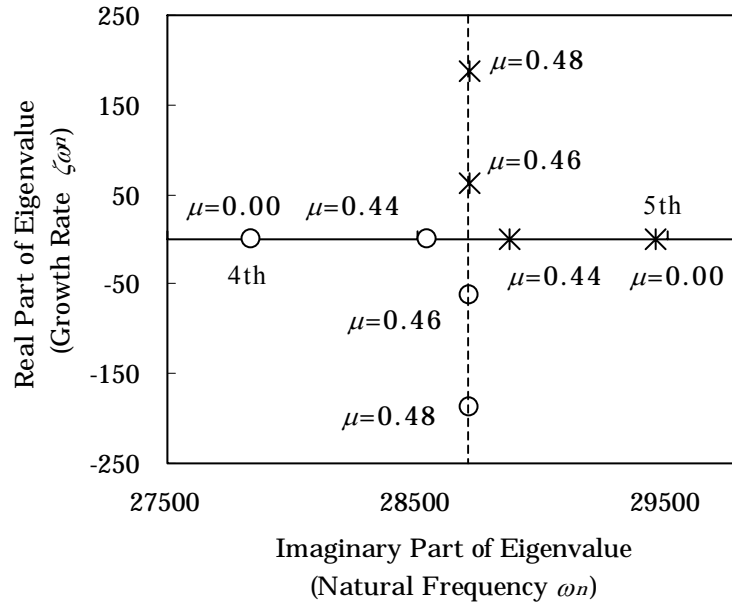
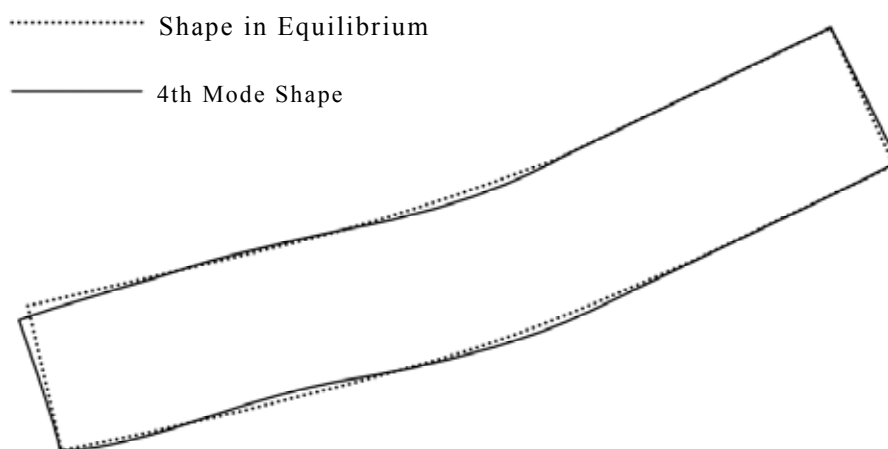
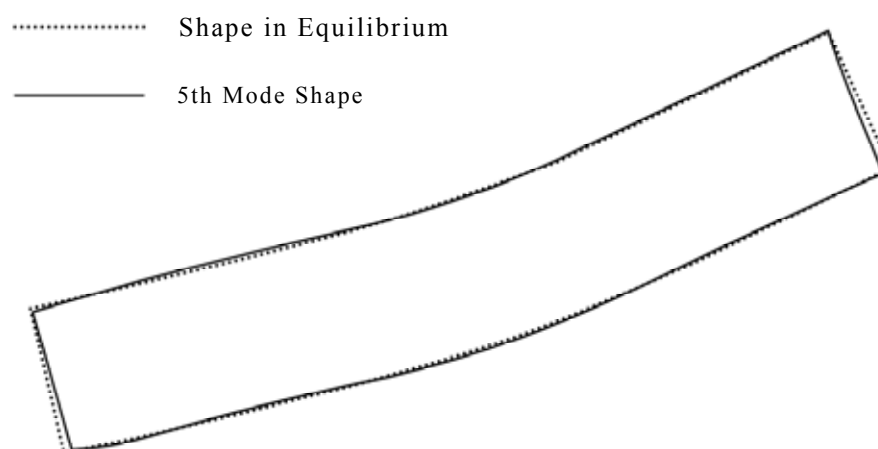


Fig.3.11 Detailed Root Locus of the 4th Mode and the 5th Mode

Fig.3.12 Shape of the Eigenfunction  $\{\phi\}_4$ Fig.3.13 Shape of the Eigenfunction  $\{\phi\}_5$

### 3.4 二自由度系の連成における自励振動発生条件

次に、二つのモードが連成し、固有値が正の実部を持つ複素数となって自励振動が発生する条件について考えてみる。\$n=2\$ として、式(3.7)を4次モードと5次モードについて書くと次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_4^2 - \mu\gamma_{44} & -\mu\gamma_{45} \\ -\mu\gamma_{54} & \omega_5^2 - \mu\gamma_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

ただし、\$\gamma\_{ij} = \{\phi\}\_i^T \{\alpha\}\_j\$ (\$i = 4, 5\$ \$j = 4, 5\$) であり、\$\{\alpha\}\_j = \{a\_{1j} \ a\_{2j} \ \dots \ a\_{Nj}\}^T\$ (\$j = 4, 5\$) とする。式(3.9)の解を \$q\_4 = Q\_4 e^{\lambda t}\$、\$q\_5 = Q\_5 e^{\lambda t}\$ とおき、特性方程式を求めると次式を得る。

$$\lambda^4 + (\omega_4^2 - \mu\gamma_{44} + \omega_5^2 - \mu\gamma_{55})\lambda^2 + (\omega_4^2 - \mu\gamma_{44})(\omega_5^2 - \mu\gamma_{55}) - \mu^2\gamma_{45}\gamma_{54} = 0 \quad (3.10)$$

式(3.10)は\$\lambda^2\$に関する二次代数方程式であるので、\$\lambda^2\$が複素数となる。つまり次式が成り立つとき、\$\lambda\$は虚数軸に対称な二組の共役複素数となる。このとき、\$\lambda\$の解の中に実部が正の複素数が必ず存在する。

$$\left[ (\omega_4^2 - \mu\gamma_{44}) - (\omega_5^2 - \mu\gamma_{55}) \right]^2 + 4\mu^2\gamma_{45}\gamma_{54} < 0 \quad (3.11)$$

通常、\$\omega^2 \gg \mu\gamma\$ と考えられ、式(3.11)はさらに以下のように簡略化できる。

$$(\omega_4^2 - \omega_5^2)^2 + 4\mu^2\gamma_{45}\gamma_{54} < 0 \quad (3.12)$$

ここで、式(3.12)が成り立つ条件、つまり自励振動が発生する条件について考えてみる。式(3.12)の左辺第1項は必ず正となるので、式(3.9)における剛性行列の非対角成分 \$\gamma\_{45}\$ と \$\gamma\_{54}\$ が異符号を持つこと、つまり \$\{\phi\}\_4^T \{\alpha\}\_5\$ と \$\{\phi\}\_5^T \{\alpha\}\_4\$ が、異符号を持つことが必要条件となる。さらに、二つの固有振動数が接近していること、および摩擦係数が大きいことが式(3.12)を成立しやすくさせる条件である。

以上の条件は、ブレードと感光体間の相対速度に対する摩擦力の勾配に依存しない。つまり、ブレードと感光体間の相対速度が大きい場合にも、固有値が正の実部を持つ複素数となり得ることを示唆しており、感光体の定常回転時における自励振動の発生を説明することができる。

## 3.5 結言

本章では、本研究が対象とする異音の原因となる自励振動の発生機構として、自励振動の発生条件を明らかにするため、ブレード単体を単純支持したモデルによる現象の再現と、この単純モデルによる自励振動発生機構に関する理論的検討を行い、以下の結論を得た。

- (1) ブレード単純支持モデルによって実機と同じ特徴を持つ異音を再現できることを実験的に示し、このモデルが実機の自励振動と同じ発生機構を有する要素モデルであることを確認した。
- (2) 自励振動の発生機構に関し、弾性体であるブレード単体を有限要素モデルで表し、感光体とブレードの接触部における垂直抗力をブレードの固有振動モードの線形結合として表現する多自由度連成モデルを提案した。このモデルに基づき線形安定解析を行った結果、実機の数値を適用して求められた連成後のモードの固有振動数は、実際の異音の周波数とよい一致を示し、本モデルの妥当性を確認した。
- (3) この自励振動の発生機構は、固有振動数が近接したブレードの曲げモードと伸縮モードの摩擦力を介した不安定モード連成であることを示し、摩擦係数の上昇に対する固有値の軌跡は、保存系におけるハミルトニアン・ホップ分岐に類似の挙動を示すことを明らかにした。さらに、この二つのモードについて、固有値が正の実部を持つ複素数となって、自励振動が発生する条件を明らかにした。

さらに、(3)に示した自励振動の発生条件は、この自励振動が持つ固有の特徴である

- (a) この異音は相対速度の大きい定常回転時に発生する。
- (b) 異音の周波数はクリーナ・ブレード部の固有振動数に一致する。

を矛盾無く説明できることを確認した。

## 第 4 章

# 不安定振動モードに関する非線形振動方程式の導出

### 4.1 序言

第 3 章では、単純支持条件のブレード単体によって、実機と同一の特徴を持つ現象を再現し、これが本自励振動現象の要素モデルであることを示した。異音の原因となる自励振動の発生機構を説明するモデルとして、感光体とブレードの接触部における垂直抗力を、ブレードの固有振動モードの線形結合として表現する多自由度連成モデルを導入した。そして、自励振動を線形化された系の発散振動とみなし、この線形モデルの固有値の安定条件から、自励振動の発生条件を明らかにした。この結果、この自励振動の発生機構が単なる乾性摩擦に起因する負減衰振動ではなく、ブレードの高次曲げモードと 1 次の伸縮モードの摩擦力を介した不安定モード連成であることを明らかにした。これらの成果により、不安定振動モード(以下、固有値が正の実部を持つ複素数であるモードをこのように称する)が現れる可能性をブレードの設計条件から予め把握できることを示した。

しかし、実機の観察では自励振動が発生した場合でも、定常振動の振幅が十分小さく、通常稼働音以下の大きさであれば問題として認識されない。このような状況を意図的に利用できれば、異音防止と清掃機能を両立するブレードの設計条件の範囲を広げることが可能となる。

そこで本章では、不安定振動モードに起因するブレードの自励振動について、非線形振動方程式の導出を検討する。具体的には、第 3 章において、摩擦係数の上昇によって固有値が正の実部を持つ複素数となる事が確認された二つのモードの連成振動について、これに非線形項を加えた非線形振動方程式を考える。そして、各モードの固有ベクトルに直交する随伴ベクトルを

導入し, 不安定振動モードに関する非線形振動方程式を抽出する[55]. 次に, この非線形振動方程式を多重尺度法により解き, 不安定振動モードのモード変位を定式化する. さらに, 定常振動時における二つのモードのモード変位を明らかにし, 非連成時の固有関数ベクトルとの線形結合[65]により定常振動時におけるブレード上の振動振幅に関する理論式を導く.

## 4.2 不安定振動モードに関する非線形振動方程式の定式化

第3章においてブレードの持つ4次モード(高次曲げ)と5次モード(1次伸縮)が, 摩擦係数の上昇と共に摩擦力を介して連成し, 固有値が正の実部を持つ複素数となる事を示した. この二つのモードについて非線形成分を含めた場合の非線形振動は式(3.9)より次のように記述される.

$$\begin{Bmatrix} \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_4^2 - \mu\gamma_{44} & -\mu\gamma_{45} \\ -\mu\gamma_{54} & \omega_5^2 - \mu\gamma_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

式(4.1)の右辺は主にブレード先端に働く摩擦力に起因すると推定される未知の非線形成分である.

まず, 次式のような状態ベクトル  $\{Z\}$  を導入する.

$$\{Z\} = \{\dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad q_4 \quad q_5\}^T \quad (4.2)$$

この  $\{Z\}$  を用いて, 式(4.1)を  $\{Z\}$  についての一階の常微分方程式として表せば次式を得る.

$$[R]\{\dot{Z}\} + [\Gamma]\{Z\} = \{F'\} \quad (4.3)$$

ただし



$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [G] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_4^2 - \mu\gamma_{44} & -\mu\gamma_{45} \\ 0 & 0 & -\mu\gamma_{54} & \omega_5^2 - \mu\gamma_{55} \end{bmatrix} \quad \{F'\} = \{0 \quad 0 \quad f_4 \quad f_5\}^T \quad (4.4)$$

とする。いま、式(4.3)の右辺を0とした $\{Z\}$ についての線形微分方程式の解を次のようにおく。

$$\{Z\} = \{\psi\} e^{\lambda t} \quad (4.5)$$

式(4.5)を式(4.3)に代入すれば、次式を得る。

$$\lambda[R]\{\psi\} + [G]\{\psi\} = \{0\} \quad (4.6)$$

式(4.6)の特性方程式は、 $\lambda^2$ に関する二次代数方程式であるので、 $\lambda^2$ が複素数となるとき、 $\lambda$ は虚数軸に対称な二組の共役複素数となる。

ここで、 $\mu = 0$ であるので、式(4.6)の $[G]$ は非対称行列となり、連成後の各固有値に対応する固有ベクトル $\{\psi\}$ 間の直交性が成立しない。同時に、 $\{\psi\}$ の各成分は複素数となる。そこで、次式を満足するような $\{\psi\}$ の随伴ベクトル $\{\bar{P}\}$ を導入する[55]。

$$\lambda\{\bar{P}\}^T[R] + \{\bar{P}\}^T[G] = \{0\}^T \quad (4.7)$$

式(4.6)の $\lambda$ が $\lambda_i$  ( $i=1, \dots, 4$ )である場合と、式(4.7)の $\lambda$ が $\lambda_j$  ( $j=1, \dots, 4$ )の場合を考える。 $\{\bar{P}\}_j^T$ を式(4.6)の左側から、 $\{\psi\}_i$ を式(4.7)の右側からかけると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i \{\bar{P}\}_j^T [R] \{\psi\}_i + \{\bar{P}\}_j^T [G] \{\psi\}_i &= 0 \\ \lambda_j \{\bar{P}\}_j^T [R] \{\psi\}_i + \{\bar{P}\}_j^T [G] \{\psi\}_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

二つの式の差をとれば

$$(\lambda_i - \lambda_j) \{\bar{P}\}_j^T [R] \{\Psi\}_i = 0 \quad (4.9)$$

となる。  $i \neq j$  のとき、  $\lambda_i \neq \lambda_j$  であるので、式(4.8)、(4.9)より次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \{\bar{P}\}_j^T [R] \{\Psi\}_i &= 0 \\ \{\bar{P}\}_j^T [\Gamma] \{\Psi\}_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

次に、式(4.3)の右辺を非零として非線形成分を含めた場合の解を次のようなモード結合で与える。

$$\{Z\} = \sum_{k=1}^4 \{\Psi\}_k \xi_k \quad (4.11)$$

式(4.11)を式(4.3)に代入すれば次のようになる。

$$\sum_{k=1}^4 [R] \{\Psi\}_k \dot{\xi}_k + \sum_{k=1}^4 [\Gamma] \{\Psi\}_k \xi_k = \{F'\} \quad (4.12)$$

となる。ここで、式(4.12)の左側から  $\{\bar{P}\}_k^T$  ( $k=1, \dots, 4$ ) を順次乗ずれば、式(4.10)の関係より、  $i=j=k$  の成分だけが残る、各モードの状態方程式を次式のように得る。

$$\{\bar{P}\}_k^T [R] \{\Psi\}_k \dot{\xi}_k + \{\bar{P}\}_k^T [\Gamma] \{\Psi\}_k \xi_k = \{\bar{P}\}_k^T \{F'\} \quad k=1, \dots, 4 \quad (4.13)$$

また、式(4.8)より、  $i=j=k$  のとき

$$\{\bar{P}\}_k^T [\Gamma] \{\Psi\}_k = -\lambda_k \{\bar{P}\}_k^T [R] \{\Psi\}_k \quad (4.14)$$

であり、さらに  $A_k \equiv \{\bar{P}\}_k^T [R] \{\Psi\}_k$ 、  $\zeta_k \equiv \{\bar{P}\}_k^T \{F'\}$  とすれば、式(4.13)は次のように書き

改められる .

$$A_k \dot{\xi}_k - \lambda_k A_k \xi_k = \zeta_k \quad k=1, \dots, 4 \quad (4.15)$$

いま , 着目しているのは不安定振動モードのモード変位である . そこで , 連成後に現れる 4 つの固有値のうち , 実部が正のものだけを抽出する . 仮に , 実部が正の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2$  とし , 以下の二式のみを考える .

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\xi}_1 - \lambda_1 A_1 \xi_1 &= \zeta_1 \\ A_2 \dot{\xi}_2 - \lambda_2 A_2 \xi_2 &= \zeta_2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

いま ,  $\lambda_1, \lambda_2$  は複素共役の関係にあるから ,  $A_1 = A_2, \bar{\xi}_1 = \xi_2, \bar{\zeta}_1 = \zeta_2$  となる . したがって

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\xi}_1 - \lambda_1 A_1 \xi_1 &= \zeta_1 \\ A_1 \dot{\bar{\xi}}_1 - \bar{\lambda}_1 A_1 \bar{\xi}_1 &= \bar{\zeta}_1 \end{aligned} \quad (4.17)$$

以上で不安定振動モードのみの振動方程式を抽出できた . ここで , さらに下記のような演算子を導入して , この二つのモードを結合する .

$$D_L \equiv d/dt - \lambda_1 \quad (4.18)$$

式(4.18)の演算子を式(4.17)に適用して , 二式を加えれば次式を得る .

$$D_L \bar{D}_L (\xi_1 + \bar{\xi}_1) = (\bar{D}_L \zeta_1 + D_L \bar{\zeta}_1) / A_1 \quad (4.19)$$

さらに ,  $\xi_1 \equiv q_u + i q_{ui}, \lambda_1 \equiv \lambda_{ur} + i \lambda_{ui}, \zeta_1 \equiv \zeta_{1r} + i \zeta_{1i}$  として式(4.19)に代入すれば ,

$$\ddot{q}_u - 2\lambda_{ur} \dot{q}_u + (\lambda_{ur}^2 + \lambda_{ui}^2) q_u = \frac{1}{A_1} (\dot{\zeta}_{1r} - \lambda_{ur} \zeta_{1r} - \lambda_{ui} \zeta_{1i}) \quad (4.20)$$

式(4.20)の右辺は主にブレードと感光体の接触点に働く摩擦力に起因すると推定される未知の非線形成分である . いま , 対象とする自励振動が一定時

間後に定常状態になるという観察結果を考慮し,  $-2\lambda_{ur}\dot{q}_u$  の成長を抑制する非線形項の存在を仮定する. この非線形項をモード変位と速度の関数とした場合に, 定常振幅を一意に決められる可能性があるものを検討すると,  $\dot{q}_u^3$  と  $q_u^2\dot{q}_u$  の二つが考えられる(詳細は巻末付録 A を参照のこと). 前者を式(4.20)に代入すれば van der Pol の方程式となり, 後者の場合には Rayleigh の方程式に一致する. よく知られているように, この二つの方程式は変数変換で相互に変換が可能であり, 本質的に同一である[67,68]. 本研究では, Rayleigh の方程式を参考に, 式(4.20)の右辺を以下のように表す.

$$\ddot{q}_u - 2\lambda_{ur}\dot{q}_u + (\lambda_{ur}^2 + \lambda_{ui}^2)q_u = -\delta\dot{q}_u^3 \quad (4.21)$$

ここで,  $\delta$  は実験における定常振幅値との比較から決定する非線形項の係数である. 決定方法の詳細については後述する.

したがって, 不安定振動モードのモード変位に関する非線形振動は次式のように定式化できる.

$$\ddot{q}_u - 2\lambda_{ur}\dot{q}_u + \delta\dot{q}_u^3 + (\lambda_{ur}^2 + \lambda_{ui}^2)q_u = 0 \quad (4.22)$$

### 4.3 多重尺度法による非線形定常周期解の導出

本節では、前節で定式化された不安定振動モードのモード変位に関する非線形振動方程式の解  $q_u(t; \lambda_{ur}, \lambda_{ui}, \delta)$  を、多重尺度法により求める。

いま、未知関数  $q_u$  の無次元量  $v_u$ 、独立変数である時間  $t$  の無次元量  $\tau$  を、次のように定義する。

$$v_u \equiv q_u / L, \quad \tau \equiv t / T \quad (4.23)$$

ただし、 $L = \sqrt{2\lambda_{ur} / \delta\lambda_{ui}^2}$ 、 $T = 1 / \lambda_{ui}$  とする。式(4.22)において  $\lambda_{ur}^2 + \lambda_{ui}^2 \approx \lambda_{ui}^2$  とした後、式(4.23)を代入すれば次式を得る。

$$\frac{d^2 v_u}{d\tau^2} - 2\varepsilon \left\{ 1 - \left( \frac{dv_u}{d\tau} \right)^2 \right\} \frac{dv_u}{d\tau} + v_u = 0 \quad (4.24)$$

ここで、無次元パラメータ  $\varepsilon$  は次式で与えられるものとする。

$$\varepsilon = \frac{\lambda_{ur}}{\lambda_{ui}} \quad (4.25)$$

式(4.24)より、無次元変位  $v_u$  は、 $\varepsilon$  を無次元パラメータとする無次元時間  $\tau$  の関数であることがわかる。

無次元化された式(4.24)の解を多重尺度法により求める。いま、式(4.24)の近似解を、パラメータ  $\varepsilon$  用いて次式のように展開できるものと仮定する。

$$v_u(\tau) = v_{u0}(\tau_0, \tau_1) + \varepsilon v_{u1}(\tau_0, \tau_1) + \dots \quad (4.26)$$

ここで、 $\tau_0 \equiv \tau$ 、 $\tau_1 \equiv \varepsilon\tau$  は単一の時間尺度  $\tau$  の代わりに、導入された複数の時間尺度である。式(4.24)に式(4.26)を代入し、多重尺度法の求解法にしたがって、 $\tau_0$  に関する永年項が生じない条件を考慮すれば、 $v_{u0}$  の解を  $v_{u0} = A(\tau_1)e^{i\tau_0} + \text{C.C.}$  とした時の複素振幅  $A(\tau_1)$  は次式を満足する必要がある。

$$D_1 A(\tau_1) = A(\tau_1) - 3A(\tau_1)^2 \bar{A}(\tau_1) \quad (4.27)$$

したがって、定常振幅に達した場合の  $A(\tau_1) = A_s$  を、式(4.27)の左辺を 0 として求めると、次式のようになる。

$$A_s \bar{A}_s = \frac{1}{3} \quad (4.28)$$

式(4.28)を  $v_{u0} = A(\tau_1)e^{i\tau_0} + \text{C.C.}$  に適用すれば

$$v_{u0} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \tau_0 \quad (4.29)$$

となる。

したがって、式(4.26)の  $v_u$  に関して、 $\varepsilon$  の 2 次以上の高次微小項を無視した解は、次式のようになる。

$$v_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \tau + O(\varepsilon) \quad (4.30)$$

## 4.4 非線形定常周期解の二自由度系への再構成

最終的に、ブレード上の変位  $\{x\}$  を非連成時の固有関数  $\{\phi\}_4, \{\phi\}_5$  を使って、 $\{x\} = \{\phi\}_4 q_4 + \{\phi\}_5 q_5$  と表すため、本節では定常振動時における  $q_4$  および  $q_5$  を式(4.30)の  $v_u$  を使って表現する[65,69,70]。

前節と同様に式(4.23)を用いて式(3.1)を無次元化すると、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \ddot{v}_4 \\ \ddot{v}_5 \end{Bmatrix} + T^2 \begin{bmatrix} \omega_4^2 - \mu\gamma_{44} & -\mu\gamma_{45} \\ -\mu\gamma_{54} & \omega_5^2 - \mu\gamma_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \frac{T^2}{L} \begin{Bmatrix} f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

ただし、 $v_i \equiv q_i / L_i$  ( $i = 4, 5$ )とする。このとき、式(4.31)の右辺を 0 とした線形部分の解を次式のように考える。

$$\begin{Bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_4 \\ A_5 \end{Bmatrix} e^{i\tau} + \text{C.C.} \quad (4.32)$$

ここで、定常振動時の  $A_4$ 、 $A_5$  は、式(4.31)の右辺によって決まるため、この段階では未知である。式(4.32)を式(4.31)の線形部分に代入すれば次式を得る。

$$\begin{bmatrix} -1+T^2(\omega_4^2 - \mu\gamma_{44}) & -\mu\gamma_{45}T^2 \\ -\mu\gamma_{54}T^2 & -1+T^2(\omega_5^2 - \mu\gamma_{55}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_4 \\ A_5 \end{Bmatrix} e^{i\tau} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

式(4.33)の左辺の行列の積を計算し、その結果得られる行列の第 2 行の要素が、対応する右辺の行列の要素である 0 と等しいと考えれば、次の関係を得る。

$$-\mu\gamma_{54}T^2 A_4 + \{-1+T^2(\omega_5^2 - \mu\gamma_{55})\}A_5 = 0 \quad (4.34)$$

このとき、 $A_4$ 、 $A_5$  の複素振幅比を次のように定義する。

$$R \equiv \frac{A_4}{A_5} = \frac{-1+T^2(\omega_5^2 - \mu\gamma_{55})}{\mu\gamma_{54}} \quad (4.35)$$

同様に、 $\bar{A}_4$ 、 $\bar{A}_5$  の複素振幅比を

$$\bar{R} \equiv \frac{\bar{A}_4}{\bar{A}_5} \quad (4.36)$$

と定義する。式(4.35)、式(4.36)の関係を用いれば、式(4.32)は次のように書き改められる。

$$\begin{Bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \\ 1 \end{Bmatrix} A_5 e^{i\tau} + \text{C.C.} \quad (4.37)$$

さらに、 $A_5$  の絶対値を  $|A_5|$  とし、複素振幅  $R$  の絶対値を  $|R|$ 、偏角を  $\angle R$  とすれば、式(4.37)は次のように書き改められる。

$$\left. \begin{aligned} v_4 &= 2|A_5|R|\sin(\tau + \angle R) \\ v_5 &= 2|A_5|\sin \tau \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

式(4.38)には, 定常振動時の未知の複素振幅  $A_5$  に関する項  $|A_5|$  が含まれており, このままでは4次モードと5次モードの定常振動時のモード変位を決定することができない. そこで, この二つのモードの線形結合から定常振動時の無次元化されたモード変位  $v_u$  を求め, 式(4.30)との比較から  $|A_5|$  を決定する.

式(4.11)より, 二組の共役複素数となる固有値のうち, 実部が正となる不安定振動モードのみを取り出せば次式のようになる.

$$\{Z\} = \{\Psi\}_1 \xi_1 + \{\Psi\}_2 \xi_2 \quad (4.39)$$

このモードが互いに複素共役であることと, 式(4.2)の定義を考慮すれば, 次式の関係を得る.

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \{\Psi\}_1 \xi_1 + \{\bar{\Psi}\}_1 \bar{\xi}_1 \quad (4.40)$$

また,  $\{\Psi\}_1 = \{\lambda_1 \psi_{41} \quad \lambda_1 \psi_{51} \quad \psi_{41} \quad \psi_{51}\}^T$  より

$$\begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_{41} \\ \psi_{51} \end{Bmatrix} \xi_1 + \text{C.C.} \quad (4.41)$$

となる. これを無次元化し, 複素振幅比  $R$  を用いて書き改めれば, 次式を得る.

$$\begin{Bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \\ 1 \end{Bmatrix} \psi_{51} \frac{\xi_1^*}{L} + \text{C.C.} \quad (4.42)$$

ここで,  $\xi_1^*$  は  $\xi_1$  を無次元化したものである.  $\xi_1^*$  の大きさは未知であるので,



$\psi_{51}\xi_1^*$  を改めて  $\xi_1^*$  と置きなおせば、次式の関係を得る。

$$\begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\xi_1^*}{L} + \text{C.C.} \quad (4.43)$$

したがって、式(4.37)と式(4.43)の比較から次式の関係を得る。

$$\xi_1^*/L = A_5 e^{i\tau} \quad (4.44)$$

ここで、 $\xi_1 \equiv q_u + iq_{ui}$  の関係を考慮すれば、 $v_u = \text{Re}\{\xi_1^*\}$  であるから

$$v_u = |A_5| \sin(\tau + \angle A_5) \quad (4.45)$$

ただし、 $\angle A_5$  は複素振幅  $A_5$  の偏角である。

一方、式(4.30)では非線形部分を含めた解析により振幅が得られている。したがって、式(4.45)と式(4.30)の比較から、 $|A_5|$  が次式のように求められる。

$$|A_5| = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (4.46)$$

これを式(4.38)に代入し、有次元に戻せば定常振動時の4次と5次のモード変位は次式で表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} q_4 &= \frac{4|R|}{\lambda_{ui}} \sqrt{\frac{2\lambda_{ur}}{3\delta}} \sin(\lambda_{ui}t + \angle R) \\ q_5 &= \frac{4}{\lambda_{ui}} \sqrt{\frac{2\lambda_{ur}}{3\delta}} \sin\lambda_{ui}t \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

## 4.5 定常振幅の理論式と非線形項 $\delta$ の決定

以上の検討結果より, 定常振動時の変位を定式化する. ブレードの非線形外力成分を含めた振動は次式で記述される.

$$\{x\} = \{\phi\}_4 q_4 + \{\phi\}_5 q_5 \quad (4.48)$$

いま, 任意の節点番号 $\eta$ について, 対応する変位と4次モードおよび5次モードの固有関数の値をそれぞれ,  $x_\eta, \phi_{4\eta}, \phi_{5\eta}$ とすれば, 振動振幅に関する以下の理論式が得られる.

$$\begin{aligned} x_\eta &= \phi_{4\eta} q_4 + \phi_{5\eta} q_5 \\ &= \frac{4}{\lambda_{ui}} \sqrt{\frac{2\lambda_{ur}}{3\delta}} \left[ |R| \phi_{4\eta} \sin(\lambda_{ui} t + \angle R) + \phi_{5\eta} \sin \lambda_{ui} t \right] \\ &= \frac{4}{\lambda_{ui}} \sqrt{\frac{2\lambda_{ur}(a^2 + b^2)}{3\delta}} \sin(\lambda_{ui} t + \sigma) \end{aligned} \quad (4.49)$$

ただし

$$a = |R| \phi_{4\eta} \cos \angle R + \phi_{5\eta} \quad b = |R| \phi_{4\eta} \sin \angle R \quad \sigma = \tan^{-1}(b/a) \quad (4.50)$$

である. さらに, 節点番号 $\eta$ と同一地点における振動振幅の測定値  $x_{exp}$  と式(4.49)の理論値が等しいとすれば, 式(4.22)の非線形項の係数 $\delta$ が次のように求められる.

$$\delta = \frac{32}{3} \frac{\lambda_{ur}}{\lambda_{ui}^2 x_{exp}^2} \left\{ \left( |R| \phi_{4\eta} \cos \angle R + \phi_{5\eta} \right)^2 + \left( |R| \phi_{4\eta} \sin \angle R \right)^2 \right\} \quad (4.51)$$

以上の検討結果に実機の設計パラメータを適用し, 実際に非線形項 $\delta$ を決定する. 設計パラメータの具体的な数値としては, 第3章の表3.1の数値を用いた. 次に, 実機で発生している自励振動について, 定常振幅, 成長率およ

び定常振動の振動数を測定した。図 4.1 に自励振動の周波数分析による定常振幅の測定結果を示す。この周波数分析結果から、定常振幅  $x_{exp}$  および固有角振動数  $\lambda_{ui}$  が求められる。また、図 4.2 に自励振動発生から定常振動に至るまでの時間波形と、時間波形の振幅の成長率を指数関数で近似した結果を示す。この近似式より、振幅の成長率  $\lambda_{ur}$  が求められる。これらの数値と、第 3 章の線形解析結果から得られる非連成時の固有関数  $\{\phi\}_4, \{\phi\}_5$  を式(4.35)と式(4.51)に代入すれば、モード振幅比  $R$  および非線形項係数  $\delta$  が求められる。結果を表 4.1 に示す。なお、振動中のブレード先端における摩擦係数は実測による把握が困難であるため、振動成長率の実測結果と第 3 章における安定解析結果から推定した。具体的には、第 3 章の図 3.10 において固有値の実部が振動成長率の実測結果 65.9 である場合の摩擦係数から 0.46 と決定した。

以上のような手順で求められた数値と、式(4.49)とから、ブレード上の任意の点における振動振幅を求めることができる。

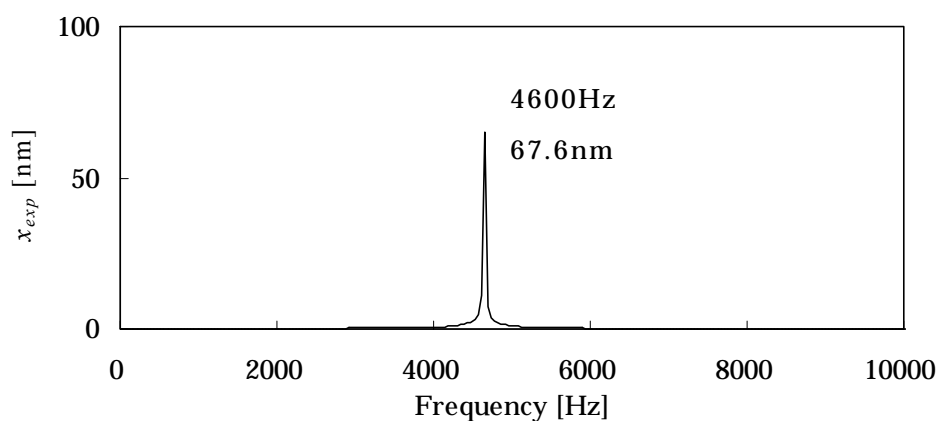
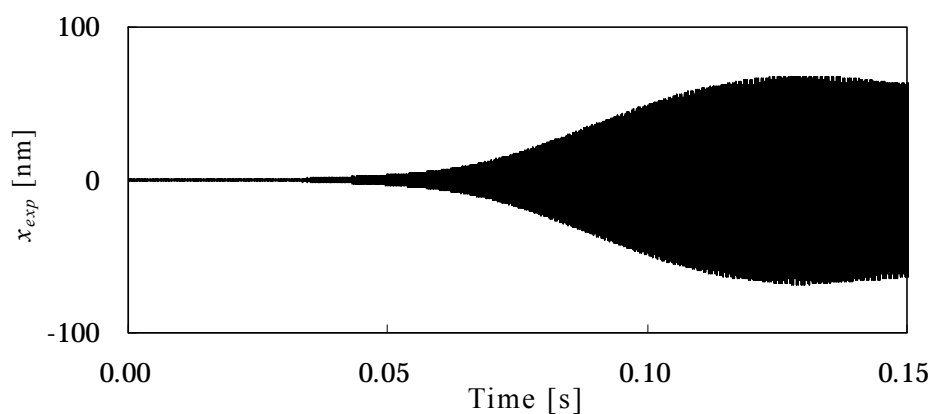
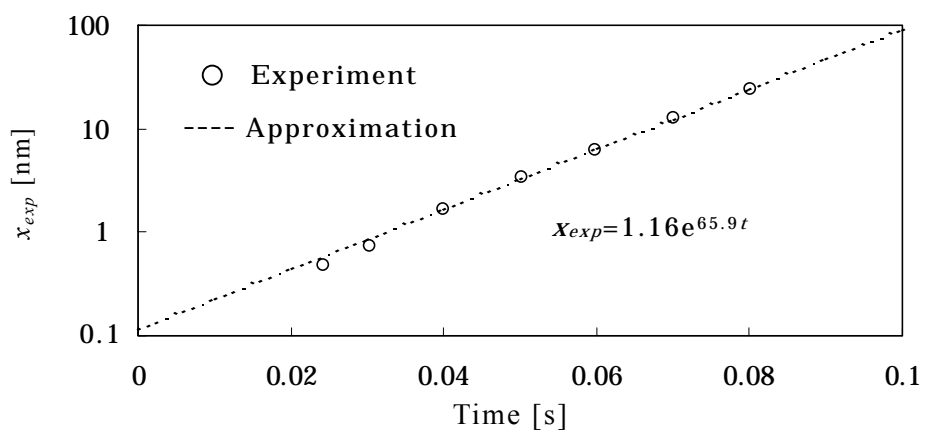


Fig.4.1 Measurement Result of Steady-state Amplitude in the Actual Machine



(a) Time History of Vibration



(b) Approximation of Growth Rate of Amplitude

Fig.4.2 Growth Rate of Amplitude in the Actual Machine

Table 4.1 Results of Nonlinear Analysis with Design Parameters of the Actual Machine

Parameters	Values
Steady-state Amplitude: $x_{exp}$ [nm]	67.6
Growth Rate of Amplitude: $\lambda_{ur}$	65.9
Frequency: $\lambda_{ui}$ [Hz]	4588
Friction Coefficient: $\mu$	0.46
Complex Amplitude Ratio: $R$	0.51
Coefficient of Nonlinear Term: $\delta$	$3.3 \times 10^{12}$

## 4.6 結言

本章では、不安定振動モードに起因するブレードの自励振動について、非線形振動方程式の導出を検討した。

まず、摩擦力を介して連成する 4 次と 5 次のモードについて、非線形項を加えた非線形振動方程式の導出を検討した。この際、不安定振動モードの固有関数が直交しないという課題に対し、各モードの固有ベクトルに直交する随伴ベクトルを導入し、この随伴ベクトルによって抽出された不安定振動モードの重ね合わせにより、非線形振動方程式が導出できることを示した。

次に、摩擦力の非線形成分をモード変位と速度の関数として表されるものと仮定し、振幅抑制効果を得ることができる非線形項を検討した。具体的には、多重尺度法による求解において、永年項を生じない条件から速度の 3 乗に比例する非線形項を仮定し、導出した非線形振動方程式を多重尺度法により解き、不安定振動モードのモード変位を定式化した。

さらに、定常振動時のブレード上の振動振幅を、非連成時の固有関数と不安定モードのモード変位を使って定式化することを試みた。この際、未知数となる定常振動時における 4 次モードと 5 次モードの複素振幅を、先に求めた不安定振動モードの振動方程式との比較から決定した。

最終的に、定常振動時の振幅に関する理論式を導出し、理論式に含まれる未知の非線形項の係数  $\delta$  を、実測した定常振幅から決定することで、定常振動時におけるブレードの自励振動の挙動を明らかにする手法を示した。

## 第 5 章

# ケース・スタディによる設計への適用検討

## 5.1 序言

第 4 章では、摩擦係数の上昇によって固有値が正の実部を持つ複素数となる二つのモードの連成振動について、これに主にブレード先端に働く摩擦力に起因すると推定される非線形成分を加えた非線形振動方程式を考え、系の随伴ベクトルを用いて抽出した不安定振動モードに関する非線形振動方程式を導出した。そして、非連成時の固有関数ベクトルとの線形結合により定常振動時におけるブレード上の振動振幅に関する理論式を導き、未知数として残されていた非線形項の係数 $\delta$ を実験値との比較から決定する方法を明らかにした。

本章では、第 4 章で示した非線形解析手法の妥当性と、ブレード設計変更への有用性を確認する。

最初に、実際の開発プロセスで行われているブレード設計に関する主な設計パラメータについて述べる。

次に、現状で発生している異音を抑制するための設計パラメータの検討を行う。この検討により、主機能への影響が少なく、製品として現実的に変更可能なパラメータとしてブレードの厚みと自由長を考える。そして、この二つの設計パラメータを変更した複数の事例について、第 4 章の成果をもとに、自励振動の振動数と定常振幅の予測を行う。

次に、ブレードの厚みと自由長を変更したクリーナ・ブレード部を実際に製作し、発生する自励振動の振動数と定常振幅値を実測する。この実測結果と定常振幅に関する理論式から算出した値との比較から、本研究における非線形解析手法の妥当性を検証する。

さらに、理論式の妥当性確認に続き、ブレードの厚みと自由長を変更した56 ケースの数値計算を行う。この結果から二つの設計パラメータに関する自励振動の発生領域及び定常振幅値の詳細分布を可視化・考察し、ブレードの厚さに対する連成モードの固有振動数差、固有関数の大きさの二つによって得られた詳細分布を説明できることを明らかにする。以上の考察から、自励振動抑制のためのブレードの厚みと自由長に関する設計指針を抽出する。



## 5.2 クリーナ・ブレード部の設計

### 5.2.1 ブレードの設計パラメータ

クリーナ・ブレード部では、感光体上の残留物除去・清掃という基本機能を長期にわたって維持することが重要となる。そこで、用いられるブレードに要求される特性としては、感光体を傷つけない柔軟性、安定した押圧力、トナーのすり抜けや振動を防止する反発弾性、エッジの局部的欠損や磨耗を回避するための高い強度の4点に要約されることを第1章の1.2.2節で述べた。本節では、これらの要求特性を満たすためのブレードの具体的な設計パラメータの決定方法について説明する。

残留物除去・清掃を効率的に行うためには、ブレードの感光体に対する押圧力と当接角度、摩擦係数が重要となる。図5.1にブレードの主な設計パラメータを示す[19]。

ブレードを片持ちの梁とみなせば、片持ち針の先端に集中加重した場合のたわみの式から、ブレードを  $d$  押し付けたときのブレードの長手方向における単位長さあたりの押圧力  $P_N$  は次式で表すことができる。

$$P_N = \frac{ET_b^3 d}{4L_f^3} \quad (5.1)$$

一方、自由長  $L_f$  のブレード先端部のたわみ角度  $\beta$  は次式で表される。

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{d}{L_f} \right) \quad (5.2)$$

したがって、ブレードの初期設定角度を  $\theta$  とすれば、ブレード先端部の感光体に対する当接角度  $\theta_w$  は次式で表される。

$$\theta_w = \theta - \tan^{-1} \left( \frac{d}{L_f} \right) \quad (5.3)$$

現在の開発プロセスでは、式(5.1)、(5.2)、(5.3)を元に、所望のブレードの押圧力(残留物除去・清掃能力)と自励振動抑制を両立する値を試行錯誤的に決定している。多くの場合、過去の開発機種における設計値を踏襲しつつ、若干の変更を加えている。

表 5.1 にプリンタにおける代表的な設定量と本研究が対象とする機種の設定値を示す。一般的に、押圧力、当接角度、摩擦係数が高いほど、残留物の除去・清掃能力は向上する。しかし、ブレードのめくれや異音は発生しやすくなる。つまり、残留物の除去・清掃能力と異音防止はトレード・オフの関係にある。したがって、二次障害となる異音・めくれ発生の防止と、主機能である残留物の除去・清掃機能を両立するように設計パラメータを決定する必要がある。

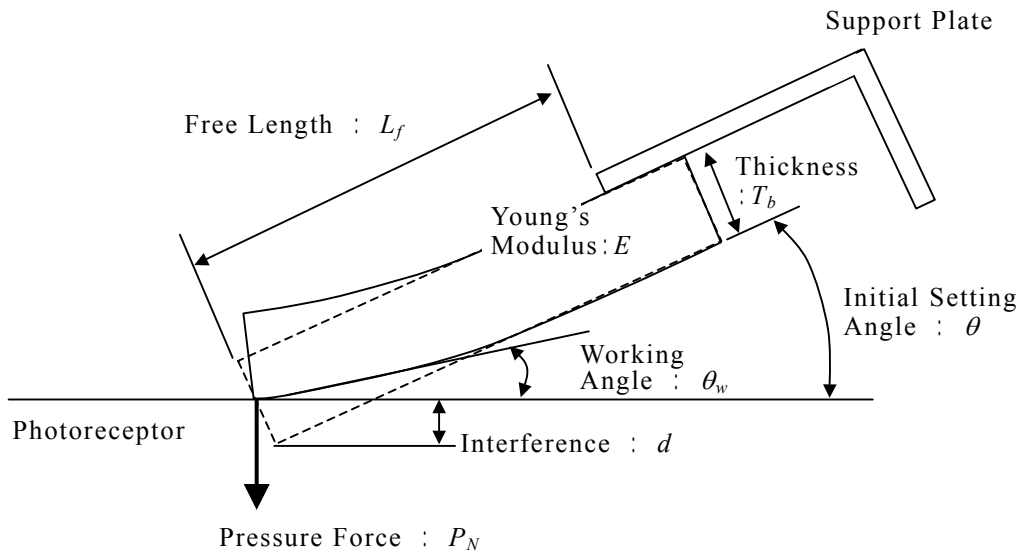


Fig.5.1 Design Parameters of Blade

Table 5.1 Common Values of Design Parameters for Blade

Parameters	Common Values	Original Setting
Young's Modulus [MPa]	4.5-10.0	5.9
Free Length [mm]	5.0-12.0	11.5
Thickness [mm]	1.0-2.0	2.0
Initial Setting Angle [ ° ]	20.0-30.0	27.0
Working Angle [ ° ]	5.0-15.0	12.2
Interference [mm]	0.7-1.5	1.2
Pressure Force [N/m]	5.0-35.0	46.6

### 5.2.2 設計変更パラメータの選定と範囲

現状で発生している異音を抑制するための設計パラメータの検討を行う。前節で挙げた設計パラメータのうち、摩擦係数を所望の値に保つことは実機上では極めて困難である。また、ブレードの押し付け量と、初期設定角度は、機械レイアウトの制約があるため、開発中途の変更には多大なコストがかかる。さらに、ブレードの弾性率は残留物除去・清掃能力や耐磨耗性への影響が大きい。

そこで、主機能への影響が少なく、製品として現実的に変更可能なパラメータとしてブレードの厚みと自由長の二つを考えることとする。表 5.2 に本研究で検討したブレードの厚みと自由長の数値を示す。Case1 と Case2 は自由長を現状と同じにして、ブレードの厚さを変更することで、当接角度は変えずに押圧力を変更するものである。Case3 はブレードの厚さを現状と同じにして、自由長を短くすることで、押圧力と当接角度を共に大きくするものである。

Table5.2 Value of Modification Case

	Thickness: $T_b$ [mm]	Free Length: $L_f$ [mm]
Original	2.0	7.5
Case 1	1.6	7.5
Case 2	2.2	7.5
Case 3	2.0	6.4

## 5.3 数値計算による定常振幅予測

### 5.3.1 定常振幅の予測

第4章の成果をもとに、ブレードの厚みと自由長を変更した場合について、ブレードと感光体の接触点における定常振幅の予測を行う。ただし、摩擦係数 $\mu$ 、非線形項係数 $\delta$  および成長率 $\lambda_{ur}$  は設計パラメータの変更に対して変化しないと仮定し、第4章で決定した値を使用する。

まず第3章の3.3.3節で行った線形安定解析と同様に、表5.2に示す数値にしたがって有限要素モデルを作成し、汎用有限要素コードANSYSを用いて固有値解析を行った。各ケースにおいて得られた4次と5次モードの固有振動数と、固有関数および接触点での反力に対するモードの寄与率を表5.3に示す。

この結果と、第4章の4.5節の表4.1に示す摩擦係数、非線形項係数および成長率を第4章4.4節の式(4.48)に適用して、各ケースにおける定常振幅値を算出した。表5.4に各ケースにおける不安定振動モードの固有角振動数および定常振幅の値を示す。

Table5.3 Results of Eigenvalue Analysis of Modified Blades

		Natural Frequency [Hz]	$\phi_{i\eta}$ ( $i=4, 5$ ) [ $\text{kg}^{-1/2}$ ]	$a_{i\eta}$ ( $i=4, 5$ ) [ $\text{N m}^{-1} \text{kg}^{-1/2}$ ]
Case1	4th Mode	4498.0	77.7	$-6.6 \times 10^5$
	5th Mode	5289.8	-152.9	$-2.3 \times 10^5$
Case2	4th Mode	4333.5	147.0	$-3.0 \times 10^5$
	5th Mode	4511.3	-109.8	$-2.6 \times 10^5$
Case3	4th Mode	4857.6	41.1	$-2.2 \times 10^5$
	5th Mode	5278.9	-176.1	$-5.8 \times 10^5$

Table5.4 Calculation Results of Nonlinear Analysis of  
Modification Case

	Natural Frequency of Unstable Mode [Hz]	Steady- State Amplitude [nm]
Case 1	4976	16.0
Case 2	4419	41.4
Case 3	4944	14.7

### 5.3.2 実験による妥当性検証

前節の数値計算結果の妥当性を検証するため、表 5.2 に示した数値にもとづいてクリーナ・ブレード部を製作した。各ケースにおけるブレードの先端部の拡大写真を図 5.2 に示す。

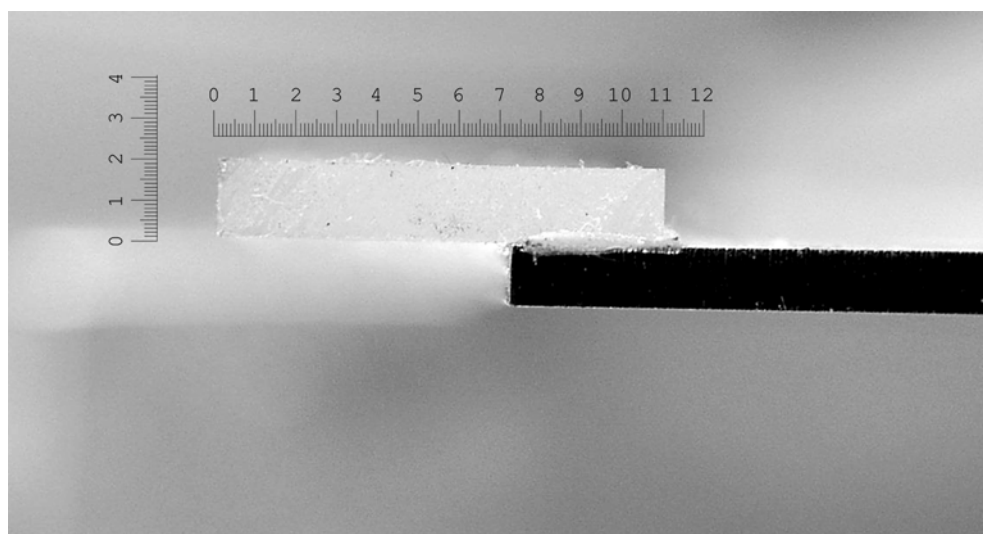
これらのクリーナ・ブレード部を、図 5.3 および 5.4 に示す実験装置に装着し、ブレード上の自励振動の定常振幅値を測定した。まず、クリーナ・ブレード部を水平および垂直方向に移動可能なマイクロステージに取り付けた。実機では、図 5.5 に示すように板金支部の両端二箇所を樹脂筐体にネジ止めしている。そこで、同じ箇所を、樹脂ブロックを介してステージに取り付けた。これにより、クリーナ・ブレード部の拘束を実機と同じ条件とみなした。

次に、ローラ帯電器に 2.2kV の帯電電圧を印加して、感光体表面上に放電生成物を付着させた。さらに、感光体の直下に配したセラミック・ヒータにより、ブレードの温度が 42℃ になるまで加熱した。

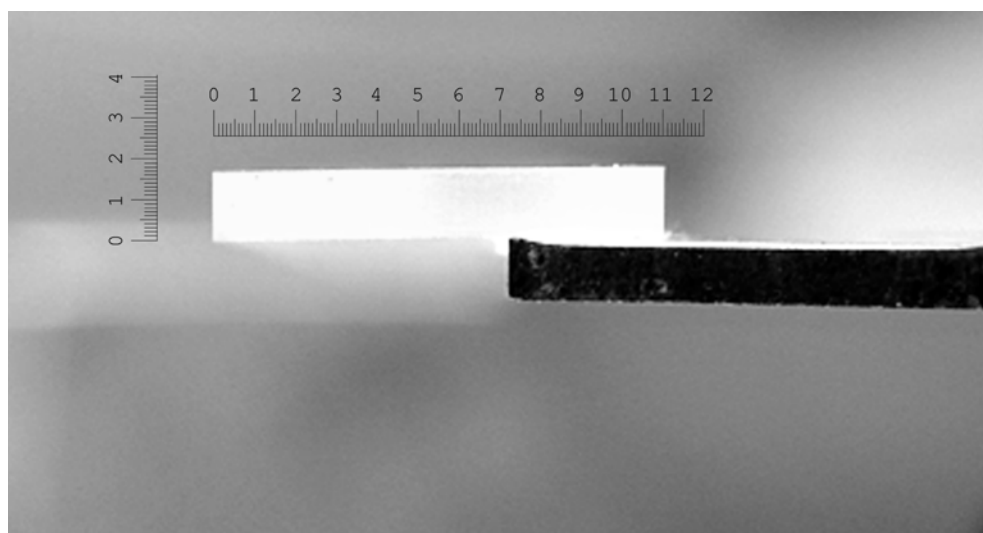
そして、レーザー・ドップラー振動計(小野測器, LV-1100)により、異音発生時における自励振動の定常振幅をブレード上で測定した。振動の測定点は、図 5.6 に示すように、ブレードの長手方向の中央、ブレード・エッジ先端部より 1mm の位置とした。

このとき、各ケースにおける振幅測定を、現状のクリーナ・ブレード部、各ケースのクリーナ・ブレード部、現状のクリーナ・ブレード部の順で行った。そして、各ケースにおける振幅測定の前前後で、現状のクリーナ・ブレード部の場合に発生する自励振動の振動数と振幅が変化していないことを確認した。このような手順で測定を行うことにより、ブレード先端部に働く摩擦の状態は各ケースにおいて維持されていると見なした。

各ケースにおける自励振動の周波数分析結果を図 5.7 に示す。この結果から、表 5.4 の理論計算によって予測された振動数は、実際に発生した自励振動の振動数にほぼ一致していることがわかる。さらに、設計変更後の自励振動の定常振幅について理論計算の予測と実験結果を比較したものを図 5.8 に示す。定常振幅についても、理論計算による予測と実測結果は定量的な差はあるものの、形状の変更に対する振幅の増減に関して定性的に一致しており、本研究において導出した非線形振動振幅方程式は妥当であると考えられる。



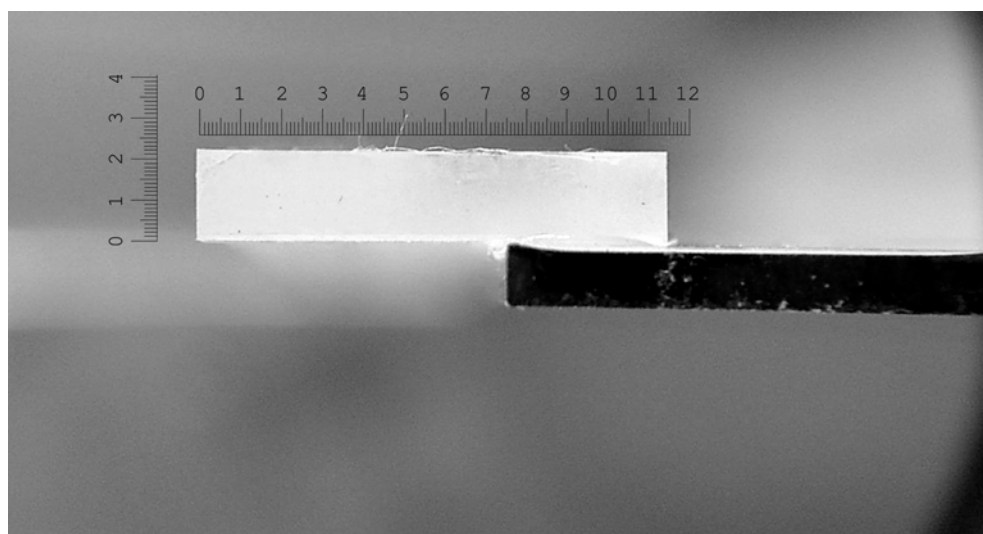
(a) Original  $T_b=2.0\text{mm}$   $L_f=7.5\text{mm}$



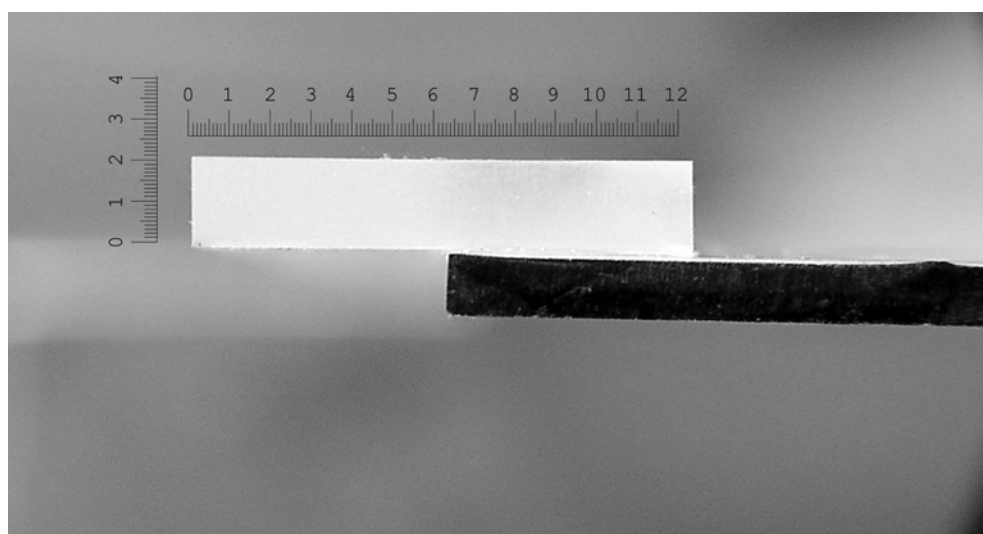
(b) Case1  $T_b=1.6\text{mm}$   $L_f=7.5\text{mm}$

Fig.5.2 Detail of Modified Blade Edge



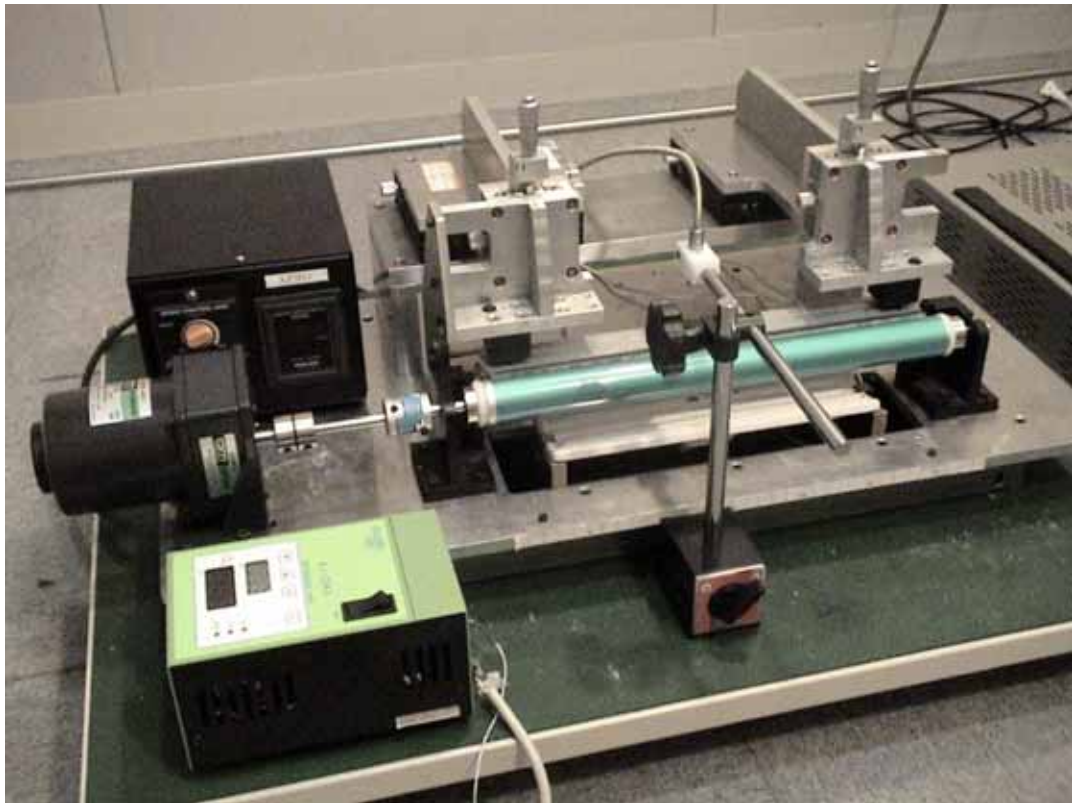


(c) Case2  $T_b=2.2\text{mm}$   $L_f=7.5\text{mm}$



(d) Case3  $T_b=2.0\text{mm}$   $L_f=6.4\text{mm}$

Fig.5.2 Detail of Modified Blade Edge



	Cleaning Blade Assembly		Drive Motor
	Photoreceptor		Speed Controller
	Laser Doppler Vibrometer Probe		Thermo Controller
	Heater		

Fig.5.3 Experimental Apparatus for Verification of Modified Blades

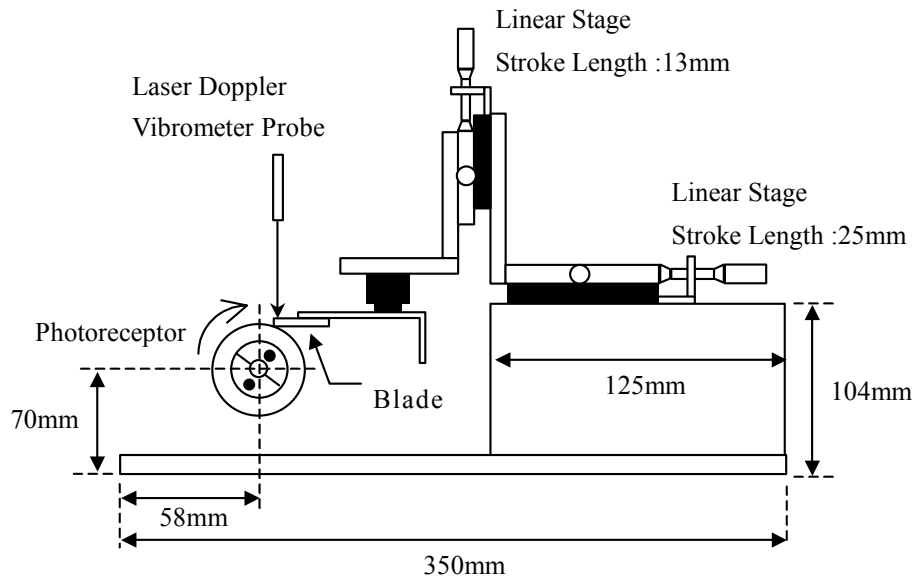


Fig.5.4 Dimension of Experimental Apparatus



Fig.5.5 Fixation Point of Cleaning Blade Assembly in Actual Machine

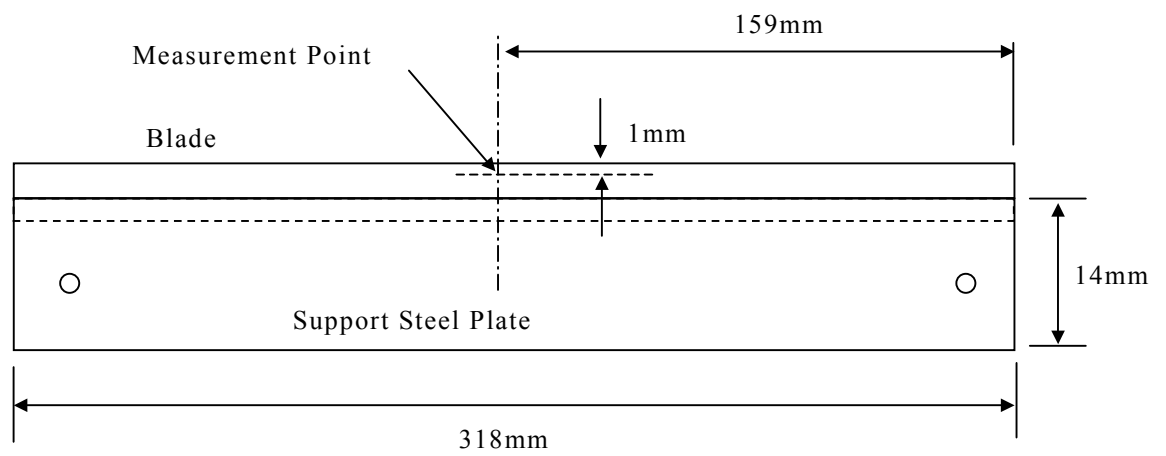


Fig.5.6 Measurement Point of Vibration

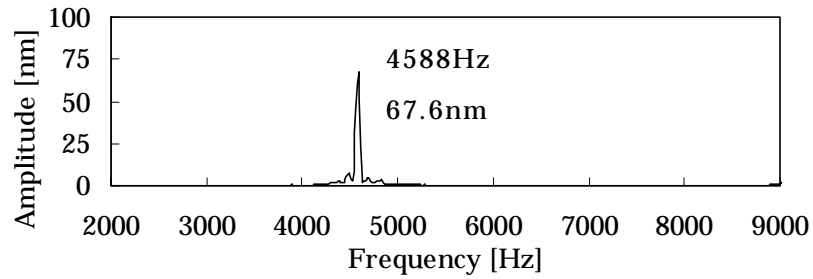
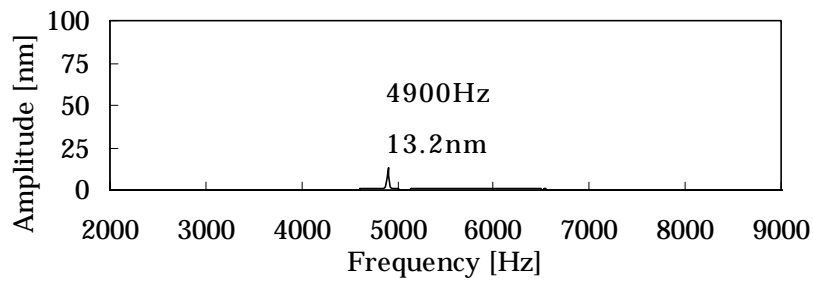
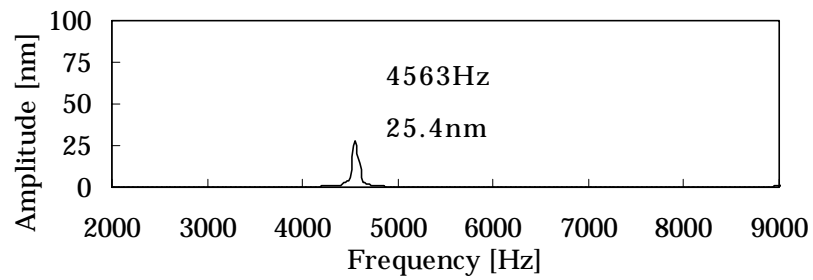
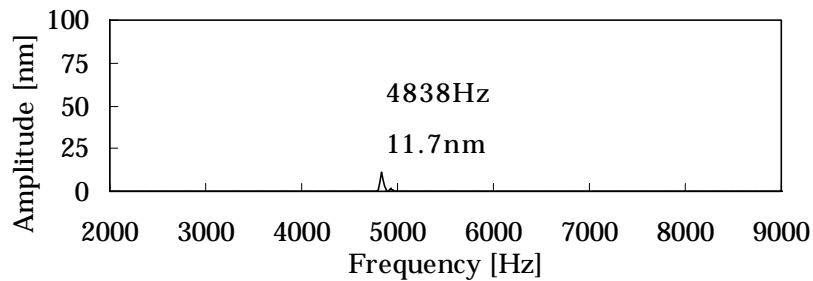
(a) Original  $T_b=2.0\text{mm}$   $L_f=7.5\text{mm}$ (b) Case1  $T_b=1.6\text{mm}$   $L_f=7.5\text{mm}$ (c) Case2  $T_b=2.2\text{mm}$   $L_f=7.5\text{mm}$ (d) Case3  $T_b=2.0\text{mm}$   $L_f=6.4\text{mm}$ 

Fig.5.7 Steady-State Amplitude and Frequency in each Case

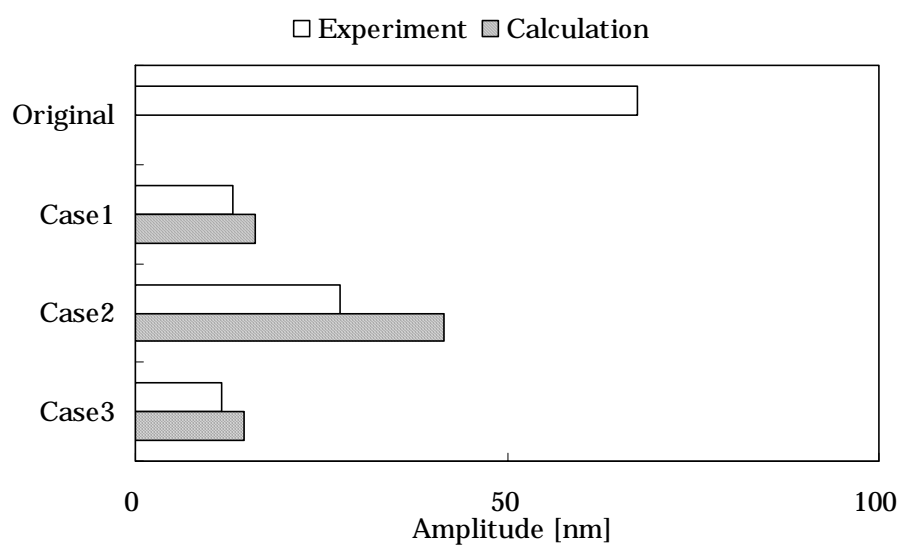


Fig.5.8 Comparison between Calculation and Experiment about Steady-state Amplitude in each Case

## 5.4 ケース・スタディからの自励振動抑制のための設計への提言

前節において、本研究で導出した定常振幅に関する理論式の妥当性が示された。そこで本節では、数値計算の利点を活かし、ブレードの厚さと自由長に対する自励振動の発生領域及び定常振幅の詳細な分布を可視化する。そして、可視化された分布を考察し、分布を決める要因から自励振動抑制のためのブレードの厚みと自由長に関する設計への提言を試みる。

同様のことを実験で行った場合、多大な時間とコストがかかる。さらに、数値計算の場合、得られた分布を考察するための固有関数や反力のモード寄与率といった数値情報が全て入手可能であるという利点もある。

### 5.4.1 ケース・スタディによる定常振幅値分布の可視化

表 5.5 に検証に用いたブレードの厚さと自由長の範囲を示す。自由長を 7 水準、厚みを 8 水準変化させた合計 56 ケースについて、下記の手順で定常振幅値を求めた。

有限要素モデルの作成と固有値解析の実施

連成振動モデルによる固有値計算

理論式による定常振幅値計算

なお、連成振動モデルによる固有値計算において、実部が正の複素数となる固有値が出現しない場合には、定常振幅を 0 とした。計算結果を図 5.9 に示す。この結果から、分布の特徴を以下のように捉えることができる。

- 1) 振幅は厚さに対して変化が大きく、自由長に対しては変化が小さい。
- 2) 厚さの増加と共に、自励振動が発生しない安定領域から不安定領域へ遷移し、さらに厚みを増やすと再び安定領域に遷移する。
- 3) 自励振動が発生する不安定領域では、安定から不安定に遷移する付近で定常振幅値が急激に増大し、その後厚さの増加と共に定常

振幅値は減少する傾向を示す。

上記の特徴は、設計パラメータの増減に対して、自励振動の発生と定常振幅値の増減が単調変化ではないことを示している。これは、実験による離散的なパラメータ・スタディにおいて、設計パラメータと定常振幅値との間に単純な法則性が見出されなかった過去の結果とも一致する。

### 5.4.2 安定条件式からの考察

摩擦力を介した連成によって系が不安定となる条件は次式で表されることを第3章で述べた。

$$\left(\omega_4^2 - \omega_5^2\right)^2 + 4\mu^2\gamma_{45}\gamma_{54} < 0 \quad (3.12)$$

(3.12)の左辺第1項は連成するモードの固有振動数の差を示し、第2項は非対称剛性行列の非対角項の積、つまり連成項を示している。

自由長が6.25mm、6.75mm、7.25mmの場合について、第1項と第2項の絶対値の変化をまとめたものを図5.10に示す。数値計算の結果では、第2項は全て負となっているため、同図において固有振動数の差を連成項が上回ると、系が不安定となる。この結果から、厚みの増加に対し固有振動数の差が変曲点を持ち、連成項は単調に減少することがわかる。

したがって、ある厚みの範囲(図5.10内の赤破線の範囲)において、連成項が固有振動数の差を上回るために系が不安定となり、その後厚みの増加に対して、固有振動数の差が増加に転じ、連成項を上回ると再び系が安定となることがわかる。

さらに、図5.11に自由長が6.25mmと7.25mmの場合の厚みに対する固有振動数の変化をまとめたものを示す。厚さが1.0mmの時には、伸縮モードの方が曲げモードよりも固有振動数が高い。厚さの増加につれ、曲げモードの固有振動数はほとんど変化しないのに対し、伸縮モードは単調に減少する。減少の傾きは自由長が短いほうが大きい。

したがって、厚さに対して固有振動数の差が変曲点を持つのは、厚さに対する各モードの挙動の違いによるものであり、これが厚さの増加と共に、安定領域から不安定領域に、さらに安定領域へと遷移する分布を生じる要因とな



っていることがわかる。

### 5.4.3 定常振幅に関する理論式からの考察

次に、自励振動が発生する不安定領域における定常振幅値の分布を理論式から考察する。第 4 章において、定常振幅の理論式は次式で与えられることを述べた。

$$x_{\eta} = \frac{4}{\lambda_{ui}} \sqrt{\frac{2\lambda_{ur}(a^2 + b^2)}{3\delta}} \sin(\lambda_{ui}t + \sigma) \quad (4.49)$$

ただし、 $a = |R|\phi_{4\eta} \cos \angle R + \phi_{5\eta}$ 、 $b = |R|\phi_{4\eta} \sin \angle R$ 、 $\sigma = \tan^{-1}(b/a)$  である。いま、非線形項の係数  $\delta$ 、摩擦係数  $\mu$ 、成長率  $\lambda_{ur}$  が設計パラメータの変更に対して変化しないという仮定のもとでは、定常振幅の予測値は  $\lambda_{ui}$  と  $\sqrt{a^2 + b^2}$  に依存する。図 5.12 に前節の 3 つのケースについて、現状を 1.0 とした場合の定常振幅、 $\lambda_{ui}$ 、 $\sqrt{a^2 + b^2}$  の比率を比較したものを示す。定常振幅の比率は、ほぼ  $\sqrt{a^2 + b^2}$  の比率に一致していることがわかる。

さらに、今回のケース・スタディにおいて自由長が 6.25mm、6.75mm、7.25mm の場合について、ブレードの厚みに対する定常振幅と固有関数の平方和  $\phi_{4\eta}^2 + \phi_{5\eta}^2$  の変化を比較したものを図 5.13 に示す。両者は増減の傾向に関してほぼ定性的に一致しており、不安定領域における定常振幅の大きさは固有関数の平方和に依存していることがわかる。また、図 5.13 に示すようにブレードの厚みに対し、固有関数の平方和は単調に減少する。したがって、厚みの増加に対して系が不安定になった直後の定常振幅が最も大きく、その後厚みが増加するにつれて減少していく特徴を説明することができる。

#### 5.4.4 自励振動抑制のための設計への提言

以上のブレードの厚さと自由長に対する自励振動の発生領域及び定常振幅の詳細分布の可視化とその考察から、自励振動を抑制するためのブレードの厚みと自由長に関する設計指針を抽出すると、以下の3点に要約される。

- 1) ブレード厚は 1.4mm 以下であることが望ましい。
- 2) 1.4mm 以下が選択できない場合、ブレード厚は厚くするほうが良い。
- 3) 上記の方針でブレード厚を決定した後、所望の押圧力を得るには、自由長を調整すれば良い。

指針の 1) は、連成するモードの固有振動数の差を十分大きく取り、実部が正の複素数となる固有値の出現を防止するものである。指針の 2) は、実部が正の複素数となる固有値の出現を防止する効果と、系が不安定になった場合でも、固有関数の平方和を小さくして定常振幅を抑制するものである。指針の 3) は、定常振幅は自由長の変化に対して鈍感であるという分布の特徴を利用し、ブレード厚に自励振動抑制を、自由長に主機能である残留物除去・清掃機能(押圧力)を割り振ることが可能であることを示すものである。

Table5.5 Range of Modification Value

	Minimum	Maximum	Increment
Free Length [mm]	6.0	7.5	0.25
Thickness [mm]	1.0	2.4	0.2

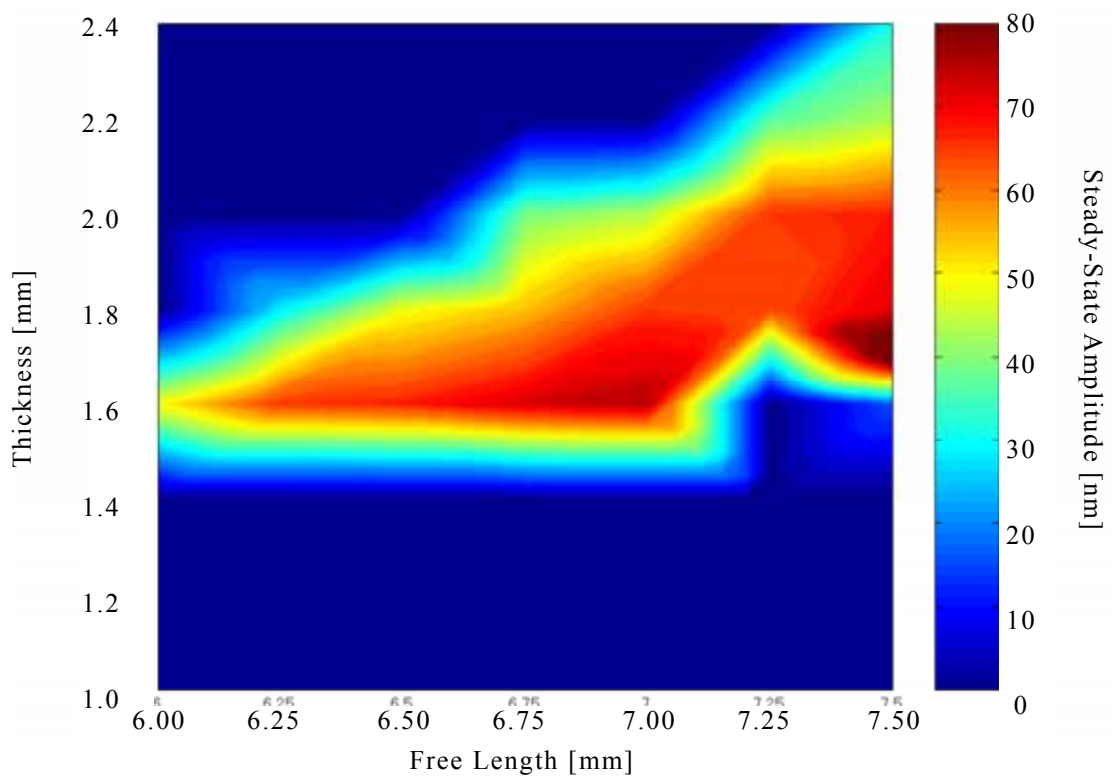


Fig.5.9 Distribution of Steady-State Amplitude to Free Length and Thickness

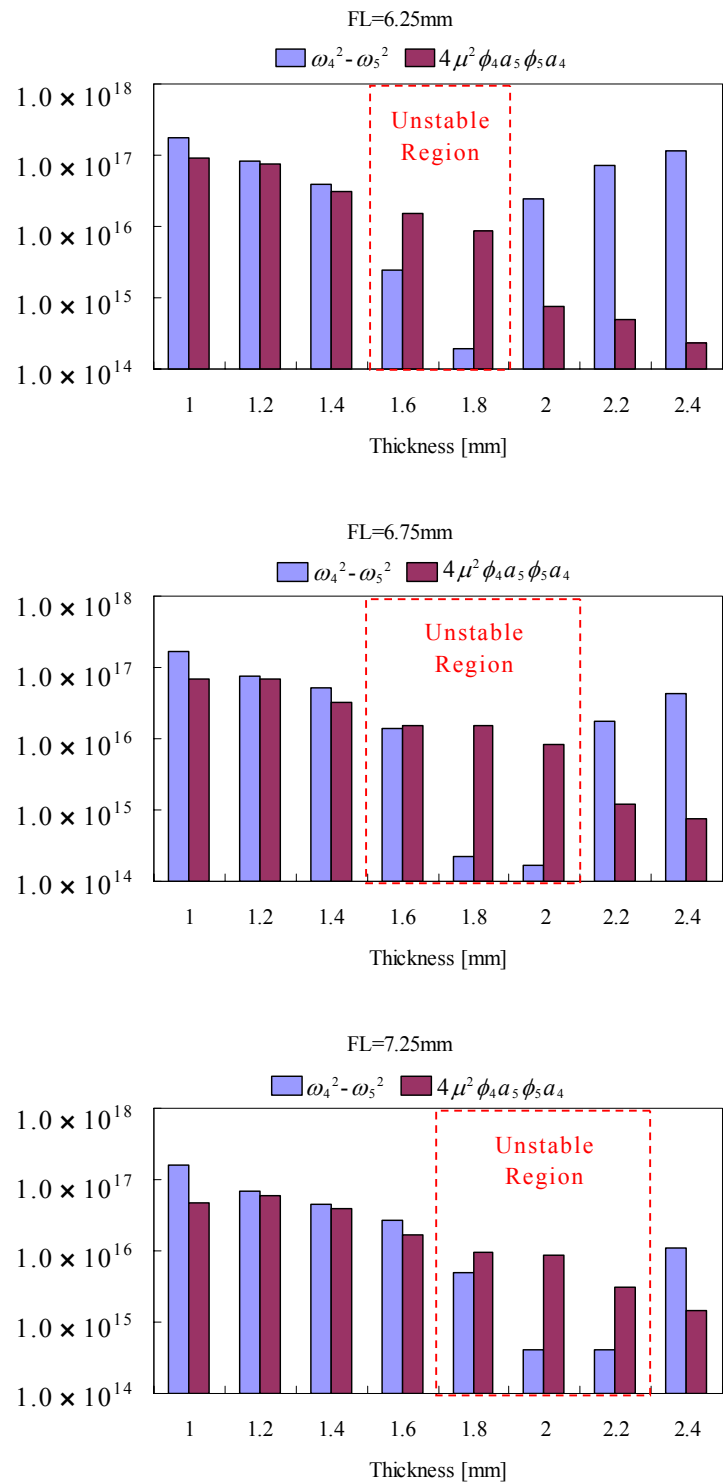


Fig.5.10 Comparison between Difference of Natural Frequencies and Coupled Term in each Case

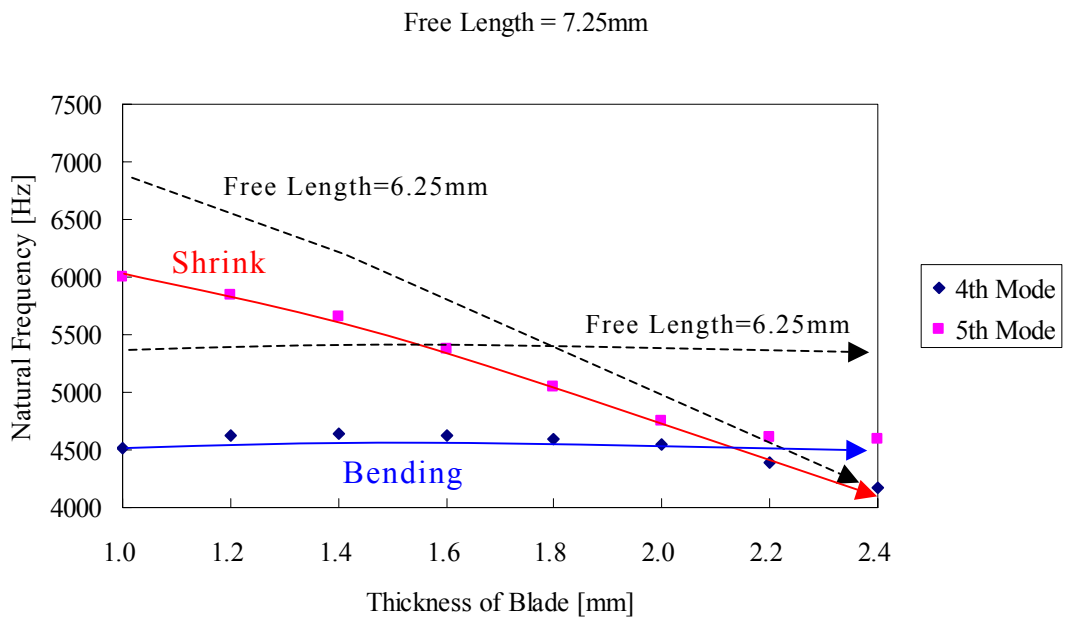
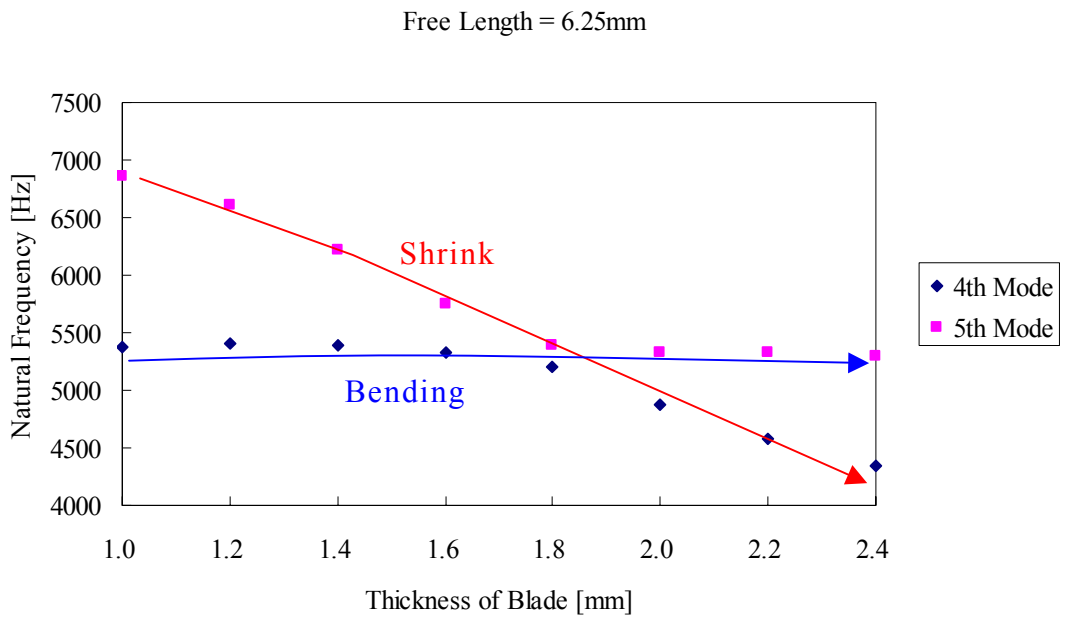


Fig.5.11 Behavior of Natural Frequencies to Thickness

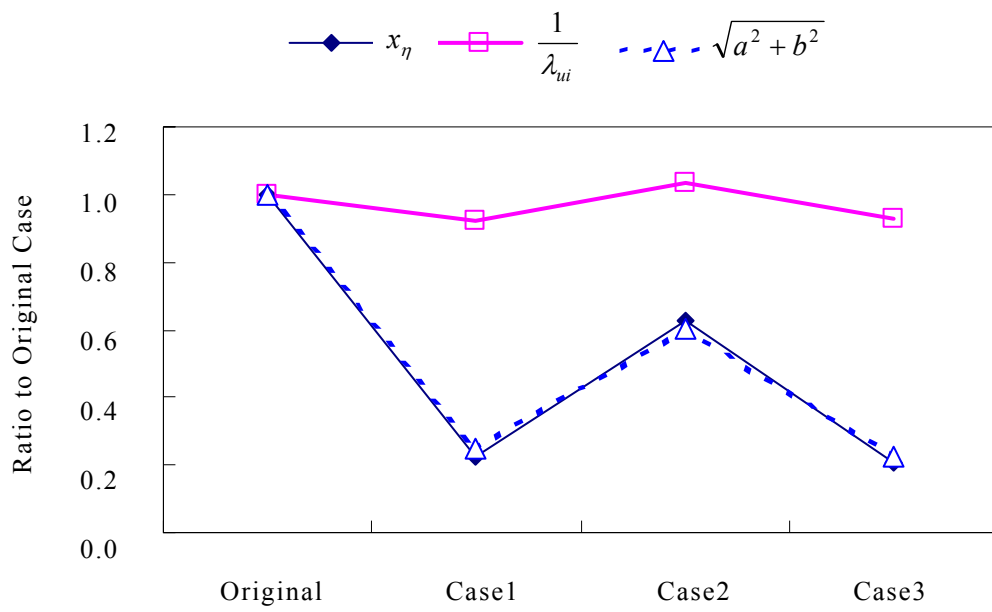
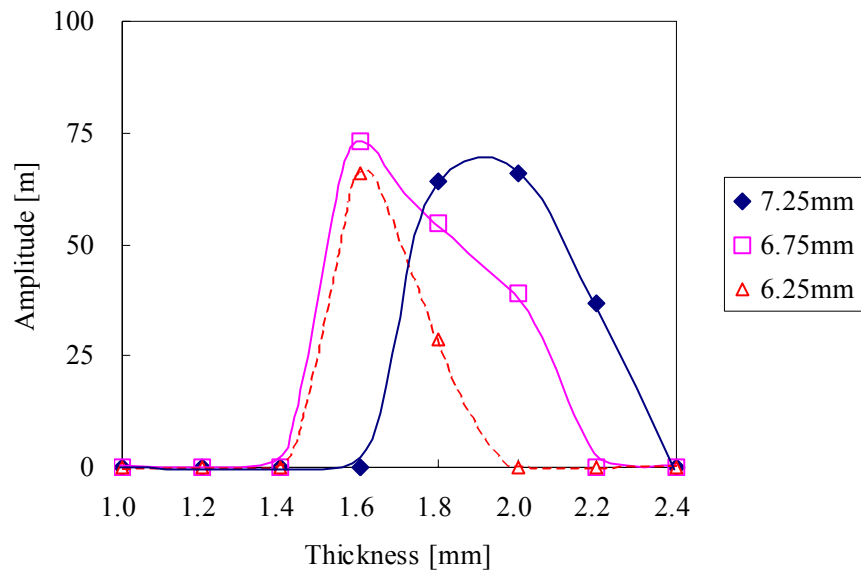
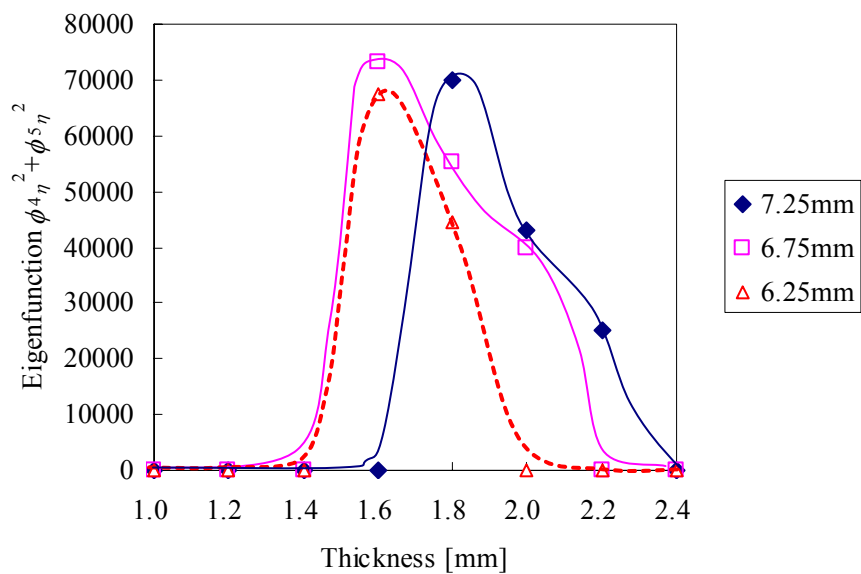


Fig.5.12 Comparison of Ratio to Original Case



(a) Steady-State Amplitude



(b)  $\phi_{4\eta}^2 + \phi_{5\eta}^2$

Fig.5.12 Comparison between Steady-State Amplitude and Square Sum of Eigenfunction

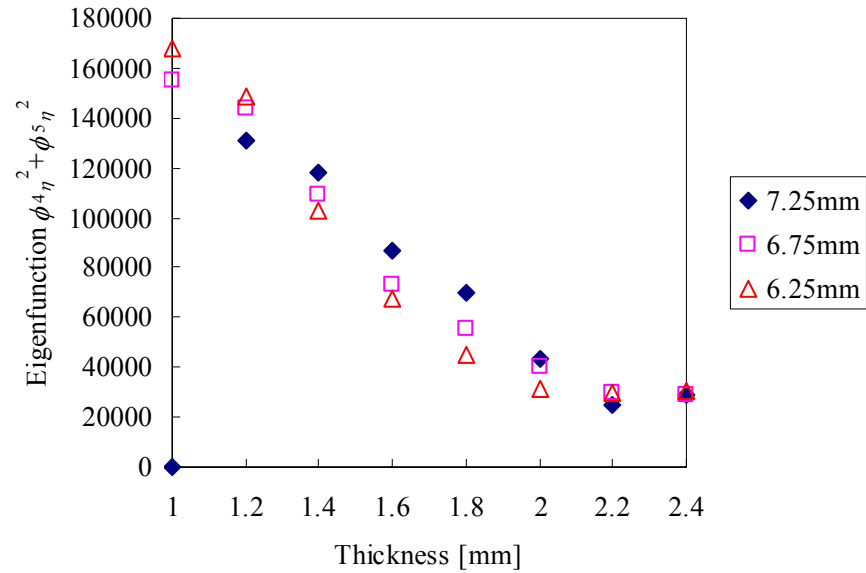


Fig.5.13 Relationship between Square Sum of Eigenfunction and Thickness



## 5.5 結言

製品への具体的な応用を想定し、異音の原因となる自励振動の振幅の成長を抑制するための設計パラメータの検討を行った。ブレードの設計パラメータの中から、主機能への影響が少なく、製品として現実的に変更可能なパラメータとしてブレードの厚さ、支持部の拘束点からブレード先端までの自由長を選択した。そして、第4章で得られた定常振幅に関する理論式より、この二つのブレードの設計パラメータを変更した複数の事例について、実現象と理論計算結果との比較を行った。この結果、理論計算から予測された定常振幅値と実際の測定結果はよい一致を示し、本研究の手法の妥当性を確認した。最終的に、ブレードの厚さと自由長に対する自励振動の発生領域及び定常振幅の詳細分布の可視化とその考察を行い、自励振動を抑制するためのブレードの厚みと自由長に関する設計への提言を抽出した。

---

## 第 6 章

### 結論

電子写真方式による普通紙複写機やレーザ・プリンタにおいて、感光体上の残留物除去・清掃に使われるクリーナ・ブレード部で発生する異音問題に関し、この異音の原因である自励振動の発生機構の理論的解明と、これに基づく根本的解決策の提示が強く望まれていた。本研究では、実機における現象の定量的観察から、従来の報告例とは異なる特徴を持つブレードの自励振動に起因した異音の存在を明らかにし、この異音の原因となる自励振動の発生機構を、不安定領域での非線形定常振動の挙動を含めて明らかにすることを主目的とした。

最初に、実機における異音の特徴を定量的に把握するため、異音の周波数分析、構成部品の固有振動数の検証を行った。その結果、主に以下の結論を得た。

- 1) この異音は、感光体の回転数を変えても周波数が変化せず、クリーナ・ブレード部の固有振動数に一致する。これは、感光体の固有振動数に起因する中村の報告例とは発生機構が異なる。
- 2) この異音は相対速度の大きい定常回転時に発生し、感光体の表面速度の増加とともに、音圧が大きくなる。したがって、相対速度が低い場合に発生する摩擦係数の負勾配に起因する自励振動とは発生機構が異なる。
- 3) したがって、この異音の原因は摩擦力に起因する自励振動であるものの、その発生機構は、従来の報告例とは異なることを示唆している。

次に、自励振動の発生機構として、自励振動の発生条件を明らかにするため、ブレード単体を単純支持したモデルによる現象の再現と、この単純モデルによる自励振動発生機構に関する理論的検討を行い、主に以下の結

---

論を得た。

- 1) 自励振動の発生機構に関し、弾性体であるブレード単体を有限要素モデルで表し、感光体とブレードの接触部における垂直抗力をブレードの固有振動モードの線形結合として表現する多自由度連成モデルを提案した。このモデルに実機の数値を適用して求められた不安定化モードの固有振動数は、実際の異音の周波数とよい一致を示し、本モデルの妥当性を確認した。
- 2) この自励振動の発生機構は、固有振動数が近接したブレードの曲げモードと伸縮モードの摩擦力を介した不安定モード連成、つまり、非保存的弾性不安定振動であることを示し、この二つのモードについて、固有値が正の実部を持つ複素数となって、自励振動が発生する条件を明らかにした。

これらの結論は、摩擦係数の負勾配に基づくモデルでは説明が困難であった本研究における自励振動現象の特徴を矛盾無く説明できる。

次に、摩擦力を介して連成する4次と5次のモードについて、非線形定常周期解を求め、発散振動発生後の不安定振動モードの挙動を把握し、主に以下の結論を得た。

- 1) 不安定振動モードの固有関数が直交しないという課題に対し、各モードの固有ベクトルに直交する随伴ベクトルを導入し、不安定振動モードを抽出した。
- 2) 振幅抑制効果を得ることができる非線形項を検討し、多重尺度法による求解において、永年項を生じない条件から速度の3乗に比例する非線形項が妥当であることを示した。
- 3) 導出した非線形振動方程式を多重尺度法により解き、不安定振動モードのモード変位を定式化した。そして、非連成時の固有関数ベクトルとの線形結合により定常振動時におけるブレード上の振動振幅に関する理論式を導き、未知数として残されていた非線形外力項の係数 $\delta$ を実験値との比較から決定する方法を明らかにした。

次に、ブレードの厚みと自由長を変更したクリーナ・ブレード部を実際に製

---

作り、実現象と理論計算結果との比較を行った。この結果、理論計算の予測と実測結果はよい一致を示し、本研究の手法の妥当性を確認した。最終的に、ブレードの厚さと自由長に対する自励振動の発生領域及び定常振幅の詳細分布の可視化とその考察を行い、自励振動を抑制するためのブレードの厚みと自由長に関する設計への提言を抽出した。

- 1) ブレードの厚さは 1.4mm 以下であることが望ましい。
- 2) 1.4mm 以下が選択できない場合、ブレードは厚くするほうが良い。
- 3) 上記の方針でブレードの厚さを決定した後、所望の押圧力を得るには、自由長を調整すれば良い。

以上の成果から、本研究の理論検討の妥当性と産業応用への有用性は十分であると結論できる。

なお、本研究をさらに発展させるための課題として、有限要素による数値モデルを解析モデルで記述することにより、現象の本質をよりの確に捉えることができると考えられる。この場合、今回の数値モデルにおける剛性行列の非対称性により生じる非自己随伴性を、解析モデル上でどのように実現するかが重要である。現在の仮説としては、ブレードが感光体に押し付けられた際の平衡状態の形状における幾何学的非線形性に非自己随伴性を生じる要因があるものと推測され、弾性送水管における横振動に関する種々の研究成果が応用できるものと期待される。

---

## 謝辞

以上、本研究では、レーザ・プリンタにおけるクリーナ・ブレード部の自励振動現象について、実機における定量的観察より、従来の研究事例には見られなかった特徴を持つ自励振動の存在を明らかにした。そして、連続体であるブレードを有限要素モデルで表し、数値計算の援用が可能な振動の線形安定性解析手法と、ブレードの設計パラメータから発散振動発生後の定常振幅を予測し得る理論式を提示した。これらの成果により、従来の多大な時間をかけた試行錯誤的な解決方法から脱却し、ブレードの残留物除去・清掃機能と自励振動抑制を両立する系統的な設計が可能となることをパラメータ・スタディにより示した。

本研究は、富士ゼロックス株式会社との共同研究として始まり、多くの方々のご協力、ご指導によりまとめあげることができたものである。

研究の遂行にあたり、深い見識と的確なアドバイスによりご指導ご鞭撻いただきました慶應義塾大学理工学部教授、吉沢正紹先生に深く御礼申し上げます。

また、本論文の執筆にあたり、ご指導と貴重なご意見を賜りました慶應義塾大学理工学部教授、澤田達男先生、吉田和夫先生、慶應義塾大学理工学部助教授、杉浦壽彦先生、早稲田大学理工学部教授、川本広行先生に深く御礼申し上げます。

また、本研究の端緒となった共同研究の機会を与えていただきました富士ゼロックス株式会社基盤技術開発部2グループ長、城戸衛様に感謝申し上げます。

さらに、共同研究と投稿論文の共同執筆者として多大なご助言、ご協力を賜りました富士ゼロックス株式会社基盤技術開発部、伊藤朋之様、兪一梅様、神奈川県産業技術センター主任研究員、伊東圭昌様に深く御礼申し上げます。

そして、本研究の実施にあたり、実験結果の検討、投稿論文の推敲で多くのご協力を賜りました福井工業大学講師、山下清隆先生、研究室の網代惇治様、谷口章様、志賀威久馬様、野原毅様に深く御礼申し上げます。

---

## 参考文献

- [1] Schaffert,R.M., Electrophotography, (1965), Focal Press.
- [2] Williams,E.M., The Physics and Technology of Xerographic Processes, (1984), Krieger Publishing.
- [3] Schein, L. B., Electrophotography and Development Physics, (1988), Springer-Verlag.
- [4] Scharfe,M., Electrophotography Principles and Optimization, (1984), John Wiley & Sons.
- [5] 黒川純二・野島 一男, 電子写真複写機におけるローラ帯電技術, Ricoh Technical Report No.22,1996.
- [6] 大熊康・ほか 2 名, ローラ帯電と帯電ムラ, 日本画像学会誌, 42-3, (2003),209-214 .
- [7] 増田 善友・高木 光治, ゴムの電子写真機器用部品への展開, 日本画像学会誌, 39-1,(2000),30-35 .
- [8] Kawamoto, H. , Statics of Corona Charger in Electrophotography , Journal of Imaging Science and Technology,45-6,(2001),556-564 .
- [9] 石井昭, レーザビームプリンタの高画質記録信号処理, 日本画像学会誌, 43-2,(2004),112-118 .
- [10] 竹内学, 電磁気学・静電気入門 (I), 日本画像学会誌, 45-1,(2006), 70-78 .
- [11] 竹内学, 電磁気学・静電気入門 (II), 日本画像学会誌, 45-2,(2006), 194-203 .
- [12] 竹内学, 電磁気学・静電気入門 ( ), 日本画像学会誌, 45-3,(2006), 283-298 .
- [13] 竹内学, 電磁気学・静電気入門 ( ), 日本画像学会誌, 45-4,(2006),

---

370-380 .

- [14] 木村正利・ほか 3 名, トナー像の静電転写, 電子写真学誌, 19-1, (1981), 25 .
- [15] 情野國城・ほか 2 名, クリーニングブレードの摩耗特性とクリーニング能力, 電子写真学誌, 40-4, (2001), 320-329 .
- [16] Seino, K., Wear Characteristics and Cleaning Ability of Cleaning Blades, Journal of Imaging Science and Technology, 47-5, (2003), 424-433 .
- [17] 木村正利・竹澤敏, モノクロレーザープリンタ画像の現状と課題, 電子写真学誌, 40-3, (2001), 222-230 .
- [18] 電子写真学会編, 続 電子写真技術の基礎と応用, (1996), 630, コロナ社 .
- [19] Meyer, R.J, Theory of Blade Cleaning, Proc. of Int. Conf. on Digital Printing Technologies, (2000), 846-848 .
- [20] 中村邦彦, レーザビームプリンタにおける異音の発生機構に関する研究, 日本機械学会論文集, 62-601, C(1996), 3428-3433 .
- [21] Kawamoto, H. , Chatter Vibration of a Cleaner Blade in Electrophotography, J. of Imaging Science and Technology, 40-1, (1996), 8-13 .
- [22] 巽友正・後藤金英, 流れの安定性理論, (1980), 4, 産業図書 .
- [23] 久村富持, 制御システム論の基礎, (1988), 165, 共立出版 .
- [24] Guckenheimer, J., Holmes, P., Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Field, (1990), 1-11, Springer.
- [25] Bolotin, V.V. (関谷壮・杉山吉彦訳), 非保存的弾性安定問題, (1977), 48, 培風館 .
- [26] 日本機械学会編, 機械工学便覧 2 機械力学, (2004),  $\alpha$ 2-70, 丸

---

善 .

- [27] 亘理厚・杉本隆尚, 摩擦による振動, 日本機械学会論文集, 29- 200, (1963),769-782 .
- [28] Kawamoto,H., Self-Excited Vibration of Lap Spring Clutch used in Electrography Fuser,16-2,(1998),153-165 .
- [29] 草間秀俊, ポンプに起る不安定現象 (:主としてサージング現象) , 日本機械学会誌 , 62-485,(1959),952-959 .
- [30] Blevins, R.D., Flow-Induced Vibration, (1986), R.E. Krieger Publishing Company .
- [31] 田中久隆・ほか 3 名, ボールエンドミル加工の再生びびり振動に関する研究 第一報, 精密工学会誌 , 64-7,(1998),1047-1051 .
- [32] 田中久隆・ほか 4 名, ボールエンドミル加工の再生びびり振動に関する研究 第二報, 精密工学会誌 , 65-8,(1999),1179-1184 .
- [33] 嶽岡悦雄・ほか 2 名, 高硬度材の高速エンドミル加工に関する研究 (第 3 報) , 精密工学会誌 , 65-8,(1999),1131-1135 .
- [34] Hu , H.,Wang,Z., Nonlinear Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Time Delays, Progress in Natural Sciences, 10-11 , (2000),801-811.
- [35] Hu , H.,Wang,Z., Stability Switches of Time-Delayed Dynamic Systems with Unknown Parameters,Journal of Sound and Vibration, 233-2,(2000),215-233.
- [36] 末岡淳男・ほか 4 名, 繊維機械のワインダ系におけるパターン形成, 日本機械学会論文集 , 60-575,C(1994),2285-2292 .
- [37] 山口正博・ほか 5 名, ゴム巻きロールの多角形化現象(解析手法の実用性検証) , 日本機械学会論文集 , 61-584,C(1995),1456-1461 .
- [38] A.,Sueoka,A., et al., Quenching of Frictional Vibration of a Rotating Circular Plate by Dynamic Absorbers, JSME International Journal



---

Series C,38-3,(1995),441-449 .

- [39] 末岡淳男・劉孝宏・安田昭博・近藤孝広・片山圭一,抄紙機ゴム巻きロールのパターン形成現象とその防止対策の検討,日本機械学会論文集,61-591,C(1995),4160-4167 .
- [40] 吉田勝俊・ほか 2 名,時間遅れを含む非対称構造型非線形係数励振系の動的挙動,日本機械学会論文集,64-626,C(1998),3752-3758 .
- [41] 末岡淳男,摩擦自励振動のメカニズム その基礎と応用,平成 11 年度非線形振動研究会概要集,(1999-8),1-16 .
- [42] 末岡淳男・ほか 2 名,機械振動学,(2000),177-179,朝倉書店 .
- [43] 小野京右,鈴木厚史,コンタクトスライダの摩擦励起自励振動の二自由度モデルによる解析,日本機械学会論文集,63-614,C(1997),3343-3351 .
- [44] 飯田浩平,小野京右,一自由度コンタクトスライダの接触力に及ぼすスライダ質量,接触剛性および接触減衰の影響,日本機械学会論文集,64-624,C(1998),2894-2902 .
- [45] 桜井明・ほか 3 名,しゅう動部摩擦を介した非対称連成力による自励振動に関する研究,日本機械学会論文集,60-570,C(1994),380-385 .
- [46] Yigit,A.S.,Christoforou,A.P., Coupled Torsional and Bending Vibrations of Drillstrings subject to Impact with Friction, Journal. of Sound and Vibration,215-1,(1998),167-181 .
- [47] Esmailzadeh, E. , Farzaneh, K. A., Shimmy Vibration of Analysis of Aircraft Landing Gears,Journal of Vibration and Control,5,(1999),45-56 .
- [48] Grenouillat,R., Leblanc,C., Simulation of Mechanical Pressure in a Rubber-Glass Contact for Wiper Systems,SAE 2002 World Congress, 2002-01-0798(2002-3) .

- 
- [49] Grenouillat,R., Leblanc,C., Simulation of Chatter Vibrations for Wiper Systems,SAE 2002 World Congress,2002-01-1239(2002-3) .
- [50] Chevennement-Roux,C., et al., Wiper Systems with Flexible Structures Instabilities Analysis and Correlation with a Theoretical Model,SAE 2005 Noise and Vibration Conference and Exhibition, 2005-01-2375(2005-5) .
- [51] 山下清隆, 管下端をばね支持された弾性送水管の管内流による非線形横振動, (2003),慶應義塾大学博士論文, 5-11 .
- [52] 吉沢正紹, 山下清隆, 弾性送水管の内部流に起因した横振動, 日本機械学会論文集, 72-722,C(2006),3071-3076 .
- [53] Drazin,P.G.,Reido,W.H.,Hydrodynamic Stability, (1982),370, CUP .
- [54] Schmid,P.J.,Langre,E. , Transient Growth Before Coupled-Mode Flutter , ASME Journal of Applied Mechanics,70-6 (2003),894-981 .
- [55] Nayfeh,A.H., Perturbation Methods,(1973),162-165,Weily & Sons Inc .
- [56] 長松昭男, モード解析入門, (1993),85,コロナ社 .
- [57] CAD/CAE 研究会編, ANSYS 工学解析入門, (2001),116,理工学社 .
- [58] サイバネットシステム社編, ANSYS 構造非線形セミナー教本, (2003), 6\_6-6\_28 .
- [59] Conn, A.R., et al., A globally convergent augmented Lagrangian Algorithm for Optimization with General Constraints and Simple Bounds,SIAM Journal on Numerical Analysis,28-2,(1991),545-572.
- [60] Pfeiffer,F., Glocker, C., Multibody Dynamics with Unilateral Contacts,(1996),59,John Wiley & Sons Inc .
- [61] Evans,W. R. , Control System Dynamics , (1954) , 117 , McGraw-Hill Book Company Inc .

- 
- [62] Paidoussis, M.P., Fluid Structure Interactions Vol.1, (1998), 67-68, Academic Press.
- [63] Guo, C. Q., Paidoussis, M. P., Stability of Rectangular Plates with Free Side-Edges in Two-Dimensional Inviscid Channel Flow, Journal of Applied Mechanics, 67-1, (2000), 171-176.
- [64] Ziegler, H., Principles of Structural Stability, (1968), 105, Blaisdell.
- [65] Gregory, R.W., Paidoussis, M.P., Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid, Proc. of the Royal Society of London, Series A, 293, (1966), 512-527.
- [66] Bolotin, V.V. (関谷壮・杉山吉彦訳), 非保存的弾性安定問題, (1977), 80, 培風館.
- [67] 徳岡辰雄, 工学基礎 振動論, (1984), 138, サイエンス社.
- [68] 榎木義一, 非線形振動論, (1964), 56, 共立出版.
- [69] Rousselet, J., Herrmann, G., Flutter of Articulated Pipes at Finite Amplitude, J. of Applied Mechanics, Vol.44, No.1 (1977), 154-158.
- [70] Rousselet, J., Herrmann, G., Dynamic Behaviour of Continuous Cantilevered Pipes Conveying Fluid near Critical Velocities, J. of Applied Mechanics, Vol.48, No.1 (1981), 943-947.
- [71] Nayfeh, A.H., Mook, D.T., Nonlinear Oscillations, (1979), 152, John Wiley & Sons Inc.
- [72] Nayfeh, A.H., Introduction to Perturbation Techniques, (1980), 152, John Wiley & Sons Inc.
- [73] 藪野浩司, 工学のための非線形解析入門, (2005), 91, サイエンス社.

---

## 付録A

# 振幅の成長を抑制する非線形成分の検討

本章では、本論文で振幅の成長を抑制する非線形成分を速度の 3 乗項で表されると仮定することの妥当性について述べる。具体的には、非線形項がモード変位と速度の関数でとて表されるものと仮定する。この関数をテーラー展開して得られる非線形項の候補のうち、多重尺度法による求解において永年項が出現しない条件から、振幅値を一意に決定できるものを検討する。

第 4 章において、クリーナ・ブレードの自励振動に関わる不安定振動モードに関する振動方程式が次式で与えられることを示した。

$$\ddot{q}_u - 2\lambda_{ur}\dot{q}_u + (\lambda_{ur}^2 + \lambda_{ui}^2)q_u = \frac{1}{A_1}(\dot{\zeta}_{1r} - \lambda_{ur}\zeta_{1r} - \lambda_{ui}\zeta_{1i}) \quad (\text{A.1})$$

式(A.1)の右辺は主にブレードと感光体の接触点に働く摩擦力に起因すると推定される未知の非線形成分である。いま、この非線形成分をモード変位  $q_u$  および速度  $\dot{q}_u$  の関数として与えることを考え、式(4.23)に基づく無次元化を行えば式(A.1)は次のように書き改められる。

$$\ddot{v}_u - 2\varepsilon\dot{v}_u + v_u = f(\dot{v}_u, v_u) \quad (\text{A.2})$$

ここで、同一の大きさで方向が正負逆の変位に対して、摩擦力もまた同一の大きさで方向が正負逆となることを考慮すれば、式(A.2)の右辺の  $f(\dot{v}_u, v_u)$  をテーラー展開した際の最初の非線形項は 3 次の項となる。具体的には、 $v_u^3, v_u^2\dot{v}_u, \dot{v}_u^3$  の 4 つが候補として考えられる。このとき、多重尺度法による求解に

において、永年項を生じない条件から求められる複素振幅方程式を考える。まず、非線形項を  $v_u^3$  と仮定した場合について、式(A.2)に多重尺度法を適用し、永年項を 0 とする振幅方程式を求めてみる。

式(A.2)の右辺を  $v_u^3$  とおけば、

$$\ddot{v}_u - 2\varepsilon\dot{v}_u + v_u = v_u^3 \quad (\text{A.3})$$

多重尺度法の解法に従い式(A.3)を解く。式(A.3)の近似解を、無次元パラメータ  $\varepsilon$  を用いて次のように展開できるものと仮定する。

$$v_u(\tau) = v_{u0}(\tau_0, \tau_1) + \varepsilon v_{u1}(\tau_0, \tau_1) + \dots \quad (\text{A.4})$$

次に、時間  $\tau$  の代わりに以下の二つの時間尺度を導入する。

$$\tau_0 \equiv \tau, \tau_1 \equiv \varepsilon\tau \quad (\text{A.5})$$

式(A.3)に式(A.4), (A.5)を代入し、 $\varepsilon$  のべき級数の形に表して 1 次の項までをまとめれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} & (D_0^2 v_{u0} + v_{u0}) \\ & + \varepsilon (D_0^2 v_{u1} + 2D_0 D_1 v_{u0} + v_{u1} - 2D_0 v_{u0} + v_{u1} + v_{u0}^3) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

式(A.6)が恒等的に成り立つためには、定数項と  $\varepsilon$  の係数が 0 でなければならない。したがって、

$$D_0^2 v_{u0} + v_{u0} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$D_0^2 v_{u1} + v_{u1} = -2D_0 D_1 v_{u0} + 2D_0 v_{u0} - v_{u0}^3 \quad (\text{A.8})$$

を得る。今、式(A.7)の解を次式のように仮定する。

---


$$v_{u_0} = A(\tau_1)e^{i\tau_0} + \text{C.C.} \quad (\text{A.9})$$

式(A.9)を式(A.8)に代入すれば, 次式を得る.

$$\begin{aligned} D_0^2 v_{u_1} + v_{u_1} = & -2D_0 D_1 \{A(\tau_1)e^{i\tau_0} + \bar{A}(\tau_1)e^{-i\tau_0}\} \\ & + 2D_0 \{A(\tau_1)e^{i\tau_0} + \bar{A}(\tau_1)e^{-i\tau_0}\} \\ & - \{A(\tau_1)e^{i\tau_0} + \bar{A}(\tau_1)e^{-i\tau_0}\}^3 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

式(A.10)の解に含まれる  $\tau_0$  に関する永年項が 0 となる条件を考慮すれば, 複素振幅  $A(\tau_1)$  は次式を満足する必要がある.

$$D_1 A(\tau_1) = A(\tau_1) + \frac{1}{2i} 3A(\tau_1)^2 \bar{A}(\tau_1) \quad (\text{A.11})$$

したがって, 式(A.11)の左辺を 0 として解けば, 定常振幅に達した場合の  $A(\tau_1) = A_s$  は次式で与えられる.

$$A_s \bar{A}_s = -i \frac{2}{3\delta} \quad (\text{A.12})$$

式(A.12)の右辺が虚数であるため  $A_s$  が一意には定まらない.

同様の手順で, 非線形項が  $v_u^2 \dot{v}_u$  である場合について式(A.10)に相当する式を求めると次のようになる.

$$\begin{aligned} D_0^2 v_{u_1} + v_{u_1} = & -i2D_1 \{A(\tau_1)e^{i\tau_0} + \bar{A}(\tau_1)e^{-i\tau_0}\} \\ & + i2 \{A(\tau_1)e^{i\tau_0} + \bar{A}(\tau_1)e^{-i\tau_0}\} \\ & - \{A(\tau_1)e^{i\tau_0} + \bar{A}(\tau_1)e^{-i\tau_0}\}^2 \{A(\tau_1)e^{i\tau_0} + \bar{A}(\tau_1)e^{-i\tau_0}\} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$\tau_0$  に関する永年項が 0 となる条件を考慮すれば, 複素振幅  $A(\tau_1)$  の振幅方程式は次式で与えられる.

---

$$D_1 A(\tau_1) = A(\tau_1) - \frac{1}{2i} A(\tau_1)^2 \bar{A}(\tau_1) \quad (\text{A.14})$$

この場合も右辺に虚数項が残るため、定常振幅値は一意には定まらない。

これに対し、非線形項が  $v_u^2 \dot{v}$ 、 $\dot{v}_u^3$  の場合には、式(A.10)および式(A.13)に相当する式に含まれる虚数項が相殺され、実数項のみが残る。したがって、永年項が 0 となる条件から決められる複素振幅  $A(\tau_1)$  の振幅方程式も全て実数項となるため、定常振幅値を一意に決定することができる。

以上のように、式(A.2)で表される振動方程式の定常振幅を一意に決定するには、右辺の非線形項が  $v_u^2 \dot{v}$  あるいは、 $\dot{v}_u^3$  の二つが考えられる。前者を式(A.2)に代入すれば van der Pol の方程式となり、後者の場合には Rayleigh の方程式に一致する。よく知られているように、この二つの方程式は変数変換で相互変換が可能であり、本質的に同一である。本研究では、Rayleigh の方程式を参考に、非線形項として  $\dot{v}_u^3$  を採用することとした。

---

# 著者論文目録

## 定期刊行誌掲載論文(原著論文)

- (1) 笠間稔, 吉沢正紹, 兪一梅, 伊藤朋之, 伊東圭昌, レーザ・プリンタにおけるクリーナ・ブレードの自励振動(第1報, 実機における現象の観察と発生機構の検討), 日本機械学会論文集, 72-713, C, pp.76-83, (2006).
- (2) 笠間稔, 吉沢正紹, 兪一梅, 伊藤朋之, 伊東圭昌, レーザ・プリンタにおけるクリーナ・ブレードの自励振動(第2報, 不安定振動モードの非線形振幅方程式の導出), 日本機械学会論文集, 72-724, C, pp.3719-3727, (2006).

## 国際会議論文

- (1) Kasama, M., Yoshizawa, M., Yu, Y., Itoh, T., Itoh, Y., A Consideration about Oscillation Mechanism of a Cleaning Blade, Proc. of the 20th International Conference on Digital Printing Technologies, (NIP20, Salt Lake City, USA), pp.51-56, (2004).
- (2) Kasama, M., Yoshizawa, M., Yu, Y., Itoh, T., Itoh, Y., A few Remarks about Self-excited Oscillation of a Cleaning Blade in a Laser Printer, Proc. of the 6th European Conference on Structural Dynamics, (EURODYN2005, Paris, France), pp.1949-1954, (2005).

## その他の国際会議発表

- (1) Kasama, M., A Study of the New Active Noise Control (ANC) in a Copy machine / Printer, Proc. of the 26th International Congress of Imaging Science, (ICIS2002, Tokyo, Japan), pp.684-685, (2002).

## 国内学会発表

- (1) 笠間稔, 吉沢正紹, 兪一梅, 伊藤朋之, 伊東圭昌, 回転体に対向接触する弾性ブレードの自励振動発生メカニズムに関する考察, IIP2004 情報・知能・精密機器部門講演会論文集, (東京), pp.213-216, (2004).
- (2) 笠間稔, レーザ・プリンタにおけるクリーナ・ブレードの自励振動, 平成16年度非線形振動研究会講演論文集, (静岡), pp.E1-E7, (2004).
- (3) 笠間稔, 吉沢正紹, 兪一梅, 伊藤朋之, 伊東圭昌, レーザ・プリンタにおけるクリーナ・ブレードの自励振動発生機構, 日本機械学会 2006年度年次大会講演論文集[5], (熊本), pp.607-608, (2006).



---

その他

- (1) 宇田川浩二, 黒澤由美子, 笠間稔, 森正裕, 複写機・プリンタの音質研究, Japan Hardcopy 2000 論文集, pp.173-176, (2000).
- (2) 笠間稔, 能動騒音制御における演算負荷を軽減するコントローラ構成方法の検討, 2002 年度日本音響学会春季研究発表会講演論文集, (神奈川), pp.657-658, (2002).