例外型単純Lie群における有限位数の自己同型写像による不動点部分群の実現とその応用

２００７年度

宮 下 敏 一

目 次

1．序文 i
2．準備 iv
3．例外型単純 Lie 群 G_2 **1**
3.1 Cayley 代数 1
3.2 G_2 の対合的自己同型写像 γ, γ' と部分群 $(U(1) \times U(1))/\boldsymbol{Z}_2 \times \{1, \gamma_1\}$ 2
4．例外型単純 Lie 群 F_4 **5**
4.1 例外 Jordan 代数 5
4.2 F_4 の対合的自己同型写像 γ, γ' と部分群 $(U(1) \times U(3))/\boldsymbol{Z}_2 \times \{1, \gamma_1\}$ 6
4.3 F_4 の対合的自己同型写像 σ, σ' と部分群 $Spin(8)$ 9
4.4 F_4 の対合的自己同型写像 σ, γ と部分群 $(Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(2))/\boldsymbol{Z}_2$ 11
4.5 F_4 の対合的自己同型写像 $\sigma, \sigma', \gamma, \gamma'$ と極大トーラス 12
4.6 F_4 の対合的自己同型写像 σ' による $Spin(9)$ の分解 13
5．例外型単純 Lie 群 E_6 **14**
5.1 E_6 の対合的自己同型写像 γ, γ' と部分群 $(U(1) \times S(U(3) \times U(3)))/\boldsymbol{Z}_2 \times \{1, \gamma_1\}$ 14
5.2 E_6 の対合的自己同型写像 σ, σ' と部分群 $(U(1) \times U(1) \times Spin(8))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_4)$ 17
5.3 E_6 の対合的自己同型写像 σ, γ と部分群 $(Sp(1) \times S(U(2) \times U(4)))/\boldsymbol{Z}_2$ 20
5.4 E_6 の対合的自己同型写像 $\sigma, \sigma', \gamma, \gamma'$ と極大トーラス 21
5.5 E_6 の対合的自己同型写像 σ' による $Spin(10)$ の分解 22
6．例外型単純 Lie 群 E_7 **23**
6.1 Freudenthal C-ベクトル空間 23
6.2 E_7 の対合的自己同型写像 γ, γ' と部分群
$(U(1) \times U(1) \times SU(6))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_3) \times \{1, l_1\}$ 24
6.3 E_7 の対合的自己同型写像 σ, σ' と部分群
$(SU(2) \times SU(2) \times SU(2) \times Spin(8))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2)$ 36
6.4 E_7 の対合的自己同型写像 σ, γ と部分群 $(SU(2) \times Spin(4) \times Spin(8))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2)$ 38
6.5 E_7 の対合的自己同型写像 $\sigma, \sigma', \gamma, \gamma', \iota$ と極大トーラス 49
6.6 E_7 の対合的自己同型写像 σ' による $Spin(11), Spin(12)$ の分解 50
6.7 E_7 の位数 3 の自己同型写像の分類と不動点部分群の実現 56
6.7.1 位数 3 の自己同型写像 ι_3 と部分群 $(U(1) \times E_6)/\boldsymbol{Z}_3$ 56
6.7.2 位数 3 の自己同型写像 λ_3 と部分群 $S(U(1) \times U(7))/\boldsymbol{Z}_2$ 57
6.7.3 位数 3 の自己同型写像 σ_3 と部分群 $(SU(1) \times Spin(2) \times Spin(10))/\boldsymbol{Z}_4$ 59
6.7.4 位数 3 の自己同型写像 ${\sigma'}_3$ と部分群 $(U(1) \times Spin(12))/\boldsymbol{Z}_2$ 63
6.7.5 位数 3 の自己同型写像 w_3 と部分群 $(SU(3) \times SU(6))/\boldsymbol{Z}_3$ 64
6.8 E_7 型複素 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の 3-graded の分解とその $\mathfrak{g}_{ev}$ の群実現 65
7．例外型単純 Lie 群 E_8 **73**
7.1 複素 Lie 環 ${\mathfrak{e}_8}^C$ 73
7.2 E_8 型複素 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の 2-graded の分解とその $\mathfrak{g}_0$ の群実現 74
7.3 E_8 の対合的自己同型写像 σ' による $Spin(13), Spin(14)$ の分解 83
7.4 $Spin(15), Ss(16)$ の分解の予想とその Lie 環の同型対応について 95
8．付録 **98**
参考文献 **103**

1. 序文

M.S.Lie が Lie 群（連続群）を考えたのは 19 世紀半ばである．当時の諸幾何学を群論的に扱い (Erlangen の目録)，また微分方程式の解を解に移す変換の群との関連の下に調べるのが契機であった．まず Lie 群が局所的には Lie 環と対応し，それにより Lie 群の諸性質が Lie 環へ強く反映することを見出した．この草創期に可解および半単純 Lie 環の概念が導入され基本的性質が論じられた．その後 19 世紀後半から 20 世紀前半にかけて E.Cartan, H.Weyl らが複素単純 Lie 環の完全な分類，構造を探る方法を開発，表現とその指標の決定を行い，さらに Lie 群の大域的研究の見地を開いた．その分類定理はつぎのようである：

定理　（W.killing-E, Cartan, 複素単純 Lie 環の分類定理）
単純 C-Lie 環はつぎのいずれかに C-Lie 環として同型である．
$A_n(n \geqq 1), B_n(n \geqq 1), C_n(n \geqq 1), D_n(n \geqq 3) \cdots$ 古典型
$G_2,\ F_4,\ E_6,\ E_7,\ E_8 \cdots$ 例外型
ただし，$A_1 = B_1 = C_1, B_2 = C_2, A_3 = D_3$ である．

ここで例外型 Lie 環，Lie 群の構成の歴史を振返ると，E.Cartan は証明なしで G_2 型の Lie 環を与え ([3]), E_6 型の Lie 環も与えている ([2])．そののち C.Chevalley, R.D.Schafer により F_4 型の Lie 環，E_6 型の Lie 環が与えられた ([5])．また E_7 型は E.Cartan, H.Freudenthal が，E_8 型は H.Freudenthal がその定義を与えた ([6])．一方，例外型単純 Lie 群については，上記の G_2, F_4 型の Lie 環がもともと単連結コンパクト単純 Lie 群 G_2, F_4 から得られていたので，その段階でその実現はされていたが，E_6, E_7, E_8 型単連結コンパクト単純 Lie 群の実現については，分類から 1 世紀のあいだ未知のままであった．これに対して，横田は代数的に単連結コンパクト Lie 群 E_6 を実現することに成功し ([41]), 引き続き横田，今井によって単連結コンパクト Lie 群 E_7, E_8 の実現がされた ([14], [15])．また 1930 年代前後に E.Cartan が実単純 Lie 環を分類し ([4]), そののち F.Gantmacher がそれに改良を加えた ([8])．それらに対応する非コンパクト例外型単純 Lie 群の多くも未知のままであったが, H.Freudenthal, 横田，宿澤，今井，保倉らによりすべての実現（普遍的線形 Lie 群）が得られた ([11], [12], [13], [36], [37], [38], [39], [40], [42], [53], [54])．

実現された 5 種類の例外型単純 Lie 群はそれぞれ個性をもち，その個性（数学的構造）を調べることが大きな課題であり，それを考察し解明するために，普通は Lie 環を用いる．それは，単純 Lie 環は Cartan 部分環，root 系を経て最終的には Dynkin 図形に帰着されてしまうからである．しかるに，Dynkin 図形を調べることが単純 Lie 群の数学的構造ー中心，部分群，対合的自己同型写像，表現等ーを明らかにすることになるのであるが，一般に Dynkin 図形から群の数学的構造を具体的に構成することは容易なことではない．特に，E_6 型，E_7 型例外単純 Lie 群は，それぞれ巡回群 $\boldsymbol{Z}_3, \boldsymbol{Z}_2$ の中心をもつので，ルート系や Dynkin 図形の Lie 環からの情報だけでは，その部分群の群構造を正確に決定することは容易ではないと考える．本論文は，これまでの例外型単純 Lie 群に関して得られ多くの結果 ([42], [43], [44], [45], [46], [50],[53]) を用いて，群を丸ごと扱い多くの部分群の群構造を明らかにした．以下に内容ごとに分けてその概略を述べる．

1. 1995 年に横田は，J.A.Wolf, A.Gray の論文 ([58]) から例外型コンパクト単純 Lie 群 G_2, F_4, E_6 に対して，その位数 3 の自己同型写像の分類とその不動点部分群の実現をした ([43])．その続編として例外型コンパクト単純 Lie 群 E_7 に対して，同様の分類と実現を得た ([23])．群 E_8 に関してはその実現に至っていない．

2. 対合的自己同型写像が対称空間の理論で重要な役割をはたすことは，知られていることである ([1])．1990，1991 年に横田により例外型単純 Lie 群における対合的自己同型写像による不動点部分群が決定されことにより ([44], [45], [46])，例外型対称空間が具体的に実現されたことに加え，$Spin(8)$ が $(F_4)^\sigma \cap (F_4)^{\sigma'}$ として得られることを動機とし，例外型コンパクト Lie 群 $G = F_4, E_6, E_7$ に対して，2 つの対合的自己同型写像 σ, σ' の不動点部分群の共通部分 $G^\sigma \cap G^{\sigma'}$ の群構造を決定し ([25]), 引き続き 2 つの対合的自己同型写像 σ, γ の不動点部分群の共通部分 $G^\sigma \cap G^\gamma$ の群構造を決定した ([28])．さらに群 $G = G_2, F_4, E_6, E_7$ に対して，2 つの対合的自己同型写像 γ, γ' の不動点部分群の共通部分 $G^\gamma \cap G^{\gamma'}$ の群構造を決定した ([29], [52])．なお，$\sigma, \sigma', \gamma, \gamma'$ は例外型単純 Lie 群において代表的な対合的自己同型写像である．群 E_8 に関しては，いずれもその実現に至っていないが，$(E_8)^\sigma \cap (E_8)^{\sigma'}$ については，その Lie 環 $(\mathfrak{e}_8)^\sigma \cap (\mathfrak{e}_8)^{\sigma'}$ の Lie 環構造が $\mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8)$ であることを基ごとの対応を与えて，それを決定した ([26])．また群 G_2, F_4, E_6 に対して，4 つの対合的自己同型写像 $\sigma, \sigma', \gamma, \gamma'$ の不動点部分群の共通部分 $G^\sigma \cap G^{\sigma'} \cap G^\gamma \cap G^{\gamma'}$，群 E_7 は 5 のつの対合的自己同型写像 $\sigma, \sigma', \gamma, \gamma', \iota$ の不動点部分群の共通部分 $G^\sigma \cap G^{\sigma'} \cap G^\gamma \cap G^{\gamma'} \cap G^\iota$ の単位元の連結成分の群構造をそれぞれ決定し，それが極大トーラスになる結果を得た ([33])．

3. 例外型コンパクト Lie 群は下図のような spinor 群を部分群としてもっている．(その入り方は，本文のなかで具体的に示す.)

$$
\begin{array}{l}
F_4 \supset Spin(9) \supset Spin(8) \supset Spin(7) \supset \cdots \supset Spin(1) \ni 1 \\
\cap \\
E_6 \supset Spin(10) \\
\cap \\
E_7 \supset Spin(12) \supset Spin(11) \\
\cap \\
E_8 \supset Ss(16) \supset Spin(15) \supset Spin(14) \supset Spin(13)
\end{array}
$$

古典群において spinor 群が分解についてはよく知られた事実であるが，不動点部分群の共通部分 $G^\sigma \cap G^{\sigma'}$ の群構造を調べている過程で，上図の $Spin(9), Spin(10)$ について

$$(Spin(9))^{\sigma'} \cong Spin(8), \qquad (Spin(10))^{\sigma'} \cong (Spin(2) \times Spin(8))/\boldsymbol{Z}_2$$

の分解を得られたことに動機を得て，残りの spinor 群についても対合的自己同型写像 σ' による分解を試み，それを実現した ([27])．$(Spin(15))^{\sigma'}, (Ss(16))^{\sigma'}$ ($Ss(16) = Spin(16)/\boldsymbol{Z}_2$) についてはいまだ未解決のままである．$Spin(15)$ については Lie 環段階での結果も得られていない．しかし，$(Ss(16))^{\sigma'} (= (E_8)^\sigma \cap (E_8)^{\sigma'})$ に関しては Lie 環 (上述の $(\mathfrak{e}_8)^\sigma \cap (\mathfrak{e}_8)^{\sigma'} \cong \mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8)$ を指す) での基ごとの対応を本文の最後に示しておいた ([26])．spinor 群は，次元の低い固定化群から段階的に連結性を示し，特殊直交群を 2 重に覆う被覆群として構成する．その spinor 群の例外型 Lie 群への新しい入り方も幾つか示したので，詳しくは本文を見て戴きたい．

4. 古典型および例外型単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の第 2 種階別 Lie 環（2-graded 分解）

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \quad [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l] \subset \mathfrak{g}_{k+l}$$

を 1993 年に金行が分類し，さらに部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_0$ および $\mathfrak{g}_{ev} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2$ の Lie 環の型も決定した ([18])．その結果から，横田は例外型 Lie 群 $G = G_2, F_4, E_6, E_7$ の各型に対して，Lie 環 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{ev}$ に対応する群 G の部分群 G_0, G_{ev} をすべて実現をした ([47], [48])．残っていた E_8 型についてもそのすべてを決定した ([24])．本文においては，複素 Lie 群 ${E_8}^C$ の部分群 $Spin(13, C), Spin(14, C)$ の構成を主に，Lie 環 $\mathfrak{g}_0$ の群化である群 $({E_8}^C)_0$ の群構造が $(C^* \times Spin(14, C))/\boldsymbol{Z}_4$ であることを述べる．

5. 古典型および例外型単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の第 3 種階別 Lie 環（3-graded 分解）

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-3} \oplus \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3, \quad [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l] \subset \mathfrak{g}_{k+l}$$

は 2000 年に原が分類し, さらに部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{ev}$ および $\mathfrak{g}_{ed} = \mathfrak{g}_{-3} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_3$ の Lie 環の型も決定した ([10])．その結果から，横田は例外型 Lie 群 $G = G_2, F_4, E_6$ の各型に対して ([49])，五明は $G = E_8$ 型に対して（論文未発表），Lie 環 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{ev}, \mathfrak{g}_{ed}$ に対応する群 G の部分群 G_0, G_{ev}, G_{ed} をすべて実現をした．E_7 型についてもそのすべてを決定した ([30],[31],[32])．本文においては，今までてづかずのままであった複素 Lie 群 ${E_7}^C$ の部分群 $Spin(12, C)$ が ${E_7}^C$ の位数 4 の自己同型写像 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ による不動点部分群の共通部分として得られることを主に，Lie 環 $\mathfrak{g}_{ev}$ の群化である群 $({E_7}^C)_{ev}$ の群構造が $(SL(2, C) \times Spin(12, C))/\boldsymbol{Z}_2$ であることを述べる．

以上一連の証明のなかで，群から群への写像を具体的に構成し，その写像の全射を示さねばならないことが多くあり，全射を示すことは容易ではないが，最も時間を費やし，そして経験とアイデアを必要としたことは定義した固定化群の連結性を示すことであったように思う．換言すれば，群が働く空間への作用の推移性を示すことであった．

序文を終わるにあたり，本論文の執筆をお薦めくださり，ご指導戴きました慶應義塾大学理工学部教授前田吉昭先生にはひとかたならぬお世話になりました．ここに深甚なる感謝の意を表したいと思います．また, 慶應義塾大学理工学部教授栗原将人先生，同准教授森吉仁志先生，東京農工大学工学部教授間下克哉先生，信州大学理学部教授阿部孝順先生には，本論文に関して格別なるご助言を賜りました．ここに拝謝致し厚く御礼申し上げます．そして，信州大学名誉教授横田一郎先生には，学部生のときから今日まで３０年余の長きに亘りご指導を賜り，さらに論文を書く機会を幾度も与えて戴きました．この場を借りて衷心より感佩の意を表します．最後に，横田セミナーのメンバーであり良き友人である宿澤修氏，竹内健太郎氏，宮坂隆氏，佐藤隆衛氏，保倉理美氏，三石和之氏，また畏友である横澤克氏，六川忠幸氏諸兄にはいつも励ましと貴重なる助言を戴きました．あらためて感謝申し上げます．

2. 準備

・$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C} = \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}e_1\,({e_1}^2 = -1)$ (または，$\boldsymbol{C}_4 = \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}e_4\,({e_4}^2 = -1)$) と $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}e_2\,({e_2}^2 = -1)$ をそれぞれ実数体，複素数体，4 元数体とする．

・$\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 V に対して，その複素化全体の集合 $\{u + iv \,|\, u, v \in V\}$ を V^C で表す．また，V^C の複素共役を τ で表し，$\tau(u + iv) = u - iv,\ u, v \in V$ で定義する．このとき，$\boldsymbol{R}$ の複素化を $C = \boldsymbol{R}^C$ で表し，$\boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ の複素化を $\boldsymbol{C}^C, \boldsymbol{H}^C$ で表す．

・V を体 K 上のベクトル空間とするとき，$\mathrm{Iso}_K(V)$ は K-線形同型写像 $\alpha : V \to V$ 全体のつくる群とする．また $\mathrm{Hom}_K(V)$ は K-線型写像 $\phi : V \to V$ 全体のつくる K-ベクトル空間とする．

・G を群とする．自己同型写像 $\sigma : G \to G$ に対して，$G^\sigma = \{g \,|\, \sigma(g) = g\}$ とする．$s \in G$ に対して，s により誘導される G の内部自己同型写像を $\tilde{s}$ で表す：$\tilde{s}(g) = sgs^{-1},\ g \in G$ この $\tilde{s}$ を略して s で表す：$G^s = \{g \in G \,|\, sg = gs\}$．$G^0$ は G の単位元を含む連結成分を，$G = G^0 \times \{1, g_1\}$ は $G = G^0 \cup g_1 G^0$ を意味する．また G が空間 X の変換群であるとき，G_x は $x \in X$ における G の固定化群を表す．

・序文と本文に現れる古典群のおもなものをつぎに載せておく：

$$
\begin{aligned}
&SL(n, K) = \{A \in M(n, K) \mid \det A = 1\},\ K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, C, \boldsymbol{C}^C,\\
&SO(n, K) = \{A \in M(n, K) \mid {}^tAA = E, \det A = 1\},\ K = \boldsymbol{R}, C,\\
&O(m, n-m) = \{A \in M(n, \boldsymbol{R}) \mid {}^tAI_mA = I_m\},\\
&SU(n, K) = \{A \in M(n, K) \mid A^*A = E, \det A = 1\},\ K = \boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}^C,\\
&SU(m, n-m, K) = \{A \in M(n, K) \mid A^*I_mA = I_m, \det A = 1\},\ K = \boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}^C,\\
&SU^*(2n, K) = \{A \in M(2n, K) \mid J_nA = \overline{A}J_n, \det A = 1\},\ K = \boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}^C,\\
&Sp(n, K) = \{A \in M(n, K) \mid A^*A = E\},\ K = \boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}^C.
\end{aligned}
$$

ここに ${}^tA$ は A の転置行列を表す．また $A^* = {}^t\overline{A}$,

$$
I_m = \mathrm{diag}(\overbrace{-1, \cdots, -1}^{m}, \overbrace{1, \cdots, 1}^{n-m}),\ J_n = \mathrm{diag}(J, \cdots, J) \in M(2n, \boldsymbol{R}),\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

である．

・群の連結性や準同型写像の全射を示すために，よく用いる 2 つの定理をあげておく．

定理 1. (E.Cartan – P.K.Rašvskii) G を単連結 Lie 群，$\sigma : G \to G$ を位数有限の自己同型写像とするとき，G^σ は連結である．

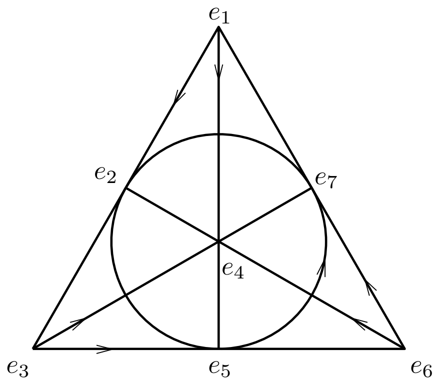
定理 2. $\varphi : G \to G'$ が Lie 群の準同型写像で，G' が連結かつ $\mathrm{Ker}\varphi$ が離散，そして $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}'$ を満たすとき，φ は全射である．

・著者が得た主な結果については，定理の前に † の記号を付した．また以上の準備で不足の記号は，参考文献を参照のこと．

3. 例外型単純 Lie 群 G_2

3.1 Cayley 代数

Cayley 代数 (8 元数体または division Cayley 代数ともいう) を $\mathfrak{C}$ で表す．この Cayley 代数を説明しよう．$e_0 = 1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ を基とする 8 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間を $\mathfrak{C}$ とし，その元を Cayley 数という．$\mathfrak{C}$ の基の間の積を次のように定義する．下図において，左の線上の e_1, e_2, e_3 の間では，$e_1e_2 = e_3, e_2e_3 = e_1, e_3e_1 = e_2$ と定義する．他の線上でも同様に積を定義する．



例えば，$e_4e_5 = e_1, e_7e_2 = e_5$ 等である．$e_0 = 1$ を単位元とし，かつ

$$e_i{}^2 = -1,\ i \neq 0, \qquad e_ie_j = -e_je_i,\ i \neq 0,\ j \neq 0,\ i \neq j$$

とし，さらに分配法則が成り立つとすると $\mathfrak{C}$ に積が定義される．$\mathfrak{C}$ の元 $x = x_0 + \sum_{i=1}^{7} x_ie_i$ に対して，共役元 $\overline{x}$, 内積 (x, y)，長さ $|x|$ を

$$\overline{x_0 + \sum_{i=1}^{7} x_ie_i} = x_0 - \sum_{i=1}^{7} x_ie_i, \quad \Big(\sum_{i=0}^{7} x_ie_i, \sum_{i=0}^{7} y_ie_i\Big) = \sum_{i=0}^{7} x_iy_i, \quad |x| = \sqrt{(x,x)}$$

で定義する．0 でない Cayley 数 x に対して，$\dfrac{\overline{x}}{|x|^2}$ を x^{-1} とおくと，$xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ が成り立つ．体の定義のうち結合法則 $x(yz) = (xy)z$ を除いた法則をすべて満たしている．可換法則 $xy = yx$ は成り立たない．しかし，それに代わる諸公式（付録 I を参照）がある．
$\mathfrak{C}$ は複素数体 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}_4$, 4 元数体 $\boldsymbol{H}$ を

$$\boldsymbol{C} = \{x_0 + x_1e_1 \,|\, x_k \in \boldsymbol{R}\},\ \boldsymbol{C}_4 = \{x_0 + x_1e_4 \,|\, x_k \in \boldsymbol{R}\},$$
$$\boldsymbol{H} = \{x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \,|\, x_k \in \boldsymbol{R}\}$$

として含んでいる．また任意の元 $x \in \mathfrak{C}$ は

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7,\ x_k \in \boldsymbol{R} \\ &= (x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) + (x_4 + x_5e_1 - x_6e_2 + x_7e_3)e_4, \end{aligned}$$

すなわち，

$$x = m + ae_4,\ m, a \in \boldsymbol{H}$$

と一意に表せる．そして $\boldsymbol{H} \oplus \boldsymbol{H}e_4$ に積，内積，共役をそれぞれ

$$\begin{aligned}
&(m + ae_4)(n + be_4) = (mn - \overline{b}a) + (a\overline{n} + bm)e_4, \\
&(m + ae_4, n + be_4) = (m, n) + (a, b),\ \overline{m + ne_4} = \overline{m} - ae_4
\end{aligned}$$

で定義する．これらは Cayley 代数 $\mathfrak{C}$ のそれらに対応しているので，以後 $\mathfrak{C}$ と $\boldsymbol{H} \oplus \boldsymbol{H}e_4$ を同一視する：$\mathfrak{C} = \boldsymbol{H} \oplus \boldsymbol{H}e_4$.

3.2 G_2 の対合的自己同型写像 γ, γ' と部分群 $(U(1) \times U(1))/\boldsymbol{Z}_2 \times \{1, \gamma_1\}$

対合的自己同型写像 γ, γ' を誘導する線形変換 γ, γ' の定義を与え，不動点部分群の共通部分 $(G_2)^\gamma \cap (G_2)^{\gamma'}$ の群構造を調べよう．

定義． Cayley 代数 $\mathfrak{C}$ の自己同型群を G_2 で表す ：

$$G_2 = \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{C}) \,|\, \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y)\}.$$

補題 3.2.1. ([56]) $\alpha \in G_2$ は $\mathfrak{C}$ の内積 (x, y) を不変にする：

$$(\alpha x, \alpha y) = (x, y),\ \ x, y \in \mathfrak{C}.$$

定理 3.2.2. ([56]) G_2 は単連結コンパクト Lie 群で，その次元は 14 である．

[**参考**] G_2 の Lie 環 $\mathfrak{g}_2$ は，つぎのようである：

$$\mathfrak{g}_2 = \{D \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{C}) \,|\, D(xy) = (Dx)y + x(Dy)\}.$$

さて $\boldsymbol{R}$-線形変換 $\gamma, \gamma', \gamma_1 : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}
\gamma(m + ae_4) &= m - ae_4, \quad \gamma'(m + ae_4) = \gamma' m + (\gamma' a)e_4, \\
\gamma_1(m + ae_4) &= \gamma_1 m + (\gamma_1 a)e_4, \quad m + ae_4 \in \boldsymbol{H} \oplus \boldsymbol{H}e_4 = \mathfrak{C}
\end{aligned}$$

で定義する．ここに $\gamma', \gamma_1 : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ は

$$\gamma'(x + ye_2) = x - ye_2,\ \ \gamma_1(x + ye_2) = \overline{x} + \overline{y}e_2, \quad x + ye_2 \in \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}e_2 = \boldsymbol{H}$$

である．このとき $\gamma, \gamma', \gamma_1 \in G_2$, $\gamma^2 = {\gamma'}^2 = {\gamma_1}^2 = 1$ であり，γ, γ', γ_1 は互いに G_2 において共役 ([44])，かつ可換である．また $\gamma\gamma' = \gamma'\gamma$ より

$$(G_2)^\gamma \cap (G_2)^{\gamma'} = ((G_2)^\gamma)^{\gamma'} = ((G_2)^{\gamma'})^\gamma$$

を得る．そこで，この群を簡単に $(G_2)^{\gamma, \gamma'}$ で表し，以後も同様の記法を用いる．

命題 3.2.3. ([44],[56]) $(G_2)^\gamma \cong (Sp(1) \times Sp(1))/\boldsymbol{Z}_2,\ \boldsymbol{Z}_2 = \{(1, 1), (-1, -1)\}$.

証明. $Sp(1) = \{p \in \boldsymbol{H} \,|\, p\overline{p} = 1\}$ とする．準同型写像 $\varphi : Sp(1) \times Sp(1) \to (G_2)^\gamma$,

$$\varphi(p,q)(m + ae_4) = qm\overline{q} + (pa\overline{q})e_4, \quad m + ae_4 \in \boldsymbol{H} \oplus \boldsymbol{H}e_4 = \mathfrak{C}$$

が命題の群同型を与える． □

命題 3.2.3 より直ちにつぎの補題を得る．

補題 3.2.4. ([44],[56]) 写像 $\varphi : Sp(1) \times Sp(1) \to (G_2)^\gamma$ は

$$\gamma' = \varphi(e_1, e_1), \quad \gamma_1 = \varphi(e_2, e_2), \quad \gamma'\varphi(p,q)\gamma' = \varphi(\gamma' p, \gamma' q)$$

を満たす.

上の補題，命題を用いて標記の群 $(G_2)^{\gamma,\gamma'}$ の群構造を決定しよう．

† **定理 3.2.5.** $(G_2)^{\gamma,\gamma'} \cong (U(1) \times U(1))/\boldsymbol{Z}_2 \times \{1, \gamma_1\}$, $\boldsymbol{Z}_2 = \{(1,1), (-1,-1)\}$.

証明. $\alpha \in (G_2)^{\gamma,\gamma'} \subset (G_2)^\gamma$ に対して, $\alpha = \varphi(p,q)$ を満たす元 $p, q \in Sp(1)$ が存在する (命題 1.2.3). $\gamma'\alpha\gamma' = \alpha$ より, $\varphi(\gamma' p, \gamma' q) = \varphi(p,q)$ を得る (補題 3.2.4). よって,

$$\begin{cases} \gamma' p = p \\ \gamma' q = q \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \gamma' p = -p \\ \gamma' q = -q \end{cases}$$

である．前者の場合は, $p, q \in U(1) = \{a \in \boldsymbol{C} \,|\, \overline{a}a = 1\}$ となるので, 前者の条件を満たす群は $(U(1) \times U(1))/\boldsymbol{Z}_2$ である．後者の場合は, $p = q = e_2$ が条件を満たし，$\varphi(e_2, e_2) = \gamma_1$ である (補題 3.2.4). したがって，群同型 $(U(1) \times U(1))/\boldsymbol{Z}_2 \times \{1, \gamma_1\} \cong (G_2)^{\gamma,\gamma'}$ を得る． □

[**参考**] 任意の元 $x \in \mathfrak{C}$ は

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7 \quad (x_i \in \boldsymbol{R}) \\ &= (x_0 + x_1e_1) + (x_2 + x_3e_1)e_2 + (x_4 + x_5e_1)e_4 + (x_6 + x_7e_1)e_6 \\ &= a + m_1e_2 + m_2e_4 + m_3e_6 \end{aligned}$$

と一意に表せる．ここに $a = x_0 + x_1e_1$, $m_k = x_{2k} + x_{2k+1}e_1$, $k = 1, 2, 3$ である．

そこで，この $x \in \mathfrak{C}$ に $\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3$ の元

$$a + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

を対応させる．$\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3$ に積，内積，共役をそれぞれ

$$\begin{aligned} (a + \boldsymbol{m})(b + \boldsymbol{n}) &= (ab - \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle) + (a\boldsymbol{n} + \overline{b}\boldsymbol{m} - \overline{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}}), \\ (a + \boldsymbol{m}, b + \boldsymbol{n}) &= (a, b) + \frac{1}{2}(\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle + \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \rangle), \ \overline{a + \boldsymbol{m}} = \overline{a} - \boldsymbol{m} \end{aligned}$$

で定義する．ここに $\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle = {}^t\boldsymbol{m}\overline{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ はそれぞれエルミート内積，外積である．このとき $\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3$ は $\mathfrak{C}$ に代数として同型になるから，以後 $\mathfrak{C}$ と $\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3$ を同一視する : $\mathfrak{C} = \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3$.

$\boldsymbol{R}$-線形変換 $\gamma, \gamma', \gamma_1 : \mathfrak{C} = \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3 \to \mathfrak{C} = \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3$ をそれぞれ

$$\gamma\Bigl(a + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}\Bigr) = a + \begin{pmatrix} m_1 \\ -m_2 \\ -m_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma'\Bigl(a + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}\Bigr) = a + \begin{pmatrix} -m_1 \\ m_2 \\ -m_3 \end{pmatrix},$$
$$\gamma_1(a + \boldsymbol{m}) = \overline{a} + \overline{\boldsymbol{m}}.$$

で定義する (これらは $\gamma, \gamma', \gamma_1 : \mathfrak{C} = \boldsymbol{H} \oplus \boldsymbol{H}e_4 \to \mathfrak{C} = \boldsymbol{H} \oplus \boldsymbol{H}e_4$ と同じものである). また $\boldsymbol{R}$-線形変換 $w : \mathfrak{C} = \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3 \to \mathfrak{C} = \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3$ を

$$w(a + \boldsymbol{m}) = a + \omega_1 \boldsymbol{m}, \quad a + \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3 = \mathfrak{C}$$

で定義する．ここに $\omega_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}e_1 \in \mathfrak{C}$ である．このとき $w \in G_2, w^3 = 1$ となる．

群 G_2 の定義において $\mathfrak{C}$ を $\boldsymbol{C}$ にかえた群 $G_{2,\boldsymbol{C}}$ は

$$G_{2,\boldsymbol{C}} = \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{C}) \,|\, \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y)\} = \{1, \varepsilon\} = \boldsymbol{Z}_2,$$

となる．ここに ε は $\boldsymbol{C}$ の複素共役である：$\varepsilon x = \overline{x}$, $x \in \boldsymbol{C}$.

群 $(G_2)^{\gamma,\gamma'}$ を調べるために, G_2 の部分群

$$(G_2)_{e_1} = \{\alpha \in G_2 \,|\, \alpha e_1 = e_1\}$$

を考察しよう．

命題 3.2.6. ([50],[56]) $(G_2)^w = (G_2)_{e_1} \cong SU(3)$.

証明. $SU(3) = \{A \in M(3, \boldsymbol{C}) \,|\, AA^* = E, \det A = 1\}$ とする．準同型写像 $\psi_{2,w} : SU(3) \to (G_2)_{e_1}$,

$$\psi_{2,w}(A)(a + \boldsymbol{m}) = a + A\boldsymbol{m}, \quad a + \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3 = \mathfrak{C}$$

が命題の群同型を与える．($(G_2)^w = (G_2)_{e_1}$ に関しては [56] 定理 1.12 を参照.) □

群 $\boldsymbol{Z}_2 = \{1, \gamma_1\}$ は群 $U(1) \times U(1)$ につぎのように働く：

$$\gamma_1(p, q) = (\overline{p}, \overline{q}).$$

このとき群 $(U(1) \times U(1)) \cdot \boldsymbol{Z}_2$ をこの働きに関する $U(1) \times U(1)$ と $\boldsymbol{Z}_2$ の半直積とする．

上の命題を用いて群 $(G_2)^{\gamma,\gamma'}$ の群構造を決定しよう．つぎの定理は定理 3.2.5 の別証明にもなっている．

† 定理 3.2.7. $(G_2)^{\gamma,\gamma'} \cong (U(1) \times U(1)) \cdot \boldsymbol{Z}_2$.

証明. 準同型写像 $\psi_2 : (U(1) \times U(1)) \cdot \boldsymbol{Z}_2 \to (G_2)^{\gamma,\gamma'}$,

$$\psi_2((p, q), 1)(a + \boldsymbol{m}) = a + D(p, q)\boldsymbol{m},$$
$$\psi_2((p, q), \gamma_1)(a + \boldsymbol{m}) = \overline{a} + D(p, q)\overline{\boldsymbol{m}}, \quad a + \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3 = \mathfrak{C},$$

が群同型 $(U(1) \times U(1)) \cdot \boldsymbol{Z}_2 \cong (G_2)^{\gamma,\gamma'}$ を与える．(詳細は, [29] Theorem 2.1.2 を参照.) □

4. 例外型単純 Lie 群 F_4

4.1　例外 Jordan 代数

Cayley 代数 $\mathfrak{C}$ の元を成分にもつ 3 次の Hermite 行列全体の集合を $\mathfrak{J}$ で表す：

$$\mathfrak{J} = \{X \in M(3, \mathfrak{C}) \,|\, X^* = X\}.$$

これを例外 Jordan 代数という．任意の元 $X \in \mathfrak{J}$ は

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \ \xi_i \in \boldsymbol{R},\ x_i \in \mathfrak{C}$$

の形をしている．$\mathfrak{J}$ において Jordan 積 $X \circ Y$, 内積 (X, Y), Freudethal 積 $X \times Y$，3 項式 (X, Y, Z), 行列式 $\det X$ をそれぞれ

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX), \quad (X, Y) = \mathrm{tr}(X \circ Y),$$
$$X \times Y = \frac{1}{2}(2X \circ Y - \mathrm{tr}(X)Y - \mathrm{tr}(Y)X + (\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y) - (X, Y))E),$$
$$(X, Y, Z) = (X, Y \times Z), \quad \det X = \frac{1}{3}(X, X, X)$$

で定義する．ここに E は 3×3 単位行列である．

補題 4.1.1. ([56])　$\mathfrak{J}$ において, つぎの諸公式が成り立つ：

1. (1) $X \circ Y = Y \circ X$, $X \times Y = Y \times X$.

(2) $E \circ X = X$, $E \times X = \dfrac{1}{2}(\mathrm{tr}(X)E - X)$, $E \times E = E$.

2. (1) 内積 (X, Y) は正値である．

(2) $(X, Y, Z) = (Y, Z, X) = (Z, X, Y) = (X, Z, Y) = (Y, X, Z) = (Z, Y, X)$.

(3) $(X, E) = (X, E, E) = \mathrm{tr}(X)$　(tr : trace).

(4) $\mathrm{tr}(X \times Y) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y) - (X, Y))$.

3. (1) $X \circ (X \times Y) = (\det X)E$　(Cayley-Hamilton).

(2) $(X \times X) \times (X \times X) = (\det X)X$.

ここで $\mathfrak{J}$ につぎの記号を導入する：

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$F_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & \overline{x} & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \overline{x} \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3(x) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ \overline{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

これらの元の間の Jordan 積，Freudenthal 積の諸公式は付録 II を参照.

4.2 F_4 の対合的自己同型写像 γ, γ' と部分群 $(U(1)\times U(3))/\boldsymbol{Z}_2 \times \{1, \gamma_1\}$

以下に示すように γ, γ' は自然に $\mathfrak{J}$ の $\boldsymbol{R}$-線形変換として拡張されるので，それによって誘導される対合的自己同型写像 γ, γ' の不動点部分群の共通部分 $(F_4)^\gamma \cap (F_4)^{\gamma'}$ の群構造を調べよう.

定義. 例外 Jordan 代数 $\mathfrak{J}$ の自己同型群を F_4 で表す ：

$$\begin{aligned} F_4 &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}) \,|\, \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y\} \\ &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}) \,|\, \alpha(X \times Y) = \alpha X \times \alpha Y\} \\ &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}) \,|\, \det(\alpha X) = \det X, \alpha E = E\}. \end{aligned}$$

補題 4.2.1. ([56]) (1) $\alpha \in F_4$ ならば，$\alpha E = E$ となる.
(2) $\alpha \in F_4$ は $\mathfrak{J}$ の $\mathrm{tr}(X)$ を不変にする：

$$\mathrm{tr}(\alpha X) = \mathrm{tr}(X), \ X \in \mathfrak{J}.$$

定理 4.2.2. ([56]) F_4 は単連結コンパクト Lie 群で，その次元は 52 である.

$\mathfrak{J}$ の任意の元 $X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$ は

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & m_3 & \overline{m}_2 \\ \overline{m}_3 & \xi_2 & m_1 \\ m_2 & \overline{m}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_3e_4 & -a_2e_4 \\ -a_3e_4 & 0 & a_1e_4 \\ a_2e_4 & -a_1e_4 & 0 \end{pmatrix}$$

と表わされる. ここに $x_k = m_k + a_ke_4 \in \boldsymbol{H} \oplus \boldsymbol{H}e_4 = \mathfrak{C}$ である.

そこで，この $X \in \mathfrak{J}$ に $\mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}) \oplus \boldsymbol{H}^3$ の元

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & m_3 & \overline{m}_2 \\ \overline{m}_3 & \xi_2 & m_1 \\ m_2 & \overline{m}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} + (a_1, a_2, a_3) = M + \boldsymbol{a}$$

を対応させる. さて $\mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}) \oplus \boldsymbol{H}^3$ に Freudenthal 積 $\times$, 内積をそれぞれ

$$\begin{gathered} (M + \boldsymbol{a}) \times (N + \boldsymbol{b}) = \Big(M \times N - \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^*\boldsymbol{a})\Big) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}N + \boldsymbol{b}M), \\ (M + \boldsymbol{a}, N + \boldsymbol{b}) = (M, N) + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \end{gathered}$$

で定義する. ここに $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^* + \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^*)$ とする. このとき $\mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}) \oplus \boldsymbol{H}^3$ は $\mathfrak{J}$ に Freudenthal 代数として同型になるから，以後 $\mathfrak{J}$ と $\mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}) \oplus \boldsymbol{H}^3$ を同一視する ：$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}) \oplus \boldsymbol{H}^3$.

$\gamma, \gamma', \gamma_1 \in G_2 \subset F_4$ であるから, それぞれ自然に $\boldsymbol{R}$-線形変換 $\gamma, \gamma', \gamma_1 : \mathfrak{J} = \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}) \oplus \boldsymbol{H}^3 \to \mathfrak{J} = \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}) \oplus \boldsymbol{H}^3$ としてつぎのように拡張される：

$$\gamma(M + \boldsymbol{a}) = M - \boldsymbol{a}, \quad \gamma'(M + \boldsymbol{a}) = \gamma' M + \gamma' \boldsymbol{a}, \quad \gamma_1(M + \boldsymbol{a}) = \gamma_1 M + \gamma_1 \boldsymbol{a}.$$

命題 4.2.3. ([44],[56])　$(F_4)^\gamma \cong (Sp(1) \times Sp(3))/\boldsymbol{Z}_2,\ \boldsymbol{Z}_2 = \{(1, E), (-1, -E)\}$.

証明.　$Sp(1) = \{p \in \boldsymbol{H} \,|\, p\overline{p} = 1\}$, $Sp(3) = \{A \in M(3, \boldsymbol{H}) \,|\, A^* A = E\}$ とする. 準同型写像 $\varphi : Sp(1) \times Sp(3) \to (F_4)^\gamma$,

$$\varphi(p, q)(M + \boldsymbol{a}) = AMA^* + p\boldsymbol{a}A^*, \quad M + \boldsymbol{a} \in \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}) \oplus \boldsymbol{H}^3 = \mathfrak{J}$$

が命題の群同型を与える. □

命題 4.2.3 より直ちにつぎの補題を得る.

補題 4.2.4. ([44])　写像 $\varphi : Sp(1) \times Sp(3) \to (F_4)^\gamma$ は

$$\gamma' = \varphi(e_1, e_1 E), \quad \gamma_1 = \varphi(e_2, e_2 E), \quad \gamma' \varphi(p, A) \gamma' = \varphi(\gamma' p, \gamma' A)$$

を満たす.

上の補題, 命題を用いて標記の群 $(F_4)^{\gamma, \gamma'} = (F_4)^\gamma \cap (F_4)^{\gamma'} = ((F_4)^\gamma)^{\gamma'} = ((F_4)^{\gamma'})^\gamma$ の群構造を決定しよう.

† 定理 4.2.5.　$(F_4)^{\gamma, \gamma'} \cong (U(1) \times U(3))/\boldsymbol{Z}_2 \times \{1, \gamma_1\},\ \boldsymbol{Z}_2 = \{(1, E), (-1, -E)\}$.

証明.　$\alpha \in (F_4)^{\gamma, \gamma'} \subset (F_4)^\gamma$ に対して, $\alpha = \varphi(p, A)$ となる元 $p \in Sp(1), A \in Sp(3)$ が存在する (命題 4.2.3). $\gamma' \alpha \gamma' = \alpha$ より, $\varphi(\gamma' p, \gamma' A) = \varphi(p, A)$ を得る (補題 4.2.4). よって,

$$\begin{cases} \gamma' p = p \\ \gamma' A = A \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \gamma' p = -p \\ \gamma' A = -A \end{cases}$$

である. 前者の場合は, $p \in U(1)$, $A \in U(3) = \{A \in M(3, \boldsymbol{C}) \,|\, A^* A = E\}$ となるので, 前者の条件を満たす群は $(U(1) \times U(3))/\boldsymbol{Z}_2$ である. 後者の場合は, $p = e_2, A = e_2 E$ が条件を満たし, $\varphi(e_2, e_2 E) = \gamma_1$ である (補題 4.2.4). したがって, 群同型

$$(U(1) \times U(3))/\boldsymbol{Z}_2 \times \{1, \gamma_1\} \cong (F_4)^{\gamma, \gamma'}$$

を得る. □

[参考]　$\mathfrak{J}$ の元 $\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$ $(x_k = a_k + \boldsymbol{m}_k \in \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3 = \mathfrak{C})$ に $\mathfrak{J}(3, \boldsymbol{C}) \oplus M(3, \boldsymbol{C})$ の元

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & a_3 & \overline{a}_2 \\ \overline{a}_3 & \xi_2 & a_1 \\ a_2 & \overline{a}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} + (\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_3)$$

を対応させる．以後，$\mathfrak{J}(3, \boldsymbol{C})$ を簡単に $\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}}$ で表す．$\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}} \oplus M(3, \boldsymbol{C})$ における Freudenthal 積 $\times$ は

$$(X+M) \times (Y+N) = \Big(X \times Y - \frac{1}{2}(M^*N + N^*M)\Big) - \frac{1}{2}(MY + NX + \overline{M \times N})$$

で定義される．ここに $M \times N$ $(M = (\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_3), N = (\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3) \in M(3, \boldsymbol{C}))$ は

$$M \times N = \begin{pmatrix} \boldsymbol{m}_2 \times \boldsymbol{n}_3 & \boldsymbol{m}_3 \times \boldsymbol{n}_1 & \boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{n}_2 \\ + & + & + \\ \boldsymbol{n}_2 \times \boldsymbol{m}_3 & \boldsymbol{n}_3 \times \boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{m}_2 \end{pmatrix} \in M(3, \boldsymbol{C})$$

である．このとき $\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}} \oplus M(3, \boldsymbol{C})$ は $\mathfrak{J}$ に Freudenthal 代数として同型になるから，$\mathfrak{J}$ と $\mathfrak{J}(3, \boldsymbol{C}) \oplus M(3, \boldsymbol{C})$ を同一視する：$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{C}) \oplus M(3, \boldsymbol{C})$.

$\gamma, \gamma', \gamma_1, w \in G_2 \subset F_4$ であるから, $\boldsymbol{R}$-線形変換 $\gamma, \gamma', \gamma_1, w : \mathfrak{C} = \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3 \to \mathfrak{C} = \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3$ はそれぞれ自然に $\boldsymbol{R}$-線形変換 $\gamma, \gamma', \gamma_1, w : \mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}} \oplus M(3, \boldsymbol{C}) \to \mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}} \oplus M(3, \boldsymbol{C})$ としてつぎのように拡張される：

$$\begin{aligned} \gamma(X+M) &= X + \gamma\Big(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_3\Big) = X + (\gamma\boldsymbol{m}_1, \gamma\boldsymbol{m}_2, \gamma\boldsymbol{m}_3), \\ \gamma'(X+M) &= X + \gamma'(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_3) = X + (\gamma'\boldsymbol{m}_1, \gamma'\boldsymbol{m}_2, \gamma'\boldsymbol{m}_3), \\ \gamma_1(X+M) &= \overline{X} + \overline{M}, \\ w(X+M) &= X + \omega_1 M = X + (\omega_1\boldsymbol{m}_1, \omega_1\boldsymbol{m}_2, \omega_1\boldsymbol{m}_3). \end{aligned}$$

群 $(F_4)^{\gamma, \gamma'}$ を考察する前に, 群 F_4 の定義において $\mathfrak{C}$ を $\boldsymbol{C}$ にかえた群

$$F_{4,\boldsymbol{C}} = \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}}) \,|\, \alpha(X \times Y) = \alpha X \times \alpha Y\}$$

を調べよう．

群 $\boldsymbol{Z}_2 = \{1, \gamma_1\}$ は群 $SU(3)$ につぎのように働く：

$$\gamma_1 A = \overline{A}, \quad A \in SU(3).$$

このとき $SU(3) \cdot \boldsymbol{Z}_2$ をこの働きに関する $SU(3)$ と $\boldsymbol{Z}_2$ の半直積とすると，つぎの補題を得る．

補題 4.2.6. ([50]) $F_{4,\boldsymbol{C}} \cong (SU(3)/\boldsymbol{Z}_3) \cdot \boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_3 = \{E, \omega_1 E, {\omega_1}^2 E\}$.

証明. 準同型写像 $\psi_{4,\boldsymbol{C}} : SU(3) \cdot \boldsymbol{Z}_2 \to F_{4,\boldsymbol{C}}$,

$$\psi_{4,\boldsymbol{C}}(A, 1)X = AXA^*, \quad \psi_{4,\boldsymbol{C}}(A, \gamma_1)X = A\overline{X}A^*, \quad X \in \mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}}$$

が補題の群同型を与える． □

命題 4.2.7. ([50],[56]) $(F_4)^w \cong (SU(3) \times SU(3))/\boldsymbol{Z}_3$, $\boldsymbol{Z}_3 = \{(E, E), (\omega_1 E, \omega_1 E), ({\omega_1}^2 E, {\omega_1}^2 E)\}$.

証明. 準同型写像 $\psi_{4,w} : SU(3) \times SU(3) \to (F_4)^w$ を

$$\psi_{4,w}(D, A)(X+M) = AXA^* + DMA^*, \quad X + M \in \mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}} \oplus M(3, \boldsymbol{C}) = \mathfrak{J}$$

が命題の群同型を与える. □

また群 $\boldsymbol{Z}_2 = \{1, \gamma_1\}$ は群 $U(1) \times U(1) \times SU(3)$ につぎのように働く：

$$\gamma_1(p, q, A) = (\overline{p}, \overline{q}, \overline{A}).$$

このとき $(U(1) \times U(1) \times SU(3)) \cdot \boldsymbol{Z}_2$ をこの働きに関する $U(1) \times U(1) \times SU(3)$ と $\boldsymbol{Z}_2$ の半直積とする.

上の補題，命題を用いて群 $(F_4)^{\gamma,\gamma'}$ の群構造を決定しよう．つぎの定理は定理 4.2.5 の別証明でもある.

† **定理 4.2.8.** $(F_4)^{\gamma,\gamma'} \cong ((U(1) \times U(1) \times SU(3))/\boldsymbol{Z}_3) \cdot \boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_3 = \{(1, 1, E), (\omega_1, \omega_1, \omega_1 E), ({\omega_1}^2, {\omega_1}^2, {\omega_1}^2 E)\}$.

証明. 準同型写像 $\psi_4 : (U(1) \times U(1) \times SU(3)) \cdot \boldsymbol{Z}_2 \to (F_4)^{\gamma,\gamma'}$ を

$$\begin{aligned} \psi_4((p, q, A), 1)(X + M) &= AXA^* + D(p, q)MA^*, \\ \psi_4((p, q, A), \gamma_1)(X + M) &= A\overline{X}A^* + D(p, q)\overline{M}A^*, \;\; X + M \in \mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}} \oplus M(3, \boldsymbol{C}) = \mathfrak{J} \end{aligned}$$

が群同型 $(F_4)^{\gamma,\gamma_1} \cong ((U(1) \times U(1) \times SU(3))/\boldsymbol{Z}_3) \cdot \boldsymbol{Z}_2$ を与える．(詳細は，[29] Theorem 2.2.3 を参照.)

4.3 F_4 の対合的自己同型写像 σ, σ' と部分群 $Spin(8)$

あらたな対合的自己同型写像 σ, σ' を誘導する線形変換 σ, σ' の定義を与え，不動点部分群の共通部分 $(F_4)^\sigma \cap (F_4)^{\sigma'}$ の群構造を調べよう.

$\boldsymbol{R}$-線形変換 $\sigma, \sigma' : \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$ をそれぞれ

$$\sigma X = \sigma \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & -x_3 & -\overline{x}_2 \\ -\overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ -x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \; \sigma' X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & -\overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & -x_1 \\ -x_2 & -\overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}.$$

で定義する．このとき $\sigma, \sigma' \in F_4$，$\sigma^2 = {\sigma'}^2 = 1$ であり，σ, σ' は F_4 において共役 ([44]) である．また $\sigma\sigma' = \sigma'\sigma$ より

$$(F_4)^{\sigma,\sigma'} = (F_4)^\sigma \cap (F_4)^{\sigma'} = ((F_4)^\sigma)^{\sigma'} = ((F_4)^{\sigma'})^\sigma$$

を得る.

補題 4.3.1. ([56]) Lie 群 F_4 の Lie 環 $\mathfrak{f}_4$ は

$$\mathfrak{f}_4 = \{\delta \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}) \,|\, \delta(X \circ Y) = \delta X \circ Y + X \circ \delta Y\}$$

である.

Lie 環 $\mathfrak{f}_4$ の部分 Lie 環

$$\mathfrak{d}_4 = \{\delta \in \mathfrak{f}_4 \,|\, \delta E_k = 0, k = 1, 2, 3\}$$

は群 $SO(8)=SO(\mathfrak{C})$ の Lie 環

$$\mathfrak{so}(8)=\{D\in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{C})\,|\,(Dx,y)+(x,Dy)=0\}$$

と, つぎの対応で Lie 環として同型である：

$$\mathfrak{d}_4\ni\delta \quad\mapsto\quad D_1\in\mathfrak{so}(8),$$

$$\delta\begin{pmatrix}\xi_1 & x_3 & \overline{x}_2\\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & D_3x_3 & \overline{D_2x_2}\\ \overline{D_3x_3} & 0 & D_1x_1\\ D_2x_2 & \overline{D_1x_1} & 0\end{pmatrix}.$$

ここに D_2, D_3 は D_1 に対して，3 対原理

$$(D_1x)y+x(D_2y)=\overline{D_3\overline{(xy)}},\quad x,y\in\mathfrak{C}.$$

により決まる $\mathfrak{d}_4$ の元である．以後 $\mathfrak{so}(8)$ と $\mathfrak{d}_4$ を同一視する．

$\mathfrak{M}^-=\{A\in M(3,\mathfrak{C})\mid A^*=-A\}$ とおくとき，$A\in\mathfrak{M}^-$ に対して，$\boldsymbol{R}$-線形写像 $\widetilde{A}{:}\mathfrak{J}\to\mathfrak{J}$ を

$$\widetilde{A}X=\frac{1}{2}[A,X]=\frac{1}{2}(AX-XA),\ X\in\mathfrak{J}$$

で定義する．$\mathfrak{M}^-$ につぎの記号を導入する：

$$A_1(a)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&a\\0&-\overline{a}&0\end{pmatrix},\ A_2(a)=\begin{pmatrix}0&0&-\overline{a}\\0&0&0\\a&0&0\end{pmatrix},\ A_3(a)=\begin{pmatrix}0&a&0\\-\overline{a}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

補題 4.3.2. ([56])　$\mathfrak{f}_4$ の任意の元 δ は

$$\delta=D+\widetilde{A}_1(a_1)+\widetilde{A}_2(a_2)+\widetilde{A}_3(a_3),\ D\in\mathfrak{so}(8),\ a_k\in\mathfrak{C}$$

と一意に表せる．また Lie 群 $(F_4)^{\sigma,\sigma'}$ の Lie 環 $(\mathfrak{f}_4)^{\sigma,\sigma'}$ はつぎのようである：

$$\begin{aligned}(\mathfrak{f}_4)^{\sigma,\sigma'} &= \{\delta\in\mathfrak{f}_4\,|\,\sigma\delta=\delta\sigma,\ \sigma'\delta=\delta\sigma'\}\\ &= \{D\in\mathfrak{so}(8)\}\\ &= \mathfrak{so}(8).\end{aligned}$$

特に,

$$\dim((\mathfrak{f}_4)^{\sigma,\sigma'})=28$$

である．

命題 4.3.3. ([56])　$\widetilde{D_4}=\{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in SO(8)\times SO(8)\times SO(8)\,|\,(\alpha_1x)\ (\alpha_2y)=\overline{\alpha_3\overline{(xy)}},$ $x,y\in\mathfrak{C}\}\cong Spin(8)$.

証明.　$SO(8)=SO(\mathfrak{C})=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{C})\,|\,(\alpha x,\alpha y)=(x,y),\,\det\alpha=1\}$ とする．準同型写像 $\pi:\widetilde{D_4}\to SO(8),\ \pi(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\alpha_1$ が群同型 $\widetilde{D_4}/\boldsymbol{Z}_2\cong SO(8),\ \boldsymbol{Z}_2=\{(1,1,1),(1,-1,-1)\}$

を与える．よって，$\widetilde{D_4}$ は $SO(8)$ の 2 重被覆群として $Spin(8)$ に同型である．(証明の中で用いる $\widetilde{D_4}$ の連結性は [56] 命題 1.46 を参照.) □

ここで群 F_4 の部分群

$$(F_4)_{E_1} = \{\alpha \in F_4 \,|\, \alpha E_1 = E_1\}$$

を考察しよう．そのために 9 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 V^9 を

$$\begin{aligned} V^9 &= \{X \in \mathfrak{J} \,|\, E_1 \circ X = 0, \mathrm{tr}(X) = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & x \\ 0 & \overline{x} & -\xi \end{pmatrix} \,|\, \xi \in \boldsymbol{R}, x \in \mathfrak{C} \right\} \end{aligned}$$

で定義し，ノルムを

$$\frac{1}{2}(X, X) = \overline{x}x + \xi^2$$

で与える．

命題 4.3.4. ([44],[56]) $(F_4)^\sigma = (F_4)_{E_1} \cong Spin(9)$.

証明. $SO(9) = SO(V^9) = \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(V^9) \,|\, (\alpha X, \alpha X) = (X, X), \det\alpha = 1\}$ とする．準同型写像 $\pi : (F_4)_{E_1} \to SO(9)$, $\pi(\alpha) = \alpha|(V^9)$ は群同型 $(F_4)_{E_1}/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(9)$, $\boldsymbol{Z}_2 = \{1, \sigma\}$ を与える．よって，$(F_4)_{E_1}$ は $SO(9)$ の 2 重被覆群として $Spin(9)$ に同型である．($(F_4)^\sigma = (F_4)_{E_1}$ については [56] 定理 2.23 を参照.) □

上の補題，命題を用いて標記の群 $(F_4)^{\sigma,\sigma'}$ の群構造を決定しよう．

† **定理 4.3.5.** $(F_4)^{\sigma,\sigma'} \cong Spin(8)$.

証明. $Spin(8) = \widetilde{D_4}$(命題 4.3.3) とする．写像 $\varphi : Spin(8) \to (F_4)^{\sigma,\sigma'}$ を

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \alpha_3 x_3 & \overline{\alpha_2 x_2} \\ \overline{\alpha_3 x_3} & \xi_2 & \alpha_1 x_1 \\ \alpha_2 x_2 & \overline{\alpha_1 x_1} & \xi_3 \end{pmatrix}$$

で定義する．このとき $\alpha = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ とおくと，$\det\alpha X = \det X, \alpha E = E$ であることが分かる．さらに $\sigma\alpha = \alpha\sigma, \sigma'\alpha = \alpha\sigma'$ は明らかであるから，$\alpha \in (F_4)^{\sigma,\sigma'}$ である．φ は準同型写像であることは容易である．そして $(F_4)^{\sigma,\sigma'}(= ((F_4)^\sigma)^{\sigma'} = (Spin(9))^{\sigma'})$ は連結かつ $\dim((\mathfrak{f}_4)^{\sigma,\sigma'}) = 28$(補題 4.3.2) $= \dim(\mathfrak{so}(8))$ であるから，φ は全射である．また $\ker\varphi = \{1\}$ 自明である．よって，群同型 $Spin(8) \cong (F_4)^{\sigma,\sigma'}$ を得る． □

4.4 F_4 の対合的自己同型写像 σ, γ と部分群 $(Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(2))/\boldsymbol{Z}_2$

対合的自己同型写像 σ, γ による不動点部分群の共通部分 $(F_4)^\sigma \cap (F_4)^\gamma$ の群構造を調べよう．$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}) \oplus \boldsymbol{H}^3$ の $\boldsymbol{R}$-線形変換 σ, γ の定義は 4.2, 4.3 節における定義と同じである．

補題 4.4.1.([44]) 命題 4.2.3 の写像 $\varphi : Sp(1) \times Sp(3) \to (F_4)^\gamma$ は $\sigma\varphi(p, A)\sigma = \varphi(p, I_1 A I_1)$ を満たす．ここに $I_1 = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$ である．

上の補題と 4.2 節の準備を用いて標記の群 $(F_4)^{\sigma,\gamma} = (F_4)^\sigma \cap (F_4)^\gamma = ((F_4)^\gamma)^\sigma = ((F_4)^\sigma)^\gamma$ の群構造を決定しよう.

† **定理 4.4.2.** $(F_4)^{\sigma,\gamma} \cong (Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(2))/\boldsymbol{Z}_2,\ \boldsymbol{Z}_2 = \{(1,1,E), (-1,-1,-E)\}$.

証明. 写像 $\varphi_4 : Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(2) \to (F_4)^{\sigma,\gamma}$ を命題 4.2.3 の写像 φ の制限写像として

$$\varphi_4(p,q,B)(M+\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} q & 0\ 0 \\ 0 & \\ 0 & B \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} q & 0\ 0 \\ 0 & \\ 0 & B \end{pmatrix}^* + p\boldsymbol{a} \begin{pmatrix} q & 0\ 0 \\ 0 & \\ 0 & B \end{pmatrix}^*$$

で定義する．このとき，$\varphi_4(p,q,B) \in (F_4)^{\sigma,\gamma}$ および φ が準同型写像であることは明らかである．φ_4 が全射であることを示そう．$\alpha \in (F_4)^{\sigma,\gamma}$ とする．$(F_4)^{\sigma,\gamma} \subset (F_4)^\gamma$ であるから，$\alpha = \varphi(p,A)$ (命題 4.2.3) を満たす $p \in Sp(1),\ A \in Sp(3)$ が存在する (命題 4.2.3)．$\sigma\alpha\sigma = \alpha$ から, $\varphi(p, I_1AI_1) = \varphi(p,A)$ を得る (補題 4.4.1)．よって,

$$\begin{cases} p = p \\ I_1AI_1 = A \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} p = -p \\ I_1AI_1 = -A \end{cases}$$

である．後者の場合の $p = 0$ は，おこり得ない．また前者の場合は，$I_1AI_1 = A$ から

$$A = \begin{pmatrix} q & 0\ 0 \\ 0 & \\ 0 & B \end{pmatrix},\ q \in Sp(1),\ B \in Sp(2)$$

を得る．よって,

$$\alpha = \varphi(\, q, \begin{pmatrix} q & 0\ 0 \\ 0 & \\ 0 & B \end{pmatrix}) = \varphi_4(p,q,B)$$

であるから φ_4 は全射である．$\mathrm{Ker}\varphi_4 = \{(1,1,E), (-1,-1,-E)\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である．したがって，群同型 $(Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(2))/\boldsymbol{Z}_2 \cong (F_4)^{\sigma,\gamma}$ を得る． □

[**参考**] $(F_4)^\sigma \cong Spin(9)$(命題 4.3.4) であるから，$(F_4)^{\sigma,\gamma} \cong (Spin(4) \times Spin(5))/\boldsymbol{Z}_2$ と表すこともできる．実際，$Sp(1) \times Sp(1) \cong Spin(4),\ Sp(2) \cong Spin(5)$ より明らかである．

4.5 F_4 の対合的自己同型写像 $\sigma, \sigma', \gamma, \gamma'$ と極大トーラス

この節の記号等は，4.3 節を参照.

補題 4.5.1. 写像 $\psi_4 : (U(1) \times U(1) \times SU(3)) \cdot \boldsymbol{Z}_2 \to (F_4)^{\gamma,\gamma'}$ は

$$\sigma = \psi_4((1,1,E_{1,-1}),1),\quad \sigma' = \psi_4((1,1,E_{-1,1}),1)$$

を満たす．ここに $E_{1,-1} = \mathrm{diag}(1,-1,-1),\ E_{-1,1} = \mathrm{diag}(-1,-1,1) \in SU(3)$ である.(写像 ψ_4 に関しては，定理 4.2.8 参照)

$U(1)\times\cdots\times U(1)$ (l 個) を $U(1)^{\times l}$ で表し，$(1,\cdots 1), (\omega_k,\cdots \omega_k)$ (l 個) はそれぞれ $(1)^{\times l}, (\omega_k)^{\times l}$ で表す.

さて群 $((F_4)^{\gamma,\gamma',\sigma,\sigma'})^0 = (((F_4)^{\gamma,\gamma'})^{\sigma,\sigma'})^0$ の群構造を決定しよう.

† **定理 4.5.2.** $((F_4)^{\gamma,\gamma',\sigma,\sigma'})^0 \cong U(1)^{\times 4}$.

証明. $\alpha \in (F_4)^{\gamma,\gamma',\sigma,\sigma'} \subset (F_4)^{\gamma,\gamma'}$ に対して，$p,q \in U(1)$ と $A \in SU(3)$ が存在して，$\alpha = \psi_4((p,q,A),1)$ または $\alpha = \psi_4((p,q,A),\gamma_1)$ (定理 4.2.8) を満たす．$\alpha = \psi_4((p,q,A),1)$ の場合, 補題 4.5.1 および条件 $\sigma\alpha\sigma = \alpha$ かつ $\sigma'\alpha\sigma' = \alpha$ から,

$$\psi_4((p,q,E_{1,-1}AE_{1,-1}),1) = \psi_4((p,q,A),1)$$

かつ

$$\psi_4((p,q,E_{-1,1}AE_{-1,1}),1) = \psi_4((p,q,A),1).$$

を得る．よって，

$$\text{(i)}\begin{cases} p = p \\ q = q \\ E_{1,-1}AE_{1,-1} = A, \end{cases} \quad \text{(ii)}\begin{cases} p = \omega_1 p \\ q = \omega_1 q \\ E_{1,-1}AE_{1,-1} = \omega_1 A, \end{cases} \quad \text{(iii)}\begin{cases} p = {\omega_1}^2 p \\ q = {\omega_1}^2 q \\ E_{1,-1}AE_{1,-1} = {\omega_1}^2 A \end{cases}$$

かつ

$$\text{(iv)}\begin{cases} p = p \\ q = q \\ E_{-1,1}AE_{-1,1} = A, \end{cases} \quad \text{(v)}\begin{cases} p = \omega_1 p \\ q = \omega_1 q \\ E_{-1,1}AE_{-1,1} = \omega_1 A, \end{cases} \quad \text{(vi)}\begin{cases} p = {\omega_1}^2 p \\ q = {\omega_1}^2 q \\ E_{-1,1}AE_{-1,1} = {\omega_1}^2 A. \end{cases}$$

$p \neq 0$ かつ $q \neq 0$ より，(ii)，(iii)，(v)，(vi) の場合はおこりえない．よって，$p,q \in U(1)$, $A \in S(U(1)\times U(1)\times U(1))$ を得る．ここで写像 $U(1)\times U(1) \to S(U(1)\times U(1)\times U(1))$,

$$h(a_1,a_2) = (a_1,a_2,\overline{a_1a_2})$$

が同型写像であるから, 条件 $\alpha = \psi_4((p,q,A),1)$ を満たす群は $(U(1)^{\times 4})/\boldsymbol{Z}_3$ である．$\alpha = \psi_4((p,q,A),\gamma_1)$ の場合は $\psi_4((p,q,A),\gamma_1) = \psi_4((p,q,A),1)\gamma_1$, $\psi_4((1,1,E_{1,-1}),1)\gamma_1 = \gamma_1\psi_4((1,1,E_{1,-1}),1)$ かつ $\psi_4((1,1,E_{-1,1}),1)\gamma_1 = \gamma_1\psi_4((1,1,E_{-1,1}),1)$ から , この場合も前の場合と同様の結果を得る．よって，群同型 $(F_4)^{\gamma,\gamma',\sigma,\sigma'} \cong ((U(1)^{\times 4})/\boldsymbol{Z}_3)\cdot\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_3 = \{(1)^{\times 4}, (w_1)^{\times 4}, (w_1{}^2)^{\times 4}\}$ を得る．また群 $(U(1)^{\times 4})/\boldsymbol{Z}_3$ はトーラス $U(1)^{\times 4}$ に同型であるから, 群同型 $(F_4)^{\gamma,\gamma',\sigma,\sigma'} \cong (U(1)^{\times 4})\cdot\boldsymbol{Z}_2$ を得る．したがって，この定理の同型を得る． □

4.6 F_4 の対合的自己同型写像 σ' による $Spin(9)$ の分解

定理 4.3.5 よりつぎの定理を得る.

定理 4.6.1 $(Spin(9))^{\sigma'} \cong Spin(8)$.

5．例外型単純 Lie 群 E_6

5.1　E_6 の対合的自己同型写像 γ, γ' と部分群 $(U(1)\times S(U(3)\times U(3)))/\boldsymbol{Z}_2\times\{1,\gamma_1\}$

$\mathfrak{J}^C$ を例外 Jordan 代数 $\mathfrak{J}$ の複素化とする．$\gamma, \gamma' \in G_2 \subset F_4$ の複素化写像 $\gamma, \gamma' : \mathfrak{J}^C \to \mathfrak{J}^C$ を考えると，$\gamma, \gamma' \in E_6$，$\gamma^2 = {\gamma'}^2 = 1$ である．その対合的自己同型写像 γ, γ' による不動点部分群の共通部分 $(E_6)^\gamma \cap (E_6)^{\gamma'}$ の群構造を調べよう．

$\mathfrak{J}$ と同様に $\mathfrak{J}^C$ においても Jordan 積 $X\circ Y$，内積 (X, Y)，Freudenthal 積 $X \times Y$，3 項式 (X, Y, Z)，行列式 $\mathrm{det}X$ が定義され，補題 5.1.1 と同様なことが成り立つ．$\mathfrak{J}^C$ を複素例外 Jordan 代数といい，$\mathfrak{J}^C$ における複素共役 τ は

$$\tau(X\circ Y) = \tau X\circ \tau Y,\ \ \tau(X\times Y) = \tau X \times \tau Y$$

を満たす．また $\mathfrak{J}^C$ に Hermite 内積 $\langle X, Y\rangle$ を

$$\langle X, Y\rangle = (\tau X, Y)$$

で定義する．

定義． 群 E_6 を

$$\begin{aligned}E_6 &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,\mathrm{det}(\alpha X) = \mathrm{det}X, \langle\alpha X, \alpha Y\rangle = \langle X, Y\rangle\}\\ &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,(\alpha X, \alpha Y, \alpha Z) = (X, Y, Z), \langle\alpha X, \alpha Y\rangle = \langle X, Y\rangle\}\\ &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,\alpha X\times\alpha Y = \tau\alpha\tau(X\times Y), \langle\alpha X, \alpha Y\rangle = \langle X, Y\rangle\}\end{aligned}$$

で定義する．

定理 5.1.1. ([41],[56])　E_6 は単連結コンパクト Lie 群であり，その次元は 72 である．

このとき群 E_6 は

$$\begin{aligned}F_4 &= (E_6)^\tau = \{\alpha \in E_6\,|\,\tau\alpha = \alpha\tau\}\\ &= (E_6)_E = \{\alpha\in E_6\,|\,\alpha E = E\}\end{aligned}$$

のように F_4 を部分群として含でいる．

$\boldsymbol{R}$-線形写像 $k : \boldsymbol{H} = \boldsymbol{C}\oplus\boldsymbol{C}e_2 \to M(2, \boldsymbol{C})$ を

$$k(a + be_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix},\quad a, b \in \boldsymbol{C}$$

で定義する．この写像 k は自然に $\boldsymbol{R}$-線形写像

$$k : M(3, \boldsymbol{H}) \to M(6, \boldsymbol{C}),\quad k : \boldsymbol{H}^3 \to M(2, 6, \boldsymbol{C})$$

に拡張される．C-$\boldsymbol{C}$-線形同型写像 $k : M(3,\boldsymbol{H})^C \to M(6,\boldsymbol{C})$, $k : (\boldsymbol{H}^3)^C \to M(2,6,\boldsymbol{C})$ をそれぞれ

$$k(M_1+iM_2) = k(M_1)+e_1k(M_2), \quad M_1, M_2 \in M(3,\boldsymbol{H}),$$
$$k(\boldsymbol{a}_1+i\boldsymbol{a}_2) = k(\boldsymbol{a}_1)+e_1k(\boldsymbol{a}_2), \quad \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \boldsymbol{H}^3.$$

で定義する．また $\boldsymbol{C}$-ベクトル空間 $\mathfrak{S}(6,\boldsymbol{C})$ を

$$\mathfrak{S}(6,\boldsymbol{C}) = \{S \in M(6,\boldsymbol{C}) \,|\, {}^tS = -S\}$$

で定義し, C-$\boldsymbol{C}$-線形同型写像 $k_J : \mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H})^C \to \mathfrak{S}(6,\boldsymbol{C})$ を

$$k_J(M_1+iM_2) = k(M_1)J+e_1k(M_2)J, \quad M_1, M_2 \in M(3,\boldsymbol{H})$$

で定義する．ここに $J = \mathrm{diag}(J,\, J,\, J)$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ である．

命題 5.1.2. ([44],[56])　$(E_6)^\gamma \cong (Sp(1)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_2 = \{(1,E),(-1,-E)\}$.

証明.　$Sp(1) = \{p \in \boldsymbol{H} \,|\, p\overline{p} = 1\}$, $SU(6) = \{A \in M(6,\boldsymbol{C}) \,|\, A^*A = E, \mathrm{det}A = 1\}$ とする．準同型写像 $\varphi : Sp(1)\times SU(6) \to (E_6)^\gamma$,

$$\varphi(p,A)(M+\boldsymbol{a}) = {k_J}^{-1}(Ak_J(M){}^tA) + p\boldsymbol{a}k^{-1}(A^*), \quad M+\boldsymbol{a} \in \mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H})^C \oplus (\boldsymbol{H}^3)^C = \mathfrak{J}^C$$

が命題の群同型を与える．　□

命題 5.1.2 から直ちにつぎの補題を得る．

補題 5.1.3. ([44])　写像 $\varphi : Sp(1)\times SU(6) \to (E_6)^\gamma$ は

$$\gamma' = \varphi(e_1, e_1I), \quad \gamma_1 = \varphi(e_2, J), \quad \gamma'\varphi(p,A)\gamma' = \varphi(\gamma' p, IAI)$$

を満たす．ここに $I = \mathrm{diag}(1,-1,1,-1,1,-1)$ である．

上の補題，命題を用いて標記の群 $(E_6)^{\gamma,\gamma'} = (E_6)^\gamma \cap (E_6)^{\gamma'} = ((E_6)^\gamma)^{\gamma'} = ((E_6)^{\gamma'})^\gamma$ の群構造を決定しよう．

† **定理 5.1.4.**　$(E_6)^{\gamma,\gamma'} \cong (U(1)\times S(U(3)\times U(3)))/\boldsymbol{Z}_2 \times \{1,\gamma_1\}$, $\boldsymbol{Z}_2 = \{(1,E),(-1,-E)\}$.

証明.　$\alpha \in (E_6)^{\gamma,\gamma'} \subset (E_6)^\gamma$ に対して, $\alpha = \varphi(p,A)$ を満たす $p \in Sp(1), A \in SU(6)$ が存在する (命題 5.1.2). $\gamma'\alpha\gamma' = \alpha$ であるから, $\varphi(\gamma' p, IAI) = \varphi(p,A)$ を得る (補題 5.1.3). よって,

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma' p = p \\ IAI = A \end{array}\right. \quad \text{または} \quad \left\{\begin{array}{l} \gamma' p = -p \\ IAI = -A \end{array}\right.$$

となる．前者の場合は, $p \in U(1)$ である．$SU(6)$ において I が $I_3 = \mathrm{diag}(1,1,1,-1,-1,-1)$ に共役であるから, 群同型 $\{A \in SU(6) \,|\, IAI = A\} \cong \{A \in SU(6) \,|\, I_3AI_3 = A\} = S(U(3)\times U(3))$ を得る．よって, 前者の条件を満たす群は $(U(1)\times S(U(3)\times U(3)))/\boldsymbol{Z}_2$ である．後者の場合は, $p = e_2, A = J$ が条件を満たし，$\varphi(e_2, J) = \gamma_1$ である (補題 3.1.3). したがって，群同型 $(U(1)\times S(U(3)\times U(3)))/\boldsymbol{Z}_2 \times \{1,\gamma_1\} \cong (E_6)^{\gamma,\gamma'}$ を得る．　□

[注意]　群 $S(U(m)\times U(n))$ の定義は

$$S(U(m)\times U(n))=\{A\in M(n,\boldsymbol{C})\mid I_mAI_m=A,\ A^*A=E,\ \mathrm{det}A=1\}$$

である.

[参考]　$\mathfrak{J}^C=(\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}})^C\oplus M(3,\boldsymbol{C})^C$ の Freudenthal 積 $\times$ を $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}}\oplus M(3,\boldsymbol{C})$ において定義した Freudenthal 積 $\times$ と同様に定義する.

$\gamma,\gamma',\gamma_1,w\in F_4\subset E_6$ より, $\boldsymbol{R}$-線形変換 $\gamma,\gamma',\gamma_1,w:\mathfrak{J}=\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}}\oplus M(3,\boldsymbol{C})\to\mathfrak{J}=\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}}\oplus M(3,\boldsymbol{C})$ はそれぞれ自然に C-線形変換 $\gamma,\gamma',\gamma_1,w:\mathfrak{J}^C=(\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}})^C\oplus M(3,\boldsymbol{C})^C\to\mathfrak{J}^C=(\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}})^C\oplus M(3,\boldsymbol{C})^C$ に拡張される.

群 $(E_6)^{\gamma,\gamma'}$ を考察する前に, 群 E_6 の定義において $\mathfrak{C}$ を $\boldsymbol{C}$ にかえた群

$$\begin{aligned}E_{6,\boldsymbol{C}}&=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_C((\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}})^C)\,|\,\mathrm{det}\alpha X=\mathrm{det}X,\langle\alpha X,\alpha Y\rangle=\langle X,Y\rangle\}\\&=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_C((\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}})^C)\,|\,\alpha X\times\alpha Y=\tau\alpha\tau(X\times Y),\langle\alpha X,\alpha Y\rangle=\langle X,Y\rangle\}.\end{aligned}$$

を調べよう.

群 $\boldsymbol{Z}_2=\{1,\gamma_1\}$ は群 $SU(3)\times SU(3)$ につぎのように働く：

$$\gamma_1(A,B)=(\overline{B},\overline{A}).$$

このとき $(SU(3)\times SU(3))\cdot\boldsymbol{Z}_2$ をこの働きに関する $(SU(3)\times SU(3))$ と $\boldsymbol{Z}_2$ の半直積とすると，つぎの補題を得る.

補題 5.1.5. ([50])　$E_{6,\boldsymbol{C}}\cong((SU(3)\times SU(3))/\boldsymbol{Z}_3)\cdot\boldsymbol{Z}_2,\ \boldsymbol{Z}_3=\{(E,E),(\omega_1E,\omega_1E),({\omega_1}^2E,{\omega_1}^2E)\}$.

証明.　写像 $h:M(3,\boldsymbol{C})\times M(3,\boldsymbol{C})\to M(3,\boldsymbol{C})^C$ を

$$h(A,B)=\frac{A+B}{2}+i\frac{A-B}{2}e_1$$

で定義する．このとき，準同型写像 $\psi_{6,\boldsymbol{C}}:(SU(3)\times SU(3))\cdot\boldsymbol{Z}_2\to E_{6,\boldsymbol{C}}$,

$$\begin{gathered}\psi_{6,\boldsymbol{C}}((A,B),1)X=h(A,B)Xh(A,B)^*,\\\psi_{6,\boldsymbol{C}}((A,B),\gamma_1)X=h(A,B)\overline{X}h(A,B)^*,\ \ X\in(\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}})^C\end{gathered}$$

が補題の群同型を与える.　□

命題 5.1.6. ([50],[56])　$(E_6)^w\cong(SU(3)\times SU(3)\times SU(3))/\boldsymbol{Z}_3,\boldsymbol{Z}_3=\{(E,E,E),(\omega_1E,\omega_1E,\omega_1E),({\omega_1}^2E,{\omega_1}^2E,{\omega_1}^2E)\}$.

証明.　準同型写像 $\psi_{6,w}:SU(3)\times SU(3)\times SU(3)\to(E_6)^w$,

$$\begin{aligned}&\psi_{6,w}(D,A,B)(X+M)=h(A,B)Xh(A,B)^*+DM\tau h(A,B)^*,\\&\qquad\qquad\qquad\qquad X+M\in(\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}})^C\oplus M(3,\boldsymbol{C})^C=\mathfrak{J}^C\end{aligned}$$

が命題の群同型を与える.　□

群 $\boldsymbol{Z}_2 = \{1, \gamma_1\}$ は群 $U(1) \times U(1) \times SU(3) \times SU(3)$ につぎのように働く：

$$\gamma_1(p, q, A, B) = (\overline{p}, \overline{q}, \overline{B}, \overline{A}).$$

このとき $(U(1) \times U(1) \times SU(3) \times SU(3)) \cdot \boldsymbol{Z}_2$ をこの働きに関する $U(1) \times U(1) \times SU(3) \times SU(3)$ と $SU(3)$ の半直積とする．

上の補題，命題を用いて，群 $(E_6)^{\gamma,\gamma'}$ の群構造を決定しよう．つぎの定理は定理 5.1.5 の別証明になっている．

定理 5.1.7. $(E_6)^{\gamma,\gamma'} \cong ((U(1) \times U(1) \times SU(3) \times SU(3))/\boldsymbol{Z}_3) \cdot \boldsymbol{Z}_2$，$\boldsymbol{Z}_3 = \{(1, 1, E, E), (\omega_1, \omega_1, \omega_1 E, \omega_1 E), ({\omega_1}^2, {\omega_1}^2, {\omega_1}^2 E, {\omega_1}^2 E)\}$.

証明. 準同型写像 $\psi_6 : (U(1) \times U(1) \times SU(3) \times SU(3)) \cdot \boldsymbol{Z}_2 \to (E_6)^{\gamma,\gamma'}$,

$$\begin{aligned}
\psi_6((p, q, A, B), 1)(X + M) &= h(A, B)Xh(A, B)^* + D(p, q)M\tau h(A, B)^*, \\
\psi_6((p, q, A, B), \gamma_1)(X + M) &= h(A, B)\overline{X}h(A, B)^* + D(p, q)\overline{M}\tau h(A, B)^*, \\
&\qquad X + M \in (\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}})^C \oplus M(3, \boldsymbol{C})^C = \mathfrak{J}^C
\end{aligned}$$

が群同型 $((U(1) \times U(1) \times SU(3) \times SU(3))/\boldsymbol{Z}_3) \cdot \boldsymbol{Z}_2 \cong (E_6)^{\gamma,\gamma'}$ を与える．(詳細は，[29] Theorem 2.3.3 を参照.) □

5.2 E_6 の対合的自己同型写像 σ, σ' と部分群 $(U(1) \times U(1) \times Spin(8))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_4)$

$\sigma, \sigma' \in F_4$ の複素化写像 $\sigma, \sigma' : \mathfrak{J}^C \to \mathfrak{J}^C$ を考えると，$\sigma, \sigma' \in E_6$，$\sigma^2 = {\sigma'}^2 = 1$ である．その対合的自己同型写像 σ, σ' による不動点部分群の共通部分 $(E_6)^\sigma \cap (E_6)^{\sigma'}$ の群構造を調べよう．

$T \in \mathfrak{J}^C$ に対して, C-線形写像 $\widetilde{T} : \mathfrak{J}^C \to \mathfrak{J}^C$ を

$$\widetilde{T}X = T \circ X, \quad X \in \mathfrak{J}^C$$

で定義する．このとき，つぎの補題を得る．

補題 5.2.1. ([44]) Lie 群 E_6 の Lie 環 $\mathfrak{e}_6$ は

$$\mathfrak{e}_6 = \{\phi \in \mathrm{Hom}_C(\mathfrak{J}^C) \,|\, (\phi X, X, X) = 0, \langle \phi X, Y \rangle + \langle X, \phi Y \rangle = 0\}$$

である．そして $\mathfrak{e}_6$ の任意の元 ϕ は

$$\phi = \delta + i\widetilde{T},\ \delta \in \mathfrak{f}_4,\ T \in \mathfrak{J},\ \mathrm{tr}(T) = 0$$

と一意に表される．また Lie 群 $(E_6)^\sigma, ((E_6)_{E_1})^{\sigma'}, (E_6)^{\sigma,\sigma'}$ の Lie 環 $(\mathfrak{e}_6)^\sigma, ((\mathfrak{e}_6)_{E_1})^{\sigma'}, (\mathfrak{e}_6)^{\sigma,\sigma'}$ は，それぞれつぎのようである．

$$\begin{aligned}
(1)\ (\mathfrak{e}_6)^\sigma &= \{\phi \in \mathfrak{e}_6 \,|\, \sigma\phi = \phi\sigma\} \\
&= \{\delta + i\widetilde{T} \,|\, \delta \in (\mathfrak{f}_4)^\sigma, T \in \mathfrak{J}, \mathrm{tr}(T) = 0, \sigma T = T\}.
\end{aligned}$$

特に,
$$\dim((\mathfrak{e}_6)^\sigma) = 36 + 10 = 46$$
である.

$$\begin{aligned} (2)\ \ ((\mathfrak{e}_6)_{E_1})^{\sigma'} &= \{\phi \in \mathfrak{e}_6 \,|\, \sigma'\phi = \phi\sigma',\ \phi E_1 = 0\} \\ &= \{\delta + i\widetilde{T} \,|\, \delta \in ((\mathfrak{f}_4)_{E_1})^{\sigma'}, T \in \mathfrak{J}, \mathrm{tr}(T) = 0, \sigma' T = T, T \circ E_1 = 0\}. \end{aligned}$$

特に,
$$\dim(((\mathfrak{e}_6)_{E_1})^{\sigma'}) = 28 + 1 = 29$$
である.

$$\begin{aligned} (3)\ \ (\mathfrak{e}_6)^{\sigma,\sigma'} &= \{\phi \in (\mathfrak{e}_6)^\sigma \,|\, \sigma'\phi = \phi\sigma'\} \\ &= \{\delta + i\widetilde{T} \,|\, \delta \in (\mathfrak{f}_4)^{\sigma,\sigma'}, T = \mathrm{diag}(\tau_1, \tau_2, \tau_3), \mathrm{tr}(T) = 0\}. \end{aligned}$$

特に,
$$\dim((\mathfrak{e}_6)^{\sigma,\sigma'}) = 28 + 2 = 30$$
である.

† **補題 5.2.2.** $\theta, \nu \in U(1) = \{\theta \in C \,|\, (\tau\theta)\theta = 1\}$ に対して, C-線形変換 $\phi_1(\theta), \phi_2(\nu) : \mathfrak{J}^C \to \mathfrak{J}^C$ をそれぞれ

$$\phi_1(\theta)X = \begin{pmatrix} \theta^4\xi_1 & \theta x_3 & \theta\overline{x}_2 \\ \theta\overline{x}_3 & \theta^{-2}\xi_2 & \theta^{-2}x_1 \\ \theta x_2 & \theta^{-2}\overline{x}_1 & \theta^{-2}\xi_3 \end{pmatrix},\ \phi_2(\nu)X = \begin{pmatrix} \xi_1 & \nu x_3 & \nu^{-1}\overline{x}_2 \\ \nu\overline{x}_3 & \nu^2\xi_2 & x_1 \\ \nu^{-1}x_2 & \overline{x}_1 & \nu^{-2}\xi_3 \end{pmatrix}, X \in \mathfrak{J}^C$$

で定義すると, $\phi_1(\theta), \phi_2(\nu) \in (E_6)^{\sigma,\sigma'}, \phi_2(\nu) \in ((E_6)_{E_1})^{\sigma'}$ である. また $\phi_1(\theta)$ と $\phi_2(\nu)$ は可換である.

ここで群 $(E_6)^\sigma = \{\alpha \in E_6 \,|\, \sigma\alpha = \alpha\sigma\}$ を調べるために群 E_6 の部分群
$$(E_6)_{E_1} = \{\alpha \in E_6 \,|\, \alpha E_1 = E_1\}$$
を考察しよう.

補題 5.2.3. ([56]) $(E_6)_{E_1}$ は $(E_6)^\sigma$ の部分群である.

証明. $\mathfrak{J}^C$ の部分空間 $(\mathfrak{J}^C)_\sigma, (\mathfrak{J}^C)_{-\sigma}$ を

$$\begin{aligned} (\mathfrak{J}^C)_\sigma &= \{X \in \mathfrak{J}^C \,|\, \sigma X = X\} \\ &= \{X \in \mathfrak{J}^C \,|\, 4E_1 \times (E_1 \times X) = X\} \oplus \{\xi E_1 \,|\, \xi \in C\}, \\ (\mathfrak{J}^C)_{-\sigma} &= \{X \in \mathfrak{J}^C \,|\, \sigma X = -X\} \\ &= \{X \in \mathfrak{J}^C \,|\, E_1 \times X = 0, \langle E_1, X\rangle = 0\} \end{aligned}$$

で定義すると, これらの空間は $(E_6)_{E_1}$ の作用で不変である. よって, $\alpha \in (E_6)_{E_1}$ とすれば, $\sigma\alpha = \alpha\sigma$ は容易に分かる, すなわち, $\alpha \in (E_6)^\sigma$ であるから, $(E_6)_{E_1} \subset (E_6)^\sigma$ である. □

つぎの命題のために 10 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 V^{10} を

$$\begin{aligned} V^{10} &= \{X \in \mathfrak{J}^C \,|\, 2E_1 \times X = -\tau X\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & x \\ 0 & \overline{x} & -\tau\xi \end{pmatrix} \,\middle|\, \xi \in C, x \in \mathfrak{C} \right\} \end{aligned}$$

で定義し，ノルムを

$$\frac{1}{2}\langle X, X\rangle = \overline{x}x + (\tau\xi)\xi$$

で与える．

命題 5.2.4. ([44],[56])　$(E_6)_{E_1} \cong Spin(10)$.

証明.　$SO(10) = SO(V^{10}) = \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(V^{10}) \,|\, \langle \alpha X, X\rangle = \langle X, X\rangle, \det\alpha = 1\}$ とする．準同型写像 $\pi : (E_6)_{E_1} \to SO(10)$, $\pi(\alpha) = \alpha|V^{10}$ が群同型 $(E_6)_{E_1}/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(10), \boldsymbol{Z}_2 = \{1, \sigma\}$ を与える．よって, $(E_6)_{E_1}$ は $SO(12)$ の 2 重被覆群として $Spin(10)$ に同型である．(この証明の中で用いる $(E_6)_{E_1}$ の連結性は，[56] 命題 3.13 を参照.)　□

命題 5.2.5. ([44],[56])　$(E_6)^\sigma \cong (U(1) \times Spin(10))/\boldsymbol{Z}_4$, $\boldsymbol{Z}_4 = \{(1,1), (-1,\sigma), (i, \phi_1(-i)), (-i, \phi_1(i))\}$.

証明.　$U(1) = \{\theta \in C \,|\, (\tau\theta)\theta = 1\}$, $Spin(10) = (E_6)_{E_1} \subset (E_6)^\sigma$(補題 5.2.3, 5.2.4) とする．準同型写像 $\varphi_1 : U(1) \times Spin(10) \to (E_6)^\sigma$,

$$\varphi_1(\theta, \delta) = \phi_1(\theta)\delta$$

が命題の群同型を与える．　□

† **命題 5.2.6.**　$((E_6)_{E_1})^{\sigma'} \cong (U(1) \times Spin(8))/\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_2 = \{(1,1), (-1,\sigma)\}$.

証明.　$U(1) = \{\nu \in C \,|\, (\tau\nu)\nu = 1\}$, $Spin(8) = ((F_4)_{E_1})^{\sigma'} \subset ((E_6)_{E_1})^{\sigma'}$(命題 5.3.4, 定理 5.3.5) とする．写像 $\varphi_2 : U(1) \times Spin(8) \to ((E_6)_{E_1})^{\sigma'}$ を

$$\varphi_2(\nu, \beta) = \phi_2(\nu)\beta$$

で定義する．このとき $\varphi(\nu, \beta) \in ((E_6)_{E_1})^{\sigma'}$ (補題 5.2.2) である．$\phi_2(\nu)$ と β が可換（定理 4.3.5, 補題 5.2.2）であることより, φ_2 は準同型写像である．$\mathrm{Ker}\,\varphi_2 = \{(1,1), (-1,\sigma)\}$ は容易はである．　さらに，$((E_6)_{E_1})^{\sigma'} = (Spin(10))^{\sigma'}$ (命題 5.2.4) は連結かつ $\dim(((\mathfrak{e}_6)_{E_1})^{\sigma'}) = 29$ (補題 3.2.1) $= 1 + 28 = \dim(\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{so}(8))$ であるから, φ_2 は全射である．よって，群同型 $(U(1) \times Spin(8))/\boldsymbol{Z}_2 \cong ((E_6)_{E_1})^{\sigma'}$ を得る．　□

上の補題，命題を用いて標記の群 $(E_6)^{\sigma,\sigma'} = ((E_6)^\sigma)^{\sigma'} = ((E_6)^{\sigma'})^\sigma = (E_6)^\sigma \cap (E_6)^{\sigma'}$ の群構造を決定しよう．

† **定理 5.2.7.**　$(E_6)^{\sigma,\sigma'} \cong (U(1) \times U(1) \times Spin(8))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_4), \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_4 = \{(1,1,1), (1,-1,\sigma)\} \times \{(1,1,1), (-i,i,\sigma'), (-1,-1,1), (i,-i,\sigma')\}$.

証明. $Spin(8) = (F_4)^{\sigma,\sigma'} \subset (E_6)^{\sigma,\sigma'}$(定理 4.3.5) である．写像 $\varphi : U(1) \times U(1) \times Spin(8) \to (E_6)^{\sigma,\sigma'}$ を

$$\varphi(\theta, \nu, \beta) = \phi_1(\theta)\phi_2(\nu)\beta$$

で定義する．$\varphi(\theta, \nu, \beta) \in (E_6)^{\sigma,\sigma'}$（補題 5.2.2)．$\phi_1(\theta), \phi_2(\nu), \beta$ が互いに可換（補題 5.2.2, 命題 5.2.6）であるから, φ は準同型写像である．φ が全射であることを示そう．$\alpha \in (E_6)^{\sigma,\sigma'}$ とする．$(E_6)^{\sigma,\sigma'} \in\subset (E_6)^{\sigma}$ であるから, $\alpha = \varphi_1(\theta)\delta$ を満たす $\theta \in U(1)$, $\delta \in Spin(10)$ が存在する (命題 5.2.5). $\sigma'\alpha\sigma' = \alpha$ から,

$$\text{(i)}\begin{cases} \theta = \theta \\ \sigma'\delta\sigma' = \delta, \end{cases} \quad \text{(ii)}\begin{cases} \theta = -\theta \\ \sigma'\delta\sigma' = \phi_1(-1)\delta, \end{cases} \quad \text{(iii)}\begin{cases} \theta = i\theta \\ \sigma'\delta\sigma' = \phi_1(-i)\delta, \end{cases} \quad \text{(iv)}\begin{cases} \theta = -i\theta \\ \sigma'\delta\sigma' = \phi_1(i)\delta \end{cases}$$

を得る．

$\theta = 0$ は不適であるから，(ii),(iii),(iv) の場合はおこり得ない．(i) の場合は, $\sigma'\delta\sigma' = \delta$ から, $\delta \in (Spin(10))^{\sigma'} = ((E_6)_{E_1})^{\sigma'}$ を得る．よって, $\delta = \phi_2(\nu)\beta$ を満たす $\nu \in U(1), \beta \in Spin(8)$ が存在する (命題 5.2.6). このとき

$$\alpha = \phi_1(\theta)\delta = \phi_1(\theta)\phi_2(\nu)\beta = \varphi(\theta, \nu, \beta)$$

となるから，φ は全射である．

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\varphi &= \{(1,1,1), (1,-1,\sigma), (-1,-1,\sigma), (-1,-1,1), (i,i,\sigma\sigma'), (i,-i,\sigma'), \\ &\qquad (-i,i,\sigma'), (-i,-i,\sigma\sigma')\} \\ &= \{(1,1,1), (1,-1,\sigma)\} \times \{(1,1,1), (-i,i,\sigma'), (-1,-1,1), (i,-i,\sigma')\} \\ &= \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_4. \end{aligned}$$

は容易である．したがって，群同型

$$(U(1) \times U(1) \times Spin(8))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_4) \cong (E_6)^{\sigma,\sigma'}$$

を得る． □

5.3 E_6 の対合的自己同型写像 σ, γ と部分群 $(Sp(1) \times S(U(2) \times U(4)))/\boldsymbol{Z}_2$

5.1, 5.2 節の γ, σ を用いて，その不動点部分群の共通部分 $(E_6)^{\sigma} \cap (E_6)^{\gamma}$ の群構造を調べよう．

補題 5.3.1. ([44]) 命題 5.1.2 の写像 $\varphi : Sp(1) \times SU(6) \to (E_6)^{\gamma}$ は

$$\sigma\varphi(p, A)\sigma = \varphi(p, I_2AI_2)$$

を満たす．ここに $I_2 = \mathrm{diag}(-1,-1,1,1,1,1)$ である．

上の補題と 5.1 節の準備を用いて群 $(E_6)^{\sigma,\gamma} = (E_6)^{\sigma} \cap (E_6)^{\gamma} = ((E_6)^{\gamma})^{\sigma} = ((E_6)^{\sigma})^{\gamma}$ の群構造を決定しよう．

† **定理 5.3.2.** $(E_6)^{\sigma,\gamma} \cong (Sp(1) \times S(U(2) \times U(4)))/\boldsymbol{Z}_2,\ \boldsymbol{Z}_2 = \{(1, E), (-1, -E)\}$.

証明. 写像 $\varphi_6 : Sp(1) \times S(U(2) \times U(4)) \to (E_6)^{\sigma,\gamma}$ を命題 5.1.2 の写像 φ の制限写像として

$$\varphi_6(p, A)(M + \boldsymbol{a}) = k_J{}^{-1}(Ak_J(M)^tA) + p\boldsymbol{a}k^{-1}(A^*),\ M + \boldsymbol{a} \in \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H})^C \oplus (\boldsymbol{H}^3)^C = \mathfrak{J}^C$$

で定義する．このとき $\varphi_6(p, A) \in (E_6)^{\sigma,\gamma}$ である．φ_6 が準同型写像であることは明らかである．φ_6 が全射であることを示そう．$\alpha \in (E_6)^{\sigma,\gamma}$ とする．$(E_6)^{\sigma,\gamma} \subset (E_6)^{\gamma}$ であるから, $\alpha = \varphi(p, A)$ を満たす $p \in Sp(1), A \in SU(6)$ が存在する (命題 5.1.2). $\sigma\alpha\sigma = \alpha$ より, $\varphi(p, I_2AI_2) = \varphi(p, A)$ を得る (補題 5.3.1). よって,

$$\begin{cases} p = p \\ I_2AI_2 = A \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} p = -p \\ I_2AI_2 = -A \end{cases}$$

である．$p = 0$ は不適であるから，後者の場合はおこり得ない. 前者の場合は, $A \in S(U(2) \times U(4))$ を得る．よって, $\alpha = \varphi_6(p, A)$ となるから，φ_6 は全射である．$\mathrm{Ker}\varphi_6 = \{(1, E), (-1, -E)\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である．よって, 群同型 $(Sp(1) \times S(U(2) \times U(4)))/\boldsymbol{Z}_2 \cong (E_6)^{\sigma,\gamma}$ を得る． □

5.4 E_6 の対合的自己同型写像 $\sigma, \sigma', \gamma, \gamma'$ と極大トーラス

この節の記号等は，5.1 節参照.

補題 5.4.1. 写像 $\psi_6 : (U(1) \times U(1) \times SU(3) \times SU(3)) \cdot \boldsymbol{Z}_2 \to (E_6)^{\gamma,\gamma'}$ は

$$\sigma = \psi_6((1, 1, E_{1,-1}, E_{1,-1}), 1), \quad \sigma' = \psi_6((1, 1, E_{-1,1}, E_{-1,1}), 1)$$

を満たす.（写像 ψ_6 に関しては，定理 5.1.7 参照）

さて群 $((E_6)^{\gamma,\gamma',\sigma,\sigma'})^0 = (((E_6)^{\gamma,\gamma'})^{\sigma,\sigma'})^0$ の群構造を決定しよう.

† **定理 5.4.2.** $((E_6)^{\gamma,\gamma',\sigma,\sigma'})^0 \cong U(1)^{\times 6}$.

証明. $\alpha \in (E_6)^{\gamma,\gamma',\sigma,\sigma'} \subset (E_6)^{\gamma,\gamma'}$ に対して, $p, q \in U(1)$，$A, B \in SU(6)$ が存在して，$\alpha = \psi_6((p, q, A, B), 1)$ または $\alpha = \psi_6((p, q, A, B), \gamma_1)$(定理 5.1.7) を満たす．$\alpha = \varphi_6((p, q, A, B), 1)$ の場合, 補題 5.4.1 および条件 $\sigma\alpha\sigma = \alpha$ かつ $\sigma'\alpha\sigma' = \alpha$ から,

$$\psi_6((p, q, E_{1,-1}AE_{1,-1}, E_{1,-1}BE_{1,-1}), 1) = \psi_6((p, q, A, B), 1)$$

かつ

$$\psi_6((p, q, E_{-1,1}AE_{-1,1}, E_{-1,1}BE_{-1,1}), 1) = \psi_6((p, q, A, B), 1).$$

を得る．よって,

$$\text{(i)} \begin{cases} p = p \\ q = q \\ E_{1,-1}AE_{1,-1} = A \\ E_{1,-1}BE_{1,-1} = B, \end{cases} \quad \text{(ii)} \begin{cases} p = \omega_1 p \\ q = \omega_1 q \\ E_{1,-1}AE_{1,-1} = \omega_1 A \\ E_{1,-1}BE_{1,-1} = \omega_1 B, \end{cases} \quad \text{(iii)} \begin{cases} p = \omega_1{}^2 p \\ q = \omega_1{}^2 q \\ E_{1,-1}AE_{1,-1} = \omega_1{}^2 A \\ E_{1,-1}BE_{1,-1} = \omega_1{}^2 B \end{cases}$$

かつ

$$
\text{(iv)}\begin{cases} p=p \\ q=q \\ E_{-1,1}AE_{-1,1}=A \\ E_{-1,1}BE_{-1,1}=B, \end{cases}
\quad
\text{(v)}\begin{cases} p=\omega_1 p \\ q=\omega_1 q \\ E_{-1,1}AE_{-1,1}=\omega_1 A \\ E_{-1,1}BE_{-1,1}=\omega_1 B, \end{cases}
\quad
\text{(vi)}\begin{cases} p={\omega_1}^2 p \\ q={\omega_1}^2 q \\ E_{-1,1}AE_{-1,1}={\omega_1}^2 A \\ E_{-1,1}BE_{-1,1}={\omega_1}^2 B. \end{cases}
$$

$p \neq 0$ かつ $q \neq 0$ より (ii), (iii), (v), (vi) はおこり得ない．よって，$p, q \in U(1)$，$A, B \in S(U(1)^{\times 3})$ を得る．ここで写像 $U(1)^{\times 4} \to S(U(1)^{\times 5})$,

$$h(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \overline{a_1 a_2 a_3 a_4})$$

が同型写像であるから, 条件 $\alpha = \psi_6((p, q, A, B), 1)$ を満たす群は $(U(1)^{\times 6})/\boldsymbol{Z}_3$ である．$\alpha = \psi_6((p, q, A, B), \gamma_1)$ の場合は, 条件 $\psi_6((p, q, A, B), \gamma_1) = \psi_6((p, q, A, B), 1)\gamma_1$, $\psi_6((1, 1, E_{1,-1}, E_{1,-1}), 1)\gamma_1 = \gamma_1\psi_6((1, 1, E_{1,-1}, E_{1,-1}), 1)$ かつ $\psi_6((1, 1, E_{-1,1}, E_{-1,1}), 1)\gamma_1 = \gamma_1\psi_6((1, 1, E_{-1,1}, E_{-1,1}), 1)$ から, この場合も前の場合と同じ結果を得る．よって，群同型 $(E_6)^{\gamma, \gamma', \sigma, \sigma'} \cong ((U(1)^{\times 6})/\boldsymbol{Z}_3) \cdot \boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_3 = \{(1)^{\times 6}, (w_1)^{\times 6}, ({w_1}^2)^{\times 6}\}$ を得る．また群 $(U(1)^{\times 6})/\boldsymbol{Z}_3$ はトーラス $U(1)^{\times 6}$ に同型であるから, 群同型 $(E_6)^{\gamma, \gamma', \sigma, \sigma'} \cong (U(1)^{\times 6}) \cdot \boldsymbol{Z}_2$ を得る．したがって，この定理の同型を得る． □

5.5 E_6 の対合的自己同型写像 σ' による $Spin(10)$ の分解

$Spin(2) \cong U(1)$ であるから命題 5.2.6 が $Spin(10)$ の σ' による分解の結果である．よって，つぎの定理を得る．

† **定理 5.5.1.** $(Spin(10))^{\sigma'} \cong (Spin(2) \times Spin(8))/\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_2 = \{(1, 1), (-1, \sigma)\}$.

[参考] 次章で用いる複素 Lie 群 ${E_6}^C$ の定義とその Lie 環 ${\mathfrak{e}_6}^C$ に関する命題を述べておく．

定義. 群 ${E_6}^C$ を

$$
\begin{aligned}
{E_6}^C &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C) \,|\, \det(\alpha X) = \det X\} \\
&= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C) \,|\, \alpha X \times \alpha Y = {}^t\alpha^{-1}(X \times Y)\}
\end{aligned}
$$

で定義する．

命題. ${\mathfrak{e}_6}^C$ の元 ϕ は

$$\phi = \delta + \widetilde{T},\ \delta \in {\mathfrak{f}_4}^C, T \in \mathfrak{J}^C, \mathrm{tr}(T) = 0$$

と一意に表される．
特に,

$$\dim_C({\mathfrak{e}_6}^C) = 52 + 26 = 78$$

である．(複素 Lie 群 ${F_4}^C$ の Lie 環 ${\mathfrak{f}_4}^C$ については [56] を参照.)

6. 例外型単純 Lie 群 E_7

6.1 Freudenthal C-ベクトル空間 $\mathfrak{P}^C$

複素 Lie 群 $E_7{}^C, E_7$ の表現空間 $\mathfrak{P}^C$ の定義とこの章における若干の準備をしよう.

Freudenthal C-ベクトル空間 $\mathfrak{P}^C$ を

$$\mathfrak{P}^C = \mathfrak{J}^C \oplus \mathfrak{J}^C \oplus C \oplus C$$

で定義する. $\mathfrak{P}^C$ の元 $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ を (X, Y, ξ, η) で表したり, $\dot{X} + \underset{.}{Y} + \dot{\xi} + \underset{.}{\eta}$ で表したりすることもある.

$\phi \in \mathfrak{e}_6{}^C, A, B \in \mathfrak{J}^C, \nu \in C$ に対して, C-線形写像 $\varPhi(\phi, A, B, \nu) : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{P}^C$ を

$$\varPhi(\phi, A, B, \nu)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi X - \dfrac{1}{3}\nu X + 2B \times Y + \eta A \\ 2A \times X - {}^t\phi Y + \dfrac{1}{3}\nu Y + \xi B \\ (A, Y) + \nu\xi \\ (B, X) - \nu\eta \end{pmatrix}$$

で定義する. ここに ${}^t\phi$ は $({}^t\phi X, Y) = (X, \phi Y),\ X, Y \in \mathfrak{J}^C$ を満たす.

また $P = (X, Y, \xi, \eta),\ Q = (Z, W, \zeta, \omega) \in \mathfrak{P}^C$ に対して, C-線形写像 $P \times Q : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{P}^C$ を

$$P \times Q = \varPhi(\phi, A, B, \nu), \quad \begin{cases} \phi = -\dfrac{1}{2}(X \vee W + Z \vee Y) \\ A = -\dfrac{1}{4}(2Y \times W - \xi Z - \zeta X) \\ B = \dfrac{1}{4}(2X \times Z - \eta W - \omega Y) \\ \nu = \dfrac{1}{8}((X, W) + (Z, Y) - 3(\xi\omega + \zeta\eta)) \end{cases}$$

で定義する. ここに $X \vee W \in \mathfrak{e}_6{}^C$ は

$$X \vee W = [\widetilde{X}, \widetilde{W}] + \Big(X \circ W - \frac{1}{3}(X, W)E\Big)^{\sim}$$

である.

また $\mathfrak{P}^C$ の内積 (P, Q), Hermite 内積 $\langle P, Q\rangle$, 交代内積 $\{P, Q\}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} (P, Q) &= (X, Z) + (Y, W) + \xi\zeta + \eta\omega, \\ \langle P, Q\rangle &= \langle X, Z\rangle + \langle Y, W\rangle + (\tau\xi)\zeta + (\tau\eta)\omega, \\ \{P, Q\} &= (X, W) - (Z, Y) + \xi\omega - \zeta\eta \end{aligned}$$

で定義する．

6.2 E_7 の対合的自己同型写像 γ, γ' と部分群 $(U(1)\times U(1)\times SU(6))/(\boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{Z}_3)$

定義． 群 ${E_7}^C, E_7$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} {E_7}^C &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{P}^C)\,|\,\alpha(P\times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q\}, \\ E_7 &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{P}^C)\,|\,\alpha(P\times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q, \langle \alpha P, \alpha Q\rangle = \langle P, Q\rangle\} \\ &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{P}^C)\,|\,\alpha(P\times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q, \tau\lambda\alpha = \alpha\tau\lambda\} \end{aligned}$$

で定義する．ここに C-線形変換 $\lambda : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{P}^C$ は

$$\lambda(X, Y, \xi, \eta) = (Y, -X, \eta, -\xi)$$

である．

定理 6.2.1. ([14], [56]) ${E_7}^C$ は単連結複素 Lie 群であり，また E_7 は単連結コンパクト Lie 群で，その次元はそれぞれ 133 である．

$\alpha \in E_6$ に対して，C-線形写像 $\widetilde{\alpha} : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{P}^C$ を

$$\widetilde{\alpha}(X, Y, \xi, \eta) = (\alpha X, \tau\alpha\tau Y, \xi, \eta)$$

で定義すると，$\widetilde{\alpha} \in E_7$ である．このとき α と $\widetilde{\alpha}$ を同一視して，E_6 は E_7 の部分群である．

C-線形変換 $\gamma, \gamma', \sigma : \mathfrak{J}^C \to \mathfrak{J}^C$ は C-線形変換 $\gamma, \gamma', \sigma : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{P}^C$ につぎのように拡張される：

$$\begin{aligned} &\gamma(X, Y, \xi, \eta) = (\gamma X, \gamma Y, \xi, \eta),\ \gamma'(X, Y, \xi, \eta) = (\gamma' X, \gamma' Y, \xi, \eta), \\ &\sigma(X, Y, \xi, \eta) = (\sigma X, \sigma Y, \xi, \eta),\ (X, Y, \xi, \eta) \in \mathfrak{P}^C. \end{aligned}$$

これは $\gamma, \gamma' \in G_2$ を $\gamma, \gamma' \in G_2 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7$ とみなしたものであり，$\sigma \in F_4$ は $\sigma \in F_4 \subset E_6 \subset E_7$ とみなしたものである．

また 2 つの C-線形写像 $\kappa, \mu : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{P}^C$ を

$$\kappa = \varPhi(-2E_1 \vee E_1, 0, 0, -1), \quad \mu = \varPhi(0, E_1, E_1, 0)$$

で定義する．これらの写像の $\mathfrak{P}^C$ への作用の具体形は，それぞれつぎのようである：

$$\begin{aligned} \kappa(X, Y, \xi, \eta) &= \kappa\Bigl(\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 & y_3 & \overline{y}_2 \\ \overline{y}_3 & \eta_2 & y_1 \\ y_2 & \overline{y}_1 & \eta_3 \end{pmatrix}, \xi, \eta\Bigr) \\ &= \Bigl(\begin{pmatrix} -\xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & x_1 \\ 0 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_2 & -y_1 \\ 0 & -\overline{y}_1 & -\eta_3 \end{pmatrix}, -\xi, \eta\Bigr), \\ \mu(X, Y, \xi, \eta) &= \Bigl(\begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta_3 & -y_1 \\ 0 & -\overline{y}_1 & \eta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi_3 & -x_1 \\ 0 & -\overline{x}_1 & \xi_2 \end{pmatrix}, \eta_1, \xi_1\Bigr). \end{aligned}$$

群 $(E_7)^{\gamma,\gamma'}$ の群構造を決定するために，この節の前半に E_7 の 2 つの部分群

$$(E_7)^{\kappa,\mu} = \{\alpha \in E_7 \,|\, \kappa\alpha = \kappa\alpha,\ \mu\alpha = \alpha\mu\},\ (E_7)^{\sigma} = \{\alpha \in E_7 \,|\, \sigma\alpha = \alpha\sigma\}$$

の群構造を調べよう．ここで $\alpha \in E_7$ が $\kappa\alpha = \alpha\kappa$ を満たすならば，$-\sigma = \exp i\pi\kappa$ であるから $\sigma\alpha = \alpha\sigma$ となる．よって，$(E_7)^{\kappa,\mu}$ は $(E_7)^{\sigma}$ の部分群であることに注意しておこう．

補題 6.2.2. ([14],[56]) Lie 群 E_7 の Lie 環 $\mathfrak{e}_7$ は，つぎのように与えられる：

$$\mathfrak{e}_7 = \{\varPhi(\phi, A, -\tau A, \nu) \,|\, \phi \in \mathfrak{e}_6, A \in \mathfrak{J}^C, \nu \in i\boldsymbol{R}\}.$$

また群 $(E_7)^{\sigma}, (E_7)^{\kappa,\mu}$ の Lie 環 $(\mathfrak{e}_7)^{\sigma}, (\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu}$ は，それぞれつぎのようである．

$$\begin{aligned}(1)\ (\mathfrak{e}_7)^{\sigma} &= \{\varPhi \in \mathfrak{e}_7 \,|\, \sigma\varPhi = \varPhi\sigma\} \\ &= \{\varPhi(\phi, A, -\tau A, \nu) \in \mathfrak{e}_7 \,|\, \phi \in (\mathfrak{e}_6)^{\sigma}, A \in \mathfrak{J}^C, \sigma A = A, \nu \in i\boldsymbol{R}\}.\end{aligned}$$

特に，

$$\dim((\mathfrak{e}_7)^{\sigma}) = 46 + 22 + 1 = 69$$

である．

$$\begin{aligned}(2)\ (\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu} &= \{\varPhi \in \mathfrak{e}_7 \,|\, \kappa\varPhi = \varPhi\kappa, \mu\varPhi = \varPhi\mu\} \\ &= \left\{\varPhi(\phi, A, -\tau A, \nu) \in \mathfrak{e}_7 \,\middle|\, \begin{array}{l}\phi \in (\mathfrak{e}_6)^{\sigma}, A \in \mathfrak{J}^C, \sigma A = A, (E_1, A) = 0 \\ \nu = -\dfrac{3}{2}(\phi E_1, E_1)\end{array}\right\}.\end{aligned}$$

特に，

$$\dim((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu}) = 46 + 20 = 66$$

である．

つぎの命題のために 12 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 V^{12} を

$$\begin{aligned}V^{12} &= \{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, \kappa P = P, \mu\tau\lambda P = P\} \\ &= \left\{\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & x \\ 0 & \overline{x} & -\tau\xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \tau\eta\right) \,\middle|\, x \in \mathfrak{C}, \xi, \eta \in C\right\}\end{aligned}$$

で定義し，ノルムを

$$(P, P)_{\mu} = \frac{1}{2}\{\mu P, P\} = \overline{x}x + (\tau\xi)\xi + (\tau\eta)\eta$$

で与える．

命題 6.2.3. ([45],[56]) $(E_7)^{\kappa,\mu} \cong Spin(12)$.

証明. $SO(12) = SO(V^{12}) = \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(V^{12}) \,|\, (\alpha P, \alpha P)_{\mu} = (P, P)_{\mu}, \det\alpha = 1\}$ とする．準同型写像 $\pi : (E_7)^{\kappa,\mu} \to SO(12)$, $\pi(\alpha) = \alpha|(V^{12})$ が群同型 $(E_7)^{\kappa,\mu}/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(12)$, $\boldsymbol{Z}_2 = \{1, \sigma\}$ を与える．よって，$(E_7)^{\kappa,\mu}$ は $SO(12)$ の 2 重被覆群として $Spin(12)$ に同型であ

る. (証明の中で用いる群 $(E_7)^{\kappa,\mu}$ の連結性は [56] 命題 4.26 を参照.) $\square$

補題 6.2.4. ([56]) $A \in SU(2) = \{A \in M(2,C) \,|\, (\tau {}^t A)A = E, \det A = 1\}$ に対して, C-線形変換 $\phi(A) : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{P}^C$ を

$$\phi(A)\Big(\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 & y_3 & \overline{y}_2 \\ \overline{y}_3 & \eta_2 & y_1 \\ y_2 & \overline{y}_1 & \eta_3 \end{pmatrix}, \xi, \eta\Big)$$

$$= \Big(\begin{pmatrix} \xi'_1 & x'_3 & \overline{x'}_2 \\ \overline{x'}_3 & \xi'_2 & x'_1 \\ x'_2 & \overline{x'}_1 & \xi'_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta'_1 & y'_3 & \overline{y'}_2 \\ \overline{y'}_3 & \eta'_2 & y'_1 \\ y'_2 & \overline{y'}_1 & \eta'_3 \end{pmatrix}, \xi', \eta'\Big),$$

$$\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \eta' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta'_1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \xi \\ \eta_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \eta'_2 \\ \xi'_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \eta_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \eta'_3 \\ \xi'_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \eta_3 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = (\tau A)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

で定義する. このとき $\phi(A) \in (E_7)^\sigma$ である.

証明. $\varPhi = \varPhi(2\nu E_1 \vee E_1, aE_1, -\tau a E_1, \nu), a \in C, \nu \in i\boldsymbol{R}$ とするとき, $\varPhi \in (\mathfrak{e}_7)^\sigma$(補題 6.2.2(1)) であり, $\varPhi$ の $\mathfrak{P}^C$ への作用を

$$\varPhi(X, Y, \xi, \eta) = (X', Y', \xi', \eta')$$

$$\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu & a \\ -\tau a & -\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu & a \\ -\tau a & -\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \eta'_2 \\ \xi'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu & a \\ -\tau a & -\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \eta'_3 \\ \xi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu & a \\ -\tau a & -\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_3 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu & \tau a \\ -a & \nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で与える. このとき $A = \exp\begin{pmatrix} \nu & a \\ -\tau a & -\nu \end{pmatrix} \in SU(2)$ に対して, $\phi(A) = \exp\varPhi_k \in (E_7)^\sigma$ を得る. $\square$

前半の準備の最後に群 $(E_7)^\sigma$ の群構造を調べよう.

命題 6.2.5. ([53],[56]) $(E_7)^\sigma \cong (SU(2) \times Spin(12))/\boldsymbol{Z}_2,\ \boldsymbol{Z}_2 = \{(E, 1), (-E, -\sigma)\}$.

証明. $Spin(12) = (E_7)^{\kappa,\mu} \subset (E_7)^\sigma$(命題 6.2.3) とする. 準同型写像 $\varphi_1 : SU(2) \times Spin(12) \to (E_7)^\sigma$,

$$\varphi_1(A, \delta) = \phi(A)\delta$$

が命題の群同型を与える. $\square$

群 $(E_7)^\sigma$ の群構造が明らかになったところで後半の準備に入ろう.

まず群 $SU(8)$ と 2 つのベクトル空間 $\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H}^C)_0$, $\mathfrak{S}(8,\boldsymbol{C}^C)$ を準備しよう：

$$\begin{aligned} SU(8) &= \{A \in M(8,\boldsymbol{C}) \mid AA^* = E, \det A = 1\}, \\ \mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H}^C)_0 &= \{X \in M(4,\boldsymbol{H}^C) \mid X^* = X,\ \mathrm{tr}(X) = 0\}, \\ \mathfrak{S}(8,\boldsymbol{C}^C) &= \{S \in M(8,\boldsymbol{C}^C) \mid {}^tS = -S\}. \end{aligned}$$

そこで写像 $\varphi_8 : SU(8) \to E_7$ を定義するために C-線形写像 $g : \mathfrak{J}^C \to \mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H}^C)_0$,

$$g(M+\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(M) & i\boldsymbol{a} \\ i\boldsymbol{a}^* & M - \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(M)E \end{pmatrix},\ M+\boldsymbol{a} \in \mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H}^C) \oplus (\boldsymbol{H}^3)^C = \mathfrak{J}^C$$

を用いて，C-線形同型写像 $\chi : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{S}(8,\boldsymbol{C}^C)$ をつぎのように定義する:

$$\chi(X,Y,\xi,\eta) = k\Big(gX - \frac{\xi}{2}E\Big)J + e_1 k\Big(g(\gamma Y) - \frac{\eta}{2}E\Big)J.$$

ここに $k : M(4,\boldsymbol{H}^C) \to M(8,\boldsymbol{C}^C)$ は E_6 の章で用いた k を自然に拡張したものであり，$J = \mathrm{diag}(J,J,J,J), J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ である.

このとき，つぎの補題を得る.

補題 6.2.6. ([42],[56]) $(E_7)^{\tau\gamma} \cong SU(8)/\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_2 = \{E,-E\}$.

証明. 準同型写像 $\varphi_8 : SU(8) \to (E_7)^{\tau\gamma}$, $\varphi_8(A)P = \chi^{-1}(A(\chi(P))^tA)$, $P \in \mathfrak{P}^C$ は補題の群同型を与える. □

ここで γ と $-\sigma$ が群 E_7 において共役であることを確認しておこう．そこで $\boldsymbol{R}$-線形変換 $\delta_1 : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ を

$$1 \to 1,\ e_1 \to e_4,\ e_2 \to e_2,\ e_3 \to e_6,\ e_4 \to e_1,\ e_5 \to -e_5,\ e_6 \to e_3,\ e_7 \to -e_7,$$

のように定義する．このとき $\delta_1 \in G_2 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7$, ${\delta_1}^2 = 1$ であり,

$$\delta_1\gamma\delta_1 = \gamma_1$$

を満たす.

つぎに C-線形変換 $\delta_2 : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{P}^C$ を $\varphi_8(D)$ によって定義する．ここに

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -e_1 & 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -e_1 & 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -e_1 & 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -e_1 & 0 & 0 & 0 & e_1 \end{pmatrix} \in SU(8),$$

このとき $\delta_2 \in E_7$, ${\delta_2}^{-1}\gamma_1\delta_2 = -\sigma$ である．実際，$\varphi_8(J) = \gamma_1, \varphi_8(e_1 I_4) = -\sigma$ ($I_4 = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1,1,1,1,1) \in M(8, \boldsymbol{R})$) であるから

$$ {\delta_2}^{-1}\gamma_1\delta_2 = \varphi_8(D^*)\varphi_8(J)\varphi_8(D) = \varphi_8(D^*JD) = \varphi_8(e_1I_4) = -\sigma $$

を得て，$\delta = \delta_1\delta_2$ とおくと，

$$ \delta^{-1}\gamma\delta = -\sigma $$

である．すなわち，γ と $-\sigma$ は共役である．以上より，つぎの対応

$$ \begin{array}{ccccc} SU(2) \times Spin(12) & \to & (E_7)^{\sigma} & \to & (E_7)^{\gamma} \\ (A, \beta) & \mapsto & \varphi(A)\beta & \mapsto & \delta(\varphi(A)\beta)\delta^{-1} \end{array} $$

によって，群同型

$$ (E_7)^{\gamma} \cong (E_7)^{-\sigma} = (E_7)^{\sigma} \cong (SU(2) \times Spin(12))/\boldsymbol{Z}_2 $$

を得る．ここで $\sigma'' = \delta^{-1}\gamma'\delta$ とおくと，群同型 $(E_7)^{\gamma,\gamma'} \cong (E_7)^{\sigma,\sigma''}$ を得るので，群 $(E_7)^{\gamma,\gamma'}$ を考察するかわりに群 $(E_7)^{\sigma,\sigma''}$ を考察しよう．

まず $\delta_1\gamma'\delta_1 = \gamma'$，$\gamma' = \varphi_8(e_1I)(I = \mathrm{diag}(1,-1,1,-1,1,-1,1,-1) \in M(8,\boldsymbol{R}))$ であるから，σ'' はつぎのように表すことができる：

$$ \sigma'' = \delta^{-1}\gamma'\delta = {\delta_2}^{-1}\gamma'\delta_2 = \varphi_8(D^*)\varphi_8(e_1I)\varphi_8(D) = \varphi_8(D^*e_1ID) = \varphi_8(J''). $$

ここに $J'' = D^*e_1ID = \begin{pmatrix} 0 & e_1E \\ e_1E & 0 \end{pmatrix} \in SU(8)$ (E は 4×4 単位行列)，${J''}^2 = -E$ (E は 8×8 単位行列) より，${\sigma''}^2 = 1$ である．また $\sigma'' = \varphi_8(J'')$ の $\mathfrak{P}^C$ への作用は

$$ \begin{aligned} &\sigma''(X, Y, \xi, \eta) \\ &= \Big(\begin{pmatrix} \xi_1 & ie_4x_3 & * \\ * & -\xi_2 & ix_1e_4 \\ e_4x_2e_4 & * & \xi_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 & -ie_4y_3 & * \\ * & -\eta_2 & -iy_1e_4 \\ e_4y_2e_4 & * & \eta_3 \end{pmatrix}, -\xi, -\eta \Big) \end{aligned} $$

である．よって，この形から C-線形変換 $\rho : \mathfrak{J}^C \to \mathfrak{J}^C$,

$$ \rho X = \overline{P}XP = \begin{pmatrix} -\xi_1 & -ie_4x_3 & * \\ * & \xi_2 & ix_1e_4 \\ e_4x_2e_4 & * & -\xi_3 \end{pmatrix},\ X \in \mathfrak{J}^C,\ P = \begin{pmatrix} ie_4 & & \\ & 1 & \\ & & ie_4 \end{pmatrix} $$

と $\sigma' \in E_6$ を用いて σ'' は，つぎのように表すこともできる：

$$ \sigma''(X, Y, \xi, \eta) = -(\sigma'\rho X, \tau\sigma'\rho\tau Y, \xi, \eta). $$

したがって，

$$ \kappa\sigma'' = \sigma''\kappa, \quad \mu\sigma'' = -\sigma''\mu \tag{$*$} $$

を得る．

そこで $A \in SU(2)$ とすれば，σ'' の $\mathfrak{P}^C$ への作用の形から $\sigma''\varphi(A)\sigma'' \in \varphi(SU(2))$ であるから，σ'' は群 $\varphi(SU(2))$ の自己同型写像を誘導するので，群 $(\varphi(SU(2)))^{\sigma''}$ の群構造を調べよう．

† **命題 6.2.7.** $(\varphi(SU(2)))^{\sigma''} \cong U(1)$.

証明. $A \in SU(2)$ が $\sigma''\varphi(A)\sigma'' = \varphi(A)$ を満たすならば，$\varphi(A) = \varphi(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}), a \in U(1) = \{a \in C \,|\, a(\tau a) = 1\}$ は容易に分かる．よって，

$$
\begin{aligned}
(\varphi(SU(2)))^{\sigma''} &= \{\varphi(A) \,|\, A \in SU(2), \sigma''\varphi(A)\sigma'' = \varphi(A)\} \\
&= \Big\{\varphi(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}) \Big|\, a \in U(1)\Big\} \cong U(1)
\end{aligned}
$$

を得る． □

同様に $\alpha \in Spin(12)$ とすれば，$(*)$ から $\sigma''\alpha\sigma'' \in Spin(12)$ であるから，σ'' は群 $Spin(12)$ の自己同型写像を誘導するので，群 $(Spin(12))^{\sigma''}$ の群構造を調べよう．

† **命題 6.2.8.** $(Spin(12))^{\sigma''}/\boldsymbol{Z}_2 \cong U(6)$，$\boldsymbol{Z}_2 = \{1, \sigma\}$.

証明. C-ベクトル空間 $(V^C)^6$ を

$$
\begin{aligned}
&(V^C)^6 = (\mathfrak{P}^C)_{\kappa,\sigma''} = \{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, \kappa P = P, \sigma'' P = P\} \\
&= \Big\{P = \Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & x_1 \\ 0 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \eta\Big) \,\Big|\, x_1 \in \mathfrak{C}^C, \xi_k, \eta_1, \eta \in C, \sigma'' P = P\Big\} \\
&= \Big\{P = \Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & \overline{x} & \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0\Big) \,\Big|\, x \in (\mathfrak{C}^C)_{ie_4}, \xi, \eta \in C\Big\}
\end{aligned}
$$

で定義する．ここに

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{C}^C)_{ie_4} &= \{x \in \mathfrak{C}^C \,|\, ixe_4 = x\} \\
&= \{(x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) + i(x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)e_4 \,|\, x_k \in C\}
\end{aligned}
$$

である．$(V^C)^6$ には内積 $\langle P, P\rangle = (\tau P, P)$ が定義されているので, それを用いると $P \in (V^C)^6$ の内積の具体形はつぎのように表せる：

$$
\begin{aligned}
\langle P, P\rangle &= 2(\tau x)x + (\tau\xi)\xi + (\tau\eta)\eta \\
&= 4((\tau x_0)x_0 + (\tau x_1)x_1 + (\tau x_2)x_2 + (\tau x_3)x_3) + (\tau\xi)\xi + (\tau\eta)\eta.
\end{aligned}
$$

ここでユニタリ群 $U(6)$ をつぎのように定義する：

$$
U(6) = \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C((V^C)^6) \,|\, \langle \alpha P, \alpha P\rangle = \langle P, P\rangle\}.
$$

$\alpha \in (Spin(12))^{\sigma''}$ は $\kappa\alpha = \alpha\kappa, \sigma''\alpha = \alpha\sigma''$ を満たすから, α はベクトル空間 $(V^C)^6$ を不変にし, 内積 $\langle P, P\rangle$ を保つ．よって，α は $U(6)$ の元を誘導するので，写像 $f : (Spin(12))^{\sigma''} \to U(6)$ を

$$f(\alpha) = \alpha|(V^C)^6$$

によって定義することができる．f の全射を示さなければならないが，そのためにつぎの補題を用意しよう．

† **補題 6.2.9.** Lie 群 $(Spin(12))^{\sigma''}$ の Lie 環 $(\mathfrak{spin}(12))^{\sigma''}$ は, つぎのようである:

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{spin}(12))^{\sigma''}\\
&= \Biggl\{\Phi\Bigl(\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ -K_3D_2K_3 & K_3D_1K_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t_1e_4 \\ 0 & -e_4\bar{t}_1 & 0\end{pmatrix}^{\sim} + i\begin{pmatrix}\tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & t_1 \\ 0 & \bar{t}_1 & \tau_3\end{pmatrix}^{\sim},\\
&\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & a_1 \\ 0 & \bar{a}_1 & 0\end{pmatrix}, -\tau\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & a_1 \\ 0 & \bar{a}_1 & 0\end{pmatrix}, -\frac{3}{2}i\tau_1\Bigr) \Bigm| D_1, D_2 \in M(4, \boldsymbol{R}), {}^tD_1 = -D_1,\\
&\quad {}^tD_2 = K_3D_2K_3, t_1 \in \mathfrak{C}, \tau_k \in \boldsymbol{R}, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0, \alpha_2 \in C, a_1 \in \mathfrak{C}^C, -ia_1e_4 = a_1\Biggr\}.
\end{aligned}$$

ここに $K_3 = \mathrm{diag}(1,1,-1,1) \in M(4, \boldsymbol{R})$ である．

特に,

$$\dim(\mathfrak{spin}(12))^{\sigma''} = 36$$

である．

証明. $(\mathfrak{spin}(12))^{\sigma''} = \{\Phi \in (\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu} \,|\, \sigma''\Phi\sigma'' = \Phi\}$ であるから，$\Phi(\phi, A, -\tau A, \nu) \in \mathfrak{e}_7$ に対して,

$$\begin{aligned}
\sigma''(\Phi(\phi, A, -\tau A, \nu))\sigma'' &= \Phi(\sigma'\rho\phi\rho\sigma', \sigma'\rho A, -\tau(\sigma'\rho A), \nu)\\
&= \Phi(\phi, A, -\tau A, \nu)
\end{aligned}$$

を満たす $\Phi(\phi, A, -\tau A, \nu) \in \mathfrak{e}_7$ を決定すればよい．それは直接計算によってその結果を得る． □

ここで再び補題 6.2.8 の証明に戻ろう．$\mathrm{Ker}\, f = \{1, \sigma\}$ は容易である．また $U(6)$ は連結かつ $\dim((\mathfrak{spin}(12))^{\sigma''}) = 36 = \dim(\mathfrak{u}(6))$ であるから, f は全射である．よって，$(Spin(12))^{\sigma''}/\boldsymbol{Z}_2 \cong U(6)$ を得る．以上で補題 6.2.8 の証明が完了した． □

命題 6.2.10 を証明する前に，元 $\boldsymbol{w} \in Spin(12)$ を

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{w}(X, Y, \xi, \eta)\\
&= \Bigl(\begin{pmatrix}\omega^2\xi_1 & \omega^2{\omega_4}^2x_3 & * \\ * & \omega^2\xi_2 & x_1{\omega_4}^2 \\ \omega_4x_2\omega_4 & * & \omega\xi_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\omega\eta_1 & \omega{\omega_4}^2y_3 & * \\ * & \omega\eta_2 & y_1{\omega_4}^2 \\ \omega_4y_2\omega_4 & * & \omega^2\eta_3\end{pmatrix}, \omega\xi, \omega^2\eta\Bigr)
\end{aligned}$$

で定義する．ここに $\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \in C$, $\omega_4 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}e_4 \in \mathfrak{C}$ である． このとき，$\boldsymbol{w} \in (Spin(12))^{\sigma''}$,$\boldsymbol{w}^3 = 1$ となる．

† **命題 6.2.10.** $(Spin(12))^{\sigma''} \cong (U(1) \times SU(6))/\boldsymbol{Z}_6$, $\boldsymbol{Z}_6 = \{(1,1), (-\sigma\boldsymbol{w}^2, -\sigma\boldsymbol{w}), (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}^2), (-\sigma, -\sigma), (\boldsymbol{w}^2, \boldsymbol{w}), (-\sigma\boldsymbol{w}, -\sigma\boldsymbol{w}^2)\}$.

証明. ユニタリ群 $U(6)$ はつぎの分解をもつ：

$$U(6) = U_1(1)SU_1(6), \quad U_1(1) \cap SU_1(6) = \{zE \,|\, z \in C, z^6 = 1\}.$$

ここに $U_1(1) = \{e^{it}E \,|\, t \in \boldsymbol{R}\}$ は $U(6)$ の中心の連結成分，$SU_1(6) = \{A \in U(6) \,|\, \det A = 1\}$ とする．一方, $(\mathfrak{spin}(12))^{\sigma''}$ の中心は

$$\left\{\zeta(t) = \varPhi\Bigl(t\begin{pmatrix} 0 & K_3 \\ -K_3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}it\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{\sim}, 0, 0, it\Bigr) \,\Big|\, t \in \boldsymbol{R}\right\}$$

であるから，$(Spin(12))^{\sigma''}$ の中心の連結成分 $U(1)$ は

$$U(1) = \{z(t) = \exp(\zeta(t)) \,|\, t \in \boldsymbol{R}\}$$

で与えられる．そして $z(t) \in U(1)$ の $\mathfrak{P}^C$ への作用は

$$z(t)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-it}\xi_1 & e^{-it}e^{-e_4t}x_3 & * \\ * & e^{-it}\xi_2 & x_1e^{-e_4t} \\ e^{e_4t}x_2e^{e_4t} & * & e^{it}\xi_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e^{it}\eta_1 & e^{it}e^{-e_4t}y_3 & * \\ * & e^{it}\eta_2 & y_1e^{-e_4t} \\ e^{e_4t}y_2e^{e_4t} & * & e^{-it}\eta_3 \end{pmatrix} \\ e^{it}\xi \\ e^{-it}\eta \end{pmatrix}$$

である．また上の $\dot{F}_1(x_1)$ 等に在る関数 e^{-e_4t} の $(\mathfrak{C}^C)_{ie_4}$ への制限は

$$e^{-e_4t}x = e^{it}x, \quad x \in (\mathfrak{C}^C)_{ie_4}$$

であるから，$z(t)$ の $(V^6)^C$ への作用は

$$z(t)\Bigl(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & \overline{x} & \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0\Bigr) = \Bigl(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{it}x \\ 0 & e^{it}\overline{x} & e^{it}\xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{it}\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0\Bigr)$$

である．

よって，$f(z(t))$ は $U_1(1)$ に含まれ，f は同型写像 $f : U(1) \to U_1(1)$ を誘導する．つぎに写像 f のもとで群 $SU_1(6)$ に同型な $((Spin(12))^{\sigma''}$ の部分群 $SU(6)$ をみつけなければならない．こ

こで $(Spin(12))^{\sigma''}$ の部分群 $\widetilde{SU}=f^{-1}(SU_1(6))$ を考えると，群同型 $\widetilde{SU}/\boldsymbol{Z}_2 \cong SU_1(6)$ を得る．$SU_1(6)$ は単連結であるから，$\widetilde{SU}$ は連結にはならない．そこで $\widetilde{SU}$ の連結成分をとると，それが求める $SU(6)$ である．よって，つぎの可換図

$$\begin{array}{ccc}
U(1)\times SU(6) & \xrightarrow{h} & (Spin(12))^{\sigma''} \\
f \ \downarrow \ f & & \downarrow f \\
U_1(1)\times SU_1(6) & \xrightarrow{h_1} & U(6)
\end{array}$$

を得る．ここに h, h_1 はそれぞれ群の積写像である．このとき明らかに h は全射準同型写像である．つぎに $\mathrm{Ker}\,h$ を求めなければならない．そこで $(z,\alpha)\in \mathrm{Ker}\,h$ とする．上の可換図から $f(z)f(\alpha)=f(h(z,\alpha))=f(1)=E$ であるから $\mathrm{Ker}h=\{(1,1),(-\sigma\boldsymbol{w}^2,-\sigma\boldsymbol{w}),(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}^2),(-\sigma,-\sigma),(\boldsymbol{w}^2,\boldsymbol{w}),(-\sigma\boldsymbol{w},\ -\sigma\boldsymbol{w}^2)\}=\boldsymbol{Z}_6$ を得る．よって，群同型 $(U(1)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_6 \cong (Spin(12))^{\sigma''}$ を得る． □

以上の準備より標記の群 $(E_7)^{\gamma,\gamma'}=(E_7)^{\gamma}\cap(E_7)^{\gamma'}=((E_7)^{\gamma})^{\gamma'}=((E_7)^{\gamma'})^{\gamma}$ の群構造を決定しよう．

† **定理 6.2.11.** $(E_7)^{\gamma,\gamma'}\cong(U(1)\times U(1)\times SU(6))/(\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{Z}_6)\times\{1,l_1\}, \boldsymbol{Z}_2=\{(1,1,1),(-1,-\sigma,1)\}, \boldsymbol{Z}_6=\{(1,1,1),(1,-\sigma\boldsymbol{w}^2,-\sigma\boldsymbol{w}),(1,\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}^2),(1,-\sigma,-\sigma),(1,\boldsymbol{w}^2,\boldsymbol{w}),(1,-\sigma\boldsymbol{w},-\sigma\boldsymbol{w}^2)\}$.

証明. まず $(E_7)^{\sigma,\sigma''}$ の群構造を決定しよう．$\alpha\in(E_7)^{\sigma,\sigma''}\subset(E_7)^{\sigma}$ に対して，$\alpha=\varphi(A)\beta$ を満たす $A\in SU(2)$, $\beta\in Spin(12)$ が存在する (命題 6.2.5)．$\sigma''\alpha\sigma''=\alpha$ から，$\sigma''\varphi(A)\sigma''\sigma''\beta\sigma''=\varphi(A)\beta$ を得る．よって，

$$\left\{\begin{aligned}\sigma''\varphi(A)\sigma'' &= \varphi(A)\\ \sigma''\beta\sigma'' &= \beta\end{aligned}\right. \qquad \text{または} \qquad \left\{\begin{aligned}\sigma''\varphi(A)\sigma'' &= -\varphi(A)\\ \sigma''\beta\sigma'' &= -\sigma\beta.\end{aligned}\right.$$

前者の場合は，$A\in U(1)$ (命題 6.2.7), $\beta\in(Spin(12))^{\sigma''}$ であるから，前者の条件をみたす群は

$$(U(1)\times(Spin(12))^{\sigma''})/\boldsymbol{Z}_2\cong(U(1)\times U(1)\times SU(6))/(\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{Z}_6)$$

である (命題 6.2.10)．後者の場合について考えよう．$J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ に対して，$\varphi(J)$ は

$$\varphi(J)(X,Y,\xi,\eta)=\left(\begin{pmatrix}\eta & x_3 & \overline{x}_2\\ \overline{x}_3 & -\eta_3 & y_1\\ x_2 & \overline{y}_1 & -\eta_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi & y_3 & \overline{y}_2\\ \overline{y}_3 & \xi_3 & -x_1\\ y_2 & -\overline{x}_1 & \xi_2\end{pmatrix},-\eta_1,-\xi_1\right)$$

のように表せて

$$\sigma''\varphi(J)\sigma''=-\varphi(J)$$

を満たす．そこで $\sigma''l\sigma''=-\sigma l$ を満たす元 $l\in Spin(12)$ を見つけるために，$\alpha_1=\exp\left(\varPhi\left(0,\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2},0\right)\right)\in E_7$ を考える．α_1 の具体形はつぎのように

$$\alpha_1(X,Y,\xi,\eta)=\left(\begin{pmatrix}\eta & x_3 & \overline{x}_2\\ \overline{x}_3 & -\eta_3 & y_1\\ x_2 & \overline{y}_1 & -\eta_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\xi & y_3 & \overline{y}_2\\ \overline{y}_3 & \xi_3 & -x_1\\ y_2 & -\overline{x}_1 & \xi_2\end{pmatrix},\eta_1,\xi_1\right)$$

であり，条件

$$\kappa\alpha_1 = -\alpha_1\kappa, \quad \mu\alpha_1 = -\alpha_1\mu, \quad \sigma''\alpha_1\sigma'' = -\sigma\alpha_1$$

を満たす．また $\lambda \in E_7$ に対して，

$$\kappa\lambda = -\lambda\kappa, \quad \mu\lambda = -\lambda\mu, \quad \sigma''\lambda\sigma'' = \lambda\sigma_{13}$$

が分かる．ここに $\sigma_{13} \in F_4 \subset E_6 \subset F_7$ は $\sigma_{13}X = \begin{pmatrix} \xi_1 & -x_3 & \overline{x}_2 \\ -\overline{x}_3 & \xi_2 & -x_1 \\ x_2 & -\overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$ である．最後に $\gamma \in G_2 \subset E_7$ は

$$\kappa\gamma = \gamma\kappa, \quad \mu\gamma = \gamma\mu, \quad \sigma''\gamma\sigma'' = \sigma_{13}\sigma''$$

を満たすから，$l = \gamma\lambda\alpha_1$ とすると

$$\kappa l = l\kappa, \quad \mu l = l\mu, \quad \sigma'' l\sigma'' = -\sigma l$$

であることより，l が求めるものである．

また $l_2 = \varphi(J)l = \varphi(J)\gamma\lambda\alpha_1$ とすると，群同型 $(U(1)\times(Spin(12))^{\sigma''})/\boldsymbol{Z}_2\times\{1, l_2\} \cong (E_7)^{\sigma,\sigma''}$ を得る．ここに l_2 の具体形は

$$l_2(X, Y, \xi, \eta) = \left(\begin{pmatrix} -\eta_1 & \gamma y_3 & * \\ * & -\eta_2 & -\gamma y_1 \\ \gamma y_2 & * & -\eta_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1 & -\gamma x_3 & * \\ * & \xi_2 & \gamma x_1 \\ -\gamma x_2 & * & \xi_3 \end{pmatrix}, \eta, \xi \right)$$

である．$l_1 = \delta l_2 \delta^{-1}$ とおくとき, 目的の群同型

$$(E_7)^{\gamma,\gamma'} \cong (U(1)\times U(1)\times SU(6))/(\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{Z}_6)\times\{1, l_1\}$$

を得る． □

[参考] $(\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}})^C \oplus M(3, \boldsymbol{C})^C$ と $\mathfrak{J}^C$ の同一視 (E_6 の章参照) から，つぎの対応

$$(X, Y, \xi, \eta) + (M, N) = (X + M, Y + N, \xi, \eta)$$

により $(\mathfrak{P}_{\boldsymbol{C}})^C \oplus (M(3, \boldsymbol{C})^C \oplus M(3, \boldsymbol{C})^C)$ と $\mathfrak{P}^C$ を同一視する．$(\mathfrak{P}_{\boldsymbol{C}})^C$ の任意の元を $P_{\boldsymbol{C}}$ で表すことがある．

$\gamma, \gamma', \gamma_1, w \in E_6 \subset E_7$ より, C-線形変換 $\gamma, \gamma', \gamma_1, w : \mathfrak{J}^C = (\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}})^C \oplus M(3, \boldsymbol{C})^C \to \mathfrak{J}^C = (\mathfrak{J}_{\boldsymbol{C}})^C \oplus M(3, \boldsymbol{C})^C$ はそれぞれ自然に C-線形変換 $\gamma, \gamma', \gamma_1, w : \mathfrak{P}^C = (\mathfrak{P}_{\boldsymbol{C}})^C \oplus (M(3, \boldsymbol{C})^C \oplus M(3, \boldsymbol{C})^C) \to \mathfrak{P}^C = (\mathfrak{P}_{\boldsymbol{C}})^C \oplus (M(3, \boldsymbol{C})^C \oplus M(3, \boldsymbol{C})^C)$ に拡張される：

$$\begin{aligned} \gamma((X, Y, \xi, \eta) + (M, N)) &= (X, Y, \xi, \eta) + (\gamma M, \gamma N), \\ \gamma'((X, Y, \xi, \eta) + (M, N)) &= (X, Y, \xi, \eta) + (\gamma' M, \gamma' N), \\ \gamma_1((X, Y, \xi, \eta) + (M, N)) &= (\overline{X}, \overline{Y}, \xi, \eta) + (\overline{M}, \overline{N}), \\ w((X, Y, \xi, \eta) + (M, N)) &= (X, Y, \xi, \eta) + (\omega_1 M, \omega_1 N). \end{aligned}$$

群 $(E_7)^{\gamma,\gamma'}$ を考察する前に, 群 E_7 の定義において $\mathfrak{C}$ を $\boldsymbol{C}$ にかえた群

$$E_{7,\boldsymbol{C}} = \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C((\mathfrak{P}_{\boldsymbol{C}})^C) \,|\, \alpha(P \times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q, \langle \alpha P, \alpha Q\rangle = \langle P, Q\rangle\}$$

を調べよう.

写像 $h' : \boldsymbol{C}^C \to \boldsymbol{C}$ を

$$h'(a+bi) = a + be_1, \quad a, b \in \boldsymbol{C}$$

で定義する. そして $\boldsymbol{C}$-ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^6$ の 3 階の外積 $\Lambda^3(\boldsymbol{C}^6)$ をとり, C-$\boldsymbol{C}$-線形同型写像 $f_{\boldsymbol{C}} : (\mathfrak{P}_{\boldsymbol{C}})^C \to \Lambda^3(\boldsymbol{C}^6)$ を

$$f_{\boldsymbol{C}}\Bigg(\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 & y_3 & \overline{y}_2 \\ \overline{y}_3 & \eta_2 & y_1 \\ y_2 & \overline{y}_1 & \eta_3 \end{pmatrix}, \xi, \eta\Bigg) = \sum_{i<j<k} x_{ijk}\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_k$$

で定義する. $\Bigg(\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_6\}$ は $\boldsymbol{C}^6$ の標準基底であり, $x_{ijk} \in \boldsymbol{C}$ は歪対称テンソルである : $x_{i'j'k'} = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i & j & k \\ i' & j' & k' \end{pmatrix} x_{ijk}\Bigg)$ ここに

$$\begin{aligned}
&x_{156} = h'(\xi_1), \quad x_{164} = h'(x_3), \quad x_{145} = h'(\overline{x}_2),\\
&x_{256} = h'(\overline{x}_3), \quad x_{264} = h'(\xi_2), \quad x_{245} = h'(x_1),\\
&x_{356} = h'(x_2), \quad x_{364} = h'(\overline{x}_1), \quad x_{345} = h'(\xi_3),\\
&x_{423} = h'(\eta_1), \quad x_{431} = h'(y_3), \quad x_{412} = h'(\overline{y}_2),\\
&x_{523} = h'(\overline{y}_3), \quad x_{531} = h'(\eta_2), \quad x_{512} = h'(y_1),\\
&x_{623} = h'(y_2), \quad x_{631} = h'(\overline{y}_1), \quad x_{612} = h'(\eta_3),\\
&\qquad\qquad x_{123} = h'(\xi),\\
&\qquad\qquad x_{456} = h'(\eta).
\end{aligned}$$

また写像 $\boldsymbol{C}$-C-線形写像 $k : M(3, \boldsymbol{C})^C \oplus M(3, \boldsymbol{C})^C \to M(6, \boldsymbol{C})$ を

$$k(M, N) = k(M_1 + iM_2, N_1 + iN_2) = \begin{pmatrix} -N_2 - N_1e_1 & M_2 + M_1e_1 \\ M_2 - M_1e_1 & N_2 - N_1e_1 \end{pmatrix}$$

で定義する. ここに $M_i, N_i \in M(3, \boldsymbol{C})$. このとき k の逆写像 $k^{-1} : M(6, \boldsymbol{C}) \to M(3, \boldsymbol{C})^C \oplus M(3, \boldsymbol{C})^C$ は

$$\begin{aligned}
&k^{-1}\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\\
&= \left(\frac{(M_{21} - M_{12})e_1}{2} + i\frac{M_{21} + M_{12}}{2}, \frac{(M_{22} + M_{11})e_1}{2} + i\frac{M_{22} - M_{11}}{2}\right)
\end{aligned}$$

である. ここに $M_{ij} \in M(3, \boldsymbol{C})$ である.

元 $A \in SU(6)$ の $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \in \Lambda^3(\boldsymbol{C}^6)$ への作用を

$$A(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = A\boldsymbol{a} \wedge A\boldsymbol{b} \wedge A\boldsymbol{c}$$

で与えることにより，群 $SU(6)$ は $\Lambda^3(\boldsymbol{C}^6)$ に自然に働く．

また群 $\boldsymbol{Z}_2 = \{1, \gamma_1\}$ は群 $SU(6)$ につぎのように働く：

$$\gamma_1 A = \overline{(\mathrm{Ad} J_3) A}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき $SU(6) \cdot \boldsymbol{Z}_2$ をこの働きに関する $SU(6)$ と $\boldsymbol{Z}_2$ の半直積とすると，つぎの補題を得る．

補題 6.2.12. ([50],[56]) $E_{7,\boldsymbol{C}} \cong (SU(6)/\boldsymbol{Z}_3) \cdot \boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_3 = \{E, \omega_1 E, {\omega_1}^2 E\}$.

証明． 準同型写像 $\psi_{7,\boldsymbol{C}} : SU(6) \cdot \boldsymbol{Z}_2 \to E_{7,\boldsymbol{C}}$,

$$\begin{aligned} \psi_{7,\boldsymbol{C}}(A, 1) P_{\boldsymbol{C}} &= {f_{\boldsymbol{C}}}^{-1}(A(f_{\boldsymbol{C}} P_{\boldsymbol{C}})), \\ \psi_{7,\boldsymbol{C}}(A, \gamma_1) P_{\boldsymbol{C}} &= {f_{\boldsymbol{C}}}^{-1}(A(f_{\boldsymbol{C}} \overline{P}_{\boldsymbol{C}})), \quad P_{\boldsymbol{C}} \in (\mathfrak{P}_{\boldsymbol{C}})^C \end{aligned}$$

が補題の群同型を与える． □

C-$\boldsymbol{C}$-線形同型写像 $f : \mathfrak{P}^C \to \Lambda^3(\boldsymbol{C}^6) \oplus M(6, \boldsymbol{C})$ を

$$\begin{aligned} &f(P_{\boldsymbol{C}} + (M, N)) = f_{\boldsymbol{C}} P_{\boldsymbol{C}} + k(M, N), \\ &\qquad P_{\boldsymbol{C}} + (M, N) \in (\mathfrak{P}_{\boldsymbol{C}})^C \oplus (M(3, \boldsymbol{C})^C \oplus M(3, \boldsymbol{C})^C) = \mathfrak{P}^C \end{aligned}$$

で定義する．

上のことより群 $SU(3) \times SU(6)$ の $\Lambda^3(\boldsymbol{C}^6) \oplus M(6, \boldsymbol{C})$ への作用を

$$(D, A)\Big(\sum(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) + \widetilde{M}\Big) = \sum(A\boldsymbol{a} \wedge A\boldsymbol{b} \wedge A\boldsymbol{c}) + D\widetilde{M}A^*$$

で定義する．ここに $D\widetilde{M}$ は $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DM_{11} & DM_{12} \\ DM_{21} & DM_{22} \end{pmatrix}, M_{ij} \in M(3, \boldsymbol{C})$ を意味する．

命題 6.2.13. ([50],[56]) $(E_7)^w \cong (SU(3) \times SU(6))/\boldsymbol{Z}_3$, $\boldsymbol{Z}_3 = \{(E, E), (\omega_1 E, \omega_1 E), ({\omega_1}^2 E, {\omega_1}^2 E)\}$.

証明． 準同型写像 $\psi_{7,w} : SU(3) \times SU(6) \to (E_7)^w$,

$$\psi_{7,w}(D, A) P = f^{-1}((D, A)(fP)), \quad P \in \mathfrak{P}^C$$

が命題の群同型を与える． □

群 $\boldsymbol{Z}_2 = \{1, \gamma_1\}$ は群 $U(1) \times U(1) \times SU(6)$ につぎのように働く：

$$\gamma_1(p, q, A) = (\overline{p}, \overline{q}, \overline{(\mathrm{Ad} J_3) A}).$$

このとき $(U(1) \times U(1) \times SU(6)) \cdot \boldsymbol{Z}_2$ をこの働きに関する $U(1) \times U(1) \times SU(6)$ と $\boldsymbol{Z}_2$ の半直積とする．

上の補題，命題を用いて群 $(E_7)^{\gamma,\gamma'}$ の群構造を決定しよう．つぎの定理は定理 6.2.11 の別証明でもある．

†定理 6.2.14. $(E_7)^{\gamma,\gamma'} \cong ((U(1)\times U(1)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_3)\cdot\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_3 = \{(1,1,E),(\omega_1,\omega_1,\omega_1 E),({\omega_1}^2,{\omega_1}^2,{\omega_1}^2 E)\}$.

証明. 準同型写像 $\psi_7 : (U(1)\times U(1)\times SU(6))\cdot\boldsymbol{Z}_2 \to (E_7)^{\gamma,\gamma'}$,

$$\begin{aligned}\psi_7((p,q,A),1)P &= f^{-1}((D(p,q),A)(fP)),\\ \psi_7((p,q,A),\gamma_1)P &= f^{-1}((D(p,q),A)(f\gamma_1 P)),\ \ P\in\mathfrak{P}^C\end{aligned}$$

が群同型 $((U(1)\times U(1)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_3)\cdot\boldsymbol{Z}_2 \cong (E_7)^{\gamma,\gamma'}$ を与える．(詳細は，[29] Theorem 2.4.3 を参照.) □

6.3 E_7 の対合的自己同型写像 σ,σ' と部分群 $(SU(2)\times SU(2)\times SU(2)\times Spin(8))/(\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{Z}_2)$

C-線形変換 $\sigma' : \mathfrak{J}^C \to \mathfrak{J}^C$ を C-線形変換 $\sigma' : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{P}^C$,

$$\sigma'(X,Y,\xi,\eta) = (\sigma'X,\sigma'Y,\xi,\eta),\ (X,Y,\xi,\eta)\in\mathfrak{P}^C$$

に拡張する．これは $\sigma'\in F_4$ を $\sigma'\in F_4\subset E_6\subset E_7$ とみなしたものである．また σ については 6.2 節で定義したものであり，それらによる不動点部分群の共通部分 $(E_7)^\sigma\cap(E_7)^{\sigma'}$ の群構造を調べよう．

† 補題 6.3.1. Lie 群 $(E_7)^{\sigma,\sigma'}, ((E_7)^{\kappa,\mu})^{\sigma'}$ の Lie 環 $(\mathfrak{e}_7)^{\sigma,\sigma'}, ((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\sigma'}$ は, つぎのようである：

$$\begin{aligned}(1)\ (\mathfrak{e}_7)^{\sigma,\sigma'} &= \{\Phi\in\mathfrak{e}_7 \,|\, \sigma\Phi=\Phi\sigma, \sigma'\Phi=\Phi\sigma'\}\\ &= \{\Phi(\phi,A,-\tau A,\nu)\in\mathfrak{e}_7 \,|\, \phi\in(\mathfrak{e}_6)^{\sigma,\sigma'}, A\in\mathfrak{J}^C, \sigma A=\sigma' A=A, \nu\in i\boldsymbol{R}\}.\end{aligned}$$

特に,

$$\dim((\mathfrak{e}_7)^{\sigma,\sigma'}) = 30+6+1 = 37$$

である．

$$\begin{aligned}(2)\ ((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\sigma'} &= \{\Phi\in\mathfrak{e}_7 \,|\, \kappa\Phi=\Phi\kappa, \mu\Phi=\Phi\mu, \sigma'\Phi=\Phi\sigma'\}\\ &= \left\{\Phi(\phi,A,-\tau A,\nu)\in\mathfrak{e}_7 \,\middle|\, \begin{array}{l}\phi\in(\mathfrak{e}_6)^{\sigma,\sigma'}, A\in\mathfrak{J}^C, \sigma A=\sigma' A=A,\\ (E_1,A)=0,\ \nu=-\dfrac{3}{2}(\phi E_1,E_1)\end{array}\right\}.\end{aligned}$$

特に,

$$\dim(((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\sigma'}) = 30+4 = 34$$

である．

† 補題 6.3.2. $A\in SU(2)=\{A\in M(2,C) \,|\, (\tau{}^tA)A=E, \det A=1\}$ に対して, $\mathfrak{P}^C$ の C-線形変換 $\phi_k(A), k=1,2,3$ を

$$\phi_k(A)\Big(\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 & y_3 & \overline{y}_2 \\ \overline{y}_3 & \eta_2 & y_1 \\ y_2 & \overline{y}_1 & \eta_3 \end{pmatrix}, \xi, \eta\Big)$$

$$= \Big(\begin{pmatrix} \xi'_1 & x'_3 & \overline{x'}_2 \\ \overline{x'}_3 & \xi'_2 & x'_1 \\ x'_2 & \overline{x'}_1 & \xi'_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta'_1 & y'_3 & \overline{y'}_2 \\ \overline{y'}_3 & \eta'_2 & y'_1 \\ y'_2 & \overline{y'}_1 & \eta'_3 \end{pmatrix}, \xi', \eta'\Big),$$

$$\begin{pmatrix} \xi'_k \\ \eta' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \xi_k \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta'_k \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \xi \\ \eta_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \eta'_{k+1} \\ \xi'_{k+2} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \eta_{k+1} \\ \xi_{k+2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \eta'_{k+2} \\ \xi'_{k+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \eta_{k+2} \\ \xi_{k+1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'_k \\ y'_k \end{pmatrix} = (\tau A)\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'_{k+1} \\ y'_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'_{k+2} \\ y'_{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k+2} \\ y_{k+2} \end{pmatrix}$$

で定義する (ここに添数は mod 3 とする). このとき $\phi_k(A) \in (E_7)^{\sigma,\sigma'}$ である. また $k = 2, 3$ に対して, $\phi_k(A) \in ((E_7)^{\kappa,\mu})^{\sigma'}$ である.

証明. $\Phi_k = \Phi(2\nu E_k \vee E_k, aE_k, -\tau a E_k, \nu), a \in C, \nu \in i\boldsymbol{R}$ とするとき, $\Phi_k \in (\mathfrak{e}_7)^{\sigma,\sigma'}$(補題 6.3.1 (1)) であり, Φ_k の $\mathfrak{P}^C$ への作用は

$$\Phi_k(X, Y, \xi, \eta) = (X', Y', \xi', \eta')$$

$$\begin{pmatrix} \xi'_k \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu & a \\ -\tau a & -\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_k \\ \eta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu & a \\ -\tau a & -\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta_k \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \eta'_{k+1} \\ \xi'_{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu & a \\ -\tau a & -\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_{k+1} \\ \xi_{k+2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \eta'_{k+2} \\ \xi'_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu & a \\ -\tau a & -\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_{k+2} \\ \xi_{k+1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'_k \\ y'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu & \tau a \\ -a & \nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x'_{k+1} \\ y'_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_{k+2} \\ y'_{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である.

よって, $A = \exp\begin{pmatrix} \nu & a \\ -\tau a & -\nu \end{pmatrix} \in SU(2)$ に対して, $\phi_k(A) = \exp\Phi_k \in (E_7)^{\sigma,\sigma'}$ を得る. また $k = 2, 3$ に対して, $\Phi_k \in ((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\sigma'}$ (補題 6.3.1 (2)) であるから, $\phi_k(A) = \exp\Phi_k \in ((E_7)^{\kappa,\mu})^{\sigma'}$ を得る. □

† **命題 6.3.3.** $((E_7)^{\kappa,\mu})^{\sigma'} \cong (SU(2) \times SU(2) \times Spin(8))/\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_2 = \{(E, E, 1), (-E, -E, \sigma)\}$.

証明. $Spin(8) = (F_4)^{\sigma,\sigma'} = (Spin(9))^{\sigma'} \subset (Spin(12))^{\sigma'} = ((E_7)^{\mu,\kappa})^{\sigma'}$ (命題 4.3.3, 定理 4.3.5, 命題 6.2.3) とする. 写像 $\varphi_2 : SU(2) \times SU(2) \times Spin(8) \to ((E_7)^{\kappa,\mu})^{\sigma'}$ を

$$\varphi_2(B, C, \beta) = \phi_2(B)\phi_3(C)\beta$$

で定義する (ϕ_2, ϕ_3 は補題 6.3.2 を参照)．このとき $\varphi(B, C, \beta) \in ((E_7)^{\kappa,\mu})^{\sigma'}$ は明らかである (補題 6.3.2)．また $\phi_2(B), \phi_3(C), \beta$ がそれぞれ可換（定理 4.3.4, 補題 6.3.2）であるから，φ_2 は準同型写像である．$\mathrm{Ker}\varphi_2 = \{(E, E, 1), (-E, -E, \sigma)\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である．$((E_7)^{\kappa,\mu})^{\sigma'} = (Spin(12))^{\sigma'}$ (命題 6.2.3) は連結かつ $\dim((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\sigma'}) = 34$ (補題 6.3.1(2)) $= 3 + 3 + 28 = \dim(\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{so}(8))$ であるから，φ_2 は全射である．よって，群同型 $(SU(2) \times SU(2) \times Spin(8))/\boldsymbol{Z}_2 \cong ((E_7)^{\kappa,\mu})^{\sigma'}$ を得る． □

上の補題，命題を用いて標記の群 $(E_7)^{\sigma,\sigma'} = (E_7)^{\sigma} \cap (E_7)^{\sigma'} = ((E_7)^{\sigma})^{\sigma'} = ((E_7)^{\sigma'})^{\sigma}$ の群構造を決定しよう．

† **定理 6.3.4.** $(E_7)^{\sigma,\sigma'} \cong (SU(2) \times SU(2) \times SU(2) \times Spin(8))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2), \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2 = \{(E, E, E, 1), (E, -E, -E, \sigma)\} \times \{(E, E, E, 1), (-E, -E, E, \sigma')\}$.

証明. $Spin(8) = (F_4)^{\sigma,\sigma'} \subset (E_6)^{\sigma,\sigma'} \subset (E_7)^{\sigma,\sigma'}$ とする．写像 $\varphi : SU(2) \times SU(2) \times SU(2) \times Spin(8) \to (E_7)^{\sigma,\sigma'}$ を

$$\varphi(A, B, C, \beta) = \phi_1(A)\phi_2(B)\phi_3(C)\beta$$

で定義する．$\varphi(A, B, C, \beta) \in (E_7)^{\sigma,\sigma'}$ は明らかである (補題 6.3.2)．$\phi_1(A), \phi_2(B), \phi_3(C), \beta$ は互いに可換（定理 4.3.4, 補題 6.3.2）であるから，φ は準同型写像である．φ の全射を示そう．$\alpha \in (E_7)^{\sigma,\sigma'}$ とする．$(E_7)^{\sigma,\sigma'} \subset (E_7)^{\sigma}$ であるから，$\alpha = \varphi_1(A)\delta$ (補題 6.2.5) を満たす，$A \in SU(2)$, $\delta \in Spin(12)$ が存在する．$\sigma'\alpha\sigma' = \alpha$ より，

$$\begin{cases} A = A \\ \sigma'\delta\sigma' = \delta \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} A = -A \\ \sigma'\delta\sigma' = -\sigma\delta. \end{cases}$$

を得る．後者の場合は，$A = O$ は不適であるからこれはおこり得ない．前者の場合は，$\sigma'\delta\sigma' = \delta$ から $\delta \in (Spin(12))^{\sigma'} = ((E_7)^{\kappa,\mu})^{\sigma'}$ となるから，$\delta = \phi_2(B)\phi_3(C)\beta$ (命題 6.3.3) を満たす $B, C \in SU(2)$,$\beta \in Spin(8)$ が存在する．よって，

$$\alpha = \phi_1(A)\delta = \phi_1(A)\phi_2(B)\phi_3(C)\beta = \varphi(A, B, C, \beta)$$

である．すなわち，φ は全射である．

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\varphi &= \{(E, E, E, 1), (E, -E, -E, \sigma), (-E, E, -E, \sigma\sigma'), (-E, -E, E, \sigma')\} \\ &= \{(E, E, E, 1), (E, -E, -E, \sigma)\} \times \{(E, E, E, 1), (-E, -E, E, \sigma')\} \\ &= \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2. \end{aligned}$$

は容易である. よって, 群同型 $(SU(2) \times SU(2) \times SU(2) \times Spin(8))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2) \cong (E_7)^{\sigma,\sigma'}$ を得る． □

6.4 E_7 の対合的自己同型写像 σ, γ と部分群 $(SU(2) \times Spin(4) \times Spin(8))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2)$

6.2 節で定義した C-線形写像 σ, γ が誘導する対合的自己同型写像 σ, γ による不動点部分群の共通部分 $(E_7)^{\sigma} \cap (E_7)^{\gamma}$ の群構造を調べよう．

まず群 $(E_7)^{\sigma,\gamma}$ に $Spin(4)$ と同型な部分群を構成するために $F_4(\subset E_6 \subset E_7)$ の部分群

$$((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(h)} = \{\alpha \in (F_4)^{\sigma,\gamma} \,|\, \alpha F_1(h) = F_1(h),\ h \in \boldsymbol{H}\}$$

を考察しよう.

† **命題 6.4.1.** $((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(h)} \cong Sp(1) \times Sp(1)\,(= Spin(4))$.

証明. 写像 $\varphi : Sp(1) \times Sp(1) \to ((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(h)}$ を写像 φ_4（定理 4.4.1 ）の制限写像として

$$\varphi(p,q)(M+\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} q & 0\ 0 \\ 0 & \multirow{2}{*}{E} \\ 0 & \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} q & 0\ 0 \\ 0 & \multirow{2}{*}{E} \\ 0 & \end{pmatrix}^* + p\boldsymbol{a} \begin{pmatrix} q & 0\ 0 \\ 0 & \multirow{2}{*}{E} \\ 0 & \end{pmatrix}^*$$

で定義する．ただし $F_1(h)$ は $F_1(h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \\ 0 & \overline{h} & 0 \end{pmatrix} + O$ の意味である．φ_4 の制限写像であることより $\varphi(p,q) \in ((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(h)}$ は明らかであり，φ は準同型写像である. φ が全射であることを示そう．$\alpha \in ((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(h)}$ とする．$((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(h)} \subset (F_4)^{\sigma,\gamma}$ であるから, $\alpha = \varphi_4(p,q,B)$(定理 4.4.1) を満たす $p,q \in Sp(1), B \in Sp(2)$ が存在する．さらに，$\alpha F_1(h) = F_1(h)$ から, $B \begin{pmatrix} 0 & h \\ \overline{h} & 0 \end{pmatrix} B^* = \begin{pmatrix} 0 & h \\ \overline{h} & 0 \end{pmatrix}$，よって，

$$\alpha = \varphi_4(p,q,E) \quad \text{または} \quad \alpha = \varphi_4(p,q,-E)$$

を得る．前者の場合は, $\alpha = \varphi_4(p,q,E) = \varphi(p,q)$ である．後者の場合も

$$\begin{aligned} \alpha &= \varphi_4(p,q,-E) = \varphi_4(-p,-q,E)\varphi_4(-1,-1,-E) \\ &= \varphi_4(-p,-q,E)1 = \varphi(-p,-q) \end{aligned}$$

となるので φ は全射である．$\mathrm{Ker}\varphi = \{(1,1)\}$ は容易である．よって，群同型

$$Sp(1) \times Sp(1) \cong ((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(h)}$$

を得る. □

$\mathfrak{P}^C$ において, 以後つぎの記号を用いる：

$$\begin{aligned} &(F_1(h),0,0,0) = \dot{F}_1(h), \quad (0,E_1,0,1) = \tilde{E}_1, \\ &(0,E_1,0,-1) = \tilde{E}_{-1}, \quad (E_2+E_3,0,0,0) = \dot{E}_{23}. \end{aligned}$$

また群 $(E_7)^{\sigma,\gamma}$ の部分群

$$(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(h),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1},\dot{E}_{23}} = \left\{ \alpha \in (E_7)^{\kappa,\mu} \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma\alpha = \alpha\gamma, \alpha\dot{F}_1(h) = \dot{F}_1(h), \alpha\tilde{E}_1 = \tilde{E}_1, \\ \alpha\tilde{E}_{-1} = \tilde{E}_{-1}, \alpha\dot{E}_{23} = \dot{E}_{23} \end{array} \right\}$$

を考察しよう.

† **補題 6.4.2.** Lie 群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^\gamma)_{\dot{F}_1(h),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1},\dot{E}_{23}}$ の Lie 環 $(((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^\gamma)_{\dot{F}_1(h),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1},\dot{E}_{23}}$ は, つぎのようである：

$$
\begin{aligned}
&(((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^\gamma)_{\dot{F}_1(h),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1},\dot{E}_{23}} \\
&= \Big\{\varPhi(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_4' \end{pmatrix}, 0, 0, 0) \,\Big|\, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_4' \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(8),\ D_4' \in \mathfrak{so}(4)\Big\}.
\end{aligned}
$$

特に,

$$\dim((((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^\gamma)_{\dot{F}_1(h),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1},\dot{E}_{23}}) = 6$$

である.

以後, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_4' \end{pmatrix}$ を D_4' で, $\varPhi(D_4', 0, 0, 0)$ を $\varPhi_4$ で表す.

† **命題 6.4.3.** $(((E_7)^{\kappa,\mu})^\gamma)_{\dot{F}_1(h),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1},\dot{E}_{23}} = ((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(h)}$.

証明. $\alpha \in ((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(h)}$ とする. $((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(h)} \subset (F_4)^\sigma = (F_4)_{E_1}$ であるから, $\alpha E_1 = E_1$ を得る. 写像 κ, μ は E_1 を用いて定義されているから, $\kappa\alpha = \alpha\kappa$, $\mu\alpha = \alpha\mu$ である. また $\alpha E = E$ (補題 4.2.1) から, $\alpha(E_2 + E_3) = E_2 + E_3$ である. よって, $\alpha\dot{E}_{23} = \dot{E}_{23}$ を得る. さらに $\alpha(0,0,0,1) = (0,0,0,1)$ から, $\alpha\tilde{E}_1 = \tilde{E}_1, \alpha\tilde{E}_{-1} = \tilde{E}_{-1}$ である. また明らかに $\alpha\dot{F}_1(h) = \dot{F}_1(h)$ である. よって, $\alpha \in (((E_7)^{\kappa,\mu})^\gamma)_{\dot{F}_1(h),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1},\dot{E}_{23}}$ を得る. 逆に $\alpha \in (((E_7)^{\kappa,\mu})^\gamma)_{\dot{F}_1(h),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1},\dot{E}_{23}}$ とする. $\alpha\tilde{E}_1 = \tilde{E}_1, \alpha\tilde{E}_{-1} = \tilde{E}_{-1}$ であるから, $\alpha(0, E_1, 0, 0) = (0, E_1, 0, 0), \alpha(0,0,0,1) = (0,0,0,1)$. よって, $\alpha \in ((E_6)^\gamma)_{F_1(h),E_1,E_2+E_3} = ((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(h)}$ を得る. 以上から, $(((E_7)^{\kappa,\mu})^\gamma)_{\dot{F}_1(h),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1},\dot{E}_{23}} = ((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(h)}$ である. □

ここに群 $(E_7)^{\sigma,\gamma}$ に $Spin(4)$ と同型な部分群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^\gamma)_{\dot{F}_1(h),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1},\dot{E}_{23}}$ が構成できた.

つぎに群 $(E_7)^{\sigma,\gamma}$ の部分群で $Spin(8)$ に同型な群を順次構成していこう.

† **命題 6.4.4.** $((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(he_4)} \cong Sp(2)\,(= Spin(5))$.

証明. 写像 $\varphi : Sp(2) \to ((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(he_4)}$ を写像 φ_4(定理 4.4.1) の制限写像として

$$\varphi(B)(M + \boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ 0 \\ 0 & \\ 0 & B \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & 0 \ 0 \\ 0 & \\ 0 & B \end{pmatrix}^* + \boldsymbol{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 \ 0 \\ 0 & \\ 0 & B \end{pmatrix}^*$$

で定義する. φ_4 の制限写像であることより $\varphi(B) \in ((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(he_4)}$ は明らかであり, φ は準同型写像である. φ が全射であることを示そう. $\alpha \in ((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(he_4)}$ とする. $((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(he_4)} \subset (F_4)^{\sigma,\gamma}$ から, $\alpha = \varphi_4(p, q, B)$(定理 4.4.2) を満たす $p, q \in Sp(1), B \in Sp(2)$ が存在する. さらに, $\alpha F_1(he_4) = F_1(he_4)\,(= O + (h, 0, 0))$ であるから, $ph\overline{q} = h (h \in \boldsymbol{H})$ を得る, よって,

$$\alpha = \varphi_4(1, 1, B) \quad \text{または} \quad \alpha = \varphi_4(-1, -1, B)$$

である. 前者の場合は, $\alpha = \varphi_4(1, 1, B) = \varphi(B)$ である. 後者の場合は

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \varphi_4(-1, -1, B) = \varphi_4(1, 1, -B)\varphi_4(-1, -1, -E) \\
&= \varphi_4(1, 1, -B)1 = \varphi(-B)
\end{aligned}
$$

となるので，φ は全射である．$\mathrm{Ker}\varphi=\{E\}$ は容易である．よって, 群同型

$$Sp(2)\cong((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(he_4)}$$

を得る．$\square$

† 命題 6.4.5. $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1},\dot{E}_{23}}=((F_4)^{\sigma,\gamma})_{F_1(he_4)}$.

証明. 命題 6.4.3 と同様に証明できる．$\square$

群 $(E_7)^{\sigma,\gamma}$ の部分群

$$(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}=\left\{\alpha\in(E_7)^{\kappa,\mu}\;\middle|\;\begin{array}{l}\gamma\alpha=\alpha\gamma,\ \alpha\dot{F}_1(he_4)=\dot{F}_1(he_4),\\ \alpha\tilde{E}_1=\tilde{E}_1,\ \alpha\tilde{E}_{-1}=\tilde{E}_{-1}\end{array}\right\}$$

を考察しよう．

† 補題 6.4.6. Lie 群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}$ の Lie 環 $(((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}$ は，つぎのようである：

$$(((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}=\left\{\varPhi\Big(\begin{pmatrix}D_4&0\\0&0\end{pmatrix}+\widetilde{A}_1(p)+i\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\varepsilon&q\\0&\overline{q}&-\varepsilon\end{pmatrix}^{\sim},0,0,0\Big)\;\middle|\;\begin{pmatrix}D_4&0\\0&0\end{pmatrix}\in\mathfrak{so}(8),D_4\in\mathfrak{so}(4),\,\varepsilon\in\boldsymbol{R},\,p,q\in\boldsymbol{H}\right\}.$$

特に,

$$\dim((((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}})=15$$

である．

以後, $\begin{pmatrix}D_4&0\\0&0\end{pmatrix}$ を D_4 で表す.

† 補題 6.4.7. (1) $a\in\boldsymbol{H}$ に対して, 写像 $\widetilde{\alpha}_1(a):\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}^C$ を

$$\begin{cases}\xi_1'=\xi_1\\ \xi_2'=\dfrac{\xi_2-\xi_3}{2}+\dfrac{\xi_2+\xi_3}{2}\cos|a|+i\dfrac{(a,x_1)}{|a|}\sin|a|\\ \xi_3'=-\dfrac{\xi_2-\xi_3}{2}+\dfrac{\xi_2+\xi_3}{2}\cos|a|+i\dfrac{(a,x_1)}{|a|}\sin|a|\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1'=x_1+i\dfrac{(\xi_2+\xi_3)a}{|a|}\sin|a|-\dfrac{2(a,x_1)a}{|a|^2}(\sin\dfrac{|a|}{2})^2\\ x_2'=x_2\cos\dfrac{|a|}{2}+i\dfrac{\overline{x_3a}}{|a|}\sin\dfrac{|a|}{2}\\ x_3'=x_3\cos\dfrac{|a|}{2}+i\dfrac{\overline{ax_2}}{|a|}\sin\dfrac{|a|}{2}\end{cases}$$

で定義する．このとき $\widetilde{\alpha}_1(a) \in (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}$ である．

(2) $t \in \boldsymbol{R}$ に対して, 写像 $\widetilde{\alpha}_{23}(t) : \mathfrak{J}^C \to \mathfrak{J}^C$ を

$$\widetilde{\alpha}_{23}(t)\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & e^{it/2}x_3 & e^{-it/2}\overline{x}_2 \\ e^{it/2}\overline{x}_3 & e^{it}\xi_2 & x_1 \\ e^{-it/2}x_2 & \overline{x}_1 & e^{-it}\xi_3 \end{pmatrix}$$

で定義する．このとき $\widetilde{\alpha}_{23}(t) \in (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}$ である．

証明. (1) $a \in \boldsymbol{H}$ に対して, $i\widetilde{F}_1(a) \in (((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}$(補題 6.4.6) であるから $\widetilde{\alpha}_1(a)$ $= \exp i\widetilde{F}_1(a) \in (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}$ を得る．

(2) $t \in \boldsymbol{R}$ に対して, $it(E_2 - E_3)^{\sim} \in (((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}$(補題 6.4.6) であるから $\widetilde{\alpha}_{23}(t)$ $= \exp it(E_2 - E_3)^{\sim} \in (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}$ を得る． □

ここで 6 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 V^6 を

$$\begin{aligned} V^6 &= \{P \in \mathfrak{P}^C \mid \kappa P = P, \mu\tau\lambda P = P, \gamma P = P, \langle P, \tilde{E}_1\rangle = 0, \langle P, \tilde{E}_{-1}\rangle = 0\} \\ &= \left\{ P = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & h \\ 0 & \overline{h} & -\tau\xi \end{pmatrix}, 0, 0, 0 \right) \;\middle|\; \xi \in C,\ h \in \boldsymbol{H} \right\} \end{aligned}$$

で定義し，ノルムを

$$(P, P)_\mu = \frac{1}{2}\{\mu P, P\} = (\tau\xi)\xi + \overline{h}h$$

で与える．このとき $S^5 = \{P \in V^6 \mid (P, P)_\mu = 1\}$ は，5 次元球面になる．

† **補題 6.4.8.** $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}/Spin(5) \simeq S^5$.
特に, $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}$ は連結である．

証明. E_7 の元は $\tau\lambda$ と可換であるから群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}$ は，球面 S^5 に働く．この働きが推移的であることを示そう．それは, 任意の $P \in S^5$ がある $\alpha \in (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}$ により，$\alpha P = (i(E_2 + E_3), 0, 0, 0) \in S^5$ になることを示せばよい．任意の元

$$P = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & h \\ 0 & \overline{h} & -\tau\xi \end{pmatrix}, 0, 0, 0 \right) \in S^5$$

に対して，$e^{it}\xi \in \boldsymbol{R}$ であるような $t \in \boldsymbol{R}$ を選ぶ．この $t \in \boldsymbol{R}$ に対して, P に $\widetilde{\alpha}_{23}(t)$(補題 4.4.7(2)) $\in (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}$ を施すと，

$$\widetilde{\alpha}_{23}(t)P = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & h \\ 0 & \overline{h} & -r \end{pmatrix}, 0, 0, 0 \right) = P_1,\ r \in \boldsymbol{R}$$

となる．$h \neq 0$ の場合, P_1 に $\widetilde{\alpha}_1(\dfrac{\pi h}{2|h|})$ (補題 6.4.7(1)) $\in (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}$ を施すと,

$$\widetilde{\alpha}_1(\frac{\pi h}{2|h|})P_1 = \Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi' & 0 \\ 0 & 0 & -\tau\xi' \end{pmatrix}, 0, 0, 0\Big) = P_2 \in S^5, \ \xi' \in C$$

となる．$(\tau\xi')\xi' = 1, \xi' \in C$ であるから, $\xi' = e^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす θ を選び，P_2 に $\widetilde{\alpha}_{23}(-\theta)$ を施と,

$$\widetilde{\alpha}_{23}\big(-\theta\big)P_2 = (E_2 - E_3, 0, 0, 0) = P_3$$

となる．さらに P_3 に $\widetilde{\alpha}_{23}(\dfrac{\pi}{2})$ を施すと,

$$\widetilde{\alpha}_{23}\big(\frac{\pi}{2}\big)P_3 = (i(E_2 + E_3), 0, 0, 0) = i\dot{E}_{23}$$

を得る．よって，この働きは推移的である．$\dot{E}_{23}$ における群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}$ の固定化群は $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1},\dot{E}_{23}} = Sp(2)$ (命題 6.4.4, 6.4.5) $= Spin(5)$ である．したがって, 同相 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}/Spin(5) \simeq S^5$ を得る． □

† **命題 6.4.9.** $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}} \cong Spin(6)$.

証明. 群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}$ は連結 (補題 6.4.8) であるから, 準同型写像

$$\pi : (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}} \to SO(6) = SO(V^6), \ \pi(\alpha) = \alpha|V^6$$

が定義できる. $\mathrm{Ker}\varphi = \{1, \sigma\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である．さらに $\dim((((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}) = 15$(補題 4.3.6) $= \dim(\mathfrak{so}(6))$ であるから, π は全射である．よって, 群同型

$$(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(6)$$

を得る．したがって, 群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}$ は $SO(6)$ の 2 重被覆群として $Spin(6)$ に同型である． □

また群 $(E_7)^{\sigma,\gamma}$ の部分群

$$(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1} = \{\alpha \in (E_7)^{\kappa,\mu} \,|\, \gamma\alpha = \alpha\gamma, \alpha\dot{F}_1(he_4) = \dot{F}_1(he_4), \alpha\tilde{E}_1 = \tilde{E}_1\}$$

を考察しよう．

† **補題 6.4.10.** Lie 群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1}$ の Lie 環 $(((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1}$ は，つぎのようである：

$$\begin{aligned}&(((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1} \\ &= \left\{ \varPhi\Big(D_4 + \widetilde{A}_1(p) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & q \\ 0 & \overline{q} & -\varepsilon \end{pmatrix}^{\sim}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & ix \\ 0 & \overline{ix} & \tau\alpha \end{pmatrix}, -\tau\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & ix \\ 0 & \overline{ix} & \tau\alpha \end{pmatrix}, 0\Big) \;\middle|\; D_4 \in \mathfrak{so}(4) \subset \mathfrak{so}(8), \varepsilon \in \boldsymbol{R}, \alpha \in C, p, q, x \in \boldsymbol{H} \right\}.\end{aligned}$$

特に,
$$\dim((((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1}) = 21$$
である.

† **補題 6.4.11.** $a \in \boldsymbol{R}$ に対して, $\mathfrak{P}^C$ の写像 $\alpha_k(a), k = 2, 3$ を
$$\alpha_k(a)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + (\cos a - 1)p_k)X - 2(\sin a)E_k \times Y + \eta(\sin a)E_k \\ 2(\sin a)E_k \times X + (1 + (\cos a - 1)p_k)Y - \xi(\sin a)E_k \\ ((\sin a)E_k, Y) + (\cos a)\xi \\ (-(\sin a)E_k, X) + (\cos a)\eta \end{pmatrix}$$
で定義する. ここに $p_k : \mathfrak{J}^C \to \mathfrak{J}^C$ は
$$p_k(X) = (X, E_k)E_k + 4E_k \times (E_k \times X), \quad X \in \mathfrak{J}^C$$
である. このとき $\alpha_k \in E_7$ であり, $\alpha_2(a)$ と $\alpha_3(b)(a, b \in \boldsymbol{R})$ は可換である.

証明. $\varPhi_k(a) = \varPhi(0, aE_k, -aE_k, 0) \in \mathfrak{e}_7$ に対して, $\alpha_k(a) = \exp \varPhi_k(a) \in E_7$ である. また $[\varPhi_2(a), \varPhi_3(b)] = 0$ であるから, $\alpha_2(a)$ と $\alpha_3(b)$ は可換である. □

ここで 7 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 V^7 を
$$\begin{aligned} V^7 &= \{P \in \mathfrak{P}^C \mid \kappa P = P, \mu\tau\lambda P = P, \gamma P = P, \langle P, \tilde{E}_1\rangle = 0\} \\ &= \left\{ P = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & h \\ 0 & \overline{h} & -\tau\xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, -i\eta \right) \,\middle|\, \xi \in C,\ h \in \boldsymbol{H},\ \eta \in \boldsymbol{R} \right\} \end{aligned}$$
で定義し, ノルムを
$$(P, P)_\mu = \frac{1}{2}\{\mu P, P\} = (\tau\xi)\xi + \overline{h}h + \eta^2$$
で与える. このとき $S^6 = \{P \in V^7 \mid (P, P)_\mu = 1\}$ は 6 次元球面になる.

† **補題 6.4.12.** $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1}/Spin(6) \simeq S^6$.
特に, $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1}$ は連結である.

証明. 群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1}$ は S^6 に働く. この働きが推移的であることを示そう. そのために, 任意の $P \in S^6$ がある $\alpha \in (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1}$ により $\alpha P = (0, -iE_1, 0, i) \in S^6$ になることを示せばよい. 任意の元
$$P = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & h \\ 0 & \overline{h} & -\tau\xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, -i\eta \right) \in S^6$$
に対して, $\tan 2a = \dfrac{i2\eta}{\tau\xi - \xi}$ であるような $a \in \boldsymbol{R}, 0 \le a < \dfrac{\pi}{2}$ を選ぶ. (もし $\tau\xi - \xi = 0$ ならば, $a = \dfrac{\pi}{4}$ とする.) P に $\alpha_{23}(a) = \alpha_2(a)\alpha_3(a) = \exp(\varPhi(0, a(E_2 + E_3), -a(E_2 +$

$E_3), 0))$ (補題 6.4.11) $\in (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1}$(補題 6.4.10) を施と，$\alpha_{23}(a)P$ の $\eta-$ 項は $\dfrac{1}{2}$ $(\xi - \tau\xi)\sin 2a + i\eta\cos 2a = 0$ となるので，つぎの結果を得る：

$$\alpha_{23}(a)P = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & m \\ 0 & \overline{m} & -\tau\zeta \end{pmatrix}, 0, 0, 0\right) = P_1 \in S^5 \subset S^6.$$

群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}} (\subset (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1})$ は S^5 に推移的 に働く (補題 6.4.8) から，$\beta P_1 = (i(E_2 + E_3), 0, 0, 0) = P_2 \in S^5 \subset S^6$ であるような $\beta \in (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}}$ が存在するので, P_2 に $\alpha_{23}(-\dfrac{\pi}{4})$ を施すと,

$$\alpha_{23}\left(-\frac{\pi}{4}\right)P_2 = (0, -iE_1, 0, i) = -i\tilde{E}_{-1}$$

である．よって，この働きは推移的である．また群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1}$ の $\tilde{E}_{-1}$ での固定化群は $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1}} = Spin(6)$(命題 6.4.9) である．よって, 同相

$$(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1}/Spin(6) \simeq S^6$$

を得る．

† **命題 6.4.13.** $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1} \cong Spin(7)$.

証明. 群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1}$ が連結 (補題 6.4.12) であるから, 準同型写像

$$\pi : (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1} \to SO(7) = SO(V^7),\ \ \pi(\alpha) = \alpha|V^7$$

が定義できる．$\mathrm{Ker}\varphi = \{1, \sigma\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である． また $\dim((((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1}) = 21$ (補題 6.4.10) $= \dim(\mathfrak{so}(7))$ であるから，π は全射である．よって, 群同型

$$(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1}/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(7)$$

を得る．これより, 群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1}$ は $SO(7)$ の 2 重被覆群として $Spin(7)$ に同型である． □

また群 $(E_7)^{\sigma,\gamma}$ の部分群

$$(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)} = \{\alpha \in (E_7)^{\kappa,\mu} \,|\, \gamma\alpha = \alpha\gamma, \alpha\dot{F}_1(he_4) = \dot{F}_1(he_4)\}$$

を考察しよう．

† **補題 6.4.14.** Lie 群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}$ の Lie 環 $(((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}$ は，つぎのようである：

$$\begin{aligned}
&(((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)} \\
&= \left\{ \varPhi\left(D_4 + \widetilde{A}_1(p) + i\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & q \\ 0 & \overline{q} & \varepsilon_3 \end{pmatrix}^{\sim}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & x \\ 0 & \overline{x} & \alpha_3 \end{pmatrix}, -\tau\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & x \\ 0 & \overline{x} & \alpha_3 \end{pmatrix}, \right.\right. \\
&\left.\left. -\frac{3}{2}i\varepsilon_1\right) \;\middle|\; D_4 \in \mathfrak{so}(4) \subset \mathfrak{so}(8), \alpha_k \in C, p, q \in \boldsymbol{H}, x \in \boldsymbol{H}^C, \varepsilon_k \in \boldsymbol{R}, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

特に,
$$\dim((((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}) = 28$$
である.

以後, Lie 環 $(((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}$ の元を Φ_8 で表す.

† **補題 6.4.15.** $t \in \boldsymbol{R}$ に対して, 写像 $\alpha(t) : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{P}^C$ を

$$\begin{aligned}
&\alpha(t)(X, Y, \xi, \eta)\\
&= \left(\begin{pmatrix} e^{2it}\xi_1 & e^{it}x_3 & e^{it}\overline{x}_2 \\ e^{it}\overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ e^{it}x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-2it}\eta_1 & e^{-it}y_3 & e^{-it}\overline{y}_2 \\ e^{-it}\overline{y}_3 & \eta_2 & y_1 \\ e^{-it}y_2 & \overline{y}_1 & \eta_3 \end{pmatrix}, e^{-2it}\xi, e^{2it}\eta \right)
\end{aligned}$$

で定義する. このとき, $\alpha(t) \in (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}$ である.

証明. $\Phi = \Phi(2itE_1 \vee E_1, 0, 0, -2it) \in (((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}$ (補題 6.4.14) であるから, $\alpha(t) = \exp\Phi \in (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}$ を得る. ここに $E_1 \vee E_1 = \dfrac{1}{3}(2E_1 - E_2 - E_3)^{\sim}$ である. □

また, ここで 8 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 V^8 を

$$\begin{aligned}
V^8 \ &= \ \{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, \kappa P = P, \mu\tau\lambda P = P, \gamma P = P\}\\
&= \left\{ P = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & h \\ 0 & \overline{h} & -\tau\xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \tau\eta \right) \;\middle|\; \xi, \eta \in C,\ h \in \boldsymbol{H} \right\}
\end{aligned}$$

で定義し, ノルムを
$$(P, P)_\mu = \frac{1}{2}\{\mu P, P\} = (\tau\xi)\xi + \overline{h}h + (\tau\eta)\eta$$
で与える. このとき $S^7 = \{P \in V^8 \,|\, (P, P)_\mu = 1\}$ は 7 次元球面になる.

† **補題 6.4.16.** $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}/Spin(7) \simeq S^7$.
特に, $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}$ は連結である.

証明 群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}$ は S^7 に働く. この働きが推移的であることを示そう. そのために, 任意の元 $P \in S^7$ がある $\alpha \in (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}$ により $\alpha P = (0, E_1, 0, 1) \in S^7$ になることを示せばよい. 任意の元

$$P = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & h \\ 0 & \overline{h} & -\tau\xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \tau\eta \right) \in S^7$$

に対して, $e^{-2it}\eta \in i\boldsymbol{R}$ を満たす $t \in \boldsymbol{R}$ を選び, P に $\alpha(t)$(補題 6.4.15)$\in (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}$ を作用させる. このとき

$$\alpha(t)P = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & h \\ 0 & \overline{h} & -\tau\xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\eta' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, -\eta' \right) = P_1 \in S^6 \subset S^7,\ \eta' \in \boldsymbol{R}$$

となる．群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1}(\subset (((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)})$ が S^6 に推移的に働く (補題 6.4.12) から, $\beta P_1=(0,-iE_1,0,i)=P_2\in S^6\subset S^7$ であるような $\beta\in(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1}$ が存在する．P_2 に $\alpha(-\dfrac{\pi}{4})$ (補題 6.4.15) を施すと,

$$\alpha\big(-\frac{\pi}{4}\big)P_2=(0,E_1,0,1)=\tilde{E}_1$$

を得る．よって，この働きは推移的である．また群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}$ の $\tilde{E}_1$ における固定化群は $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4),\tilde{E}_1}=Spin(7)$ (命題 6.4.13) である．したがって, 同相

$$(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}/Spin(7)\simeq S^7$$

を得る． □

† **命題 6.4.17.** $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}\cong Spin(8)$.

証明. 群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}$ が連結 (補題 6.4.16) であるから, 準同型写像

$$\pi:(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}\to SO(8)=SO(V^8),\ \ \pi(\alpha)=\alpha|V^8$$

が定義できる．$\mathrm{Ker}\varphi=\{1,\sigma\}=\boldsymbol{Z}_2$ は容易である．$\dim((((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)})=28$(補題 6.4.14) $=\dim(\mathfrak{so}(8))$ であるから, π は全射である．よって, 群同型

$$(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}/\boldsymbol{Z}_2\cong SO(8)$$

を得る．これより, 群 $((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}$ は $SO(8)$ の 2 重被覆群として $Spin(8)$ に同型である． □

この結果，群 $(E_7)^{\sigma,\gamma}$ に $Spin(8)$ と同型な部分群 $(((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}$ が構成された．

そこで, 準備の最後に群 $(E_7)^{\sigma,\gamma}$ の部分群

$$((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma}=\{\alpha\in(E_7)^{\kappa,\mu}\,|\,\gamma\alpha=\alpha\gamma\}$$

の群構造を調べよう．

† **補題 6.4.18.** Lie 群 $((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma}$ の Lie 環 $((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma}$ は，つぎのようである：

$$\begin{aligned}
&((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma}\\
&=\left\{\varPhi\Bigg(D_4+D_4'+\widetilde{A}_1(p)+i\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0\\0&\varepsilon_2&q\\0&\bar{q}&\varepsilon_3\end{pmatrix}^{\sim},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\alpha_2&x\\0&\overline{x}&\alpha_3\end{pmatrix}\right.\\
&\left.-\tau\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\alpha_2&x\\0&\overline{x}&\alpha_3\end{pmatrix},-\frac{3}{2}i\varepsilon_1\Bigg)\ \middle|\ D_4,D_4'\in\mathfrak{so}(4)\subset\mathfrak{so}(8),\alpha_k\in C,p,q\in\boldsymbol{H},\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\left. x\in\boldsymbol{H}^C,\varepsilon_k\in\boldsymbol{R},\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=0\right\}.
\end{aligned}$$

特に,

$$\dim(((\mathfrak{e}_7)^{\kappa,\mu})^\gamma) = 34$$

である.

† **命題 6.4.19.** $((E_7)^{\kappa,\mu})^\gamma \cong (Spin(4) \times Spin(8))/\boldsymbol{Z}_2,\ \boldsymbol{Z}_2 = \{(1,1),(-1,\,-1)\}$.

証明. $Spin(4) = Sp(1) \times Sp(1) = (((E_7)^{\kappa,\mu})^\gamma)_{\dot{F}_1(h),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1},\dot{E}_{23}}$ (命題 6.4.1, 6.4.3), $Spin(8) = (((E_7)^{\kappa,\mu})^\gamma)_{\dot{F}_1(he_4)}$ (命題 6.4.17) とする．写像 $\psi_1 : Spin(4) \times Spin(8) \to ((E_7)^{\kappa,\mu})^\gamma$ を

$$\psi_1(\alpha,\beta) = \alpha\beta$$

で定義する．このとき, $\psi_1(\alpha,\beta) \in ((E_7)^{\kappa,\mu})^\gamma$ は明らかである．$\varPhi_4 \in \mathfrak{spin}(4)$ (補題 6.4.2), $\varPhi_8 \in \mathfrak{spin}(8)$ (補題 6.4.14) に対して, $[\varPhi_4, \varPhi_8] = 0$ であるから, $\alpha\beta = \beta\alpha$ を得る．よって, ψ_1 は準同型写像である．また $\mathrm{Ker}\psi_1 = \{(1,1),(-1,-1)\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である．群 $((E_7)^{\kappa,\mu})^\gamma (\cong (Spin(12))^\gamma)$ (命題 6.2.3) は連結かつ $\dim(((E_7)^{\kappa,\mu})^\gamma) = 34$ (補題 6.4.18)$= 6 + 28 = \dim(\mathfrak{spin}(4) \oplus \mathfrak{spin}(8))$ であるから, ψ_1 は全射である．よって, 群同型 $(Spin(4) \times Spin(8))/\boldsymbol{Z}_2 \cong ((E_7)^{\kappa,\mu})^\gamma$ を得る. □

以上の準備とつぎの補題を用いて標記の群 $(E_7)^{\sigma,\gamma} = (E_7)^\sigma \cap (E_7)^\gamma = ((E_7)^\sigma)^\gamma = ((E_7)^\gamma)^\sigma$ の群構造を決定しよう.

† **補題 6.4.20.** Lie 群 $(E_7)^{\sigma,\gamma}$ の Lie 環 $(\mathfrak{e}_7)^{\sigma,\gamma}$ は，つぎのようである：

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{e}_7)^{\sigma,\gamma}\\ &= \left\{ \varPhi\Bigl(D_4 + D'_4 + \widetilde{A}_1(p) + i\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & q \\ 0 & \bar{q} & \varepsilon_3 \end{pmatrix}^{\sim}, \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & x \\ 0 & \overline{x} & \alpha_3 \end{pmatrix}, -\tau\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & x \\ 0 & \overline{x} & \alpha_3 \end{pmatrix},\right.\\ &\left.\nu\Bigr) \,\middle|\, D_4, D'_4 \in \mathfrak{so}(4) \subset \mathfrak{so}(8), \alpha_k \in C, p, q \in \boldsymbol{H}, x \in \boldsymbol{H}^C, \varepsilon_k \in \boldsymbol{R}, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \nu \in i\boldsymbol{R} \right\}.\end{aligned}$$

特に,

$$\dim((\mathfrak{e}_7)^{\sigma,\gamma}) = 37$$

である.

† **定理 6.4.21.** $(E_7)^{\sigma,\gamma} \cong (SU(2) \times Spin(4) \times Spin(8))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2),\ \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2 = \{(E,1,1), (E,\sigma,\sigma)\} \times \{(E,1,1),(-E,\gamma,-\sigma\gamma)\}$.

証明. $SU(2)$(命題 6.2.5), $Spin(4) = (((E_7)^{\kappa,\mu})^\gamma)_{\dot{F}_1(h),\tilde{E}_1,\tilde{E}_{-1},\dot{E}_{23}}$(命題 6.4.1, 6.4.3), $Spin(8) = (((E_7)^{\kappa,\mu})^\gamma)_{\dot{F}_1(he_4)}$(命題 6.4.17) とする．写像 $\varphi : SU(2) \times Spin(4) \times Spin(8) \to (E_7)^{\sigma,\gamma}$ を

$$\varphi(A,\alpha,\beta) = \phi_1(A)\alpha\beta$$

で定義する．このとき $\varphi(A,\alpha,\beta) \in (E_7)^{\sigma,\gamma}$ は明らかである．命題 6.2.5, 6.4.19 から, φ は準同型写像である．φ の全射を示そう．$\rho \in (E_7)^{\sigma,\gamma}$ とする．$(E_7)^{\sigma,\gamma} \subset (E_7)^\sigma$ であるから,

$\rho = \varphi_1(A, \delta)$ を満たす $A \in SU(2), \delta \in Spin(12)$ が存在する (命題 6.2.5). $\gamma\rho\gamma = \rho$ から, $\phi_1(A)(\gamma\delta\gamma) = \phi_1(A)\delta$ を得る．よって,

$$\begin{cases} A = A \\ \gamma\delta\gamma = \delta \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} A = -A \\ \gamma\delta\gamma = -\sigma\delta \end{cases}$$

である．後者の場合は，$A = 0$ であるからおこり得ない．前者の場合は, 命題 6.4.19 から, $\delta = \psi_1(\alpha, \beta)$ を満たす $\alpha \in Spin(4), \beta \in Spin(8)$ が存在する．よって,

$$\rho = \varphi_1(A, \delta) = \phi_1(A)\delta = \phi_1(A)\psi_1(\alpha, \beta) = \phi_1(A)\alpha\beta = \varphi(A, \alpha, \beta)$$

を得るから，φ_1 は全射である．また

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\varphi &= \{(E,1,1), (E,\sigma,\sigma), (-E,\gamma,-\sigma\gamma), (-E,\sigma\gamma,-\gamma)\} \\ &= \{(E,1,1), (E,\sigma,\sigma)\} \times \{(E,1,1), (-E,\gamma,-\sigma\gamma)\} \\ &= \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2 \end{aligned}$$

は容易である．したがって, 群同型 $(SU(2) \times Spin(4) \times Spin(8))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2) \cong (E_7)^{\sigma,\gamma}$ を得る． □

6.5 E_7 の対合的自己同型写像 $\sigma, \sigma', \gamma, \gamma', \iota$ と極大トーラス

C-線形写像 $\iota : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{P}^C$ を $\iota(X, Y, \xi, \eta) = (-iX, iY, -i\xi, i\eta)$ で定義する．そのほかの記号等は，6.2 節を参照.

補題 6.5.1　写像 $\psi_7 : (U(1) \times U(1) \times SU(6)) \cdot \boldsymbol{Z}_2 \to (E_7)^{\gamma,\gamma'}$ は

$$\sigma = \psi_7((1,1,F_{1,-1}),1), \sigma' = \psi_7((1,1,F_{-1,1}),1), \iota = \psi_7((1,1,F_{e_1}),1)$$

を満たす．ここに，$F_{1,-1} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,1,-1,-1), F_{-1,1} = \mathrm{diag}(-1,-1,1,-1,-1,1)$, $F_{e_1} = \mathrm{diag}(e_1,e_1,e_1,-e_1,-e_1,-e_1) \in SU(6)$ である. (写像 ψ_7 に関しては，定理 6.2.14 参照)

さて群 $((E_7)^{\gamma,\gamma',\sigma,\sigma',\iota})^0 = (((E_7)^{\gamma,\gamma'})^{\sigma,\sigma',\iota})^0$ の群構造を決定しよう.

† 定理 6.5.2　　$((E_7)^{\gamma,\gamma',\sigma,\sigma',\iota})^0 \cong U(1)^{\times 7}$.

証明.　$\alpha \in (E_7)^{\gamma,\gamma',\sigma,\sigma',\iota} \subset (E_7)^{\gamma,\gamma'}$ に対して，$p, q \in U(1)$，$A \in SU(6)$ が存在して, $\alpha = \psi_7((p,q,A),1)$ または $\alpha = \psi_7((p,q,A),\gamma_1)$ (定理 6.2.14) を満たす．$\alpha = \psi_7((p,q,A),1)$ の場合, 補題 6.5.1 および条件 $\sigma\alpha\sigma = \alpha, \sigma'\alpha\sigma' = \alpha$ かつ $\iota\alpha\iota^{-1} = \alpha$ から,

$$\psi_7((p,q,F_{1,-1}AF_{1,-1}),1) = \psi_7((p,q,A),1), \psi_7((p,q,F_{-1,1}AF_{-1,1}),1) = \psi_7((p,q,A),1)$$

かつ

$$\psi_7((p,q,F_{e_1}A{F_{e_1}}^{-1}),1) = \psi_7((p,q,A),1)$$

を得る．よって,

$$\text{(i)} \begin{cases} p = p \\ q = q \\ F_{1,-1}AF_{1,-1} = A, \end{cases} \quad \text{(ii)} \begin{cases} p = \omega_1 p \\ q = \omega_1 q \\ F_{1,-1}AF_{1,-1} = \omega_1 A, \end{cases} \quad \text{(iii)} \begin{cases} p = {\omega_1}^2 p \\ q = {\omega_1}^2 q \\ F_{1,-1}AF_{1,-1} = {\omega_1}^2 A, \end{cases}$$

(iv) $\begin{cases} p = p \\ q = q \\ F_{-1,1}AF_{-1,1} = A, \end{cases}$ (v) $\begin{cases} p = \omega_1 p \\ q = \omega_1 q \\ F_{-1,1}AF_{-1,1} = \omega_1 A, \end{cases}$ (vi) $\begin{cases} p = {\omega_1}^2 p \\ q = {\omega_1}^2 q \\ F_{-1,1}AF_{-1,1} = {\omega_1}^2 A. \end{cases}$

かつ

(vii) $\begin{cases} p = p \\ q = q \\ F_{e_1}A{F_{e_1}}^{-1} = A, \end{cases}$ (viii) $\begin{cases} p = \omega_1 p \\ q = \omega_1 q \\ F_{e_1}A{F_{e_1}}^{-1} = \omega_1 A, \end{cases}$ (ix) $\begin{cases} p = {\omega_1}^2 p \\ q = {\omega_1}^2 q \\ F_{e_1}A{F_{e_1}}^{-1} = {\omega_1}^2 A. \end{cases}$

$p \neq 0$ かつ $q \neq 0$ より (ii), (iii), (v), (vi), (viii), (ix) はおこり得ない．よって，$p, q \in U(1)$, $A \in S(U(1)^{\times 6})$ を得る．ここで写像 $U(1)^{\times 5} \to S(U(1)^{\times 6})$,

$$h(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5})$$

が同型写像であるから, 条件 $\alpha = \psi_7((p, q, A), 1)$ を満たす群は $(U(1)^{\times 7})/\boldsymbol{Z}_3$ である．$\alpha = \psi_7((p, q, A), \gamma_1)$ の場合は, 条件 $\psi_7((p, q, A), \gamma_1) = \psi_7((p, q, A),\ 1)\gamma_1, \psi_7((1, 1, F_{1,-1}), 1)\gamma_1 = \gamma_1\psi_7((1, 1, F_{1,-1}), 1), \psi_7((1, 1, F_{-1,1}), 1)\gamma_1 = \gamma_1\psi_7((1,\ 1, F_{-1,1}), 1)$ かつ $\psi_7((1, 1, F_{e_1}), 1)\gamma_1 = \gamma_1\psi_7((1, 1, F_{e_1}), 1)$ から, この場合も前の場合と同じ結果を得る．よって，群同型 $(E_7)^{\gamma, \gamma', \sigma, \sigma', \iota} \cong ((U(1)^{\times 7})/\boldsymbol{Z}_3) \cdot \boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_3 = \{(1)^{\times 7}, (w_1)^{\times 7}, ({w_1}^2)^{\times 7}\}$ を得る．また群 $(U(1)^{\times 7})/\boldsymbol{Z}_3$ はトーラス $U(1)^{\times 7}$ に同型であるから, 群同型 $(E_7)^{\gamma, \gamma', \sigma, \sigma', \iota} \cong (U(1)^{\times 7}) \cdot \boldsymbol{Z}_2$ を得る．したがって，この定理の同型を得る． □

6.6 E_7 の対合的自己同型写像 σ' による $Spin(11), Spin(12)$ の分解

まず $Spin(11)$ の分解を考察しよう．そこで $Spin(11)$ に $Spin(3)$ と同型な部分群を構成したい．そのために $Spin(11)$ の部分群

$$((Spin(10))^{\sigma'})_{F_1(x)} = \{\alpha \in Spin(10) \,|\, \sigma'\alpha = \alpha\sigma',\ \alpha F_1(x) = F_1(x)\}$$

の群構造を調べることから始めよう．

† **命題 6.6.1.** $((Spin(10))^{\sigma'})_{F_1(x)} \cong Spin(2)$

証明. $Spin(10) \cong (E_6)_{E_1}$(命題 5.2.4), $Spin(2) = U(1) = \{\nu \in C \,|\, (\tau\nu)\nu = 1\}$ とする．写像 $\phi_2 : Spin(2) \to ((Spin(10))^{\sigma'})_{F_1(x)}$ を命題 5.2.2 の写像 ϕ_2 とする．$\phi_2(\nu) \in ((Spin(10))^{\sigma'})_{F_1(x)}$ は明らかである．ϕ_2 の全射を示そう．$((Spin(10))^{\sigma'})_{F_1(x)} \subset (Spin(10))^{\sigma'}$ であるから, $\alpha \in ((Spin(10))^{\sigma'})_{F_1(x)}$ に対して, $\alpha = \varphi(\nu, \beta)$ を満たす $\nu \in Spin(2)$,$\beta \in Spin(8)$ が存在する (命題 5.2.5)．さらに, $\alpha F_1(x) = F_1(x), \phi_2(\nu)F_1(x) = F_1(x)$ から $\beta F_1(x) = F_1(x)$ を得る．よって, 3 対原理から $\beta = (1, 1, 1)$，または $(1, -1, -1) = \sigma$ となる．よって, $\alpha = \phi_2(\nu)$, または $\phi_2(\nu)\sigma$ である．しかし, 後者の場合は, $\sigma = \phi_2(-1)$ から, $\alpha = \phi_2(\nu)\phi_2(-1) = \phi_2(-\nu)$ である．よって, ϕ_2 は全射である．また $\mathrm{Ker}\,\phi_2 = \{1\}$ は容易である．したがって，群同型 $Spin(2) \cong ((Spin(10))^{\sigma'})_{F_1(x)}$ を得る． □

つぎに群 $(E_7)^{\kappa, \mu}$ の 2 つの部分群

$$((E_7)^{\kappa,\mu})_{(0,E_1,0,1)} = \{\alpha \in (E_7)^{\kappa,\mu} \,|\, \alpha(0, E_1, 0, 1) = (0, E_1, 0, 1)\},$$

$$((E_7)^{\kappa,\mu})_{(0,E_1,0,1),(0,-E_1,0,1)} = \left\{ \alpha \in (E_7)^{\kappa,\mu} \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha(0, E_1, 0, 1) = (0, E_1, 0, 1), \\ \alpha(0, -E_1, 0, 1) = (0, -E_1, 0, 1) \end{array} \right\}$$

を考察しよう．

† **命題 6.6.2.** (1) $((E_7)^{\kappa,\mu})_{(E_1,0,1,0)} = ((E_7)^{\kappa,\mu})_{(0,E_1,0,1)}$.

(2) $((E_7)^{\kappa,\mu})_{(E_1,0,1,0),(E_1,0,-1,0)} = ((E_7)^{\kappa,\mu})_{(0,E_1,0,1),(0,-E_1,0,1)}$.

証明. (1) $\alpha \in ((E_7)^{\kappa,\mu})_{(E_1,0,1,0)}$ に対して, $\alpha(0,E_1,0,1) = \alpha\mu(E_1,0,1,0) = \mu\alpha(E_1,0,1,0) = \mu(E_1,0,1,0) = (0,E_1,0,1)$ を得る．よって, $\alpha \in ((E_7)^{\kappa,\mu})_{(0,E_1,0,1)}$. 逆は同様に証明できる．

(2) (1) と同様に証明される． □

命題 6.6.3. ([56]) $((E_7)^{\kappa,\mu})_{(0,E_1,0,1),(0,-E_1,0,1)} = (E_6)_{E_1} (\cong Spin(10))$.

証明. $\alpha \in E_7$ が $\alpha(0,E_1,0,1) = (0,E_1,0,1), \alpha(0,-E_1,0,1) = (0,-E_1,0,1)$ を満たすならば, $\alpha(0,0,0,1) = (0,0,0,1), \alpha(0,E_1,0,0) = (0,E_1,0,0)$ を得る．このはじめの条件から, $\alpha \in E_6$ がわかる．さらに, つぎの条件から, $\alpha \in (E_6)_{E_1} \cong Spin(10)$ を得る．写像 κ, μ が E_1 を用いて定義されていることから，逆は自明である． □

命題 6.6.4. ([45],[56]) $((E_7)^{\kappa,\mu})_{(0,E_1,0,1)} \cong Spin(11)$.

証明. 11 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 V^{11} を

$$
\begin{aligned}
V^{11} &= \{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, \kappa P = P, \mu\tau\lambda P = P, P \times (0,E_1,0,1) = 0\} \\
&= \left\{ P = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & x \\ 0 & \overline{x} & -\tau\xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \tau\eta \right) \;\middle|\; x \in \mathfrak{C}, \xi \in C, \eta \in i\boldsymbol{R} \right\}
\end{aligned}
$$

で定義し，ノルムを

$$(P,P)_\mu = \frac{1}{2}\{\mu P, P\} = (\tau\eta)\eta + \overline{x}x + (\tau\xi)\xi$$

で与える．$SO(11) = SO(V^{11})$ とする．よって, 群同型

$$((E_7)^{\kappa,\mu})_{(0,E_1,0,1)}/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(11), \ \boldsymbol{Z}_2 = \{1,\sigma\}$$

を得る．これより，$((E_7)^{\kappa,\mu})_{(0,E_1,0,1)}$ は $SO(11)$ の 2 重被覆群として $Spin(11)$ に同型である． □

ここで $Spin(11)$ の部分群

$$((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)} = \left\{ \alpha \in (Spin(11))^{\sigma'} \;\middle|\; \alpha(0,F_1(y),0,0) = (0,F_1(y),0,0), \ y \in \mathfrak{C} \right\}$$

を考察しよう．

† **補題 6.6.5.** Lie 群 $((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ の Lie 環 $((\mathfrak{spin}(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ は，つぎのようである：

$$
\begin{aligned}
&((\mathfrak{spin}(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)} \\
&= \left\{ \varPhi\left(i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}^{\sim}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \tau\rho \end{pmatrix}, -\tau \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \tau\rho \end{pmatrix}, 0 \right) \;\middle|\; \varepsilon \in \boldsymbol{R}, \rho \in C \right\}.
\end{aligned}
$$

特に,
$$\dim(((\mathfrak{spin}(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}) = 3$$
である.

† **補題 6.6.6.** $((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}/Spin(2) \simeq S^2$.
特に, $((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ は連結である.

証明. 3 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 W^3 を

$$\begin{aligned} W^3 &= \{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, \kappa P = -P,\, \mu\tau\lambda P = -P,\, \sigma' P = P, P \times (E_1, 0, 1, 0) = 0\} \\ &= \left\{ P = \left(\begin{pmatrix} i\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & -\tau\eta \end{pmatrix}, -i\xi, 0 \right) \,\middle|\, \xi \in \boldsymbol{R},\, \eta \in C \right\} \end{aligned}$$

で定義し，ノルムを
$$(P, P)_\mu = -\frac{1}{2}\{\mu P, P\} = \xi^2 + (\tau\eta)\eta$$
で与える．このとき $S^2 = \{P \in W^3 \,|\, (P,P)_\mu = 1\}$ は 2 次元球面になる． そして，群 $((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ は S^2 に働く．この働きが推移的であることを示そう．そのためには，任意の元 $P \in S^2$ がある $\alpha \in (((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)})$ により $\alpha P = (-iE_1, 0, i, 0) \in S^2$ となることを示すとよい．任意の元

$$P = \left(\begin{pmatrix} i\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ も\,0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & -\tau\eta \end{pmatrix}, -i\xi, 0 \right) \in S^2$$

に対して，$\tan 2a = -\dfrac{2i\xi}{\tau\eta - \eta}$ を満たす $a \in \boldsymbol{R}, 0 \le a < \dfrac{\pi}{2}$ を選び (もし $\tau\eta - \eta = 0$ ならば, $a = \dfrac{\pi}{4}$ とする), P に $\alpha_{23}(a) = \alpha_2(a)\alpha_3(a)$(補題 4.4.11) $= \exp(\varPhi(0, a(E_2 + E_3), -a(E_2 + E_3), 0))$ $\in (((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)})$(補題 6.6.5) を施す．このとき $\alpha_{23}(a)P$ の ξ-項は $-((\cos 2a)(i\xi) + \dfrac{1}{2}(\sin 2a)(\tau\eta - \eta)) = 0$ となる．よって，

$$\alpha_{23}(a)P = \left(0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & -\tau\zeta \end{pmatrix}, 0, 0\right) = P_1, \quad \zeta \in C,\ (\tau\zeta)\zeta = 1.$$

$(\tau\zeta)\zeta = 1, \zeta \in C$ から, $\zeta = e^{i\theta}, 0 \le \theta < 2\pi$ とおくことができる．そこで $\nu = e^{-i\frac{\theta}{2}}$ とおいて, P_1 に $\phi_2(\nu) \in ((Spin(10))^{\sigma'})_{F_1(x)}$ (命題 6.6.1) $(\subset ((Spin(11)^{\sigma'})_{(0,F_1(x),0,0)})$ を施すと,

$$\phi_2(\nu)P_1 = (0, E_2 - E_3, 0, 0) = P_2$$

となる．さらに P_2 に $\phi_2(e^{i\frac{\pi}{4}})$ を施すと

$$\phi_2(e^{i\frac{\pi}{4}})P_2 = (0, i(E_2 + E_3), 0, 0) = P_3$$

となる．再び P_3 に $\alpha_{23}(\dfrac{\pi}{4})$ を施す．このとき

$$\alpha_{23}(\frac{\pi}{4})P_3 = (-iE_1, 0, i, 0)$$

となり，この働きが推移的であることが示された．群 $((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ の $(-iE_1, 0, i, 0)$ における固定化群が，$((Spin(10))^{\sigma'})_{F_1(y)}$ (命題 6.6.2(2), 6.6.3, 6.6.4) $= Spin(2)$(命題 6.6.1) であるから，同相 $((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}/Spin(2) \simeq S^2$ を得る．$Spin(2), S^2$ が連結であることより，群 $((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ も連結である． □

† **命題 6.6.7.** $((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)} \cong Spin(3)$.

証明. 群 $((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ は連結 (補題 6.6.6) であるから, 準同型写像

$$\pi : ((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)} \to SO(3) = SO(W^3),\ \ \pi(\alpha) = \alpha|W^3$$

が定義できる．$\mathrm{Ker}\,\pi = \{1, \sigma\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である．また $\dim(((\mathfrak{spin}(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}) = 3$ (補題 6.6.5) $= \dim(\mathfrak{so}(3))$ であるから, π は全射である．よって, 群同型

$$((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(3)$$

を得る．これより, $((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ は $SO(3)$ の 2 重被覆群として $Spin(3)$ に同型である． □

以上の準備により標記の群 $(Spin(11))^{\sigma'}$ の群構造を決定しよう.

† **補題 6.6.8.** Lie 群 $(Spin(11))^{\sigma'}$ の Lie 環 $(\mathfrak{spin}(11))^{\sigma'}$ は，つぎのようである：

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{spin}(11))^{\sigma'} \\
&= \left\{ \varPhi\Big(D + i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}^{\sim}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \tau\rho \end{pmatrix}, -\tau\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \tau\rho \end{pmatrix}, 0\Big) \,\middle|\, D \in \mathfrak{so}(8), \varepsilon \in \boldsymbol{R}, \rho \in C \right\}.
\end{aligned}$$

特に,

$$\dim((\mathfrak{spin}(11))^{\sigma'}) = 28 + 3 = 31$$

である.

† **定理 6.6.9.** $(Spin(11))^{\sigma'} \cong (Spin(3) \times Spin(8))/\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2 = \{(1, 1), (-1, \sigma)\}$.

証明. $Spin(11) = ((E_7)^{\kappa,\mu})_{(0,E_1,0,1)}$ (命題 6.6.4)，$Spin(3) = ((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ (命題 6.6.7), $Spin(8) = ((F_4)_{E_1})^{\sigma'}$(命題 4.3.4)$\subset ((E_6)_{E_1})^{\sigma'} = (((E_7)^{\kappa,\mu})_{(E_1,0,1,0),(E_1,0,-1,0)})^{\sigma'}$ $\subset (((E_7)^{\kappa,\mu})_{(E_1,0,1,0)})^{\sigma'}$ とする．写像 $\varphi{:}Spin(3) \times Spin(8) \to (Spin(11))^{\sigma'}$ を

$$\varphi(\alpha, \beta) = \alpha\beta$$

で定義する．$\varphi(\alpha,\beta) \in (Spin(11))^{\sigma'}$ である．$\varPhi_D = \varPhi(D,0,0,0) \in \mathfrak{spin}(8)$, $\varPhi_3 \in \mathfrak{spin}(3) = ((\mathfrak{spin}(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ (命題 6.6.7) に対して，$[\varPhi_D, \varPhi_3] = 0$ より $\alpha\beta = \beta\alpha$ であるから，φ は準同型写像である．また $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{(1,1),(-1,\sigma)\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である．$(Spin(11))^{\sigma'}$ は連結かつ $\dim(\mathfrak{spin}(3) \oplus \mathfrak{spin}(8)) = 3$ (補題 6.5.5) $+ 28 = 31 = \dim((\mathfrak{spin}(11))^{\sigma'})$ (補題 6.6.8) であるから, φ は全射である．よって，群同型 $(Spin(3) \times Spin(8))/\boldsymbol{Z}_2 \cong (Spin(11))^{\sigma'}$ を得る．

□

つぎに $Spin(12)$ の分解を考えよう．そこで $Spin(12)$ に $Spin(4)$ と同型な部分群を構成したい．そのために $Spin(12)$ の部分群

$$((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)} = \Big\{\alpha \in (Spin(12))^{\sigma'} \;\Big|\; \alpha(0,F_1(y),0,0) = (0,F_1(y),0,0)\ ,\ y \in \mathfrak{C}\Big\}$$

を考察しよう．

† **補題 6.6.10.** Lie 群 $((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ の Lie 環 $((\mathfrak{spin}(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ は，つぎのようである：

$$\begin{aligned}
&((\mathfrak{spin}(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)} \\
&= \left\{ \varPhi\Big(i\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}^{\sim}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}, -\tau\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}, -\frac{3}{2}i\varepsilon_1\Big) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \Bigg|\ \varepsilon_i \in \boldsymbol{R},\ \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = 0,\ \rho_i \in C \right\}.
\end{aligned}$$

特に,

$$\dim(((\mathfrak{spin}(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}) = 6$$

である．

† **補題 6.6.11.** $((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}/Spin(3) \simeq S^3$.
特に, $((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ は連結である．

証明. 4 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 W^4 を

$$\begin{aligned}
W^4 &= \{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, \kappa P = -P, \mu\tau\lambda P = -P, \sigma' P = P\} \\
&= \left\{ P = \Big(\begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & -\tau\eta \end{pmatrix}, \tau\xi, 0\Big) \;\Bigg|\; \xi,\eta \in C \right\}
\end{aligned}$$

で定義し，ノルムを

$$(P,P)_\mu = -\frac{1}{2}\{\mu P, P\} = (\tau\xi)\xi + (\tau\eta)\eta$$

で与える．このとき，$S^3 = \{P \in W^4 \,|\, (P,P)_\mu = 1\}$ は 3 次元球面になる．そして，群 $((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ は S^3 に働く．この働きが推移的であることを示そう．そのため

には, 任意の元 $P \in S^3$ がある $\alpha \in ((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ により $\alpha P = (E_1, 0, 1, 0) \in S^3$ となることを示せばよい．任意の元

$$P = \Bigl(\begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & -\tau\eta \end{pmatrix}, \tau\xi, 0 \Bigr) \in S^3$$

に対して，$e^{2it}\xi \in i\boldsymbol{R}$ であるような $t \in \boldsymbol{R}$ を選び，P に $\alpha(t)$ (補題 6.4.15) を施すとき,

$$\alpha(t)P = P_1 \in S^2 \subset S^3$$

となる．群 $((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ $(\subset ((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)})$ は S^2 に推移的に働く (補題 6.6.6) から, $\beta \in ((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ 存在して

$$\beta P_1 = (-iE_1, 0, i, 0) = P_2$$

となる．再び，P_2 に $\alpha(\dfrac{\pi}{4})$ を施すと,

$$\alpha(\frac{\pi}{4})P_2 = (E_1, 0, 1, 0)$$

となり，この働きが推移的であることが示された．群 $((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ の $(E_1, 0, 1, 0)$ における固定化群は $((Spin(11))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ (命題 6.2.3, 6.6.2(1), 6.6.4) $= Spin(3)$ (命題 6.6.7) であるから，同相 $((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}/Spin(3) \simeq S^3$ を得る．$Spin(3), S^3$ が連結であることより，群 $((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ も連結である． □

† **命題 6.6.12.** $((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)} \cong Spin(4)$.

証明. 群 $((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ は連結 (補題 6.6.11) であるから, 準同型写像

$$\pi : ((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)} \to SO(4) = SO(W^4), \;\; \pi(\alpha) = \alpha | W^4$$

が定義できる．$\operatorname{Ker}\pi = \{1, \sigma\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である．また $\dim((\mathfrak{spin}(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}) = 6$ (補題 6.6.10) $= \dim(\mathfrak{so}(4))$ であるから, π は全射である．よって, 群同型

$$((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(4)$$

を得る．これから, $((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ は $SO(4)$ の 2 重被覆群として $Spin(4)$ に同型である． □

上の補題，命題を用いて標記の群 $(Spin(12))^{\sigma'}$ の群構造を決定しよう．

† **補題 6.6.13.** Lie 群 $(Spin(12))^{\sigma'}$ の Lie 環 $(\mathfrak{spin}(12))^{\sigma'}$ は，つぎのようである：

$$(\mathfrak{spin}(12))^{\sigma'}$$

$$= \Bigl\{ \varPhi\Bigl(D + i\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}^{\sim}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}, -\tau \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}, -i\frac{3}{2}\varepsilon_1 \Bigr) \;\Bigm|\; D \in \mathfrak{so}(8), \varepsilon_i \in \boldsymbol{R}, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \rho_i \in C \Bigr\}.$$

特に

$$\dim((\mathfrak{spin}(12))^{\sigma'}) = 28 + 6 = 34$$

である．

† **定理 6.6.14.** $(Spin(12))^{\sigma'} \cong (Spin(4) \times Spin(8))/\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_2 = \{(1,1), (-1,\sigma)\}$.

証明. $Spin(12) = (E_7)^{\kappa,\mu}$(命題 6.2.3), $Spin(4) = ((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$(命題 6.6.12), $Spin(8) = ((F_4)_{E_1})^{\sigma'}$(命題 4.3.4, 定理 4.5.1) $\subset ((E_6)_{E_1})^{\sigma'} = (((E_7)^{\kappa,\mu})_{(E_1,0,1,0),(E_1,0,-1,0)})^{\sigma'}$ $\subset ((E_7)^{\kappa,\mu})^{\sigma'}$ とする．写像 $\varphi : Spin(4) \times Spin(8) \to (Spin(12))^{\sigma'}$ を

$$\varphi(\alpha, \beta) = \alpha\beta$$

で定義する．$\varphi(\alpha,\beta) \in (Spin(12))^{\sigma'}$ は明らかである．$\Phi_D = \Phi_(D,0,0,0) \in \mathfrak{spin}(8)$, $\Phi_4 \in \mathfrak{spin}(4) = ((\mathfrak{spin}(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ (命題 6.6.12) に対して，$[\Phi_D, \Phi_4] = 0$ であるから $\alpha\beta = \beta\alpha$ を得る．よって，φ は準同型写像である．$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{(1,1), (-1,\sigma)\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である．群 $(Spin(12))^{\sigma'}$ が連結かつ $\dim(\mathfrak{spin}(4) \oplus \mathfrak{spin}(8)) = 6$(補題 6.5.10)$+28 = 34 = \dim((\mathfrak{spin}(12))^{\sigma'})$ (補題 6.6.13) であるから，φ は全射である．したがって，群同型

$$(Spin(4) \times Spin(8))/\boldsymbol{Z}_2 \cong (Spin(12))^{\sigma'}$$

を得る． □

6.7 E_7 の位数 3 の自己同型写像による不動点部分群の決定

ここで群 E_7 の 5 種類の位数 3 の自己同型写像とそれによる不動点部分群を決定しよう．

6.7.1 位数 3 の自己同型写像 ι_3 と部分群 $(U(1) \times E_6)/\boldsymbol{Z}_3$

$U(1) = \{\theta \in C \,|\, (\tau\theta)\theta = 1\}$ とし，写像 $\phi_3 : U(1) \to E_7$ を

$$\phi_3(\theta)(X, Y, \xi, \eta) = (\theta^{-1}X,\, \theta Y,\, \theta^3\xi,\, \theta^{-3}\eta)$$

で定義する．$i \in U(1)$, $\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \in U(1)$ に対して，

$$\iota = \phi_3(i), \quad \iota_3 = \phi_3(\omega)$$

とすると，$\iota, \iota_3 \in E_7$，$\iota^2 = -1, {\iota_3}^3 = 1$ である．

命題 6.7.1-1. ([45],[56]) $(E_7)^\iota \cong (U(1) \times E_6)/\boldsymbol{Z}_3, \boldsymbol{Z}_3 = \{(1,1), (\omega,\, \phi(\omega^2)), (\omega^2, \phi(\omega))\}$.

証明. 準同型写像 $\varphi : U(1) \times E_6 \to (E_7)^\iota, \varphi(\theta,\beta) = \phi_3(\theta)\beta$ が命題の群同型を与える． □

ι_3 に関する $\mathfrak{P}^C$ の C-固有空間 $(\mathfrak{P}^C)_{\omega^k}, k = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{P}^C)_1 &= \{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, \iota_3 P = P\} = \{(0,0,\xi,\eta) \in \mathfrak{P}^C \,|\, \xi, \eta \in C\}, \\
(\mathfrak{P}^C)_\omega &= \{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, \iota_3 P = \omega P\} = \{(0,Y,0,0) \in \mathfrak{P}^C \,|\, Y \in \mathfrak{J}^C\}, \\
(\mathfrak{P}^C)_{\omega^2} &= \{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, \iota_3 P = \omega^2 P\} = \{(X,0,0,0) \in \mathfrak{P}^C \,|\, X \in \mathfrak{J}^C\}
\end{aligned}$$

を考える．このとき，これらの空間は明らかに群 $(E_7)^{\iota_3}$ の作用で不変である．

† **補題 6.7.1-2.** $\alpha \in (E_7)^{\iota_3}$ に対して, $\alpha(0,0,1,0) = (0,0,\xi,0)$ であるような $\xi \in U(1)$ が存在する．

証明. $(0,0,1,0) \in (\mathfrak{P}^C)_1$ であるから, α(0,0,1,0) $\in (\mathfrak{P}^C)_1$ である．$\alpha(0,0,1,0) = (0,0,\xi,\eta)$ とおき，$\eta \neq 0$ であると仮定する．$\alpha(0,0,1,0) \times \alpha(0,0,1,0) = \alpha((0,0,1,0) \times (0,0,1,0))\alpha^{-1}$ $= 0$ となる．一方, $\alpha(0,0,1,0) \times \alpha(0,0,1,0) = (0,0,\xi,\eta) \times (0,0,\xi,\eta) = \varPhi(0,0,0,-\dfrac{3}{4}\xi\eta)$ である．これより，$\xi\eta = 0$ を得るから，$\xi = 0$ となる．よって，$\alpha(0,0,1,0) = (0,0,0,\eta)$ である．また，$(0,E_1,0,0) \in (\mathfrak{P}^C)_\omega$ より, $\alpha(0,E_1,0,0) \in (\mathfrak{P}^C)_\omega$ である．$\alpha(0,E_1,0,0) = (0,Y,0,0)$, $Y \neq 0$ とおく．$\alpha(0,0,1,0) \times \alpha(0,E_1,0,0) = \alpha((0,0,1,0) \times (0,E_1,0,0))\alpha^{-1} = 0$ である．一方, $\alpha(0,0,1,0) \times \alpha(0,E_1,0,0) = (0,0,0,\eta) \times (0,Y,0,0) = \varPhi(0,0,-\dfrac{1}{4}\eta Y,0) \neq 0$ である．これは矛盾である．したがって，$\eta = 0$, すなわち, $\alpha(0,0,1,0) = (0,0,\xi,0)$ である．最後に, $|\xi|^2 = \langle(0,0,\xi,0),(0,0,\xi,\ 0)\rangle = \langle\alpha(0,0,\ 1,0),\alpha(0,0,1,0)\rangle = \langle(0,0,1,0),(0,0,1,0)\rangle = 1$ から, $|\xi| = 1$ を得る． □

補題 6.7.1-2 から, これらの $\mathfrak{P}^C$ の C-ベクトル部分空間

$$\begin{array}{ll}\{(X,0,0,0) \in \mathfrak{P}^C \,|\, X \in \mathfrak{J}^C\}, & \{(0,Y,0,0) \in \mathfrak{P}^C \,|\, Y \in \mathfrak{J}^C\}, \\ \{(0,0,\xi,0) \in \mathfrak{P}^C \,|\, \xi \in C\}, & \{(0,0,0,\eta) \in \mathfrak{P}^C \,|\, \eta \in C\}\end{array}$$

は群 $(E_7)^{\iota_3}$ の作用で不変であることが分かる．

上の命題を用いて標記の群 $(E_7)^{\iota_3}$ の群構造を決定しよう．

† **定理 6.7.1-3.** $(E_7)^{\iota_3} \cong (U(1) \times E_6)/\boldsymbol{Z}_3$, $\boldsymbol{Z}_3 = \{(1,1),(\omega,\phi(\omega^2)),(\omega^2,\phi(\omega)\}$.

証明. 上で述べたことから, $\alpha \in (E_7)^{\iota_3}$ は ι と可換である．よって，$(E_7)^{\iota_3} \subset (E_7)^{\iota}$. 逆に, $(E_7)^{\iota} = \phi(U(1))E_6$ (命題 6.7.1-1) であるから，$(E_7)^{\iota} \subset (E_7)^{\iota_3}$ は明らかである．よって，$(E_7)^{\iota_3} = (E_7)^{\iota}$. すなわち，$(U(1) \times E_6)/\boldsymbol{Z}_3 \cong (E_7)^{\iota_3}$ を得る． □

6.7.2 位数 3 の自己同型写像 λ_3 と部分群 $S(U(1) \times U(7))/\boldsymbol{Z}_2$

C-線型同型写像 $\chi : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{S}(8,\boldsymbol{C}^C) = \{Q \in M(8,\boldsymbol{C}^C) \,|\, {}^tQ = -Q\}$ をあらためて

$$\chi(X,Y,\xi,\eta) = (k(gX - \frac{\xi}{2}E))J + e_1(k(g(\gamma Y) - \frac{\eta}{2}E))J$$

で定義する (6.2 節参照)．また写像 $\varphi : SU(8) \to E_7$ もあらためて

$$\varphi(A)P = \chi^{-1}(A\chi(P){}^tA), \quad P \in \mathfrak{P}^C$$

で定義する (6.2 節参照)．$A_\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon,\cdots,\varepsilon) \in SU(8), \varepsilon = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}e_1$, $A_{\omega_1} = \mathrm{diag}({\omega_1}^{-1}$, $\omega_1,\cdots,\omega_1) \in SU(8)$, $\omega_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}e_1$ とすると,

$$\lambda\gamma = \varphi(A_\varepsilon), \quad \lambda_3 = \varphi(A_{\omega_1})$$

となり，$\lambda\gamma$, $\lambda_3 \in E_7$, $(\lambda\gamma)^2 = -1$, ${\lambda_3}^3 = 1$ である．

命題 6.7.2-1. ([45],[56])　$(E_7)^{\lambda\gamma} \cong SU(8)/\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_2 = \{E, -E\}$.

証明.　準同型写像 $\varphi : SU(8) \to (E_7)^{\lambda\gamma}$, $\varphi(A)P = \chi^{-1}(A\chi(P){}^tA)$, $P \in \mathfrak{P}^C$ が命題の群同型を与える (補題 6.2.6 参照).　□

ここで λ_3 の $\mathfrak{P}^C$ への作用は

$$\lambda_3 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\gamma_3}^{-1}(-\dfrac{1}{2}X + \dfrac{\sqrt{3}}{2}Y) + \dfrac{3}{8}(\mathrm{tr}(X) - \xi)E - \dfrac{\sqrt{3}}{8}(\mathrm{tr}(Y) - \eta)E \\ \widetilde{\gamma_3}^{-1}(-\dfrac{1}{2}Y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}X) + \dfrac{3}{8}(\mathrm{tr}(Y) - \eta)E + \dfrac{\sqrt{3}}{8}(\mathrm{tr}(X) - \xi)E \\ -\dfrac{1}{2}\xi - \dfrac{3}{8}(\mathrm{tr}(X) - \xi) + \dfrac{\sqrt{3}}{8}\eta + \dfrac{\sqrt{3}}{8}(\mathrm{tr}(Y) - \eta) \\ -\dfrac{1}{2}\eta - \dfrac{3}{8}(\mathrm{tr}(Y) - \eta) - \dfrac{\sqrt{3}}{8}\xi - \dfrac{\sqrt{3}}{8}(\mathrm{tr}(X) - \xi) \end{pmatrix}$$

のようになる．ここに右辺の C-線型変換 $\widetilde{\gamma_3} : \mathfrak{J}^C \to \mathfrak{J}^C$ は

$$\widetilde{\gamma_3}X = \widetilde{\gamma_3}\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \gamma_3(x_3) & \overline{\gamma_3(x_2)} \\ \overline{\gamma_3(x_3)} & \xi_2 & \gamma_3(x_1) \\ \gamma_3(x_2) & \overline{\gamma_3(x_1)} & \xi_3 \end{pmatrix}$$

である．また，この右辺の C-線型変換 $\gamma_3 : \mathfrak{C}^C \to \mathfrak{C}^C$, $\mathfrak{C}^C = \boldsymbol{H}^C \oplus \boldsymbol{H}^C e_4$ は $\gamma_3(a + be_4) = a + (\omega_1 b)e_4$ である．

† **補題 6.7.2-2.**　Lie 群 $(E_7)^{\lambda_3}$ の Lie 環 $(\mathfrak{e}_7)^{\lambda_3}$ は，つぎのようである：

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{e}_7)^{\lambda_3} &= \{\varPhi \in \mathfrak{e}_7 \,|\, \lambda_3\varPhi = \varPhi\lambda_3\} \\
&= \Bigl\{\varPhi(\phi, A, -\tau A, 0) \Bigm| \\
&\qquad \phi = \delta + \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -\overline{s_2} \\ -\overline{s_3} & 0 & s_1 \\ s_2 & -\overline{s_1} & 0 \end{pmatrix}^{\sim} + 2i\begin{pmatrix} 0 & (e_1b_3)e_4 & \overline{(e_1b_2)e_4} \\ \overline{(e_1b_3)e_4} & 0 & (e_1b_1)e_4 \\ (e_1b_2)e_4 & \overline{(e_1b_1)e_4} & 0 \end{pmatrix}^{\sim}, \\
&\qquad A = \begin{pmatrix} \mu_1 & a_3 + ib_3e_4 & \overline{a_2 + ib_2e_4} \\ \overline{a_3 + ib_3e_4} & \mu_2 & a_1 + ib_1e_4 \\ a_2 + ib_2e_4 & \overline{a_1 + ib_1e_4} & \mu_3 \end{pmatrix}, \\
&\qquad \delta \in (\mathfrak{d})^{\gamma_3} = ((\mathfrak{e}_6)^{\gamma_3})_{E_1,E_2,E_3}, \quad s_k, a_k, b_k \in \boldsymbol{H}, \mu_k \in \boldsymbol{R}\Bigr\}.
\end{aligned}$$

特に,

$$\dim((\mathfrak{e}_7)^{\gamma_3}) = 10 + 4 \times 3 + 4 \times 3 + (4 \times 3 + 3) = 49$$

である．

[参考]　$\dim((\mathfrak{d})^{\gamma_3}) = 10$ の決定において，つぎの群同型の結果を用いるのでここに記しておく．

$$((E_6)^{\gamma_3})_{E_1,E_2,E_3} \cong (U(1) \times Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(1))/\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2 = \{(1,1,1,1)), (-1,-1,-1,-1)\}.$$

以上の準備より標記の群 $(E_7)^{\lambda_3}$ の群構造を決定しよう.

† **定理 6.7.2-3.** $(E_7)^{\lambda_3} \cong S(U(1) \times U(7))/\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2 = \{E, -E\}$.

証明. 準同型写像 $\varphi_7 : S(U(1) \times U(7)) \to (E_7)^{\lambda_3}$ を写像 φ(命題 6.6.2-1) の制限写像として定義する．$\varphi_7(A) \in (E_7)^{\lambda_3}$ は容易である．$(E_7)^{\lambda_3}$ は連結かつ $\dim((\mathfrak{e}_7)^{\lambda_3}) = 49$ (命題 6.7.2-2) $= \dim(\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(7)))$ であるから, φ_7 は全射である．$\mathrm{Ker}\varphi_7 = \{E, -E\}$ も容易である (命題 6.6.2-1)．よって，群同型 $S(U(1) \times U(7))/\boldsymbol{Z}_2 \cong (E_7)^{\lambda_3}$ を得る． □

6.7.3 位数 3 の自己同型写像 σ_3 と部分群 $(SU(2) \times Spin(2) \times Spin(10))/\boldsymbol{Z}_4$

$Spin(2) = \{a \in \boldsymbol{C}_4 \,|\, \overline{a}a = 1\}(\cong U(1))$ とし，写像 $D : Spin(2) \to E_7$ を

$$D_a(X, Y, \xi, \eta) = (D_a X, D_a Y, \xi, \eta)$$

で定義する．ここに右辺の C-線型変換 $D_a : \mathfrak{J}^C \to \mathfrak{J}^C$ は

$$D_a X = D_a \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3\overline{a} & \overline{x}_2 a \\ a\overline{x}_3 & \xi_2 & a x_1 a \\ \overline{a}x_2 & \overline{a x_1 a} & \xi_3 \end{pmatrix}$$

である．このとき $-1 \in Spin(2), \omega_4 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}e_4 \in Spin(2)$ に対して，

$$\sigma = D_{-1}, \quad \sigma_3 = D_{\omega_4}$$

であり，$\sigma, \sigma_3 \in E_7$, $\sigma^2 = 1$, ${\sigma_3}^3 = 1$ となる．

あらたに群 $Spin_1(10)$ を

$$\begin{aligned} Spin_1(10) &= \{\alpha \in Spin(12) \,|\, \alpha(F_1(s), 0, 0, 0) = (F_1(s), 0, 0, 0), s \in \boldsymbol{C}_4\} \\ &= \left\{ \alpha \in Spin(12) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha(F_1(1), 0, 0, 0) = (F_1(1), 0, 0, 0), \\ \alpha(F_1(e_4), 0, 0, 0) = (F_1(e_4), 0, 0, 0) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

で定義する．10 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 V^{10} を

$$\begin{aligned} V^{10} &= \left\{ P \in \mathfrak{P}^C \;\middle|\; \begin{array}{l} \kappa P = P,\ \mu\tau\lambda P = P, \\ P \times (F_1(1), 0, 0, 0) = 0,\ P \times (F_1(e_4), 0, 0, 0) = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ P = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & t \\ 0 & \overline{t} & \tau\xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \tau\eta \right) \;\middle|\; t \in ({\boldsymbol{C}_4}^{\perp})^C,\ \xi, \eta \in C \right\} \end{aligned}$$

で定義するとき，$Spin_1(10)$ は $SO(10) = SO(V^{10})$ の 2 重被覆群になる．ここに $({\boldsymbol{C}_4}^{\perp})^C$ は $\mathfrak{C}^C$ での内積 $(x, y) = \dfrac{1}{2}(x\overline{y} + y\overline{x}))$ 関する ${\boldsymbol{C}_4}^C$ の直交補空間を表す.

この $Spin_1(10)$ はこれまでの $Spin(10)$(命題 6.6.3) :

$$Spin(10) = \left\{ \alpha \in Spin(12) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha(0, E_1, 0, 1) = (0, E_1, 0, 1), \\ \alpha(0, -E_1, 0, 1) = (0, -E_1, 0, 1) \end{array} \right\}$$

に同型である．実際, $a \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$\delta(a) = \exp\varPhi(0, iF_1(a), iF_1(a), 0), \quad \gamma(a) = \exp\varPhi(0, F_1(a), -F_1(a), 0)$$

と定義し, $\rho = \delta(\dfrac{\pi}{4}e_4)\,\gamma(\dfrac{\pi}{4}) \in Spin(12) \subset E_7$ とおくとき，$Spin_1(10) = \rho^{-1}Spin(10)\rho$ を得る．

ここで群 $(E_7)^{\sigma_3} = \{\alpha \in E_7 \,|\, \sigma_3\alpha = \alpha\sigma_3\}$ の群構造を決定しよう．そのために，$\mathfrak{P}^C$ の 2 つの C-ベクトル部分空間 $(\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3}, ((\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3})^\perp$ を考える:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3} &= \{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, \sigma_3 P = P\} \\ &= \left\{\left(\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & s \\ 0 & \overline{s} & \xi_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & t \\ 0 & \overline{t} & \eta_3 \end{pmatrix}, \xi, \eta\right) \,\middle|\, \begin{array}{l} \xi_k, \eta_k, \xi, \eta \in C, \\ s, t \in ({\boldsymbol{C}_4}^\perp)^C \end{array} \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3})^\perp &= \{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, \langle P, P' \rangle = 0,\ P' \in (\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3}\} \\ &= \left\{\left(\begin{pmatrix} 0 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & 0 & m \\ x_2 & \overline{m} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & y_3 & \overline{y}_2 \\ \overline{y}_3 & 0 & n \\ y_2 & \overline{n} & 0 \end{pmatrix}, 0, 0\right) \,\middle|\, x_k, y_k \in \mathfrak{C}^C, m, n \in {\boldsymbol{C}_4}^C \right\}.\end{aligned}$$

このとき群 $(E_7)^{\sigma_3}$ の作用で $\mathfrak{P}^C = (\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3} \oplus ((\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3})^\perp, (\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3}, ((\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3})^\perp$ はそれぞれ不変である．また $\mathfrak{P}^C$ の C-ベクトル部分空間 $(\mathfrak{P}^C)_0$ を

$$(\mathfrak{P}^C)_0 = \{(F_1(m), F_1(n), 0, 0) \,|\, m, n \in {\boldsymbol{C}_4}^C\}$$

で定義する．

† **補題 6.7.3-1.** $(\mathfrak{P}^C)_0$ は $(E_7)^{\sigma_3}$ の作用のもとで不変である．

証明. Lie 群 $(E_7)^{\sigma_3}$ の Lie 環 $(\mathfrak{e}_7)^{\sigma_3}$ は

$$\begin{aligned}(\mathfrak{e}_7)^{\sigma_3} &= \{\varPhi \in \mathfrak{e}_7 \,|\, \sigma_3\varPhi = \varPhi\sigma_3\} \\ &= \{\varPhi(\phi, A, -\tau A, \nu) \in \mathfrak{e}_7 \,|\, \phi \in (\mathfrak{e}_6)^{\sigma_3}, A \in (\mathfrak{J}^C)_{\sigma_3}, \nu \in i\boldsymbol{R}\}\end{aligned}$$

で与えられる．ここに $(\mathfrak{e}_6)^{\sigma_3} = \{\phi \in \mathfrak{e}_6 \,|\, \sigma_3\phi = \phi\sigma_3\}, (\mathfrak{J}^C)_{\sigma_3} = \{A \in \mathfrak{J}^C \,|\, \sigma_3 A = A\}$ である．$\varPhi(\phi, A, -\tau A, \nu) \in (\mathfrak{e}_7)^{\sigma_3}$ と $(F_1(m), F_1(n), 0, 0) \in (\mathfrak{P}^C)_0$ に対して, $\varPhi(\phi, A, -\tau A,\ \nu)(F_1(m), F_1(n), 0, 0) = (F_1(m'), F_1(n'), 0, 0) \in (\mathfrak{P}^C)_0$ を得る．よって，$(E_7)^{\sigma_3}$ が連結であるから，$\alpha \in (E_7)^{\sigma_3}$ とすると $\alpha(F_1(m), F_1(n), 0, 0) = (F_1(m''), F_1(n''),\ 0, 0) \in (\mathfrak{P}^C)_0$ を得る．□

† **補題 6.7.3-2.** $D_a, a \in Spin(2)$ と $\delta \in Spin(10)$ は可換である．

証明. δD_a と $\tau\lambda$ は可換であるから, $D_a\delta = \delta D_a$ を示すためには

$$D_a\delta P = \delta D_a P, \quad P = (X, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$$

が成り立つことを示せば十分である．そこで

$$\delta D_a(E_2, 0, 0, 0) = \delta(E_2, 0, 0, 0) = (\xi E_2 - \tau\xi E_2 + F_1(t), \eta E_1, 0, \tau\eta)\,(\xi, \eta \in C, t \in ({\boldsymbol{C}_4}^\perp)^C).$$

一方,

$$\begin{aligned} D_a\delta(E_2,0,0,0) &= D_a(\xi E_2 - \tau\xi E_3 + F_1(t), \eta E_1, 0, \tau\eta) \\ &= (\xi E_2 - \tau\xi E_3 + F_1(ata), \eta E_1, 0, \tau\eta) \\ &= (\xi E_2 - \tau\xi E_3 + F_1(t), \eta E_1, 0, \tau\eta) \end{aligned}$$

となり $\delta D_a(E_2,0,0,0) = D_a\delta(E_2,0,0,0)$ を得る．同様に $\delta D_a(E_3,0,0,\ 0) = D_a\delta(E_3,0,0,0)$ も得る．また

$$\begin{aligned} \delta D_a(iE_1,0,-i,0) &= \delta(iE_1,0,-i,0) = \delta\tau\lambda(0,-iE_1,0,i) \\ &= \tau\lambda\delta(0,-iE_1,0,i) = \tau\lambda(\xi E_2 - \tau\xi E_3 + F_1(t), \eta E_1, 0, \tau\eta) \end{aligned}$$

$(\xi, \eta \in C, t \in (\boldsymbol{C}_4{}^{\perp})^C)$．一方,

$$\begin{aligned} D_a\delta(iE_1,0,-i,0) &= D_a\delta\tau\lambda(0,-iE_1,0,i) = \tau\lambda D_a\delta(0,-iE_1,0,i) \\ &= \tau\lambda D_a(\xi E_1 - \tau\xi E_3 + F_1(t), \eta E_1, 0, \tau\eta) \\ &= \tau\lambda(\xi E_1 - \tau\xi E_3 + F_1(ata), \eta E_1, 0, \tau\eta) \\ &= \tau\lambda(\xi E_1 - \tau\xi E_3 + F_1(t), \eta E_1, 0, \tau\eta) \end{aligned}$$

となる．よって，$\delta D_a(iE_1,0,-i,0) = D_a\delta(iE_1,0,-i,0)$．すなわち, $\delta D_a(E_1,0,-1,0) = D_a\delta$ $(E_1,0,-1,0)$ を得る．同様に，$\delta D_a(E_1,0,1,0) = D_a\delta(E_1,0,1,0)$ も得る．よって，

$$\delta D_a(E_1,0,0,0) = D_a\delta(E_1,0,0,0), \quad \delta D_a(0,0,1,0) = D_a\delta(0,0,1,0)$$

を得る．つぎに $z \in \mathfrak{C}^C$ に対して,

$$\begin{aligned} \delta D_a(F_1(z),0,0,0) &= \delta(F_1(aza),0,0,0) \\ &= \delta(F_1(a^2s+t),0,0,0) \quad (z = s+t \in \boldsymbol{C}_4{}^C \oplus (\boldsymbol{C}_4{}^{\perp})^C = \mathfrak{C}^C) \\ &= (F_1(a^2s),0,0,0) + \delta(F_1(t),0,0,0) \\ &= (F_1(a^2s),0,0,0) + (\xi E_2 - \tau\xi E_3 + F_1(t'), \eta E_1, 0, \tau\eta)\ (t' \in (\boldsymbol{C}_4{}^{\perp})^C) \end{aligned}$$

である．一方,

$$\begin{aligned} D_a\delta(F_1(z),0,0,0) &= D_a\delta(F_1(s+t).0,0,0) \\ &= D_a((F_1(s),0,0,0)) + \delta(F_1(t),0,0,0)) \\ &= (F_1(a^2s),0,0,0) + D_a(\xi E_2 - \tau\xi E_3 + F_1(t'), \eta E_1, 0, \tau\eta) \\ &= (F_1(a^2s),0,0,0) + (\xi E_2 - \tau\xi E_3 + F_1(t'), \eta E_1, 0, \tau\eta) \end{aligned}$$

である．また

$$\begin{aligned} &\delta D_a(F_2(z),0,0,0) = \delta(F_2(\overline{a}z),0,0,0) \\ &= \delta((F_1(1),0,0,0) \times (F_1(z),0,0,0))(0,4F_1(a),0,0)) \\ &= \delta((F_1(1),0,0,0) \times (F_2(z),0,0,0))\delta^{-1}\delta(0,4F_1(a),0,0) \\ &= (\delta(F_1(1),0,0,0) \times \delta(F_2(z),0,0,0))(0,4F_1(a),0,0) \\ &= ((F_1(1),0,0,0) \times (F_1(x_2)+F_3(x_3), F_2(y_2)+F_3(y_3),0,0))(0,4F_1(a),0,0) \\ &= \varPhi(-\frac{1}{2}(F_1(1) \vee F_2(y_2) + F_1(1) \vee F_3(y_3)), 0, \frac{1}{4}(F_3(\overline{x}_2) + F_2(\overline{x}_3)), 0)(0,4F_1(a),0,0) \\ &= (F_2(\overline{a}x_2) + F_3(x_3\overline{a}), F_2(\overline{a}y_2) + F_3(y_3\overline{a}), 0, 0) \quad (x_k, y_k \in \mathfrak{C}^C) \end{aligned}$$

となる．一方，

$$\begin{aligned} D_a\delta(F_2(z),0,0,0) &= D_a(F_2(x_2)+F_3(x_3),F_2(y_2)+F_3(y_3),0,0) \\ &= (F_2(\overline{a}x_2)+F_3(x_3\overline{a}),F_2(\overline{a}y_2)+F_3(y_3\overline{a}),0,0) \end{aligned}$$

となり $\delta D_a(F_k(z),0,0,0) = D_a\delta(F_k(z),0,0,0)$, $k=1,2$ を得る．同様に $\delta D_a(F_3(z),0,0,0)$ $= D_a\delta(F_3(z),0,0,0)$ を得る．以上より任意の元 $P \in \mathfrak{P}^C$ に対して，$\delta D_a P = D_a\delta P$ でとなる，すなわち，$\delta D_a = D_a\delta$ 得る． □

† **補題 6.7.3-3.** $\beta \in (Spin(12))^{\sigma_3} = \{\alpha \in Spin(12)\,|\,\sigma_3\alpha = \alpha\sigma_3\}$ に対して，

$$\beta(F_1(1),0,0,0) = (F_1(s),0,0,0), \quad \beta(F_1(e_4),0,0,0) = (F_1(e_4s),0,0,0)$$

を満たす $s \in \boldsymbol{C}_4, |s| = 1$ が存在する．

証明. 2 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間を

$$\begin{aligned} V^2 &= \{P \in \mathfrak{P}^C\,|\,\kappa P = P,\, \mu\tau\lambda P = P,\, \langle P, P'\rangle = 0,\, P' \in (\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3}\} \\ &= \{P = (F_1(s),0,0,0) \in \mathfrak{P}^C\,|\,s \in \boldsymbol{C}_4\} \end{aligned}$$

で定義する．$(Spin(12))^{\sigma_3}$ は V^2 に働くから，$\beta \in (Spin(12))^{\sigma_3}$ に対して，$\beta(F_1(1),0,0,0)$ $= (F_1(s),0,0,0)$ であるような $s \in \boldsymbol{C}_4$ が存在する．よって，$\omega_4 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}e_4$ に対して，

$$\begin{aligned} \beta(F_1(\omega_4),0,0,0) &= \beta(F_1({\omega_4}^2 1 {\omega_4}^2),0,0,0) = \beta\sigma_3\sigma_3(F_1(1),0,0,0) \\ &= \sigma_3\sigma_3\beta(F_1(1),0,0,0) = \sigma_3\sigma_3(F_1(s),0,0,0) \\ &= (F_1(\omega_4 s),0,0,0)\cdots(1). \end{aligned}$$

となる．同様に $\beta(F_1(\overline{\omega_4}),0,0,0) = (F_1(\overline{\omega_4}s),0,0,0)\cdots(2)$ となる．よって，$(1)-(2)$ より，$\beta(\ F_1(e_4),0,0,0) = (F_1(e_4s),0,0,0)$ を得る． また $|s| = 1$ は，$\langle\beta P, \beta P\rangle = \langle P, P\rangle, P = (F_1(1),0,0,0) \in \mathfrak{P}^C$ から得られる． □

† **補題 6.7.3-4.** $\phi(SU(2)), Spin(2), Spin(10)$ は群 $(E_7)^{\sigma_3}$ の部分群である． ここに写像 $\phi : SU(2) \to E_7$ は，命題 6.2.4 の ϕ_1 である．

証明. $\phi(SU(2)) \subset (E_7)^{\sigma_3}$ は容易である．$\sigma_3 = D_{\omega_4} \in Spin(2)$ であるから，$Spin(2) \subset (E_7)^{\sigma_3}$ である．また $\delta \in Spin(10)$ は $\sigma_3\delta = \delta\sigma_3$ を満たす (補題 6.7.3-2) ので，$Spin(10) \subset (E_7)^{\sigma_3}$ である． □

以上の準備により標記の群 $(E_7)^{\sigma_3}$ の群構造を決定しよう．

† **定理 6.7.3-5.** $(E_7)^{\sigma_3} \cong (SU(2) \times Spin(2) \times Spin(10))/\boldsymbol{Z}_4, \boldsymbol{Z}_4 = \{(E,1,1),(E,-1,\sigma),$ $(-E,e_4,\phi(-E)D_{-e_4}),(-E,-e_4,\phi(-E)D_{e_4})\}$.

証明. 写像 $\varphi : SU(2) \times Spin(2) \times Spin(10) \to (E_7)^{\sigma_3}$ を

$$\varphi(A,a,\delta) = \phi(A)D_a\delta$$

で定義する．$\varphi(A, a, \delta) \in (E_7)^{\sigma_3}$ は明らかである（補題 6.6.3-5）．また $\phi(A), A \in SU(2)$ と $\delta \in Spin(10) \subset Spin(12)$ は可換（命題 6.2.5）．$D_a\delta = \delta D_a$ は自明であり（補題 6.7.3-2），$\phi(A)D_a = D_a\phi(A)$ は直接計算によって確かめられる．よって，φ は準同型写像である．そこで φ の全射を示そう．群 $(E_7)^{\sigma_3}$ の作用により $(\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3}, (\mathfrak{P}^C)_0, \{(F_2(x_2)+F_3(x_3), F_2(y_2)+F_3(y_3), 0, 0) \,|\, x_k, y_k \in \mathfrak{C}^C\}$ は不変である (補題 6.7.3-1) から，$(E_7)^{\sigma_3} \subset (E_7)^{\sigma}$ を得る．よって，$\alpha \in (E_7)^{\sigma_3}$ に対して, $\alpha = \phi(A)\beta$ (命題 6.2.5) を満たす $A \in SU(2), \beta \in Spin(12)$ が存在する．$\sigma_3\alpha = \alpha\sigma_3$ から, $\beta \in (Spin(12))^{\sigma_3}$ を得る．よって，補題 6.7.3-3 から, $\beta(F_1(1), 0, 0, 0) = (F_1(s), 0, 0, 0), \beta(F_1(e_4), 0, 0, 0) = (F_1(e_4 s), 0, 0, 0)$ であるような $s \in \boldsymbol{C}_4, |s| = 1$ が存在する．そこで，$a^2 = s$ を満たす $a \in \boldsymbol{C}_4$ を選び，$\delta = {D_a}^{-1}\beta$ とおくと，$\delta(F_1(1), 0, 0, 0) = (F_1(1), 0, 0, 0)$,$\delta(F_1(e_4), 0, 0, 0) = (F_1(e_4), 0, 0, 0)$ となる, すなわち, $\delta \in Spin(10)$ を得る．以上から，$\alpha = \phi(A)D_a\delta, A \in SU(2), a \in Spin(2), \delta \in Spin(10)$ となるので，φ は全射である．また

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{(E, 1, 1), (E, -1, \sigma), (-E, e_4, \phi(-E)D_{-e_4}), (-E, -e_4, \phi(-E)D_{e_4})\} = \boldsymbol{Z}_4$$

は容易である．したがって，群同型 $(SU(2) \times Spin(2) \times Spin(10))/\boldsymbol{Z}_4 \cong (E_7)^{\sigma_3}$ を得る．□

6.7.4 位数 3 の自己同型写像 ${\sigma_3}'$ と部分群 $(U(1) \times Spin(12))/\boldsymbol{Z}_2$

$U(1) = \{\theta \in C \,|\, (\tau\theta)\theta = 1\}$ とし，写像 $\phi : U(1) \to E_7$ を

$$\begin{aligned}
&\phi(\theta)\Bigl(\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 & y_3 & \overline{y}_2 \\ \overline{y}_3 & \eta_2 & y_1 \\ y_2 & \overline{y}_1 & \eta \end{pmatrix}, \xi, \eta\Bigr) \\
&= \Bigl(\begin{pmatrix} \theta\xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \theta^{-1}\xi_2 & \theta^{-1}x_1 \\ x_2 & \theta^{-1}\overline{x}_1 & \theta^{-1}\xi_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \theta^{-1}\eta_1 & y_3 & \overline{y}_2 \\ \overline{y}_3 & \theta\eta_2 & \theta y_1 \\ y_2 & \theta\overline{y}_1 & \theta\eta_3 \end{pmatrix}, \theta\xi, \theta^{-1}\eta\Bigr)
\end{aligned}$$

で定義する．このとき，$\phi(\theta) \in E_7$ である．実際, $U(1) = \Bigl\{\begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \tau\theta \end{pmatrix} \,|\, \theta \in C, (\tau\theta)\theta = 1\Bigr\}$ を $SU(2)$ の部分群とみなすとき, この ϕ は $\phi_1 : SU(2) \to E_7$（命題 6.2.4) の制限写像である．$\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \in U(1)$ に対して,

$${\sigma_3}' = \phi(\omega)$$

とおくとき，${\sigma_3}' \in E_7$, $({\sigma_3}')^3 = 1$ である．

† **補題 6.7.4-1.** $\phi(U(1)), Spin(12)$ は $(E_7)^{{\sigma_3}'}$ の部分群である．

証明. ${\sigma_3}' = \phi(\omega)$ であるから, 群 $\phi(U(1))$ は $(E_7)^{{\sigma_3}'}$ の部分群である．つぎに命題 6.2.5 から, $\phi(A), A \in SU(2)$ と元 $\beta \in Spin(12)$ 可換であるから，$\phi(\theta)\beta = \beta\phi(\theta), \theta \in U(1) \subset SU(2)$ となる．よって，${\sigma_3}'\beta = \beta{\sigma_3}'$，すなわち, $Spin(12) \subset (E_7)^{{\sigma_3}'}$. □

つぎの定理のために，$\mathfrak{P}^C$ の 2 つの C-ベクトル部分空間 $(\mathfrak{P}^C)_{{\sigma_3}'}, ((\mathfrak{P}^C)_{{\sigma_3}'})^{\perp}$ を

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3{}'} &= \{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, \sigma_3{}'P = P\} \\
&= \left\{ \Big(\begin{pmatrix} 0 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & y_3 & \overline{y}_2 \\ \overline{y}_3 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0 \Big) \,|\, x_k, y_k \in \mathfrak{C}^C \right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
((\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3{}'})^\perp &= \{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, \langle P, P' \rangle = 0,\ P' \in (\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3{}'}\} \\
&= \left\{ \Big(\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & x_1 \\ 0 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & y_1 \\ 0 & \overline{y}_1 & \eta_3 \end{pmatrix}, \xi, \eta \Big) \ \middle|\ \begin{matrix} \xi_k, \eta_k, \xi, \eta \in C, \\ x_1, y_1 \in \mathfrak{C}^C \end{matrix} \right\}
\end{aligned}
$$

で定義すると，$(\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3{}'}, ((\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3{}'})^\perp$ は $(E_7)^{\sigma_3{}'}$ の作用によりそれぞれ不変である． また $\mathfrak{P}^C = (\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3{}'} \oplus ((\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3{}'})^\perp$ である．

以上の準備より標記の群 $(E_7)^{\sigma_3{}'}$ の群構造を決定しよう．

† **定理 6.7.4-2.** $(E_7)^{\sigma_3{}'} \cong (U(1) \times Spin(12))/\boldsymbol{Z}_2,\ \boldsymbol{Z}_2 = \{(1,1), (-1, -\sigma)\}$.

証明. 写像 $\varphi : U(1) \times Spin(12) \to (E_7)^{\sigma_3{}'}$ を

$$
\varphi(\theta, \beta) = \phi(\theta)\beta
$$

で定義する．補題 6.6.4-1 から $\varphi(\theta, \beta) \in (E_7)^{\sigma_3{}'}$ である．$\phi(\theta), \theta \in U(1)$ と元 $\beta \in Spin(12)$ は可換であるから (補題 6.2.5), φ は準同型写像である．φ が全射であることを示そう．そこで，$(\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3{}'}$, $((\mathfrak{P}^C)_{\sigma_3{}'})^\perp$ は群 $(E_7)^{\sigma_3{}'}$ の作用で不変であるから，$\alpha \in (E_7)^{\sigma_3{}'}$ と σ は可換である，すなわち，$(E_7)^{\sigma_3{}'} \subset (E_7)^\sigma$ である．よって，$\alpha \in (E_7)^{\sigma_3{}'}$ に対して，$\alpha = \phi(A)\beta$ を満たす $A \in SU(2), \beta \in Spin(12)$ が存在す (命題 6.2.5)．また $\sigma_3{}'\alpha = \alpha\sigma_3{}'$，すなわち，$\sigma_3{}'\phi(A) = \phi(A)\sigma_3{}'$ から，$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \tau a \end{pmatrix}, a \in U(1)$ を得る．よって，φ は全射である．$\mathrm{Ker}\varphi = \{(1,1), (-1,-\sigma)\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である．したがって，群同型

$$
(U(1) \times Spin(12))/\boldsymbol{Z}_2 \cong (E_7)^{\sigma_3{}'}
$$

を得る． □

6.7.5 位数 3 の自己同型写像 w_3 と部分群 $(SU(3) \times SU(6))/\boldsymbol{Z}_3$

A. Borel, J. de Siebenthal はコンパクト単純 Lie 群 G の最大階数の極大部分群の分類をし，群 E_7 は $A_2 \oplus A_5$ 型の階数 7 の極大部分群をもつことを示した．その後，横田により位数 3 の自己同型写像 w_3 の不動点部分群 $(E_7)^{w_3}$ として，その群は実現された．詳細はその論文 ([50]) に譲るとして，ここでは，その概要を述べることとする．

C-線型変換 $w_3 : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{P}^C$ を

$$
w_3(X, Y, \xi, \eta) = (w_3X, w_3Y, \xi, \eta),
$$

で定義する．ここに右辺の C-線型変換 $w_3:\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}^C$ は

$$w_3X=w_3\begin{pmatrix}\xi_1 & x_3 & \overline{x}_2\\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1 & w_3(x_3) & \overline{w_3(x_2)}\\ \overline{w_3(x_3)} & \xi_2 & w_3(x_1)\\ w_3(x_2) & \overline{w_3(x_1)} & \xi_3\end{pmatrix}$$

であり，また C-線型変換 $w_3:\mathfrak{C}^C\to\mathfrak{C}^C$, $\mathfrak{C}^C=\boldsymbol{C_4}^C\oplus((\boldsymbol{C}_4)^3)^C$ を $w_3(a+\boldsymbol{m})=a+\omega_4\boldsymbol{m}$ で定義する．このとき， $w_3\in E_7$, ${w_3}^3=1$ である．

$\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}e_4$ とする．このとき，つぎの定理を得る．

定理 6.7.5-1. ([50]) $(E_7)^{w_3}\cong(SU(3)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_3$, $\boldsymbol{Z}_3=\{(E,E),(\omega E,\omega E),(\omega^2E,\omega^2E)\}$.

6.8 E_7 型 Lie 環 $\mathfrak{g}=\mathfrak{e_7}^C$ の 3-graded の分解とその $\mathfrak{g}_{ev}$ の群実現

複素 Lie 環 $\mathfrak{e_7}^C$ において, 3-graded 分解の特性元を

$$Z=\varPhi(i(-2G_{23}+G_{45}+G_{67}),0,0,0)$$

とする．

† **定理 6.8.1.** $\mathrm{ad}Z$, $Z=\varPhi(i(-2G_{23}+G_{45}+G_{67}),0,0,0)$ に関する複素 Lie 環 $\mathfrak{e_7}^C$ の 3-graded 分解は，つぎのようである：

$$\mathfrak{e_7}^C=\mathfrak{g}_{-3}\oplus\mathfrak{g}_{-2}\oplus\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_{0}\oplus\mathfrak{g}_{1}\oplus\mathfrak{g}_{2}\oplus\mathfrak{g}_{3}$$

ここに

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{\begin{array}{l} iG_{01},iG_{23},iG_{45},iG_{67},G_{46}+G_{57},i(G_{47}-G_{56}),\\ \widetilde{A}_k(1),i\widetilde{A}_k(e_1),(E_1-E_2)^{\sim},(E_2-E_3)^{\sim},\widetilde{F}_k(1),i\widetilde{F}_k(e_1)\\ \check{E}_k,\hat{E}_k,\check{F}_k(1),i\check{F}_k(e_1),\hat{F}_k(1),i\hat{F}_k(e_1),k=1,2,3,\ \boldsymbol{1}\end{array}\right\}\ 39$$

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{\begin{array}{l} G_{04}+iG_{05},G_{06}+iG_{07},iG_{14}-G_{15},iG_{16}-G_{17},\\ (2G_{15}+G_{26}-G_{37})-i(2G_{14}+G_{27}+G_{36}),\\ (2G_{17}-G_{24}+G_{35})-i(2G_{16}-G_{25}-G_{34}),\\ \widetilde{A}_k(e_4+ie_5),\widetilde{A}_k(e_6+ie_7),\widetilde{F}_k(e_4+ie_5),\widetilde{F}_k(e_6+ie_7),\\ \check{F}_k(e_4+ie_5),\check{F}_k(e_6+ie_7),\hat{F}_k(e_4+ie_5),\hat{F}_k(e_6+ie_7),k=1,2,3\end{array}\right\}\ 30$$

$$\mathfrak{g}_{-2} = \left\{\begin{array}{l} G_{02}-iG_{03},iG_{12}+G_{13},\\ (-2G_{13}+G_{46}-G_{57})-i(2G_{12}-G_{47}-G_{56}),\\ \widetilde{A}_k(e_2-ie_3),\widetilde{F}_k(e_2-ie_3),\check{F}_k(e_2-ie_3),\hat{F}_k(e_2-ie_3),k=1,2,3\end{array}\right\}\ 15$$

$$\mathfrak{g}_{-3} = \left\{(G_{24}+G_{35})+i(G_{25}-G_{34}),(G_{26}+G_{37})+i(G_{27}-G_{36})\right\}\ 2$$

$$\mathfrak{g}_1 = \tau(\mathfrak{g}_{-1})\tau,\ \mathfrak{g}_2=\tau(\mathfrak{g}_{-2})\tau,\ \mathfrak{g}_3=\tau(\mathfrak{g}_{-3})\tau$$

複素 Lie 群 ${G_2}^C, {F_4}^C$, または ${E_6}^C$ ([52]) で示したように

$$\gamma = \exp \frac{2\pi i}{2} Z$$

である．そこで，$({\mathfrak{e}_7}^C)_{ev} = ({\mathfrak{e}_7}^C)_{-2} \oplus ({\mathfrak{e}_7}^C)_0 \oplus ({\mathfrak{e}_7}^C)_2 = ({\mathfrak{e}_7}^C)^\gamma$ であることより, その群化である群

$$({E_7}^C)_{ev} = ({E_7}^C)^\gamma = \{\alpha \in {E_7}^C \,|\, \gamma\alpha = \alpha\gamma\}$$

の群構造を決定したい．それは定理 6.8.11 の結果の群同型

$$({E_7}^C)^\gamma \cong (SL(2, C) \times Spin(12, C))/\boldsymbol{Z}_2$$

である．この節においては，この定理を証明することを目的にする．そのために, 群 $({E_7}^C)^\gamma$ の部分群として $SL(2, C)$ と $Spin(12, C)$ に同型な群を見つけなければならない．$SL(2, C)$ に関しては, 準同型写像 $\varphi_2 : Sp(1, \boldsymbol{H}^C) \times Sp(1, \boldsymbol{H}^C) \to {G_2}^C$ を用いて $SL(2, C)$ と同型な群

$$Sp(1, \boldsymbol{H}^C) = \{\varphi_2(p, 1) \,|\, p \in Sp(1, \boldsymbol{H}^C)\}$$

を考える．また $Spin(12, C)$ に関しては,

$$({E_7}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \{\alpha \in {E_7}^C \,|\, \varepsilon_1\alpha = \alpha\varepsilon_1,\, \varepsilon_2\alpha = \alpha\varepsilon_2\}$$

を考える．ここに

$$\varepsilon_1 = \varphi_2(e_1, 1),\ \varepsilon_2 = \varphi_2(e_2, 1)$$

で定義する．このとき $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (G_2)^C \subset (F_4)^C \subset (E_6)^C \subset (E_7)^C$ である．
${\varepsilon_1}^2 = \gamma$ であるから, もし $\alpha \in {E_7}^C$ が $\varepsilon_1\alpha = \alpha\varepsilon_1$ を満たすならば, $\gamma\alpha = \alpha\gamma$ は自動的に成り立つので，$({E_7}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ は $({E_7}^C)^\gamma$ の部分群である．$({E_7}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \cong Spin(12, C)$ は命題 6.8.8 で証明される．群 $({E_7}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ の連結性を示すために, つぎの群系列を考える：

$$({E_7}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \supset (({E_7}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})_{\mathfrak{i}} \supset ({E_6}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}.$$

この群系列の連結性が順に明らかになる．まず群 $({E_6}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ の考察から始めよう．

† **命題 6.8.2.** $({E_6}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \cong SU^*(6, \boldsymbol{C}^C)$.
特に，$({E_6}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ は連結である．

証明. $SU^*(6, \boldsymbol{C}^C) = \{A \in M(6, \boldsymbol{C}^C) \,|\, JA = \overline{A}J, \det A = 1\}, J = \mathrm{diag}(J,\ J, J), J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ をとる．準同型写像 $\varphi_6 : Sp(1, \boldsymbol{H}^C) \times SU^*(6, \boldsymbol{C}^C) \to ({E_6}^C)^\gamma$ を

$$\begin{aligned} \varphi_6(p, A)(M + \boldsymbol{n}) = (k^{-1}A)M(k^{-1}A)^* + p\boldsymbol{n}(k^{-1}A)^{-1}, \\ M + \boldsymbol{n} \in \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}^C) \oplus (\boldsymbol{H}^C)^3 = \mathfrak{J}^C \end{aligned}$$

で定義する．ここに $k : M(3, \boldsymbol{H}^C) \to M(6, \boldsymbol{C}^C)$ を $k\Big((a + be_2)\Big) = \Big(\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}\Big), a,\ b \in \boldsymbol{C}^C$ である．このとき，φ_6 は群同型 $({E_6}^C)^\gamma \cong (Sp(1, \boldsymbol{H}^C) \times SU^*(6, \boldsymbol{C}^C))\ /\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2 =$

$\{(1, E), (-1, -E)\}$ を与える ([45],[56]). 写像 $\varphi_{6,r} : SU^*(6, \boldsymbol{C}^C) \to ({E_6}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ を

$$\varphi_{6,r}(A) = \varphi_6(1, A)$$

で定義すると，上の写像 $\varphi_6 : Sp(1, \boldsymbol{H}^C) \times SU^*(6, \boldsymbol{C}^C) \to {E_6}^C$ の制限写像になっている. $\varphi_{6,r} \in ({E_6}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ であること，$({E_6}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ が準同型写像であることは容易である. $\varphi_{6,r}$ の全射を示そう. $\alpha \in ({E_6}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \subset ({E_6}^C)^{\gamma}$ に対して, $p \in Sp(1, \boldsymbol{H}^C)$ と $A \in SU^*(6, \boldsymbol{C}^C)$ が存在して, $\alpha = \varphi_6(p, A)$ を満たす. 条件 $\varepsilon_k \alpha = \alpha \varepsilon_k, k = 1, 2$ から, $\alpha = \varphi_6(1, A)$ または $\alpha = \varphi_6(-1, A)$ が分かる. 後者の場合は, $\alpha = \varphi_6(-1, A) = \varphi_6(1, -A) = \varphi_{6,r}(-A)$ であるから，$\varphi_{6,r}$ は全射である. $\mathrm{Ker}\, \varphi_{6,r} = \{E\}$ は容易である. よって，群同型 $SU^*(6, \boldsymbol{C}^C) \cong ({E_6}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ を得る. したがって，写像 $\varphi_{6,r}$ が連続で，群 $SU^*(6, \boldsymbol{C}^C)$ が連結であることから，群 $({E_6}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ の連結性が分かる. □

† **補題 6.8.3.** ([56]) Lie 群 ${E_7}^C$ の Lie 環 ${\mathfrak{e}_7}^C$ は，つぎのように与えられる：

$$ {\mathfrak{e}_7}^C = \{\varPhi(\phi, A, B, \nu) \,|\, \phi \in {\mathfrak{e}_6}^C,\ A, B \in \mathfrak{J}^C,\ \nu \in C\}.$$

また Lie 群 $({E_7}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, $(({E_7}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})_{\mathrm{i}}$ の Lie 環 $({\mathfrak{e}_7}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, $(({\mathfrak{e}_7}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})_{\mathrm{i}}$ は，それぞれつぎのようである：

$$(1)\ ({\mathfrak{e}_7}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \left\{ \varPhi(D + \widetilde{S} + \widetilde{T}, A, B, \nu) \in {\mathfrak{e}_7}^C \;\middle|\; \right.$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & d_{01} & d_{02} & d_{03} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_{01} & 0 & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_{02} & -d_{12} & 0 & d_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_{03} & -d_{13} & -d_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_1 & 0 & d_3 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_2 & -d_3 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_3 & d_2 & -d_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(8, C),$$

$$\left. S = \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -\overline{s}_2 \\ -\overline{s}_3 & 0 & s_1 \\ s_2 & -\overline{s}_1 & 0 \end{pmatrix}, s_k \in \boldsymbol{H}^C, T \in \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}^C), \mathrm{tr}(T) = 0, A, B \in \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}^C), \nu \in C \right\}.$$

特に,

$$\dim_C(({\mathfrak{e}_7}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = 9 + 12 + 14 + 15 \times 2 + 1 = 66$$

である.

$$(2)\ (({\mathfrak{e}_7}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})_{\mathrm{i}} = \{\varPhi(D + \widetilde{S} + \widetilde{T}, A, B, \nu) \in ({\mathfrak{e}_7}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \,|\, B = 0, \nu = 0\}.$$

Freudenthal 多様体 $\mathfrak{M}^C$ は，つぎのように定義される：

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}^C &= \{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, P \times P = 0,\ P \neq 0\} \\ &= \left\{P = (X, Y, \xi, \eta) \in \mathfrak{P}^C \;\middle|\; \begin{array}{l} X \vee Y = 0, X \times X = \eta Y, Y \times Y = \xi X, \\ (X, Y) = 3\xi\eta,\ P \neq 0 \end{array}\right\}.\end{aligned}$$

そこで，つぎの命題のために $\mathfrak{M}^C$ の部分多様体 $(\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1, \text{i}}$ を

$$\begin{aligned}(\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1, \text{i}} &= \{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, P \times P = 0,\ \varepsilon_1 P = P,\ \{\dot{1}, P\} = 1\} \\ &= \left\{P = (X, Y, \xi, \eta) \in \mathfrak{P}^C \;\middle|\; \begin{array}{l} X \vee Y = 0, X \times X = \eta Y, Y \times Y = \xi X, \\ (X, Y) = 3\xi\eta,\ X, Y \in \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}^C), \\ \{\dot{1}, P\} = 1 \end{array}\right\} \\ &= \{\, (X, X \times X, \det X, 1) \,|\, X \in \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}^C), X \vee (X \times X) = 0\}\end{aligned}$$

で定義する．

† **命題 6.8.4.** $((E_7{}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})_{\text{i}} / (E_6{}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \simeq (\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1, \text{i}}$.
特に, $((E_7{}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})_{\text{i}}$ は連結である.

証明. 群 $((E_7{}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})_{\text{i}}$ は，$(\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1, \text{i}}$ に働く．この働きが推移的であることを示そう．そのためには, 任意の元 $P \in (\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1, \text{i}}$ がある元 $\alpha \in ((E_7{}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})_{\text{i}}$ によって $\underset{\cdot}{1} = (0, 0, 0, 1) \in (\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1, \text{i}}$ に移されることを示せばよい．そこで $P = (X, X \times X, \det X, 1) \in (\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1, \text{i}}$ に対して, $\varPhi(0, X, 0, 0) \in ((\mathfrak{e}_7{}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})_{\text{i}}$ (補題 6.8.3 (2)) である．よって，$\alpha(X) = \exp \varPhi(0, X, 0, 0) \in (((E_7{}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})_{\text{i}})^0$ である．$\underset{\cdot}{1}$ に $\alpha(X)$ を施すと, $\alpha(X)\underset{\cdot}{1} = (X, X \times X, \det X, 1)$ を得る．よって，これはこの働きが推移的で示している．$(\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1, \text{i}} = (((E_7{}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})_{\text{i}})^0 \underset{\cdot}{1}$ であるから, $(\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1, \text{i}}$ は連結 である．また，$\underset{\cdot}{1}$ における $((E_7{}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})_{\text{i}}$ の固定化群は $(E_6{}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ である．よって，同相 $((E_7{}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})_{\text{i}} / (E_6{}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \simeq (\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1, \text{i}}$ を得る．これより，$(\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1, \text{i}}$, $(E_6{}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ が連結であるから (命題 6.7.2), $((E_7{}^C)^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})_{\text{i}}$ も連結である. □

† **補題 6.8.5.** $\varPhi(0, 0, B, \nu), B \in \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}^C), \nu \in C$ に対して，$Y \in \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}^C)$，$\xi \in C, \xi \neq 0$ が存在して

$$(\exp \varPhi(0, 0, B, \nu))\dot{1} = \Big(\frac{1}{\xi}(Y \times Y), Y, \xi, \frac{1}{\xi^2}(\det Y)\Big).$$

を満たす．逆もまた正しい.

証明. 直接計算によって

$$(\exp \varPhi(0, 0, B, \nu))\dot{1} = \begin{pmatrix} (e^{\nu} - 2e^{\frac{\nu}{3}} + e^{-\frac{\nu}{3}})\dfrac{9}{4\nu^2}(B \times B) \\ (e^{\nu} - e^{\frac{\nu}{3}})\dfrac{3}{2\nu}B \\ e^{\nu} \\ ((e^{\nu} - e^{-\nu}) - 3(e^{\frac{\nu}{3}} - e^{-\frac{\nu}{3}}))\dfrac{27\det B}{8\nu^3} \end{pmatrix} \in \mathfrak{P}^C$$

を得る．($\nu=0$ の場合は, $\nu=0$ を $\lim\limits_{\nu\to 0}$ で置き換える.) いま， $Y=(e^\nu-e^{\frac{\nu}{3}})\dfrac{3}{2\nu}B,\ \xi=e^\nu$ $(*)$ とおくとき,

$$(\exp\varPhi(0,0,B,\nu))\dot{1}=\Bigl(\frac{1}{\xi}\,(Y\times Y),Y,\xi,\frac{1}{\xi^2}\,(\det Y)\Bigr)$$

である．

逆に $P=\Bigl(\dfrac{1}{\xi}\,(Y\times Y),Y,\xi,\dfrac{1}{\xi^2}\,(\det Y)\Bigr)$ に対して, 上の $(*)$ を満たす $B\in\mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H}^C)$， $\nu\in C$ を選ぶことができる．このとき $(\exp\varPhi(0,0,B,\nu))\ \dot{1}=P$ を得る． □

また命題 6.8.6 のために，$\mathfrak{M}^C$ の部分多様体 $(\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1}$ を

$$\begin{aligned}(\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1}\ &=\ \{P\in\mathfrak{P}^C\,|\,P\times P=0,\ \varepsilon_1P=P,\ P\neq 0\}\\ &=\ \left\{P=(X,Y,\xi,\eta)\in\mathfrak{P}^C\ \middle|\ \begin{array}{l}X\vee Y=0, X\times X=\eta Y, Y\times Y=\xi X,\\ (X,Y)=3\xi\eta,\ X,Y\in\mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H}^C),\ P\neq 0\end{array}\right\}\end{aligned}$$

で定義する．

† **命題 6.8.6.** $({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}/(({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2})_{\dot{1}}\simeq(\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1}$.

特に, $({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ は連結である．

証明. 群 $({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ は $(\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1}$ に働く．この働きが推移的であることを示そう．そのためには，任意の元 $P\in(\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1}$ がある元 $\alpha\in({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ によって $\dot{1}=(0,0,1,0)\in(\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1}$ に移すされることを示せばよい．

(1) $P=(X,Y,\xi,\eta),\xi\neq 0$ の場合. $(\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1}$ の条件から,

$$X=\frac{1}{\xi}(Y\times Y),\quad \eta=\frac{1}{\xi^2}(\det Y)$$

が分かる．これらの Y, ξ に対して, 補題 6.8.4 の $B\in\mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H}^C)$，$\nu\in C$ を選ぶと, $\varPhi(0,0,B,\nu)\in({\mathfrak{e}_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ であることが分かる (補題 6.7.3(1))．よって，$\alpha=\exp\varPhi(0,0,B,\nu)\in(({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2})^0$ を得て，$\alpha\dot{1}=P$ となる．

(2) $P=(X,Y,0,\eta)$, $Y\neq 0$ の場合. 与えられた P に対して, $\varPhi(0,\tau Y,0,0)\in({\mathfrak{e}_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ となる (補題 6.8.3(1))．よって，$\exp\varPhi(0,\tau Y,0,0)\in(({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2})^0$.

$$(\exp\varPhi(0,\tau Y,0,0))(X,Y,0,\eta)=(X+\eta(\tau Y),Y+2\tau Y\times X,(\tau Y,Y),\eta)$$

を得る．もし $Y\neq 0$ であるとすれば, $(\tau Y,Y)\neq 0$ である．よって，(1) の場合に帰着される．

(3) $P=(X,0,0,\eta)$, $X\neq 0$ の場合. $\exp\varPhi(0,E,0,0)\in(({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2})^0$ となり,

$$(\exp\varPhi(0,E,0,0))(X,0,0,\eta)=(X+\eta E,(\mathrm{tr}(X)+\eta)E-X,\mathrm{tr}(X)+\eta,0)\qquad(*)$$

を得る．もし $(\mathrm{tr}(X)+\eta)E-X\neq 0$ であるとすれば, (2) の場合に帰着される．$(\mathrm{tr}(X)+\eta)E-X=0$ の場合は, $(*)$ は $-\dfrac{1}{3}\mathrm{tr}(X)(E,0,-1,0)$ に等しい．よって，(1) の場合に帰着される．

(4) $P=(0,0,0,\eta)$, $\eta\neq 0$ の場合. $\exp\varPhi(0,E_1,0,0)\in(({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2})^0$ となり,

$$(\exp\varPhi(0,E_1,0,0))(0,0,0,\eta)=(\eta E_1,0,0,\eta)$$

を得る．よって，(3) の場合に帰着される．

したがって，群 $((E_7{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2})^0$ の $(\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1}$ への作用の推移性が示された．群 $(E_7{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ の $\dot{1}$ における固定化群は $((E_7{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2})_{\dot{1}}$ である．よって，同相 $(E_7{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}/((E_7{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2})_{\dot{1}} \simeq (\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1}$ を得る．$(\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1} = ((E_7{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2})^0\dot{1}$ であるから, $(\mathfrak{M}^C)_{\varepsilon_1}$ は連結, $((E_7{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2})_{\dot{1}}$ も連結 (命題 6.8.4) であるから $(E_7{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ は連結である． □

命題 6.8.7 を証明するために, つぎ 2 つの写像 ϕ, λ を用意する：

写像 $\phi : U(1) = \{\theta \in C \,|\, (\tau\theta)\theta = 1\} \to E_7{}^C$ は

$$\phi(\theta)(X, Y, \xi, \eta) = (\theta^{-1}X, \theta Y, \theta^3\xi, \theta^{-3}\eta), \quad (X, Y, \xi, \eta) \in \mathfrak{P}^C$$

で定義する．また写像 $\lambda : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{P}^C$ は

$$\lambda(X, Y, \xi, \eta) = (Y, -X, \eta, -\xi), \quad (X, Y, \xi, \eta) \in \mathfrak{P}^C$$

で定義する．このとき $\phi(\theta), \lambda \in (E_7{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ を得る．

† **命題 6.8.7.** 群 $(E_7{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ の中心 $z((E_7{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2})$ は，位数 2 の 2 つの巡回群の直和に同型である:

$$z((E_7{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) = \{1, \gamma\} \times \{1, -\gamma\} = \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2.$$

証明. $\alpha \in z((E_7{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2})$ とする．$\beta \in (E_6{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} \subset (E_7{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ に対して,

$$\beta\alpha\dot{1} = \alpha\beta\dot{1} = \alpha\dot{1}$$

が分かる．$\alpha\dot{1} = (X, Y, \xi, \eta)$ と表す．$(\beta X, {}^t\beta^{-1}Y, \xi, \eta) = (X, Y, \xi, \eta)$ であるから, すべての β に対して

$$\beta X = X, \quad {}^t\beta^{-1}Y = Y$$

を得る．β として $\omega 1 \in (E_6{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ $(\omega \in C, \omega^3 = 1)$ を選ぶ, このとき $X = Y = 0$ を得る．よって，$\alpha\dot{1}$ は

$$\alpha\dot{1} = (0, 0, \xi, \eta), \quad \xi, \eta \in C$$

の形である．また $\alpha\dot{1} \in \mathfrak{M}^C$ であるから, $\xi\eta = 0$ を得る． このとき $\xi = 0$ と仮定すれば, $\alpha\dot{1} = \underset{\cdot}{\eta}$, $\eta \neq 0$ である．α と $\phi(\theta) \in (E_7{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ は可換だから, 任意の $\theta \in U(1)$ に対して

$$\theta^{-3}\underset{\cdot}{\eta} = \phi(\theta)\underset{\cdot}{\eta} = \phi(\theta)\alpha\dot{1} = \alpha\phi(\theta)\dot{1} = \alpha(\theta^3\dot{1}) = \theta^3\underset{\cdot}{\eta}$$

であるから, $\eta = 0$ を得る．これは矛盾である．よって，$\xi \neq 0$ を得る, すなわち，$\eta = 0$. よって，$\alpha\dot{1} = \dot{\xi}$ である．上と同様な考察によって, $\alpha\underset{\cdot}{1} = \underset{\cdot}{\zeta}$ を得る．$\xi\zeta = \{\dot{\xi}, \underset{\cdot}{\zeta}\} = \{\alpha\dot{1}, \alpha\underset{\cdot}{1}\} = \{\dot{1}, \underset{\cdot}{1}\} = 1$, すなわち, $\xi\zeta = 1$ であるから, $\alpha\dot{1} = \dot{\xi}, \alpha\underset{\cdot}{1} = \underset{\cdot}{\xi^{-1}}$ である．また, α と $\lambda \in (E_7{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ は可換であるから,

$$-\underset{\cdot}{\xi} = \lambda\dot{\xi} = \lambda\alpha\dot{1} = \alpha\lambda\dot{1} = \alpha(-\underset{\cdot}{1}) = -\underset{\cdot}{\xi^{-1}}$$

を得る．よって，$\xi = \xi^{-1}$，すなわち，$\xi = 1$ または $\xi = -1$ を得る．

(i) $\xi = 1$ の場合. $\alpha\dot{1} = \dot{1}$，$\alpha\underset{\cdot}{1} = \underset{\cdot}{1}$ より $\alpha \in E_6{}^C$ が分かる．よって，$\alpha \in z((E_6{}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2})$.

$({E_6}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} = SU^*(6, \boldsymbol{C}^C)$ (命題 6.8.1) であるから,

$$\begin{aligned} z(({E_6}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) &= z(\varphi_{6,r}(SU^*(6, \boldsymbol{C}^C)) \\ &= \{\varphi_{6,r}(cE) \,|\, c = 1, \omega, \omega^2, -1, -\omega, -\omega^2\} \end{aligned}$$

を得る，ここに $\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ である．しかし，$c = \pm\omega, \pm\omega^2$ に対して，$\varphi_{6,r}(cE) \notin z(({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2})$ である．よって，$\alpha = \varphi_{6,r}(E) = 1$ または $\alpha = \varphi_{6,r}(-E) = \gamma$ を得る．

(ii) $\xi = -1$ の場合. (i) と同様な考察により $-\alpha \in z(({E_6}^C)^{\ \varepsilon_1,\varepsilon_2})$ を得る．よって，$-\alpha = 1$ または $-\alpha = \gamma$, すなわち, $\alpha = -1$ または $\alpha = -\gamma$ である．

したがって，$z(({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) \subset \{1, \gamma, -1, -\gamma\}$ を得る．逆の包含は自明である．以上より，$z(({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) = \{1, \gamma, -1, -\gamma\}$ を得る． □

つぎの命題のために 12-次元 C-ベクトル空間 $(V^C)^{12}$ を

$$\begin{aligned} (V^C)^{12} &= \{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, \varepsilon_1 P = -iP\} \\ &= \left\{ P = \left(\begin{pmatrix} 0 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & y_3 & \overline{y}_2 \\ \overline{y}_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & \overline{y}_1 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0 \right) \;\middle|\; x_k, y_k \in (\boldsymbol{H}^C e_4)_{\varepsilon_1} \right\} \end{aligned}$$

で定義し，ノルムを

$$(P, P)_{\varepsilon_2} = \frac{1}{8}\{P, \varepsilon_2 P\}$$

で与える．ここに $(\boldsymbol{H}^C e_4)_{\varepsilon_1} = \{x \in \mathfrak{C}^C \,|\, x = p(e_4 + ie_5) + q(e_6 - ie_7),\, p, q \in C\}$ である．$P \in (V^C)^{12}, x_k = p_k(e_4 + ie_5) + q_k(e_6 - ie_7), y_k = s_k(e_4 + ie_5) + t_k(e_6 - ie_7), k = 1, 2, 3$ とするとき, $(P, P)_{\varepsilon_2}$ の具体形は，つぎのようである：

$$(P, P)_{\varepsilon_2} = (p_1 t_1 - q_1 s_1) + (p_2 t_2 - q_2 s_2) + (p_3 t_3 - q_3 s_3).$$

† **命題 6.8.8.** $({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} \cong Spin(12, C)$.

証明. 群 $({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ は $(V^C)^{12}$ に働き，任意の元 $\alpha \in ({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ は $(V^C)^{12}$ のノルム $(P, P)_{\varepsilon_2}$ を保つ．群 $({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ は連結である (命題 6.8.6) から, 準同型写像 $\pi : ({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} \to SO(12, C) = SO((V^C)^{12})$ を

$$\pi(\alpha) = \alpha|(V^C)^{12}$$

で定義する．まず $\mathrm{Ker}\,\pi$ を求めよう．そのために，π の微分写像 $\pi_* : ({\mathfrak{e}_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} \to \mathfrak{so}((V^C)^{12})$ の核を計算すると自明である．すなわち, $\mathrm{Ker}\,\pi_* = 0$ である．よって，$\mathrm{Ker}\,\pi$ は離散群である．そして群 $({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ が連結であるから,

$$\mathrm{Ker}\,\pi \subset z(({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) = \{1, \gamma, -1, -\gamma\}$$

を得る (命題 6.7.7). しかし，$-1, \gamma \notin \mathrm{Ker}\,\pi$ であるから，$\mathrm{Ker}\,\pi = \{1, -\gamma\} = \boldsymbol{Z}_2$ を得る．さらに $\dim_C(({\mathfrak{e}_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) = 66$ (補題 6.8.3(1)) $= \dim_C(\mathfrak{so}(12, C))$ より, π は全射である．よって，

$({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(12,C)$ を得る．これより，$({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ は $SO(12,C)$ の 2 重被覆群として $Spin(12,C)$ に同型である． □

群 ${E_7}^C$ に $Spin(12,C)$ と同型な部分群が構成できたので，下の補題，命題を用いて標記の定理を証明しよう．

写像 $\varphi_2 : Sp(1,\boldsymbol{H}^C)\times Sp(1,\boldsymbol{H}^C) \to {G_2}^C$ を用いて, 写像 $\varphi_{2,l} : Sp(1,\boldsymbol{H}^C) \to {G_2}^C$ を写像 φ_2 の制限写像として

$$\varphi_{2,l}(p) = \varphi_2(p,1)$$

で定義する．このとき，$\varphi_{2,l}(p) \in {G_2}^C \subset {F_4}^C \subset {E_6}^C \subset {E_7}^C$ である．

† 補題 6.8.9. Lie 環 ${\mathfrak{e}_7}^C$ において, Lie 群 $Sp(1,\boldsymbol{H}^C) = \varphi_{2,l}(Sp(1,\boldsymbol{H}^C))$ の Lie 環 $\mathfrak{sp}(1,\boldsymbol{H}^C)$ は，つぎのようである：

$$\mathfrak{sp}(1,\boldsymbol{H}^C) = \left\{ \varPhi(D,0,0,0) \in {\mathfrak{e}_7}^C \;\middle|\; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_3J \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(8,C), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

† 命題 6.8.10. 群 ${E_7}^C$ の部分群 $Sp(1,\boldsymbol{H}^C)$，$Spin(12,C)$ は元ごと可換である．

証明. 任意の元 $\varPhi_1 \in \mathfrak{sp}(1,\boldsymbol{H}^C) = {\varphi_{2,l}}_*(\mathfrak{sp}(1,\boldsymbol{H}^C))$ (${\varphi_{2,l}}_*$ は $\varphi_{2,l}$ の微分写像) は，任意の元 $\varPhi_2 \in \mathfrak{spin}(12,C) = ({\mathfrak{e}_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ と可換である：$[\varPhi_1,\varPhi_2] = 0$ (補題 6.8.9, 補題 6.8.3), さらに群 $Sp(1,\boldsymbol{H}^C)$ と $Spin(12,C) = ({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ は連結である．よって，任意の元 $\varphi_{2,l}(p), p \in Sp(1,\boldsymbol{H}^C)$ は任意の元 $\beta \in Spin(12,C)$ と可換である：$\varphi_{2,l}(p)\beta = \beta\varphi_{2,l}(p)$. □

† 定理 6.8.11. $({E_7}^C)_{ev} \cong (SL(2,C)\times Spin(12,C))/\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_2 = \{(E,1), (-E,\gamma)\}$.

証明. 写像 $\varphi_\gamma : Sp(1,\boldsymbol{H}^C)\times Spin(12,C) \to ({E_7}^C)^\gamma = ({E_7}^C)_{ev}$ を

$$\varphi_\gamma(p,\beta) = \varphi_{2,l}(p)\beta$$

で定義する．$\varphi_{2,l}(p) \in ({E_7}^C)^\gamma$ は明らかであり，$Spin(12,C) = ({E_7}^C)^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ (命題 4.8.8) $\subset ({E_7}^C)^\gamma$ であるから, $\varphi_\gamma(p,\beta) \in ({E_7}^C)^\gamma$ を得る．$\varphi_{2,l}(p)$ は β と可換である：$\varphi_{2,l}(p)\beta = \beta\varphi_{2,l}(p)$ (命題 4.8.10) から, φ_γ は準同型写像である．$\mathrm{Ker}\,\varphi_\gamma = \{(1,1),(-1,\gamma)\} = \boldsymbol{Z}_2$．群 $({E_7}^C)^\gamma$ は連結かつ $\dim_C(\mathfrak{sp}(1,\boldsymbol{H}^C)\oplus\mathfrak{spin}(12,C)) = 3+66 = 69 = 39+15\times 2 = \dim_C(({\mathfrak{e}_7}^C)_{ev})$ (定理 6.1.1) $= \dim_C(({\mathfrak{e}_7}^C)^\gamma)$ であるから, φ_γ は全射である． よって，群同型 $({E_7}^C)_{ev} \cong (Sp(1,\boldsymbol{H}^C)\times Spin(12,C))/\boldsymbol{Z}_2\,(\boldsymbol{Z}_2 = \{(1,1),(-1,\gamma)\}) \cong (SL(2,C)\times Spin(12,C))/\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_2 = \{(E,1),(-E,\gamma)\}$ を得る． □

7. 例外型単純 Lie 群 E_8

7.1 複素 Lie 環 ${\mathfrak e_8}^C$

248 次元 C-ベクトル空間

$$ {\mathfrak e_8}^C = {\mathfrak e_7}^C \oplus \mathfrak{P}^C \oplus \mathfrak{P}^C \oplus C \oplus C \oplus C $$

に Lie 積 $[R_1, R_2]$ を

$$ [(\varPhi_1, P_1, Q_1, r_1, u_1, v_1), (\varPhi_2, P_2, Q_2, r_2, u_2, v_2)] = (\varPhi, P, Q, r, u, v), $$

$$ \begin{cases} \varPhi = [\varPhi_1, \varPhi_2] + P_1 \times Q_2 - P_2 \times Q_1 \\ P = \varPhi_1 P_2 - \varPhi_2 P_1 + r_1 P_2 - r_2 P_1 + u_1 Q_2 - u_2 Q_1 \\ Q = \varPhi_1 Q_2 - \varPhi_2 Q_1 - r_1 Q_2 + r_2 Q_1 + v_1 P_2 - v_2 P_1 \\ r = -\dfrac{1}{8}\{P_1, Q_2\} + \dfrac{1}{8}\{P_2, Q_1\} + u_1 v_2 - u_2 v_1 \\ u = \dfrac{1}{4}\{P_1, P_2\} + 2r_1 u_2 - 2r_2 u_1 \\ v = -\dfrac{1}{4}\{Q_1, Q_2\} - 2r_1 v_2 + 2r_2 v_1, \end{cases} $$

で定義する．このとき ${\mathfrak e_8}^C$ は複素 Lie 環になる．

Lie 環 ${\mathfrak e_8}^C$ の Killing 形式 $B_8(R_1, R_2)$ は,

$$ B_8(R_1, R_2) = \frac{5}{3} B_7(\varPhi_1, \varPhi_2) + 15\{Q_1, P_2\} - 15\{P_1, Q_2\} + 120 r_1 r_2 + 60 v_1 u_2 + 60 u_1 v_2 $$

$(R_k = (\varPhi_k, P_k, Q_k, r_k, u_k, v_k) \in {\mathfrak e_8}^C)$ で与えられる．ここに $B_7(\varPhi_1, \varPhi_2)$ は，Lie 環 ${\mathfrak e_7}^C$ の Killing 形式

$$ B_7(\varPhi_1, \varPhi_2) = \frac{3}{2} B_6(\phi_1, \phi_2) + 36(A_1, B_2) + 36(A_2, B_1) + 24\nu_1\nu_2 $$

$(\varPhi_k = \varPhi(\phi_k, A_k, B_k, \nu_k) \in {\mathfrak e_7}^C)$ である．この $B_6(\phi_1, \phi_2)$ は，Lie 環 ${\mathfrak e_6}^C$ の Killing 形式

$$ B_6(\phi_1, \phi_2) = \frac{4}{3} B_4(\delta_1, \delta_2) + 12(T_1, T_2) $$

$(\phi_k = \delta_k + \tilde{T}_k \in {\mathfrak e_6}^C)$ である．さらに $B_4(\delta_1, \delta_2)$ は，Lie 環 ${\mathfrak f_4}^C$ の Killing 形式

$$ B_4(\delta_1, \delta_2) = 3\mathrm{tr}(\delta_1 \delta_2) $$

$(\delta_k \in {\mathfrak f_4}^C)$ である．ここに $\mathrm{tr}(\delta_1\delta_2)$ は，$\mathfrak{J}^C$ における $\delta_1\delta_2$ のトレースである．

以後, ${\mathfrak e_8}^C$ においてつぎの記号を用いる：

$$ \begin{array}{lll} \varPhi = (\varPhi, 0, 0, 0, 0, 0), & P^- = (0, P, 0, 0, 0, 0), & Q_- = (0, 0, Q, 0, 0, 0), \\ \tilde{r} = (0, 0, 0, r, 0, 0), & u^- = (0, 0, 0, 0, u, 0), & v_- = (0, 0, 0, 0, 0, v). \end{array} $$

7.2 Lie 環 $\mathfrak{g} = {\mathfrak{e}_8}^C$ の 2-graded 分解とその $\mathfrak{g}_0$ の群実現

定義. 群 ${E_8}^C, E_8$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} {E_8}^C &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C({\mathfrak{e}_8}^C) \,|\, \alpha[R, R'] = [\alpha R, \alpha R']\}, \\ E_8 &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C({\mathfrak{e}_8}^C) \,|\, \alpha[R, R'] = [\alpha R, \alpha R'], \langle \alpha R, \alpha R' \rangle = \langle R, R' \rangle\} \end{aligned}$$

で定義する．ここに $\langle R, R' \rangle = -B_8(\tau\widetilde{\lambda}R, R')$ とする (C-線形変換 $\tau\widetilde{\lambda}$ は, 下記参照).

定理 7.2.1. ([15],[56])　群 ${E_8}^C$ は単連結複素 Lie 群, E_8 は単連結コンパクト Lie 群で，その次元はそれぞれ 248 である．

任意の元 $\alpha \in {E_7}^C$ に対して, 写像 $\widetilde{\alpha} : {\mathfrak{e}_8}^C \to {\mathfrak{e}_8}^C$ を

$$\widetilde{\alpha}(\varPhi, P, Q, r, u, v) = (\alpha\varPhi\alpha^{-1}, \alpha P, \alpha Q, r, u, v)$$

で定義すると，$\widetilde{\alpha} \in {E_8}^C$ となる．このとき，α と $\widetilde{\alpha}$ を同一視すると，${E_8}^C$ は ${E_7}^C$ を部分群として含む．また $({E_8}^C)_{\tilde{1},1^-,1_-} = {E_7}^C, (E_8)_{1_-} = E_7$ である．

C-線型変換 $\gamma, \lambda, \lambda' : {\mathfrak{e}_8}^C \to {\mathfrak{e}_8}^C$ をそれぞれつぎのように定義する：

$$\begin{aligned} \sigma(\varPhi, P, Q, r, u, v) &= (\sigma\varPhi\sigma, \sigma P, \sigma Q, r, u, v), \\ \sigma'(\varPhi, P, Q, r, u, v) &= (\sigma'\varPhi\sigma, \sigma P, \sigma Q, r, u, v), \\ \lambda(\varPhi, P, Q, r, u, v) &= (\lambda\varPhi\lambda^{-1}, \lambda P, \lambda Q, r, u, v), \\ \lambda'(\varPhi, P, Q, r, u, v) &= (\varPhi, Q, -P, -r, -v, -u). \end{aligned}$$

ここに右辺の σ, σ', λ は $\sigma, \sigma' \in F_4 \subset E_6 \subset E_7 \subset {E_7}^C, \lambda \in E_7 \subset {E_7}^C$ である．このとき，$\gamma, \lambda, \lambda' \in E_8 \subset {E_8}^C, \lambda'^2 = 1$ である．また $\widetilde{\lambda}$ を

$$\widetilde{\lambda} = \lambda\lambda' = \lambda'\lambda$$

で定義すると, $\widetilde{\lambda} \in E_8 \subset {E_8}^C, \tilde{\lambda}^2 = 1$ である．また上述の定義から $E_8 = ({E_8}^C)^{\tau\widetilde{\lambda}}$ である．

${\mathfrak{e}_8}^C$ の複素共役 τ を

$$\tau(\varPhi, P, Q, r, u, v) = (\tau\varPhi\tau, \tau P, \tau Q, \tau r, \tau u, \tau v)$$

で定義する．また C-線型変換 $\widetilde{\kappa}_3 : {\mathfrak{e}_8}^C \to {\mathfrak{e}_8}^C$ を

$$\widetilde{\kappa}_3(\varPhi, P, Q, r, u, v) = (\kappa_3\varPhi{\kappa_3}^{-1}, \omega^2\kappa_3 P, \omega\kappa_3 Q, r, \omega u, \omega^2 v)$$

で定義する．ここに右辺の κ_3 は $\phi_1(\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}) \in E_7$, $\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (命題 6.2.4) である．

複素 Lie 環 ${\mathfrak{e}_8}^C$ において, 2-graded 分解の特性元を

$$Z = (\kappa, 0, 0, -1, 0, 0) = (\varPhi(-2E_1 \vee E_1, 0, 0, -1), 0, 0, -1, 0, 0).$$

とする．このとき

$$\tilde{\kappa}_3 = \exp\frac{2\pi i}{3}(\mathrm{ad}Z)$$

となる．以後，$\mathrm{ad}Z$ を $\tilde{\kappa}$ で表すこともある．

†**定理 7.2.2.** $\mathrm{ad}Z$, $Z = (\kappa, 0, 0, -1, 0, 0)$ に関する複素 Lie 環 ${\mathfrak{e}_8}^C$ の 2-graded 分解

$${\mathfrak{e}_8}^C = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$$

は，つぎのようである：

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \Big(\Phi\Big(D + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 \\ 0 & -\overline{d}_1 & 0 \end{pmatrix}^{\sim} + \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & t_1 \\ 0 & \overline{t}_1 & \tau_3 \end{pmatrix}^{\sim}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & a_1 \\ 0 & \overline{a}_1 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & b_1 \\ 0 & \overline{b}_1 & \beta_3 \end{pmatrix}, \nu\Big), \Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & p_1 \\ 0 & \overline{p}_1 & \rho_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \rho \Big), \Big(\begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & z_1 \\ 0 & \overline{z}_1 & \zeta_3 \end{pmatrix}, \zeta, 0 \Big), r, 0, 0 \Big) \,\Big|\, D \in {\mathfrak{d}_4}^C, \tau_k, \alpha_k, \beta_k, \nu, \rho_k, \rho, \zeta_k, \zeta, r \in C,$$

$$\left. \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0, d_1, t_1, a_1, b_1, p_1, z_1 \in \mathfrak{C}^C \right\} 92.$$

$\mathfrak{g}_0$ の元を簡単に

$$R_0(\Phi(D, {d_1}^{\sim}, (\tau_1, \tau_2, \tau_3, t_1)^{\sim}, (\alpha_2, \alpha_3, a_1), (\beta_2, \beta_3, b_1), \nu),$$
$$((\rho_2, \rho_3, p_1), \rho_1, \rho), (\zeta_1, (\zeta_2, \zeta_3, z_1), \zeta), r)$$

と表す.

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \Big(\Phi\Big(\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -\overline{a}_2 \\ -\overline{a}_3 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\sim} + \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -\overline{a}_2 \\ \overline{a}_3 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\sim}, \begin{pmatrix} 0 & z_3 & \overline{z}_2 \\ \overline{z}_3 & 0 & 0 \\ z_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0 \Big), \right.$$

$$\Big(\begin{pmatrix} 0 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & y_3 & \overline{y}_2 \\ \overline{y}_3 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0 \Big), (0, 0, 0, 0), 0, 0, 0 \Big)$$

$$\left. \,\Big|\, a_k, z_k, x_k, y_k \in \mathfrak{C}^C \right\} 64,$$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \Big(\Phi\Big(\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -\overline{a}_2 \\ -\overline{a}_3 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\sim} + \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & \overline{a}_2 \\ -\overline{a}_3 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\sim}, 0, \begin{pmatrix} 0 & z_3 & \overline{z}_2 \\ \overline{z}_3 & 0 & 0 \\ z_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 \Big), \right.$$

$$(0,0,0,0), \Big(\begin{pmatrix} 0 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & y_3 & \overline{y}_2 \\ \overline{y}_3 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0 \Big), 0, 0, 0 \Big)$$

$$\mid a_k, z_k, x_k, y_k \in \mathfrak{C}^C \Big\} 64,$$

$$\mathfrak{g}_{-2} = \Big\{ \Big(\varPhi\Big(0, \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0 \Big), \Big(\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & y_1 \\ 0 & \overline{y}_1 & \eta_3 \end{pmatrix}, \xi, 0 \Big),$$

$$(0,0,0,0), 0, u, 0 \Big) \mid \zeta_1, \xi_1, \xi, \eta_k, u \in C, y_1 \in \mathfrak{C}^C \Big\} 14.$$

また $\mathfrak{g}_{-2}$ の元を簡単に

$$R_{-2}(\zeta_1, (\xi_1, (\eta_2, \eta_3, y_1), \xi), u)$$

と表す.

$$\mathfrak{g}_2 = \Big\{ \Big(\varPhi(0, 0, \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0), (0,0,0,0), (\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & x_1 \\ 0 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$0, \eta), 0, 0, v \Big) \mid \zeta_1, \xi_k, \eta_1, \eta, v \in C, x_1 \in \mathfrak{C}^C \Big\} 14.$$

同様に $\mathfrak{g}_2$ の元も簡単に

$$R_2(\zeta_1, ((\xi_2, \xi_3, x_1), \eta_1, \eta), v)$$

と表す.

証明. Lie 環 ${\mathfrak{e}_8}^C$ において，[48] Theorem 4.21 を用いると，Lie 積 $[Z, (\varPhi, P, Q, r, u, v)] = ([\kappa, \varPhi], \kappa P - P, \kappa Q + Q, 0, -2u, 2v)$ が成り立つので，この定理を得る． □

さてこの節の目的は，群同型 $({E_8}^C)_0 \cong (C^* \times Spin(14, C))/\boldsymbol{Z}_4$ (定理 7.2.11) を証明することにある．それには，${E_8}^C$ に部分群 $Spin(14, C)$ を構成する必要がある．そのために，その部分群 $Spin(12, C), Spin(13, C)$ を順に構成し，定理を証明する．

2 つの C-線型写像 $\widetilde{\mu}_1 : {\mathfrak{e}_8}^C \to {\mathfrak{e}_8}^C, \delta : \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}_2$ をそれぞれ

$$\widetilde{\mu}_1 = \exp\frac{\pi i}{2}\mathrm{ad}\widetilde{\mu}, \quad \widetilde{\mu} = (\mu, 0, 0, 0, 1, 1) \in {\mathfrak{e}_8}^C, \quad \mu = \varPhi(0, E_1, E_1, 0) \in {\mathfrak{e}_7}^C,$$

$$\delta(R_2(\zeta_1, ((\xi_2, \xi_3, x_1), \eta_1, \eta), v)) = R_2(-v, ((\xi_2, \xi_3, x_1), \eta_1, \eta), -\zeta_1).$$

で定義する．このとき $\widetilde{\mu}_1$ の ${\mathfrak{e}_8}^C$ への作用は

$$\widetilde{\mu}_1(\varPhi, P, Q, r, u, v) = (\mu_1 \varPhi {\mu_1}^{-1}, i\mu_1 Q, i\mu_1 P, -r, v, u)$$

である．ここに右辺の $\mu_1 : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{P}^C$ の $\mathfrak{P}^C$ への具体的作用は

$$\mu_1(X,Y,\xi,\eta) = \Big(\begin{pmatrix} i\eta & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & i\eta_3 & -iy_1 \\ x_2 & -i\overline{y_1} & i\eta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\xi & y_3 & \overline{y_2} \\ \overline{y_3} & i\xi_3 & -ix_1 \\ y_2 & -i\overline{x_1} & i\xi_2 \end{pmatrix} i\eta_1, i\xi_1 \Big).$$

である．特に, $\widetilde{\mu}_1 : \mathfrak{g}_{-2} \to \mathfrak{g}_2$ は

$$\widetilde{\mu}_1(R_{-2}(\zeta_1,(\xi_1,(\eta_2,\eta_3,y_1),\xi),u)) = R_2(\zeta_1,((-\eta_3,-\eta_2,y_1),-\xi,-\xi_1),u)$$

であり，$\widetilde{\mu}_1, \delta$ の合成写像 $\delta\widetilde{\mu}_1 : \mathfrak{g}_{-2} \to \mathfrak{g}_2$ を $\widetilde{\mu}_\delta$ で表すと，

$$\widetilde{\mu}_\delta(R_{-2}(\zeta_1,(\xi_1,(\eta_2,\eta_3,y_1),\xi),u)) = R_2(-u,((-\eta_3,-\eta_2,y_1),-\xi,-\xi_1),-\zeta_1)$$

となる．また $\mathfrak{g}_{-2}$ における内積 $(R,R')_\mu$ を

$$(R,R')_\mu = \frac{1}{30}B_8(\tilde{\mu}_\delta R, R')$$

で定義すると，$(R,R)_\mu$ はつぎのように表すことができる:

$$(R,R)_\mu = -4\zeta_1 u - \eta_2\eta_3 + y_1\overline{y_1} + \xi_1\xi.$$

ここに $R = R_{-2}(\zeta_1,(\xi_1,(\eta_2,\eta_3,y_1),\xi),u) \in \mathfrak{g}_{-2}$ である．

C-ベクトル空間 $(V^C)^{14}, (V^C)^{13}, (V^C)^{12}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} (V^C)^{14} &= \mathfrak{g}_{-2} = \{R_{-2}(\zeta_1,(\xi_1,(\eta_2,\eta_3,y_1),\xi),u) \in \mathfrak{g}_{-2}\}, \\ (V^C)^{13} &= \{R \in (V^C)^{14} \,|\, (R,(\Phi_1,0,0,0,1,0))_\mu = 0\} \\ &= \{R = R_{-2}(\zeta_1,(\xi_1,(\eta_2,\eta_3,y_1),\xi),-\zeta_1) \in \mathfrak{g}_{-2}\}, \\ (V^C)^{12} &= \{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, \kappa P = -P\} \\ &= \{P = (\xi_1 E_1, \eta_2 E_2 + \eta_3 E_3 + F_1(y_1), \xi, 0) \in \mathfrak{P}^C\} \end{aligned}$$

で定義する．ここに $\Phi_1 = \Phi(0,E_1,0,0)$ である．

上の $(V^C)^{12}$ は $\{R = (0,P,0,0,0,0) \in (V^C)^{14} \,|\, P \in (V^C)^{12}\} \subset (V^C)^{13}$ と同一視できる．そして，$P = (\xi_1 E_1, \eta_2 E_2 + \eta_3 E_3 + F_1(y_1), \xi, 0) \in (V^C)^{12}$ を $P = (\xi_1,(\eta_2,\eta_3,y_1),\xi,0)$ と簡単に表す．また $(V^C)^{12}$ における内積 $(P,P)_\mu$ は，$(V^C)^{14}$ の内積 $(R,R)_\mu$ の制限として

$$(P,P)_\mu = \frac{1}{2}\{i\mu_1 P, P\} = -\eta_2\eta_3 + y_1\overline{y_1} + \xi_1\xi$$

と表すことができる．

${E_8}^C$ の部分群 G_{14}, G_{13}, G_{12} をそれぞれ

$$\begin{aligned} G_{14} &= \{\alpha \in {E_8}^C \,|\, \tilde{\kappa}\alpha = \alpha\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}_\delta\alpha R = \alpha\tilde{\mu}_\delta R, R \in (V^C)^{14}\}, \\ G_{13} &= \{\alpha \in G_{14} \,|\, \alpha(\Phi_1,0,0,0,1,0) = (\Phi_1,0,0,0,1,0)\}, \\ G_{12} &= \{\alpha \in G_{13} \,|\, \alpha(\Phi_1,0,0,0,-1,0) = (\Phi_1,0,0,0,-1,0)\} \end{aligned}$$

で定義する．このとき G_{14} は $(V^C)^{14}$ の内積 $(R,R)_\mu$ を保つ：$(\alpha R,\alpha R)_\mu=(R,R)_\mu, \alpha\in G_{14}$, $R\in(V^C)^{14}$ ことに注意する．

まず, つぎの補題を準備して $G_{12}=Spin(12,C)$ を示そう．

† **補題 7.2.3.** 群 G_{12} は ${E_7}^C$ の部分群である．

証明. ${\mathfrak{e}_8}^C$ において，元 $\tilde{1}=(0,0,0,1,0,0)$, $1^-=(0,0,0,0,1,0)$, $1_-=(0,0,0,0,0,1)$ をとる．このとき任意の元 $\alpha\in G_{12}$ が

$$\alpha\tilde{1}=\tilde{1},\quad \alpha1^-=1^-,\quad \alpha1_-=1_-.$$

を満たすことを示せそう．$\alpha1^-=1^-$ であることは自明だから, 残りの 2 つの条件の成立を示そう．$1_-\in\mathfrak{g}_2$ であるから, $\alpha1_-=(\varPhi,0,Q,0,0,v)\in\mathfrak{g}_2$ とおける．$[\alpha1_-,1^-]=[\alpha1_-,\alpha1^-]=\alpha[1_-,1^-]=\alpha(-\tilde{1})$. 一方, $[\alpha1_-,1^-]=[(\varPhi,0,Q,0,0,v),(0,0,0,0,\,1,0)]=(0,-Q,0,-v,0,0)$ である．よって,

$$\alpha\tilde{1}=(0,Q,0,v,0,0)$$

を得る．また $[\alpha1_-,\varPhi_1]=[\alpha1_-,\alpha\varPhi_1]=\alpha[1_-,\varPhi_1]=\alpha0=0$ である．一方, $[\alpha1_-,\varPhi_1]=[(\varPhi,0,Q,0,0,v),\,\varPhi_1]=([\varPhi,\varPhi_1],0,-\varPhi_1Q,0,0.0)$ である．$\varPhi=\varPhi(0,0,\zeta_1E_1,0), Q=(\xi_2E_2+\xi_3E_3+F_1(x_1),\eta_1E_1,0,\eta)$ とおくと

$$[\varPhi,\varPhi_1]=\varPhi(-2\zeta_1E_1\vee E_1,0,0,-\zeta_1),\quad \varPhi_1Q=(\eta E_1,\xi_3E_2+\xi_2E_3-F_1(x_1),\eta_1,0).$$

となる．よって，$\varPhi=0, Q=0$ となる．したがって,

$$\alpha1_-=(0,0,0,0,0,v),\quad \alpha\tilde{1}=(0,0,0,v,0,0)$$

を得る．最後に $[\alpha\tilde{1},1^-]=[\alpha\tilde{1},\alpha1^-]=\alpha[\tilde{1},1^-]=\alpha(0,0,0,0,2,0)=(0,0,0,0,2,0)$. 一方, $[\alpha\tilde{1},1^-]=[(0,0,0,v,\,0,0),(0,0,0,0,1,0)]=(0,0,0,0,2v,0)$ となる．よって，$v=1$ となる．したがって，$\alpha1_-=1_-, \alpha\tilde{1}=\tilde{1}$ となる．これより，$G_{12}\subset({E_8}^C)_{\tilde{1},1^-,1_-}={E_7}^C$ を得る． □

† **命題 7.2.4.** $G_{12}=Spin(12,C)$.

証明. $Spin(12,C)=\{\alpha\in{E_7}^C\,|\,\kappa\alpha=\alpha\kappa,\mu\alpha=\alpha\mu\}$ とする ([45]). 最初に $G_{12}\subset Spin(12,C)$ を示そう．$G_{12}\subset{E_7}^C$ (補題 5.2.3) であるから, $\mathfrak{P}^C$ への作用を考えれば十分である．$\alpha\in G_{12}$ は $\tilde{\kappa}\alpha=\alpha\tilde{\kappa}$ を満たすので,

$$\tilde{\kappa}\alpha P=\kappa\alpha P-\alpha P,\quad \alpha\tilde{\kappa}P=\alpha\kappa P-\alpha P,\ P\in\mathfrak{P}^C$$

であるから，$\kappa\alpha=\alpha\kappa$ を得る．また $\exp(\pi i\kappa)=\sigma$ であるから, α は $\sigma\alpha=\alpha\sigma$ も満たす．よって，C-ベクトル空間 $\mathfrak{P}^C$ は α-不変 C-ベクトル部分空間

$$\mathfrak{P}^C=(\mathfrak{P}^C)_\sigma\oplus(\mathfrak{P}^C)_{-\sigma},$$

$$(\mathfrak{P}^C)_\sigma=\{P\in\mathfrak{P}^C\,|\,\sigma P=P\},\quad (\mathfrak{P}^C)_{-\sigma}=\{P\in\mathfrak{P}^C\,|\,\sigma P=-P\}$$

のように分解される．これらの空間において写像 $\widetilde{\mu}_1,\mu$ は

$$(\mathfrak{P}^C)_\sigma \text{ において，} \widetilde{\mu}_1 = -\mu, \quad (\mathfrak{P}^C)_{-\sigma} \text{ において，} \widetilde{\mu}_1 = i1,\ \mu = 0$$

となる．$\widetilde{\mu}_1\alpha = \alpha\widetilde{\mu}_1$ の条件のもとで, $S \in (\mathfrak{P}^C)_\sigma, T \in (\mathfrak{P}^C)_{-\sigma}$ に対して，$\mu\alpha(S{+}T) = \mu(\alpha S) + \mu(\alpha T) = -\widetilde{\mu}_1(\alpha S) = -\widetilde{\mu}_1\alpha S$ となる．一方，$\alpha\mu(S+T) = \alpha(\mu S) = \alpha(-\widetilde{\mu}_1 S) = -\widetilde{\mu}_1\alpha S$ となり $\mu\alpha = \alpha\mu$, すなわち，$\alpha \in Spin(12, C)$ となる．

逆に $Spin(12, C) \subset G_{12}$ は自明である．これで $G_{12} = Spin(12, C)$ の証明が完了した． □

† **補題 7.2.5.** Lie 群 G_{14}, G_{13} の Lie 環 $\mathfrak{g}_{14}, \mathfrak{g}_{13}$ は, それぞれつぎのようである：

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{14} &= \{R_0 \in \mathfrak{g}_0 \,|\, (\tilde{\mu}_\delta(\mathrm{ad}R_0))R = ((\mathrm{ad}R_0)\tilde{\mu}_\delta)R, R \in (V^C)^{14}\} \\
&= \{R_0(\varPhi(D, {d_1}^\sim, (\tau_1, \tau_2, \tau_3, t_1)^\sim, (\alpha_2, \alpha_3, a_1), (\beta_2, \beta_3, b_1), \nu), ((\rho_2, \rho_3, p_1), \rho_1, \rho), \\
&\qquad (\zeta_1, (\zeta_2, \zeta_3, z_1), \zeta), r) \,|\, \tau_1 + \frac{2}{3}\nu + 2r = 0\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{13} &= \{R_0 \in \mathfrak{g}_{14} \,|\, \mathrm{ad}(R_0)(\varPhi_1, 0, 0, 0, 1, 0) = 0\} \\
&= \{R_0(\varPhi(D, {d_1}^\sim, (\tau_1, \tau_2, \tau_3, t_1)^\sim, (\alpha_2, \alpha_3, a_1), (\beta_2, \beta_3, b_1), \nu), ((\rho_2, \rho_3, p_1), \rho_1, \rho), \\
&\qquad (-\rho, (-\rho_3, \rho_2, p_1), -\rho_1), 0) \,|\, \tau_1 + \frac{2}{3}\nu = 0\}.
\end{aligned}$$

[**参考**] 上の $\mathfrak{g}_{14}$ にある条件 $\tau_1 + \dfrac{2}{3}\nu + 2r = 0$ は ${\mathfrak{e}_8}^C$ の Killing 形式 B_8 に関して $Z = (\kappa, 0, 0, -1, 0, 0)$ と直交することでも特徴づけられる．すなわち,

$$\mathfrak{g}_{14} = \{R \in (\mathfrak{g}^C)_0 \,|\, B_8(Z, R) = 0\}$$

である．

つぎの補題を準備して $G_{13} \cong Spin(13, C)$ を示そう．

† **補題 7.2.6.** (1) $a \in \mathfrak{C}$ に対して, C-線型変換 $\varepsilon_{13}(a) : {\mathfrak{e}_8}^C \to {\mathfrak{e}_8}^C$ を

$$\varepsilon_{13}(a) = \exp(\mathrm{ad}(0, (F_1(a), 0, 0, 0), (0, F_1(a), 0, 0), 0, 0, 0))$$

で定義すると，$\varepsilon_{13}(a) \in G_{13}$ (補題 7.2.5) である．そして $\varepsilon_{13}(a)$ の $(V^C)^{13}$ への作用はつぎのようである：

$$\varepsilon_{13}(a)(R_{-2}(\zeta_1, (\xi_1, (\eta_2, \eta_3, y_1), \xi), -\zeta_1)) = R_{-2}({\zeta_1}', ({\xi_1}', ({\eta_2}', {\eta_3}', {y_1}'), \xi'), -{\zeta_1}'),$$

$$\begin{cases}
{\zeta_1}' = \zeta_1 \cos|a| - \dfrac{(a, y_1)}{2|a|}\sin|a| \\
{\xi_1}' = \xi_1 \\
{\eta_2}' = \eta_2 \\
{\eta_3}' = \eta_3 \\
{y_1}' = y_1 + \dfrac{2\zeta_1 a}{|a|}\sin|a| - \dfrac{2(a, y_1)a}{|a|^2}\sin^2\dfrac{|a|}{2} \\
\xi' = \xi.
\end{cases}$$

(2) $t \in \boldsymbol{R}$ に対して, C-線型変換 $\theta_{13}(t) : {\mathfrak{e}_8}^C \to {\mathfrak{e}_8}^C$ を

$$\theta_{13}(t) = \exp(\mathrm{ad}(0, (0, -tE_1, 0, -t), (tE_1, 0, t, 0), 0, 0, 0))$$

で定義すると，$\theta_{13}(t) \in G_{13}$ (補題 7.2.4) である．そして $\theta_{13}(t)$ の $(V^C)^{13}$ への作用はつぎのようである：

$$\theta_{13}(t)(R_{-2}(\zeta_1, (\xi_1, (\eta_2, \eta_3, y_1), \xi), -\zeta_1)) = R_{-2}({\zeta_1}', ({\xi_1}', ({\eta_2}', {\eta_3}', {y_1}'), \xi'), -{\zeta_1}'),$$

$$\begin{cases} {\zeta_1}' = \zeta_1 \cos t - \dfrac{1}{4}(\xi_1 + \xi)\sin t \\ {\xi_1}' = \dfrac{1}{2}(\xi_1 - \xi) + \dfrac{1}{2}(\xi_1 + \xi)\cos t + 2\zeta_1 \sin t \\ {\eta_2}' = \eta_2 \\ {\eta_3}' = \eta_3 \\ {y_1}' = y_1 \\ \xi' = -\dfrac{1}{2}(\xi_1 - \xi) + \dfrac{1}{2}(\xi_1 + \xi)\cos t + 2\zeta_1 \sin t. \end{cases}$$

† **命題 7.2.7.** $G_{13}/G_{12} \simeq (S^C)^{12}$.
特に，$G_{13} \cong Spin(13, C)$ である．

証明. $(S^C)^{12} = \{R \in (V^C)^{13} \,|\, (R, R)_\mu = 1\}$ は 12 次元球面である．群 G_{13} は $(S^C)^{12}$ に働く．この働きが推移的であることを示そう．そのために, 任意の元 $R \in (S^C)^{12}$ がある $\alpha \in G_{13}$ により $\alpha R = \dfrac{1}{2}(\varPhi_1, 0, 0, 0, -1, 0) \in (S^C)^{12}$ になることを示せばよい．任意の元

$$R = R_{-2}(\zeta_1, (\xi_1, (\eta_2, \eta_2, y_1), \xi), -\zeta_1) \in (S^C)^{12}$$

に対して，$|a| = \dfrac{\pi}{2}, (a, y_1) = 0$ であるような $a \in \mathfrak{C}$ を選んで，R に $\varepsilon_{13}(a) \in G_{13}$ を施す (補題 7.2.6 (1))．このとき，

$$\varepsilon_{13}(a)R = R_{-2}(0, (\xi_1, (\eta_2, \eta_2, {y_1}'), \xi), 0) = R' \in (S^C)^{11}$$

となる．ここに $(S^C)^{11} = \{R \in (V^C)^{12} \,|\, (R, R)_\mu = 1\}$ である．群 G_{12} が $(S^C)^{11}$ に推移的に働く (命題 7.2.4) から, $\beta \in G_{12}$ が存在して，

$$\beta R' = R_{-2}(0, (1, (0, 0, 0), 1), 0) = R'' \in (S^C)^{11}$$

となる．さらに，R'' に $\theta_{13}(-\dfrac{\pi}{2}) \in G_{13}$ (補題 7.2.6 (2)) を施すと,

$$\theta_{13}(-\frac{\pi}{2})R'' = \frac{1}{2}R_{-2}(1, (0, (0, 0, 0), 0), -1) = \frac{1}{2}(\varPhi_1, 0, 0, 0, -1, 0)$$

となる．よって, この働きの推移性が示された．また明らかに群 G_{13} の $\dfrac{1}{2}(\varPhi_1, 0, 0, 0, -1, 0)$ における固定化群は G_{12} である．よって，同相 $G_{13}/G_{12} \simeq (S^C)^{12}$ を得る．群 G_{13} は連結であるから, 準同型写像 $\pi : G_{13} \to SO(13, C) = SO((V^C)^{13}), \pi(\alpha) = \alpha|(V^C)^{13}$ を定義することができる．$\mathrm{Ker}\pi = \{1, \sigma\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である．また $\dim_C(G_{13}) = \dim_C(Spin(12,$

$C)) + \dim_C((S^C)^{12}) = 66 + 12 = 78 = \dim_C(SO(13, C))$ であるから, π は全射である．よって，群同型 $G_{13}/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(13, C)$ を得る．これより，群 G_{13} は $SO(13, C) = SO((V^C)^{13})$ の 2 重被覆群として $Spin(13, C)$ に同型である． □

また，つぎの補題を準備して $G_{14} \cong Spin(14, C)$ を示そう．

† **補題 7.2.8.** (1) $a \in \mathfrak{C}$ に対して, C-線型変換 $\varepsilon_{14}(a) : {\mathfrak{e}_8}^C \to {\mathfrak{e}_8}^C$ を

$$\varepsilon_{14}(a) = \exp(\mathrm{ad}(0, (-iF_1(a), 0, 0, 0), (0, iF_1(a), 0, 0), 0, 0, 0))$$

で定義すると，$\varepsilon_{14}(a) \in G_{14}$ (補題 7.2.5) である．そして $\varepsilon_{14}(a)$ の $(V^C)^{14}$ への作用はつぎのようになる：

$$\varepsilon_{14}(a)(R_{-2}(\zeta_1, (\xi_1, (\eta_2, \eta_3, y_1), \xi), u)) = R_{-2}({\zeta_1}', ({\xi_1}', ({\eta_2}', {\eta_3}', {y_1}'), \xi'), u'),$$

$$\begin{cases} {\zeta_1}' = \dfrac{1}{2}(\zeta_1 - u) + \dfrac{1}{2}(\zeta_1 + u)\cos|a| - i\dfrac{(a, y_1)}{2|a|}\sin|a| \\ {\xi_1}' = \xi_1 \\ {\eta_2}' = \eta_2 \\ {\eta_3}' = \eta_3 \\ {y_1}' = y_1 - i\dfrac{(\zeta_1 + u)a}{|a|}\sin|a| - 2\dfrac{(a, y_1)a}{|a|^2}\sin^2\dfrac{|a|}{2} \\ \xi' = \xi \\ u' = -\dfrac{1}{2}(\zeta_1 - u) + \dfrac{1}{2}(\zeta_1 + u)\cos|a| - i\dfrac{(a, y_1)}{2|a|}\sin|a|. \end{cases}$$

(2) $t \in \boldsymbol{R}$ に対して, C-線型変換 $\theta_{14}(t) : {\mathfrak{e}_8}^C \to {\mathfrak{e}_8}^C$ を

$$\theta_{14}(t) = \exp(\mathrm{ad}(0, (0, itE_1, 0, it), (itE_1, 0, it, 0), 0, 0, 0))$$

で定義すると，$\theta_{14}(t) \in G_{14}$ (補題 7.2.4) である．そして $\theta_{14}(t)$ の $(V^C)^{14}$ への作用はつぎのようである：

$$\theta_{14}(t)(R_{-2}(\zeta_1, (\xi_1, (\eta_2, \eta_3, y_1), \xi), u)) = R_{-2}({\zeta_1}', ({\xi_1}', ({\eta_2}', {\eta_3}', {y_1}'), \xi'), u'),$$

$$\begin{cases} {\zeta_1}' = \dfrac{1}{2}(\zeta_1 - u) + \dfrac{1}{2}(\zeta_1 + u)\cos t - \dfrac{i}{4}(\xi_1 + \xi)\sin t \\ {\xi_1}' = \dfrac{1}{2}(\xi_1 - \xi) + \dfrac{1}{2}(\xi_1 + \xi)\cos t - i(\zeta_1 + u)\sin t \\ {\eta_2}' = \eta_2 \\ {\eta_3}' = \eta_3 \\ {y_1}' = y_1 \\ \xi' = -\dfrac{1}{2}(\xi_1 - \xi) + \dfrac{1}{2}(\xi_1 + \xi)\cos t - i(\zeta_1 + u)\sin t \\ u' = -\dfrac{1}{2}(\zeta_1 - u) + \dfrac{1}{2}(\zeta_1 + u)\cos t - \dfrac{i}{4}(\xi_1 + \xi)\sin t. \end{cases}$$

† **命題 7.2.9.** $G_{14}/G_{13} \simeq (S^C)^{13}$.
特に, $G_{14} \cong Spin(14, C)$ である．

証明. $(S^C)^{13} = \{R \in (V^C)^{14} \,|\, (R,R)_\mu = 1\}$ は 13 次元球面である．群 G_{14} は $(S^C)^{13}$ に働く．この働きが推移的であることを示めそう．そのためには, 任意の元 $R \in (S^C)^{13}$ がある $\alpha \in G_{14}$ により $\alpha R = \dfrac{i}{2}(\varPhi_1, 0, 0, 0, 1, 0) \in (S^C)^{13}$ になることを示せばよい．任意の元

$$R = R_{-2}(\zeta_1, (\xi_1, (\eta_2, \eta_2, y_1), \xi), u) \in (S^C)^{13}$$

に対して，$|a| = \dfrac{\pi}{2}, (a, y_1) = 0$ であるような $a \in \mathfrak{C}$ を選び，R に $\varepsilon_{14}(a) \in G_{14}$ (補題 7.2.8 (1)) を施す．このとき

$$\varepsilon_{14}(a)R = R_{-2}(\zeta', (\xi_1, (\eta_2, \eta_2, {y_1}'), \xi,) - \zeta') = R' \in (S^C)^{12}$$

となる．また群 G_{13} は $(S^C)^{12}$ に推移的に働く (命題 7.2.7) から, $\beta \in G_{13}$ が存在し

$$\beta R' = R_{-2}(0, (1, (0, 0, 0), 1), 0) = R'' \in (S^C)^{12}$$

となる．最後に R'' に $\theta_{14}(-\dfrac{\pi}{2}) \in G_{14}$ (補題 7.2.8 (2)) を施すと,

$$\theta_{14}(-\frac{\pi}{2})R'' = \frac{i}{2}R_{-2}(1, (0, (0, 0, 0), 0), 1) = \frac{i}{2}(\varPhi_1, 0, 0, 0, 1, 0)$$

となる．よって，この働きは推移的である．また群 G_{14} の $\dfrac{i}{2}(\varPhi_1, 0, 0, 0, 1, 0)$ における固定化群は G_{13} である．したがって，同相 $G_{14}/G_{13} \simeq (S^C)^{13}$ を得る．群同型 $G_{14} \cong Spin(14, C)$ の証明は命題 7.2.7 と同様である． □

以上の準備より群

$$({E_8}^C)_0 = ({E_8}^C)^{\widetilde{\kappa}_3} = \{\alpha \in {E_8}^C \,|\, \tilde{\kappa}_3\alpha = \alpha\widetilde{\kappa}_3\}$$

の群構造を決定しよう．

その前に写像 $\widetilde{\phi} : C^* \to ({E_8}^C)^{\widetilde{\kappa}_3} \subset {E_8}^C$ を $\widetilde{\phi}(a) = \exp(\nu\widetilde{\kappa})$, $a = e^\nu$, $\nu \in C$ で定義し，つぎの補題を示そう．

† 補題 7.2.10. 写像 $\widetilde{\phi}(a), a \in C^*$ の ${\mathfrak{e}_8}^C$ への作用の具体形は

$$\widetilde{\phi}(a)(\varPhi, P, Q, r, u, v) = (\phi(a)\varPhi\phi(a)^{-1}, a\phi(a)P, a^{-1}\phi(a)Q, r, a^2u, a^{-2}v)$$

である．ここに $\phi(a) : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{P}^C, \phi(a) \in {E_7}^C$ は

$$\phi(a)(X, Y, \xi, \eta) = \Bigl(\begin{pmatrix} a\xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & a^{-1}\xi_2 & a^{-1}x_1 \\ x_2 & a^{-1}\overline{x_1} & a^{-1}\xi_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^{-1}\eta_1 & y_3 & \overline{y_2} \\ \overline{y_3} & a\eta_2 & ay_1 \\ y_2 & a\overline{y_1} & a\eta_3 \end{pmatrix}, a\xi, a^{-1}\eta\Bigr)$$

で定義する．このとき $(V^C)^{14}$ への $\widetilde{\phi}(a)$ の作用は

$$\widetilde{\phi}(a)R = a^2R, \quad R \in (V^C)^{14}$$

である．

証明. 写像 $\phi(a) : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{P}^C$ は, $\phi : SL(2,C) \to {E_7}^C, \phi(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix})$ ([44]) に一致している.

$$\begin{aligned}\phi(a)\varPhi_1\phi(a)^{-1} &= \phi(a)(2(E_1,0,1,0)\times(E_1,0,1,0))\phi(a)^{-1} \\ &= 2\phi(a)(E_1,0,1,0)\times\phi(a)(E_1,0,1,0) \\ &= 2(aE_1,0,a,0)\times(aE_1,0,a,0) = a^2\varPhi_1\end{aligned}$$

であるから, $\tilde{\phi}(a)R = a^2R$ を得る. □

† **定理 7.2.11.** $({E_8}^C)_0 \cong (C^* \times Spin(14,C))/\boldsymbol{Z}_4, \boldsymbol{Z}_4 = \{(1,1),(-1,\phi(-1)),(i,\phi(-i)),(-i,\phi(i))\}$.

証明. $Spin(14,C) = \{\alpha \in {E_8}^C \,|\, \widetilde{\kappa}\alpha = \alpha\widetilde{\kappa}, (\widetilde{\mu}_\delta)\alpha R = \alpha(\widetilde{\mu}_\delta)R, R \in (V^C)^{14}\}$ (命題 7.2.9) とする. 写像 $\varphi : C^* \times Spin(14,C) \to ({E_8}^C)_0$ を

$$\varphi(a,\beta) = \tilde{\phi}(a)\beta$$

で定義する. このとき, $\varphi(a,\beta) \in ({E_8}^C)_0 = ({E_8}^C)^{\widetilde{\kappa}_3}$ は上のことから容易である. Z は $\mathfrak{g}_0$ の中心の元だから, $\widetilde{\phi}(a)$ と $\beta \in Spin(14,C)$ は可換であるから, φ は準同型写像である. $\mathrm{Ker}\varphi = \boldsymbol{Z}_4$ である. 実際, $\widetilde{\phi}(a)\beta = 1$ を満たす元 $(a,\beta) \in C^* \times Spin(14,C)$ をとる. このとき, $R = (\varPhi_1,0,0,0,1,0)$ に対して, $\beta R = \widetilde{\phi}(a)^{-1}R = a^{-2}R$ (補題 7.2.10) となる. よって, $-4a^{-4} = (a^{-2}R, a^{-2}R)_\mu = (\beta R, \beta R)_\mu = (R,R)_\mu = -4$. ゆえに, $a^4 = 1$. すなわち, $a = 1,-1,i,-i$, それに対応して $\beta = 1, \widetilde{\phi}(-1) = \sigma, \widetilde{\phi}(-i), \widetilde{\phi}(i)$ である. よって, $\mathrm{Ker}\varphi = \boldsymbol{Z}_4$. また $({E_8}^C)^{\widetilde{\kappa}_3}$ は連結かつ $\dim_C(C \oplus \mathfrak{spin}(14,C)) = 1 + 91 = 92 = \dim_C(({\mathfrak{e}_8}^C)_0)$ (定理 7.2.2) であるから, φ は全射である. したがって, $(C^* \times Spin(14,C))/\boldsymbol{Z}_4 \cong ({E_8}^C)_0$ を得る. □

7.3 E_8 の対合的自己同型写像 σ' による $Spin(13), Spin(14)$ の分解

前節の複素 Lie 群 $Spin(13,C), Spin(14,C)$ から, そのコンパクト Lie 群 $Spin(13), Spin(14)$ を構成し, σ' による分解を与えよう.

$\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 $V^{14}, V^{13}, (V')^{12}$ それぞれつぎのように定義する:

$$\begin{aligned}V^{14} &= \{R \in (V^C)^{14} \,|\, \widetilde{\mu}_\delta\tau\widetilde{\lambda}R = -R\} \\ &= \{R = (\varPhi(0,\zeta E_1,0,0),(\xi E_1,\eta E_2 - \tau\eta E_3 + F_1(y),\tau\xi,0),0,0,-\tau\zeta,0) \\ &\qquad\qquad |\, \zeta,\xi,\eta \in C, y \in \mathfrak{C}\},\end{aligned}$$

ノルムは

$$(R,R)_\mu = \frac{1}{30}B_8(\widetilde{\mu}_\delta R, R) = 4(\tau\zeta)\zeta + (\tau\eta)\eta + \overline{y}y + (\tau\xi)\xi$$

で与える.

$$\begin{aligned}V^{13} &= \{R \in V^{14} \,|\, (R,(\varPhi_1,0,0,0,1,0))_\mu = 0\} \\ &= \{R = (\varPhi(0,\zeta E_1,0,0),(\xi E_1,\eta E_2 - \tau\eta E_3 + F_1(y),\tau\xi,0),0,0,-\zeta,0) \\ &\qquad\qquad |\, \zeta \in \boldsymbol{R},\xi,\eta \in C, y \in \mathfrak{C}\},\end{aligned}$$

ノルムは

$$(R,R)_\mu = \frac{1}{30}B_8(\widetilde{\mu}_\delta R, R) = 4\zeta^2 + (\tau\eta)\eta + \overline{y}y + (\tau\xi)\xi$$

で与える．

$$\begin{aligned}(V')^{12} &= \{R \in V^{13} \,|\, (R, (\varPhi_1, 0, 0, 0, -1, 0))_\mu = 0\} \\ &= \{R = (0, (\xi E_1, \eta E_2 - \tau\eta E_3 + F_1(y), \tau\xi, 0), 0, 0, 0, 0) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad |\, \xi, \eta \in C, y \in \mathfrak{C}\},\end{aligned}$$

ノルムは

$$(R,R)_\mu = \frac{1}{30}B_8(\widetilde{\mu}_\delta R, R) = (\tau\eta)\eta + \overline{y}y + (\tau\xi)\xi$$

で与える．ここに $\varPhi_1 = \varPhi(0, E_1, 0, 0)$ とする．以前に定義された $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 V^{12}(命題 6.2.3) と区別するために，記号 $(V')^{12}$ を用いる．この空間 $(V')^{12}$ は $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間

$$\begin{aligned}&\{P \in \mathfrak{P}^C \,|\, \kappa P = -P,\ \mu\tau\lambda P = -P\} \\ &= \{P = (\xi E_1, \eta E_2 - \tau\eta E_3 + F_1(y), \tau\xi, 0) \in \mathfrak{P}^C \,|\, \xi, \eta \in C, y \in \mathfrak{C}\}\end{aligned}$$

と同一視でき，ノルムは $(P,P)_\mu = -\dfrac{1}{2}\{\mu P, P\} = (\tau\eta)\eta + \overline{y}y + (\tau\xi)\xi$ で与えられる．

前節で構成した複素 Lie 群 $G_{14} \cong Spin(14, C), G_{13} \cong Spin(13, C)$ から，その部分群 ${G_{14}}^{com}$, ${G_{13}}^{com}$, ${G_{12}}^{com}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}{G_{14}}^{com} &= \{\alpha \in G_{14} \,|\, \tau\widetilde{\lambda}\alpha = \alpha\tau\widetilde{\lambda}\}, \\ {G_{13}}^{com} &= \{\alpha \in {G_{14}}^{com} \,|\, \alpha(\varPhi_1, 0, 0, 0, 1, 0) = (\varPhi_1, 0, 0, 0, 1, 0)\}, \\ {G_{12}}^{com} &= \{\alpha \in {G_{13}}^{com} \,|\, \alpha(\varPhi_1, 0, 0, 0, -1, 0) = (\varPhi_1, 0, 0, 0, -1, 0)\}\end{aligned}$$

で定義する．

† **補題 7.3.1.** $\alpha \in (E_7)^{\kappa,\mu} \cong Spin(12)$(命題 6.2.3) は

$$\alpha\varPhi(0, E_1, 0, 0)\alpha^{-1} = \varPhi(0, E_1, 0, 0), \quad \alpha\varPhi(0, 0, E_1, 0)\alpha^{-1} = \varPhi(0, 0, E_1, 0)$$

を満たす．

証明. 11 次元球面 $(S')^{11}$ を

$$\begin{aligned}(S')^{11} &= \{P' \in (V')^{12} \,|\, (P,P)_\mu = 1\} \\ &= \{P' = (\xi E_1, \eta E_2 - \tau\eta E_3 + F_1(y), \tau\xi, 0) |\, \xi, \eta \in C,\ y \in \mathfrak{C}, (\tau\eta)\eta + \overline{y}y + (\tau\xi)\xi = 1\}\end{aligned}$$

で定義する．$Spin(12)$ は $(S')^{11}$ に働くので，

$$\alpha(E_1, 0, 1, 0) = (\xi E_1, \eta E_2 - \tau\eta E_3 + F_1(y), \tau\xi, 0) \ \in (S')^{11}$$

とおくことができる．$\dfrac{1}{2}\varPhi(0, E_1, 0, 0) = (E_1, 0, 1, 0) \times (E_1, 0, 1, 0)$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\alpha\varPhi(0,E_1,0,0)\alpha^{-1} &= \alpha((E_1,0,1,0)\times(E_1,0,1,0))\alpha^{-1}\\
&= \alpha(E_1,0,1,0)\times\alpha(E_1,0,1,0)\\
&= (\xi E_1,\eta E_2-\tau\eta E_3+F_1(y),\tau\xi,0)\\
&\qquad\times(\xi E_1,\eta E_2-\tau\eta E_3+F_1(y),\tau\xi,0)\\
&= \frac{1}{2}\varPhi(0,((\tau\eta)\eta+\overline{y}y+(\tau\xi)\xi)E_1,0,0)
\end{aligned}
$$

を得る．また $\alpha(E_1,0,1,0)\in(S')^{11}$ であるから，$(\tau\eta)\eta+\overline{y}y+(\tau\xi)\xi=1$ である．よって，$\alpha(E_1,0,\,1,0)\times\alpha(E_1,0,1,0)=\dfrac{1}{2}\varPhi(0,E_1,0,0)$ となり，$\alpha\varPhi(0,E_1,0,0)\alpha^{-1}=\varPhi(0,E_1,0,0)$ を得る．$\alpha\in Spin(12)\subset E_7$ は $\alpha\tau\lambda=\tau\lambda\alpha$ を満たすので，$\alpha\varPhi(0,0,E_1,0)\alpha^{-1}=\varPhi(0,0,E_1,0)$ も得る． □

まず上の補題を用いて ${G_{12}}^{com}=Spin(12)$ を示そう．

† **命題 7.3.2.** ${G_{12}}^{com}=Spin(12)$.

証明. $\alpha\in{G_{12}}^{com}$ とする．$\alpha(\varPhi_1,0,0,0,1,0)=(\varPhi_1,0,0,0,1,0),\alpha(\varPhi_1,0,0,0,-1,0)=(\varPhi_1,0,0,0,-1,0)$ であるから，$\alpha(0,0,0,0,1,0)=(0,0,0,0,1,0)$ を得る．よって，$\alpha\in{G_{12}}^{com}\subset E_8$ より，$\alpha\in E_7$ が分かる．まず，$\kappa\alpha=\alpha\kappa$ を示そう．${G_{12}}^{com}\subset E_7$ であるから，$\mathfrak{P}^C$ への作用を考えれば十分である．$\alpha\in{G_{12}}^{com}$ は $\widetilde{\kappa}\alpha=\alpha\widetilde{\kappa}$ を満たすので，

$$
\widetilde{\kappa}\alpha P=\kappa\alpha P-\alpha P,\qquad \alpha\widetilde{\kappa}P=\alpha\kappa P-\alpha P,\quad P\in\mathfrak{P}^C
$$

から $\kappa\alpha=\alpha\kappa$ を得る．つぎに $\mu\alpha=\alpha\mu$ を示そう．再び $\alpha(\varPhi_1,0,0,0,1,0)=(\varPhi_1,0,0,0,1,0)$，$\alpha(\varPhi_1,0,0,0,-1,0)=(\varPhi_1,0,0,0,-1,0)$ より，$\alpha(\varPhi_1,0,0,0,0,0)=(\varPhi_1,0,0,0,0,0)$ を得る．よって，$\alpha\in E_7$ であるから $\alpha\varPhi_1\alpha^{-1}=\varPhi_1$，すなわち，$\alpha\varPhi(0,E_1,0,0)\alpha^{-1}=\varPhi(0,E_1,0,0)$ を得る．その結果として，

$$
\begin{aligned}
&\alpha(\varPhi(0,0,E_1,0),0,0,0,0,1)=\alpha(-\widetilde{\mu}_\delta(\varPhi(0,E_1,0,0),0,0,0,1,0))\\
&=-\widetilde{\mu}_\delta\alpha(\varPhi(0,E_1,0,0),0,0,0,1,0)=-\widetilde{\mu}_\delta(\varPhi(0,E_1,0,0),0,0,0,1,0)\\
&=(\varPhi(0,0,E_1,0),0,0,0,0,1).
\end{aligned}
$$

を得る．同様に $\alpha(\varPhi(0,0,E_1,0),0,0,0,0,-1)=(\varPhi(0,0,E_1,0),0,0,0,0,-1)$ を得る．よって，$\alpha(\varPhi(0,0,E_1,0),0,0,0,0,0)=(\varPhi(0,0,E_1,0),0,0,0,0,0)$ を得る．さらに $\alpha\in E_7$ から，$\alpha\varPhi(0,0,E_1,0)\alpha^{-1}=\varPhi(0,0,E_1,0)$ を得る．そして，$\alpha\varPhi(0,E_1,0,0)\alpha^{-1}=\varPhi(0,E_1,0,0)$ とあわせて $\alpha\varPhi(0,E_1,E_1,0)\alpha^{-1}=\varPhi(0,E_1,E_1,0)$ となる，すなわち，$\alpha\mu\alpha^{-1}=\mu$ となる．よって，$\mu\alpha=\alpha\mu$ を得る．したがって，$\alpha\in(E_7)^{\kappa,\mu}=Spin(12)$ である．

逆に $\alpha\in Spin(12)$ とする．$R\in{\mathfrak{e}_8}^C$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\kappa}\alpha R &= [(\kappa,0,0,-1,0,0),(\alpha\varPhi\alpha^{-1},\alpha P,\alpha Q,r,u,v)]\\
&= ([\kappa,\alpha\varPhi\alpha^{-1}],\kappa\alpha P-\alpha P,\kappa\alpha Q+\alpha Q,0,-2u,2v),
\end{aligned}
$$

かつ

$$
\begin{aligned}
\alpha\widetilde{\kappa}R &= \alpha[((\kappa,0,0,-1,0,0),(\varPhi,P,Q,r,u,v)]\\
&= [\alpha(\kappa,0,0,-1,0,0),\alpha(\varPhi,P,Q,r,u,v)]\\
&= ([\alpha\kappa\alpha^{-1},\alpha\varPhi\alpha^{-1}],\alpha\kappa\alpha^{-1}(\alpha P)-\alpha P,\alpha\kappa\alpha^{-1}(\alpha Q)+\alpha Q,0,-2u,2v)
\end{aligned}
$$

となる．よって，$\kappa\alpha = \alpha\kappa$ から，$[\alpha\kappa\alpha^{-1}, \alpha\varPhi\alpha^{-1}] = [\kappa, \alpha\varPhi\alpha^{-1}]$ を得る．よって，$\widetilde{\kappa}\alpha R = \alpha\widetilde{\kappa}R$, すなわち, $\widetilde{\kappa}\alpha = \alpha\widetilde{\kappa}$ を得る．つぎに $\mu\alpha = \alpha\mu$ と補題 7.3.1 から，$\mu_1(\alpha\varPhi_1\alpha^{-1}){\mu_1}^{-1} = \alpha(\mu_1\varPhi_1{\mu_1}^{-1})\alpha^{-1} = \alpha\varPhi(0,0,E_1,0)\alpha^{-1} = \varPhi(0,0,E_1,0)$ を得る．よって，$R = (\zeta\varPhi_1, P, 0, 0, u, 0) \in (V^C)^{14}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mu}_\delta\alpha R &= \widetilde{\mu}_\delta(\zeta\alpha\varPhi_1\alpha^{-1}, \alpha P, 0, 0, u, 0) \\
&= (\varPhi(0,0,-uE_1,0), 0, i\mu_1\alpha P, 0, 0, -\zeta)
\end{aligned}
$$

となる．また

$$
\begin{aligned}
\alpha\widetilde{\mu}_\delta R &= \alpha(\varPhi(0,0,-uE_1,0), 0, i\mu_1 P, 0, 0, -\zeta) \\
&= (\alpha\varPhi(0,0,-uE_1,0)\alpha^{-1}, 0, i\alpha\mu_1 P, 0, 0, -\zeta) \\
&= (\varPhi(0,0,-uE_1,0), 0, i\alpha\mu_1 P, 0, 0, -\zeta)
\end{aligned}
$$

を得る．よって，$\mu\alpha = \alpha\mu$ から $\widetilde{\mu}_\delta\alpha R = \alpha\widetilde{\mu}_\delta R, R \in (V^C)^{14}$ を得る．また補題 5.3.1 から $\alpha(\varPhi_1,0,0,0,0,0) = (\varPhi_1,0,0,0,0,0)$ を得る．さらに $\alpha \in E_7$ から $\alpha(0,0,0,\ 0,1,0) = (0,0,0,0,1,0), \alpha(0,0,0,0,-1,0) = (0,0,0,0,-1,0)$ である．よって，$\alpha(\varPhi_1,0,0,0,1,0) = (\varPhi_1,0,0,0,1,0)$, $\alpha(\varPhi_1,0,0,0,-1,0) = (\varPhi_1,0,0,0,-1,0)$ を得る．したがって，$\alpha \in {G_{12}}^{com}$ となる．以上よりこの命題の証明が完了した． □

以下, いくつかの補題を準備して ${G_{13}}^{com} = Spin(13)$, ${G_{14}}^{com} = Spin(14)$ を示そう．

† 補題 7.3.3. Lie 群 ${G_{14}}^{com}, {G_{13}}^{com}$ の Lie 環 ${\mathfrak{g}_{14}}^{com}, {\mathfrak{g}_{13}}^{com}$ は，それぞれつぎのようである：

$$
\begin{aligned}
{\mathfrak{g}_{14}}^{com} &= \{R \in \mathfrak{g}_{14} \,|\, \tau\widetilde{\lambda}(\mathrm{ad}R) = (\mathrm{ad}R)\tau\widetilde{\lambda}\} \\
&= \Bigg\{\Bigg(\varPhi\Bigg(D + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 \\ 0 & -\overline{d}_1 & 0 \end{pmatrix}^{\sim} + i\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & t_1 \\ 0 & \overline{t}_1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}^{\sim}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & a_1 \\ 0 & \overline{a}_1 & \rho_3 \end{pmatrix}, \\
&\qquad -\tau\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & a_1 \\ 0 & \overline{a}_1 & \rho_3 \end{pmatrix}, \nu\Bigg), \Bigg(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & z_1 \\ 0 & \overline{z}_1 & \zeta_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \zeta\Bigg), \\
&\qquad -\tau\lambda\Bigg(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & z_1 \\ 0 & \overline{z}_1 & \zeta_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \zeta\Bigg), r, 0, 0\Bigg) \\
&\qquad |\, D \in \mathfrak{so}(8), \varepsilon_i \in \boldsymbol{R},\ \rho_i, \zeta_i, \zeta \in C,\ \nu, r \in i\boldsymbol{R},\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \\
&\qquad\qquad i\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\nu + 2r = 0,\ d_1, t_1 \in \mathfrak{C},\ a_1, z_1 \in \mathfrak{C}^C\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{\mathfrak{g}_{13}}^{com} &= \{R \in {\mathfrak{g}_{14}}^{com} \,|\, (\mathrm{ad}R)(\varPhi_1, 0, 0, 0, 1, 0) = 0\} \\
&= \Bigg\{\Bigg(\varPhi\Bigg(D + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 \\ 0 & -\overline{d}_1 & 0 \end{pmatrix}^{\sim} + i\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & t_1 \\ 0 & \overline{t}_1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}^{\sim}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & a_1 \\ 0 & \overline{a}_1 & \rho_3 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
-\tau\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & a_1 \\ 0 & \overline{a}_1 & \rho_3 \end{pmatrix}, \nu\Bigr), \Bigl(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & z_1 \\ 0 & \overline{z}_1 & -\tau\zeta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \tau\zeta_1\Bigr),
$$

$$
-\tau\lambda\Bigl(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & z_1 \\ 0 & \overline{z}_1 & -\tau\zeta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \tau\zeta_1\Bigr), 0, 0, 0\Bigr)
$$

$$
\mid D \in \mathfrak{so}(8),\, \varepsilon_i \in \boldsymbol{R},\, \rho_i,\, \zeta_i \in C,\, \nu \in i\boldsymbol{R},\, \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = 0,
$$

$$
i\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\nu = 0,\, d_1, t_1, z_1 \in \mathfrak{C},\, a_1 \in \mathfrak{C}^C\Bigr\}.
$$

特に,

$$
\begin{aligned}
\dim({\mathfrak{g}_{14}}^{com}) &= 28 + 63 = 91, \\
\dim({\mathfrak{g}_{13}}^{com}) &= 28 + 50 = 78
\end{aligned}
$$

である.

† **補題 7.3.4.** (1) $a \in \mathfrak{C}$ に対して, C-線型変換 $\varepsilon_{13}(a) : {\mathfrak{e}_8}^C \to {\mathfrak{e}_8}^C$ を

$$
\varepsilon_{13}(a) = \exp(\mathrm{ad}(0, (F_1(a), 0, 0, 0), (0, F_1(a), 0, 0), 0, 0, 0))
$$

で定義すると，$\varepsilon_{13}(a) \in {G_{13}}^{com}$ (補題 7.3.3) である．そして $\varepsilon_{13}(a)$ の V^{13} への作用は，つぎのようである:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{13}(a)(\varPhi(0, \zeta E_1, 0, 0), (\xi E_1, \eta E_2 - \tau\eta E_3 + F_1(y), \tau\xi, 0), 0, 0, -\zeta, 0) \\
&= (\varPhi(0, \zeta' E_1, 0, 0), (\xi' E_1, \eta' E_2 - \tau\eta' E_3 + F_1(y'), \tau\xi', 0), 0, 0, -\zeta', 0),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\zeta' = \zeta\cos|a| - \dfrac{(a, y)}{2|a|}\sin|a| \\
\xi' = \xi \\
\eta' = \eta \\
y' = y + \dfrac{2\zeta a}{|a|}\sin|a| - \dfrac{2(a, y)a}{|a|^2}\sin^2\dfrac{|a|}{2}.
\end{cases}
$$

(2) $t \in \boldsymbol{R}$ に対して, C-線型変換 $\theta_{13}(t) : {\mathfrak{e}_8}^C \to {\mathfrak{e}_8}^C$ を

$$
\theta_{13}(t) = \exp(\mathrm{ad}(0, (0, -tE_1, 0, -t), (tE_1, 0, t, 0), 0, 0, 0))
$$

で定義すると，$\theta_{13}(t) \in {G_{13}}^{com}$ (補題 7.3.3) である．そして $\theta_{13}(t)$ の V^{13} への作用はつぎのようである：

$$
\begin{aligned}
&\theta_{13}(t)(\varPhi(0, \zeta E_1, 0, 0), (\xi E_1, \eta E_2 - \tau\eta E_3 + F_1(y), \tau\xi, 0), 0, 0, -\zeta, 0) \\
&= (\varPhi(0, \zeta' E_1, 0, 0), (\xi' E_1, \eta' E_2 - \tau\eta' E_3 + F_1(y'), \tau\xi', 0), 0, 0, -\zeta', 0),
\end{aligned}
$$

$$\begin{cases} \zeta' = \zeta\cos t - \dfrac{1}{4}(\tau\xi + \xi)\sin t \\ \xi' = \dfrac{1}{2}(\xi - \tau\xi) + \dfrac{1}{2}(\xi + \tau\xi)\cos t + 2\zeta\sin t \\ \eta' = \eta \\ y' = y. \end{cases}$$

† **補題 7.3.5.** $G_{13}{}^{com}/G_{12}{}^{com} \simeq S^{12}$.

特に，$G_{13}{}^{com}$ は連結である．

証明. $S^{12} = \{R \in V^{13} \,|\, (R,R)_\mu = 1\}$ は 12 次元球面である．群 $G_{13}{}^{com}$ は $(S^C)^{12}$ に働く．この働きが推移的であることを示そう．そのためには, 任意の元 $R \in S^{12}$ がある $\alpha \in G_{13}{}^{com}$ により $\alpha R = \dfrac{1}{2}(\varPhi_1, 0, 0, 0, -1,\, 0) \in S^{12}$ になることを示せばよい．任意の元

$$R = (\varPhi(0, \zeta E_1, 0, 0), (\xi E_1, \eta E_2 - \tau\eta E_3 + F_1(y), \tau\xi, 0), 0, 0, -\zeta, 0) \in S^{12}$$

に対し，$|a| = \dfrac{\pi}{2}, (a, y) = 0$ であるような $a \in \mathfrak{C}$ を選び，R に $\varepsilon_{13}(a) \in G_{13}{}^{com}$ (補題 7.3.4(1)) を施すと,

$$\varepsilon_{13}(a)R = (0, (\xi E_1, \eta E_2 - \tau\eta E_3 + F_1(y'), \tau\xi, 0), 0, 0, 0, 0) = R_1 \in (S')^{11} \subset S^{12}$$

となる．ここに $(S')^{11} = \{R \in (V')^{12} \,|\, (R,R)_\mu = 1\}$ である．$Spin(12) (\subset G_{13}{}^{com})$ は $S^{11} = \{P \in V^{12} \,|\, (P,P)_\mu = 1\}$ に推移的に働く (命題 6.2.3) から, $\beta \in Spin(12)$ が存在して $\beta P = (0, E_1, 0, 1)$, $P \in S^{11}$ となる．よって,

$$\begin{aligned} \beta R_1 &= \beta(0, P', 0, 0, 0, 0) = (0, \beta P', 0, 0, 0, 0) \\ &= (0, \beta\mu P, 0, 0, 0, 0) = (0, \mu\beta P, 0, 0, 0, 0) \\ &= (0, \mu(0, E_1, 0, 1), 0, 0, 0, 0) = (0, (E_1, 0, 1, 0), 0, 0, 0, 0) = R_2 \in (S')^{11} \end{aligned}$$

を得る．ここに $P \in S^{11}$ である．さらに R_2 に $\theta_{13}(-\dfrac{\pi}{2}) \in G_{13}{}^{com}$ (補題 7.3.4(2)) を施すと,

$$\theta_{13}(-\frac{\pi}{2})R_2 = \frac{1}{2}(\varPhi_1, 0, 0, 0, -1, 0)$$

となるので，この働きは推移的である．群 $G_{13}{}^{com}$ の $\dfrac{1}{2}(\varPhi_1, 0, 0, 0, -1, 0)$ における固定化群は $G_{12}{}^{com}$ である．よって，同相 $G_{13}{}^{com}/G_{12}{}^{com} \simeq S^{12}$ を得る． □

† **命題 7.3.6.** $G_{13}{}^{com} \cong Spin(13)$.

証明. 群 $G_{13}{}^{com}$ は連結 (補題 7.3.5) であるから, 準同型写像

$$\pi : G_{13}{}^{com} \to SO(13) = SO(V^{13}),\ \ \pi(\alpha) = \alpha | V^{13}$$

が定義できる．$\operatorname{Ker}\pi = \{1, \sigma\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である．また $\dim(\mathfrak{g}_{13}{}^{com}) = 78$(補題 7.3.3) $= \dim(\mathfrak{so}(13))$ であるから, π は全射である．よって, 群同型 $G_{13}{}^{com}/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(13)$ を得る．これより, 群 $G_{13}{}^{com}$ は $SO(13) = SO(V^{13})$ の 2 重被覆群として $Spin(13)$ に同型である． □

† 命題 7.3.7. $G_{14}{}^{com} \cong Spin(14)$.

証明. 群 $G_{14}{}^{com}$ は V^{14} に働き，群 G_{14} が連結 (命題 7.2.9) であることより $G_{14}{}^{com}$ が連結であることが分かるから, 準同型写像

$$\pi : G_{14}{}^{com} \to SO(14) = SO(V^{14}),\ \ \pi(\alpha) = \alpha | V^{14}$$

が定義される．$\mathrm{Ker}\,\pi = \{1, \sigma\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である．また $\dim(\mathfrak{g}_{14}{}^{com}) = 91$ (補題 7.3.3) $= \dim(\mathfrak{so}(14))$ であるから, π は全射である．よって, 群同型 $G_{14}{}^{com}/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(14)$ を得る．これより, 群 $G_{14}{}^{com}$ は $SO(14) = SO(V^{14})$ の 2 重被覆群として $Spin(14)$ に同型である． □

σ' による $Spin(13)$ の分解を考えよう．まず $Spin(13)$ の部分群

$$\begin{aligned}
&((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-} \\
&= \Big\{ \alpha \in (Spin(13))^{\sigma'} \ \Big| \ \begin{array}{l} \alpha(0,(0,F_1(y),0,0),0,0,0,0) \\ = (0,(0,F_1(y),0,0),0,0,0,0) \end{array} ,\ y \in \mathfrak{C} \Big\}
\end{aligned}$$

を考察しよう.

† 補題 7.3.8. Lie 群 $((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ の Lie 環 $((\mathfrak{spin}(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ は, つぎのようである：

$$\begin{aligned}
&((\mathfrak{spin}(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-} \\
&= \{ R \in (\mathfrak{spin}(13))^{\sigma'} \,|\, (\mathrm{ad}R)(0,(0,F_1(y),0,0),0,0,0,0) = 0 \} \\
&= \Bigg\{ \Bigg(\varPhi \Bigg(i \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}^{\sim}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}, -\tau \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}, \nu \Bigg), \\
&\Bigg(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau\zeta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \tau\zeta_1 \Bigg), -\tau\lambda \Bigg(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau\zeta_2 \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \tau\zeta_1 \Bigg), 0, 0, 0 \Bigg) \\
&\qquad\qquad | \, \varepsilon_i \in \boldsymbol{R},\ \rho_i, \zeta_i, \in C,\ \nu \in i\boldsymbol{R}, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,\ i\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\nu = 0 \Bigg\}.
\end{aligned}$$

特に,

$$\dim(((\mathfrak{spin}(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}) = 10$$

である.

† 補題 7.3.9. $((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}/Spin(4) \simeq S^4$.
特に, $((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ は連結である.

証明. 5 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 W^5 を

$$\begin{aligned}W^5 &= \{R \in V^{13} \,|\, \sigma' R = R\} \\ &= \{R = (\varPhi(0, \zeta E_1, 0, 0), (\xi E_1, \eta E_2 - \tau\eta E_3, \tau\xi, 0), 0, 0, -\zeta, 0) \,|\, \zeta \in \boldsymbol{R}, \xi, \eta \in C\}\end{aligned}$$

で定義し，ノルムを

$$(R, R)_\mu = \frac{1}{30} B_8(\widetilde{\mu}_\delta R, R) = 4\zeta^2 + (\tau\eta)\eta + (\tau\xi)\xi$$

で与えると，$S^4 = \{R \in W^5 \,|\; (R, R)_\mu = 1\}$ は 4 次元球面になる．群 $((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ は S^4 に働く．ここで，この働きが推移的であることを示そう．そのためには，任意の元 $R \in S^4$ がある $\alpha \in ((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ により $\alpha R = \dfrac{1}{2}(\varPhi_1, 0, 0, 0, -1, 0) \in S^4$ になることを示せばよい．

$$R = (\varPhi(0, \zeta E_1, 0, 0), (\xi E_1, \eta E_2 - \tau\eta E_3, \tau\xi, 0), 0, 0, -\zeta, 0) \in S^4$$

に対して，$\tan t = \dfrac{4\zeta}{\xi + \tau\xi}$ を満たす $t \in \boldsymbol{R}, 0 \leq t < \pi$ を選ぶ．(もし $\xi + \tau\xi = 0$ ならば, $t = \dfrac{\pi}{2}$ とする)．この t を用いて $\theta_{13}(t) \in ((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ (補題 7.3.4(2)) を R に作用させる．

$$\theta_{13}(t)R = (0, (\xi' E_1, \eta E_2 - \tau\eta E_3, \tau\xi', 0), 0, 0, 0, 0) = R_1 \in S^3 \subset S^4$$

となる．群 $((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)} (\subset ((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-})$ は S^3 に推移的に働く (補題 6.4.11) から, $\beta \in ((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ が存在して

$$\beta R_1 = (0, (E_1, 0, 1, 0), 0, 0, 0, 0) = R_2 \in S^3$$

となる．さらに $\theta_{13}(-\dfrac{\pi}{2}) \in ((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ を R_2 に作用させると,

$$\theta_{13}(-\frac{\pi}{2})R_2 = \frac{1}{2}(\varPhi_1, 0, 0, 0, -1, 0)$$

となる．よって，この働きは推移的である．群 $((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ の $\dfrac{1}{2}(\varPhi_1, 0, 0, 0, -1, 0)$ における固定化群は $((Spin(12))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)}$ (命題 6.4.12) $= Spin(4)$ である．したがって，同相

$$((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}/Spin(4) \simeq S^4$$

を得る． □

† **命題 7.3.10.** $((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-} \cong Spin(5)$.

証明. 群 $((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ は連結である (補題 7.3.9) から, 準同型写像

$$\pi : ((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-} \to SO(5) = SO(W^5), \;\; \pi(\alpha) = \alpha | W^5$$

が定義できる．$\mathrm{Ker}\,\pi = \{1, \sigma\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である．また $\dim(((\mathfrak{spin}(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}) = 10$ (補題 7.3.8) $= \dim(\mathfrak{so}(5))$ であるから, π 全射である．よって, 群同型

$$((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(5)$$

を得る. これより, $((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ は $SO(5)$ の 2 重被覆群として $Spin(5)$ に同型である. □

つぎの補題を準備して群 $(Spin(13))^{\sigma'}$ の群構造を決定しよう.

補題 7.3.11. Lie 群 $(Spin(13))^{\sigma'}$ の Lie 環 $(\mathfrak{spin}(13))^{\sigma'}$ は, つぎのようである：

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{spin}(13))^{\sigma'} \\
&= \Bigg\{ \Bigg(\Phi\Bigg(D + i \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}^{\sim}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}, -\tau \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}, \nu \Bigg), \\
&\Bigg(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau\zeta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \tau\zeta_1 \Bigg), -\tau\lambda \Bigg(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau\zeta_2 \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \tau\zeta_1 \Bigg), 0, 0, 0 \Bigg) \\
&\;\Big|\; D \in \mathfrak{so}(8), \varepsilon_i \in \boldsymbol{R},\ \rho_i, \zeta_i \in C, \nu \in i\boldsymbol{R},\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,\ i\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\nu = 0 \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

特に,

$$\dim((\mathfrak{spin}(13))^{\sigma'}) = 28 + 10 = 38$$

である.

† **定理 7.3.12.** $(Spin(13))^{\sigma'} \cong (Spin(5) \times Spin(8))/\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2 = \{(1,1), (-1,\sigma)\}$.

証明. $Spin(13) = {G_{13}}^{com}$(命題 7.3.6), $Spin(5) = ((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$(命題 7.3.10), $Spin(8) = ((F_4)_{E_1})^{\sigma'}$(命題 4.3.4, 定理 4.5.1) $\subset ((E_6)_{E_1})^{\sigma'} \subset ((E_7)^{\kappa,\mu})^{\sigma'} \subset ({G_{13}}^{com})^{\sigma'}$ とする. 写像 $\varphi : Spin(5) \times Spin(8) \to (Spin(13))^{\sigma'}$ を

$$\varphi(\alpha, \beta) = \alpha\beta$$

で定義する. $\varphi(\alpha,\beta) \in (Spin(13))^{\sigma'}$ である. $R_D = (\Phi(D,0,0,0),\ 0,0,0,0,0) \in \mathfrak{spin}(8), R_5 \in \mathfrak{spin}(5) = ((\mathfrak{spin}(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ (命題 7.3.10) に対して, $[R_D, R_5] = 0$ であるから, $\alpha\beta = \beta\alpha$ である. よって, φ は準同型写像である. $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{(1,1),(-1,\sigma)\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である. $(Spin(13))^{\sigma'}$ は連結かつ $\dim(\mathfrak{spin}(5) \oplus \mathfrak{spin}(8)) = 10$(補題 7.3.8)$+28 = 38 = \dim((\mathfrak{spin}(13))^{\sigma'})$ (補題 7.3.11) であるから, φ は全射である. よって, 群同型

$$(Spin(5) \times Spin(8))/\boldsymbol{Z}_2 \cong ((Spin(13))^{\sigma'}$$

を得る. □

つぎに $Spin(14)$ の分解を考えよう. まず $Spin(14)$ の部分群

$$
\begin{aligned}
&((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-} \\
&= \left\{ \alpha \in ((Spin(14))^{\sigma'} \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha(0,(0,F_1(y),0,0),0,0,0,0) \\ = (0,(0,F_1(y),0,0),0,0,0,0) \end{array},\ y \in \mathfrak{C} \right\}
\end{aligned}
$$

を考察しよう.

† **補題 7.3.13.** Lie 群 $((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ の Lie 環 $((\mathfrak{spin}(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ は, つぎのようである：

$$
\begin{aligned}
&((\mathfrak{spin}(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}\\
&=\{R \in (\mathfrak{spin}(14))^{\sigma'} \mid (\mathrm{ad}R)(0,(0,F_1(y),0,0),0,0,0,0)=0\}\\
&=\Big\{\Big(\varPhi\Big(i\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}^{\sim}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}, -\tau\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}, \nu\Big),\\
&\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \zeta\Big), -\tau\lambda\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 \end{pmatrix},\\
&\begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \zeta\Big), r, 0, 0\Big)\\
&\qquad\qquad \mid \varepsilon_i \in \boldsymbol{R},\ \rho_i, \zeta_i, \zeta \in C,\ \nu, r \in i\boldsymbol{R},\ \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=0,\ i\varepsilon_1+\frac{2}{3}\nu+2r=0\Big\}.
\end{aligned}
$$

特に,

$$\dim(((\mathfrak{spin}(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-})=15$$

である.

† **補題 7.3.14.** $t \in \boldsymbol{R}$ に対して, C-線型変換 $\theta_{14}(t) : {\mathfrak{e}_8}^C \to {\mathfrak{e}_8}^C$ を

$$\theta_{14}(t)=\exp(\mathrm{ad}(0,(0,itE_1,0,it),(itE_1,0,it,0),0,0,0))$$

で定義すると，$\theta_{14}(t) \in ((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ (補題 7.3.13) である. そして $\theta_{14}(t)$ の V^{14} への作用は，つぎのように与えられる：

$$
\begin{aligned}
&\theta_{14}(t)(\varPhi(0,\zeta E_1,0,0),(\xi E_1,\eta E_2-\tau\eta E_3+F_1(y),\tau\xi,0),0,0,-\tau\zeta,0)\\
&=(\varPhi(0,\zeta' E_1,0,0),(\xi' E_1,\eta' E_2-\tau\eta' E_3+F_1(y'),\tau\xi',0),0,0,-\tau\zeta',0),
\end{aligned}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\zeta'=\frac{1}{2}(\zeta+\tau\zeta)+\frac{1}{2}(\zeta-\tau\zeta)\cos t-\frac{i}{4}(\xi+\tau\xi)\sin t\\
&\xi'=\frac{1}{2}(\xi-\tau\xi)+\frac{1}{2}(\xi+\tau\xi)\cos t-i(\zeta-\tau\zeta)\sin t\\
&\eta'=\eta\\
&y=y'.
\end{aligned}
\right.
$$

† **補題 7.3.15.** $((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}/Spin(5) \simeq S^5$.
特に, $((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ は連結である.

証明.　6 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 W^6 を

$$\begin{aligned} W^6 &= \{R \in V^{14} \,|\, \sigma' R = R\} \\ &= \{R = (\varPhi(0, \zeta E_1, 0, 0), (\xi E_1, \eta E_2 - \tau\eta E_3, \tau\xi, 0), 0, 0, -\tau\zeta, 0) \,|\, \zeta, \xi, \eta \in C\} \end{aligned}$$

で定義し，ノルムを

$$(R, R)_\mu = \frac{1}{30} B_8(\widetilde{\mu}_\delta R, R) = 4(\tau\zeta)\zeta + (\tau\eta)\eta + (\tau\xi)\xi$$

で与える．$S^5 = \{R \in W^6 \,|\, (R, R)_\mu = 1\}$ は 5 次元球面である．群 $((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ は S^5 に働く．この働きが推移的であることを示そう．そのためには, 任意の元 $R \in S^5$ がある $\alpha \in ((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ により $\alpha R = \dfrac{1}{2}(i\varPhi_1, 0, 0, 0, i, 0) \in S^5$ になることを示せばよい．任意の元

$$R = (\varPhi(0, \zeta E_1, 0, 0), (\xi E_1, \eta E_2 - \tau\eta E_3, \tau\xi, 0), 0, 0, -\tau\zeta, 0) \in S^5$$

に対して，$\tan t = -\dfrac{2i(\zeta - \tau\zeta)}{\xi + \tau\xi}$ を満たす $t \in \boldsymbol{R}, 0 \le t < \pi$ を選び (もし $\xi + \tau\xi = 0$ ならば, $t = \dfrac{\pi}{2}$ とする)，R に $\theta_{14}(t) \in ((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ (補題 7.3.13, 7.3.14) を施すと

$$\theta_{14}(t)R = (\varPhi(0, (\zeta' E_1, 0, 0), (\xi' E_1, \eta E_2 - \tau\eta E_3, \tau\xi', 0), 0, 0, -\zeta', 0) = R_1 \in S^4 \subset S^5$$

となる．群 $((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-} (\subset ((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-})$ が S^4 に推移的に働く (補題 7.3.9) ので, $\beta \in ((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ が存在して

$$\beta R_1 = \frac{1}{2}(\varPhi_1, 0, 0, 0, -1, 0) = R_2 \in S^3$$

となる．$\theta_{14}(\dfrac{\pi}{2}), \alpha(\dfrac{\pi}{4})$ (補題 6.3.15) を順に作用させると,

$$\theta_{14}(\frac{\pi}{2})R_2 = (0, (-iE_1, 0, i, 0), 0, 0, 0, 0) = R_3,$$

そして

$$\alpha(\frac{\pi}{4})R_3 = (0, (E_1, 0, 1, 0), 0, 0, 0, 0) = R_4$$

となる．最後にこの R_4 に $\theta_{14}(-\dfrac{\pi}{2}) \in ((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ を施すと

$$\theta_{14}(-\frac{\pi}{2})R_4 = \frac{1}{2}(i\varPhi_1, 0, 0, 0, i, 0)$$

となる．よって，この働きは推移的である．群 $((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ の $\dfrac{1}{2}(i\varPhi_1, 0, 0, 0, i, 0)$ における固定化群は $((Spin(13))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ (命題 7.3.6) $= Spin(5)$ である．したがって, 同相

$$((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}/Spin(5) \simeq S^5$$

を得る． □

† **命題 7.3.16.** $((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-} \cong Spin(6)$.

証明. 群 $((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ が連結であるから (補題 7.3.15), 準同型写像

$$\pi : ((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-} \to SO(6) = SO(W^6),\ \ \pi(\alpha) = \alpha|W^6$$

が定義できる．$\operatorname{Ker}\pi = \{1, \sigma\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である．また $\dim(((\mathfrak{spin}(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}) = 15$ (補題 7.3.13) $= \dim(\mathfrak{so}(6))$ であるから, π は全射である．よって, 群同型

$$((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(6)$$

を得る．これより, $((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ は $SO(6)$ の 2 重被覆群として $Spin(5)$ に同型である． □

そこで，つぎの補題を準備して群 $(Spin(14))^{\sigma'}$ の群構造を決定しよう．

† **補題 7.3.17.** Lie 群 $((Spin(14))^{\sigma'}$ の Lie 環 $(\mathfrak{spin}(14))^{\sigma'}$ は，つぎのようである：

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{spin}(14))^{\sigma'} \\
&= \Big\{\Big(\varPhi\Big(D + i\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}^{\sim}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}, -\tau\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}, \nu\Big), \\
&\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \zeta\Big), -\tau\lambda\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \zeta\Big), r, 0, 0\Big) \\
&\mid D \in \mathfrak{so}(8), \varepsilon_i \in \boldsymbol{R},\ \rho_i, \zeta_i, \zeta \in C,\ \nu \in i\boldsymbol{R}, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,\ i\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\nu + 2r = 0\Big\}.
\end{aligned}$$

特に,

$$\dim((\mathfrak{spin}(14))^{\sigma'}) = 28 + 15 = 43$$

である．

† **定理 7.3.18.** $(Spin(14))^{\sigma'} \cong (Spin(6) \times Spin(8))/\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2 = \{(1,1), (-1,\sigma)\}$.

証明. $Spin(14) = {G_{14}}^{com}$ (命題 5.3.7), $Spin(6) = ((Spin(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ (命題 5.3.16), $Spin(8) = ((F_4)_{E_1})^{\sigma'} \subset ((E_6)_{E_1})^{\sigma'} \subset ((E_7)^{\kappa,\mu})^{\sigma'} \subset ({G_{13}}^{com})^{\sigma'} \subset ({G_{14}}^{com})^{\sigma'}$ とする．写像 $\varphi : Spin(6) \times Spin(8) \to (Spin(14))^{\sigma'}$ を

$$\varphi(\alpha, \beta) = \alpha\beta$$

で定義する．$\varphi(\alpha,\beta) \in (Spin(14))^{\sigma'}$ は上の定義から容易である．$[R_D, R_6] = 0$, $R_D = (\varPhi(D,0,0,0),0,0,0,0,0) \in \mathfrak{spin}(8), R_6 \in \mathfrak{spin}(6) = ((\mathfrak{spin}(14))^{\sigma'})_{(0,F_1(y),0,0)^-}$ (命題 7.3.16)

であるから, $\alpha\beta = \beta\alpha$ を得る．よって, φ は準同型写像である．$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{(1,1), (-1,\sigma)\} = \boldsymbol{Z}_2$ は容易である．　また $(Spin(14))^{\sigma'}$ は連結かつ $\dim(\mathfrak{spin}(6) \oplus \mathfrak{spin}(8)) = 15$(補題 7.3.13)$+28 = 43 = \dim((\mathfrak{spin}(14))^{\sigma'})$ (補題 7.3.17) であるから, φ は全射である．したがって, 群同型

$$(Spin(6) \times Spin(8))/\boldsymbol{Z}_2 \cong ((Spin(14))^{\sigma'}$$

を得る． □

7.4　$Spin(15)$, $Ss(16)$ の分解の予想とその Lie 環の同型対応について

$Spin(15)$(未構成), $Ss(16)$ の σ' による分解は

$$\begin{aligned}(Spin(15))^{\sigma'} &\cong (Spin(7) \times Spin(8))/\boldsymbol{Z}_2,\\ (Ss(16))^{\sigma'} &\cong (Spin(8) \times Spin(8))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2)\end{aligned}$$

であると予想される．

上記の下段の群同型の Lie 環版の内容を以下に述べよう．群 E_8 の Lie 環 $\mathfrak{e}_8$ は

$$\begin{aligned}\mathfrak{e}_8 &= \{R \in {\mathfrak{e}_8}^C \,|\, \widetilde{\tau\lambda} R = R\}\\ &= \{(\varPhi, P, -\tau\lambda P, r, u, -\tau u) \in {\mathfrak{e}_8}^C \,|\, \varPhi \in \mathfrak{e}_7, P \in \mathfrak{P}^C, r \in i\boldsymbol{R}, u \in C\}\end{aligned}$$

で与えられる．$\mathfrak{e}_8$ の部分 Lie 環:

$$((\mathfrak{e}_8)^{\sigma,\sigma'})_{\mathfrak{so}(8)} = \{R \in (\mathfrak{e}_8)^{\sigma,\sigma'} \,|\, [R, R_D] = 0,\ R_D \in \mathfrak{so}(8)\}$$

を考える．ここに $R_D = (\varPhi(D,0,0,0),0,0,0,0,0),\ D \in ((\mathfrak{f}_4)_{E_1})^{\sigma'} = \mathfrak{so}(8)$ である．このとき, つぎの命題が成り立つ．

† **命題 7.4.1.**　$((\mathfrak{e}_8)^{\sigma,\sigma'})_{\mathfrak{so}(8)} \cong \mathfrak{so}(8)$.

証明.　Lie 環 $\mathfrak{so}(8) = \{D \in M(8,\boldsymbol{R}) \,|\, {}^tD = -D\}$ と Lie 環 $((\mathfrak{e}_8)^{\sigma,\sigma'})_{\mathfrak{so}(8)}$ との同型対応を

$$\begin{array}{rcl}\varphi_* : \mathfrak{so}(8) & \to & ((\mathfrak{e}_8)^{\sigma,\sigma'})_{\mathfrak{so}(8)},\\ G_{ij} & \mapsto & R_{ij}, \quad 0 \le i < j \le 7.\end{array}$$

で定義する．ここに G_{ij} は $\mathfrak{so}(8)$ の $\boldsymbol{R}$-基，R_{ij} は $((\mathfrak{e}_8)^{\sigma,\sigma'})_{\mathfrak{so}(8)}$ の $\boldsymbol{R}$-基であり，その具体形はつぎのようである：

$$\begin{aligned}R_{01} &= (\varPhi(-i(E_2 - E_3)^{\sim}, 0,0,0), 0,0,0,0,0),\\ R_{02} &= \Big(\varPhi\Big(0, -\frac{i}{2}(E_2 - E_3), -\frac{i}{2}(E_2 - E_3), 0\Big), 0,0,0,0,0\Big),\\ R_{12} &= \Big(\varPhi\Big(0, \frac{1}{2}(E_2 + E_3), -\frac{1}{2}(E_2 + E_3), 0\Big), 0,0,0,0,0\Big),\\ R_{03} &= \Big(\varPhi\Big(0, -\frac{1}{2}(E_2 - E_3), \frac{1}{2}(E_2 - E_3), 0\Big), 0,0,0,0,0\Big),\end{aligned}$$

$$R_{13} = \Big(\varPhi\Big(0, -\frac{i}{2}(E_2+E_3), -\frac{i}{2}(E_2+E_3), 0\Big), 0, 0, 0, 0, 0\Big),$$
$$R_{23} = (\varPhi(-i(E_1 \vee E_1), 0, 0, i), 0, 0, 0, 0, 0),$$
$$R_{04} = (0, (-(E_2-E_3), 0, 0, 0), (0, -(E_2-E_3), 0, 0), 0, 0, 0),$$
$$R_{14} = (0, (-i(E_2+E_3), 0, 0, 0), (0, i(E_2+E_3), 0, 0), 0, 0, 0),$$
$$R_{24} = (0, (0, iE_1, 0, -i), (iE_1, 0, -i, 0), 0, 0, 0),$$
$$R_{34} = (0, (0, E_1, 0, 1), (-E_1, 0, -1, 0), 0, 0, 0),$$
$$R_{05} = (0, (-i(E_2-E_3), 0, 0, 0), (0, i(E_2-E_3), 0, 0), 0, 0, 0),$$
$$R_{15} = (0, (E_2+E_3, 0, 0, 0), (0, E_2+E_3, 0, 0), 0, 0, 0),$$
$$R_{25} = (0, (0, -E_1, 0, 1), (E_1, 0, -1, 0), 0, 0, 0),$$
$$R_{35} = (0, (0, iE_1, 0, i), (iE_1, 0, i, 0), 0, 0, 0),$$
$$R_{45} = \Big(\varPhi\Big(i(E_1 \vee E_1), 0, 0, \frac{i}{2}\Big), 0, 0, -\frac{i}{2}, 0, 0\Big),$$
$$R_{06} = (0, (0, -(E_2-E_3), 0, 0), (E_2-E_3, 0, 0, 0), 0, 0, 0),$$
$$R_{16} = (0, (0, i(E_2+E_3), 0, 0), (i(E_2+E_3), 0, 0, 0), 0, 0, 0),$$
$$R_{26} = (0, (iE_1, 0, -i, 0), (0, -iE_1, 0, i), 0, 0, 0),$$
$$R_{36} = (0, (-E_1, 0, -1, 0), (0, -E_1, 0, -1), 0, 0, 0),$$
$$R_{46} = \Big(\varPhi\Big(0, \frac{1}{2}E_1, -\frac{1}{2}E_1, 0\Big), 0, 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big),$$
$$R_{56} = \Big(\varPhi\Big(0, -\frac{i}{2}E_1, -\frac{i}{2}E_1, 0\Big), 0, 0, 0, -\frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\Big),$$
$$R_{07} = (0, (0, -i(E_2-E_3), 0, 0), (-i(E_2-E_3), 0, 0, 0), 0, 0, 0),$$
$$R_{17} = (0, (0, -(E_2+E_3), 0, 0), (E_2+E_3, 0, 0, 0), 0, 0, 0),$$
$$R_{27} = (0, (-E_1, 0, 1, 0), (0, -E_1, 0, 1), 0, 0, 0),$$
$$R_{37} = (0, (-iE_1, 0, -i, 0), (0, iE_1, 0, i), 0, 0, 0),$$
$$R_{47} = \Big(\varPhi\Big(0, \frac{i}{2}E_1, \frac{i}{2}E_1, 0\Big), 0, 0, 0, -\frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\Big),$$
$$R_{57} = \Big(\varPhi\Big(0, \frac{1}{2}E_1, -\frac{1}{2}E_1, 0\Big), 0, 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big),$$
$$R_{67} = \Big(\varPhi\Big(-i(E_1 \vee E_1), 0, 0, -\frac{i}{2}\Big), 0, 0, -\frac{i}{2}, 0, 0\Big).$$

このとき，Lie 準同型

$$\varphi_*([G_{ij}, G_{kl}]) = [\varphi_*(G_{ij}), \varphi_*(G_{kl})]$$

が成り立つことから命題の同型を得る. □

† **命題 7.4.2.** $(\mathfrak{e}_8)^{\sigma,\sigma'} \cong \mathfrak{so}(8) \oplus ((\mathfrak{e}_8)^{\sigma,\sigma'})_{\mathfrak{so}(8)}$.

証明. 写像 φ_* を

$$\begin{array}{rcl}\varphi_* : (\mathfrak{e}_8)^{\sigma,\sigma'} & \to & \mathfrak{so}(8) \oplus ((\mathfrak{e}_8)^{\sigma,\sigma'})_{\mathfrak{so}(8)} \\ R & \mapsto & R_D + R_{D_1}.\end{array}$$

で定義する．ここに

$$\begin{aligned} R_{D_1} = \Bigl(\varPhi\Bigl(i\begin{pmatrix}\tau_1 & 0 & 0\\ 0 & \tau_2 & 0\\ 0 & 0 & \tau_3\end{pmatrix}^{\sim}, \begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\end{pmatrix}, -\tau\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\end{pmatrix}, \nu\Bigr), \\ \Bigl(\begin{pmatrix}\xi_1 & 0 & 0\\ 0 & \xi_2 & 0\\ 0 & 0 & \xi_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\eta_1 & 0 & 0\\ 0 & \eta_2 & 0\\ 0 & 0 & \eta_3\end{pmatrix}, \xi, \eta\Bigr), -\tau\lambda\Bigl(\begin{pmatrix}\xi_1 & 0 & 0\\ 0 & \xi_2 & 0\\ 0 & 0 & \xi_3\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}\eta_1 & 0 & 0\\ 0 & \eta_2 & 0\\ 0 & 0 & \eta_3\end{pmatrix}, \xi, \eta\Bigr), r, u, -\tau u\Bigr) \in ((\mathfrak{e}_8)^{\sigma,\sigma'})_{\mathfrak{so}(8)}. \end{aligned}$$

$\tau_k \in \boldsymbol{R}$, $\tau_1+\tau_2+\tau_3=0$, α_k, ξ_k, η_k, ξ, η, $u \in C$, ν, $r \in i\boldsymbol{R}$ である．このとき命題の同型を得る． □

以上 2 つの命題から，つぎの定理を得る．

† **定理 7.4.3.** $(\mathfrak{e}_8)^{\sigma,\sigma'} \cong \mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8)$.

群同型 $(E_8)^\sigma \cong Ss(16)$ であるから，この定理は正に $(Ss(16))^{\sigma'} \cong (Spin(8)\times Spin(8))/(\boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{Z}_2)$ の Lie 環版である．

8. 付録

Cayley 代数の諸公式, 例外 Jordan 代数の Jordan 積, Freudenthal 積の諸公式と例外型複素単純 Lie 環の基本ルート，Dynkin 図形について述べる．

I. Cayley 代数の諸公式

1. $(xy, xy) = (x, x)(y, y), \quad |xy| = |x||y|.$

2. $(ax, ay) = (a, a)(x, y) = (xa, ya).$

3. $(ax, by) + (bx, ay) = 2(a, b)(x, y).$

4. $(ax, y) = (x, \overline{a}y), \quad (xa, y) = (x, y\overline{a}).$

5. $\overline{\overline{x}} = x, \quad \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}, \quad \overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}.$

6. $(x, y) = (y, x) = \dfrac{1}{2}(\overline{x}y + \overline{y}x) = \dfrac{1}{2}(x\overline{y} + y\overline{x}), \quad \overline{x}x = x\overline{x} = |x|^2.$

7. $a(\overline{a}x) = (a\overline{a})x, \quad a(x\overline{a}) = (ax)\overline{a}, \quad x(a\overline{a}) = (xa)\overline{a},$
   $a(ax) = (aa)x, \quad a(xa) = (ax)a, \quad x(aa) = (xa)a.$

8. $\overline{b}(ax) + \overline{a}(bx) = 2(a, b)x = (xa)\overline{b} + (xb)\overline{a}.$

9. $x, y, z, \in \mathfrak{C}$ に対して $\{x, y, z\} = (xy)z - x(yz)$ とおくとき
   $\{x, y, a\} = \{y, a, x\} = \{a, x, y\} = -\{y, x, a\} = -\{x, a, y\} = -\{a, y, x\}$
   が成り立つ．すなわち，

$$
\begin{aligned}
(ax)y + x(ya) &= a(xy) + (xy)a, \\
(xa)y + (xy)a &= x(ay) + x(ya), \\
(ax)y + (xa)y &= a(xy) + x(ay)
\end{aligned}
$$

   が成り立つ．

10. $(ax)(ya) = a(xy)a$ 　(Moufang の公式).

11. $R(xy) = R(yx), \quad R(x(yz)) = R(y(zx)) = R(z(xy))\ (= R(xyz)).$

$\{1, a_1, a_2, \cdots, a_7\}$ を $\mathfrak{C}$ の内積 (x, y) に関する $\boldsymbol{R}$-正規直交基とするとき, つぎの 12.1, 12.2, 12.3 が成り立つ：

12.1 $a_i(a_jx) = -a_j(a_ix)$, 　特に, 　$a_ia_j = -a_ja_i, \quad i \neq j.$

12.2 $a_i(a_ix) = -x$, 　特に, 　${a_i}^2 = -1.$

12.3 $a_i(a_ja_k) = a_j(a_ka_i) = a_k(a_ia_j), \quad i, j, k$ 　は異なる．

II. Jordan 積, Freudenthal 積の諸公式

$$\begin{cases} E_k \circ E_k = E_k, & E_k \circ E_l = 0,\ k \neq l, \\ E_k \circ F_k = 0, & E_k \circ F_l(x) = \dfrac{1}{2}F_l(x),\ k \neq l, \\ F_k(x) \circ F_k(y) = -(x,y)(E_{k+1} + E_{k+2}), & F_k(x) \circ F_{k+1}(y) = \dfrac{1}{2}F_{k+2}(\overline{xy}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_k \times E_k = 0, & E_k \times E_{k+1} = \dfrac{1}{2}E_{k+2}, \\ E_k \times F_k = -\dfrac{1}{2}F_k(x), & E_k \times F_l(x) = 0,\ k \neq l, \\ F_k(x) \times F_k(y) = -(x,y)E_k, & F_k(x) \times F_{k+1}(y) = \dfrac{1}{2}F_{k+2}(\overline{xy}). \end{cases}$$

III. 例外型複素単純 Lie 環の基本ルートと Dynkin 図形

$*$ 複素 Lie 環 ${\mathfrak g_2}^C$ の基本ルートと Dynkin 図形

C-Lie 同型写像 $f_* : \mathfrak{sl}(3, C) \to \mathfrak{su}(3, \boldsymbol{C}^C)$ と埋め込み $\varphi_* : \mathfrak{su}(3, \boldsymbol{C}^C) \to {\mathfrak g_2}^C$ をつぎのように定義する．

$$f_*(A) = \varepsilon A - \overline{\varepsilon}\, {}^t A, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(1 + ie_1),$$
$$\varphi_*(D)(a + \boldsymbol{m}) = D\boldsymbol{m}, \quad a + \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{C}^C \oplus (\boldsymbol{C}^3)^C = \mathfrak{C}^C,$$

ここで $\mathfrak{C}^C$ は複素 Cayley 代数である．このとき，Lie 環 $\mathfrak{sl}(3, C)$ を f_* と φ_* の合成写像のもとでの ${\mathfrak g_2}^C$ の部分 Lie 環とみなす．さらに，$\mathfrak{sl}(3, C)$ は，Cartan 部分環

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_i \in C, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \right\}$$

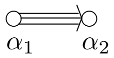
に関するルート $\pm(\lambda_k - \lambda_l), 1 \leq k < l \leq 3$ をもつ．このことより，${\mathfrak g_2}^C$ の基本ルート系は

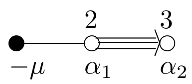
$$\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \alpha_2 = \lambda_2$$

のようになり，最高ルートは

$$\mu = 2\alpha_1 + 3\alpha_3$$

である．また，Dynkin 図形，拡大 Dynkin 図形は，それぞれつぎのようである．





$*$ 複素 Lie 環 $\mathfrak{f}_4{}^C$ の基本ルートと Dynkin 図形

$\mathfrak{f}_4{}^C$ のルートを求める前に，Lie 環 $\mathfrak{D}_4{}^C$:

$$\mathfrak{D}_4{}^C = \{D \in \mathrm{Hom}_C(\mathfrak{C}^C) \,|\, (Dx, y) + (x, Dy) = 0\}$$

のルート系を復習しておく．$H_k = -iG_{k4+k}$, $k = 0, 1, 2, 3$ とおくとき

$$\mathfrak{h} = \{H = \sum_{k=0}^{3} \lambda_i H_k \,|\, \lambda_k \in C\}$$

は $\mathfrak{D}_4{}^C$ の Cartan 部分環であり，$\mathfrak{h}$ に関するルートは

$$\pm(\lambda_k - \lambda_l),\ \ \pm(\lambda_k + \lambda_l), \quad 0 \le k < l \le 3.$$

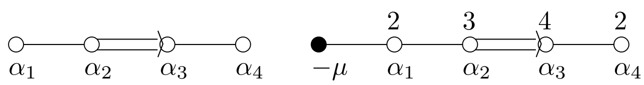
である．このことより，$\mathfrak{f}_4{}^C$ の基本ルート系は

$$\alpha_1 = \lambda_0 - \lambda_1,\ \ \alpha_2 = \lambda_1 - \lambda_2,\ \ \alpha_3 = \lambda_2,\ \ \alpha_4 = \frac{1}{2}(-\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)$$

のようになり，最高ルートは

$$\mu = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$$

である．また，Dynkin 図形，拡大 Dynkin 図形は，それぞれつぎのようである．



$*$ 複素 Lie 環 $\mathfrak{e}_6{}^C$ の基本ルートと Dynkin 図形

$\mathfrak{e}_6{}^C$ の Cartan 部分環：

$$\mathfrak{h} = \left\{ h = h_\delta + \widetilde{H} \in \mathfrak{e}_6{}^C \;\middle|\; \begin{array}{l} h_\delta = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \lambda_k H_k = -\sum_{k=0}^{3} \lambda_k i G_{k4+k}, \lambda_k \in C \\ H = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \mu_j E_j, \mu_j \in C, \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0 \end{array} \right\}$$

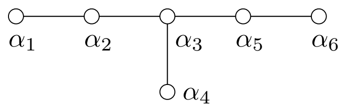
を用いて $\mathfrak{h}$ に関するルートを求め，$\mathfrak{e}_6{}^C$ の基本ルート系を計算すると

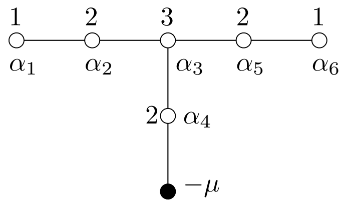
$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \lambda_0 - \lambda_1, \quad \alpha_2 = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \alpha_3 = \lambda_2 - \lambda_3, \\
&\alpha_4 = \lambda_3 + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_3), \\
&\alpha_5 = \frac{1}{2}(-\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) + \frac{1}{2}(\mu_3 - \mu_1), \\
&\alpha_6 = \frac{1}{2}(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)
\end{aligned}$$

となり，最高ルートは

$$\mu = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$$

である．また，Dynkin 図形，拡大 Dynkin 図形は，それぞれつぎのようである．





∗ **複素 Lie 環 $\mathfrak{e}_7{}^C$ の基本ルートと Dynkin 図形**

$\mathfrak{e}_7{}^C$ の Cartan 部分環：

$$\mathfrak{h} = \left\{ \varPhi\Big(\sum_{k=0}^{3} \lambda_k H_k + \Big(\sum_{j=1}^{3} \mu_j E_j \Big)^{\sim}, 0, 0, \nu \Big) \in \mathfrak{e}_7{}^C \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_k, \nu \in C \\ \mu_j \in C, \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0 \end{array} \right\}$$

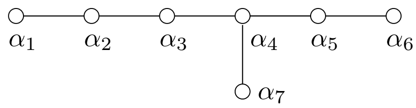
$(H_k = -iG_{k4+k})$ を用いて $\mathfrak{h}$ に関するルートを求め，$\mathfrak{e}_7{}^C$ の基本ルート系を計算すると

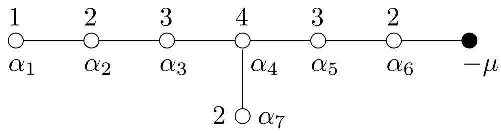
$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \lambda_0 - \lambda_1, \quad \alpha_2 = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \alpha_3 = \lambda_2 - \lambda_3, \\ &\alpha_4 = \frac{1}{2}(-\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) + \frac{1}{2}(\mu_3 - \mu_1), \\ &\alpha_5 = \frac{1}{2}(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2), \\ &\alpha_6 = \mu_2 + \frac{3}{2}\nu, \quad \alpha_7 = -\mu_3 - \frac{3}{2}\nu \end{aligned}$$

となり，最高ルートは

$$\mu = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7$$

である．また，Dynkin 図形，拡大 Dynkin 図形は，それぞれつぎのようである．





* 複素 Lie 環 ${\mathfrak e_8}^C$ の基本ルートと Dynkin 図形

$\mathfrak h_7$ を ${\mathfrak e_7}^C$ の Cartan 部分環とする．このとき

$$\mathfrak h = \{(\varPhi(h), 0, 0, r, 0, 0) \,|\, \varPhi(h) \in \mathfrak h_7, r \in C\}$$

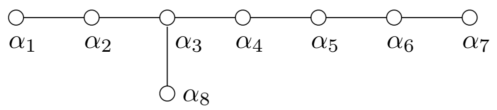
は ${\mathfrak e_8}^C$ の Cartan 部分環になる．この $\mathfrak h$ に関するルートを求め，${\mathfrak e_8}^C$ の基本ルート系を計算すると

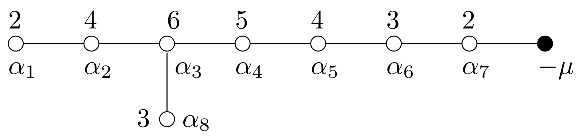
$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \frac{1}{2}(\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) + \frac{1}{2}(\mu_3 - \mu_1),\\
&\alpha_2 = \mu_1 - \frac{1}{3}\nu - r, \quad \alpha_3 = 2r,\\
&\alpha_4 = \mu_2 - \frac{1}{3}\nu - r, \quad \alpha_5 = \lambda_3 - \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_3),\\
&\alpha_6 = \lambda_2 - \lambda_3, \quad \alpha_7 = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \alpha_8 = \nu - r
\end{aligned}$$

となり，最高ルートは

$$\mu = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 5\alpha_4 + 4\alpha_5 + 3\alpha_6 + 2\alpha_7 + 3\alpha_8$$

である．また，Dynkin 図形，拡大 Dynkin 図形は，それぞれつぎのようである．





以上，基本ルート系と Dynkin 図形，拡大 Dynkin 図形について，その結果だけを記した．詳しくは，[56] を参照.

参考文献

[1] M. Berger, Les espaces symétriques non compacts, Ann, Sci. Ecole Norm. Sup. 74(1957).

[2] E. Catan, Sur la reduction a sa forme canonique de la structure d'un groupe de transformations fini et continu, Am. J.Math. 18(1896), 1-61; "OEuves, I", 137-292.

[3] E. Cartan, Les groupes reel simples finis et continus, Ann. Sci. Ecle Norm. Sup.31(1914), 263-355; "OEuvres, I", 399-491.

[4] E. Cartan, Groupes simples clos et ouverts et geometrie riemannienne J.Math.Pures. Appl. 8(1929), 1-33.

[5] C. Chevalley and R.D. Schaher, The exceptional simple Lie algebras F_4 and E_6, Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. 36(1950), 137-141.

[6] H. Freudenthal, Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene, I-XI, 1954-1963.

[7] H. Freudenthal, Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie, Math. Inst. Rijksuniv. te Utrecht, 1951.

[8] F. Gantmacher, On the classifications of real simple Lie groups, Rec. Math. J. 5(1939), 217-249.

[9] S. Gomyo, Realizations of subgroups of type D_8 of connected exceptional simple Lie groups of type E_8, Tsukuba J. Math. 23(1999), 585-614.

[10] M. Hara, Real semisimple graded Lie algebras of the third kind (in Japanese), Master's thesis, dept. Math. Shinshu Univ. (2000).

[11] T. Imai and I. Yokota, Non-compact simple Lie groups $E_{7(-25)}$ of type E_7, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 15(1977), 1-18.

[12] T. Imai and I. Yokota, Another definitions of exceptional simple Lie grops of type $E_{7(-25)}$ and $E_{7(-133)}$, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 15(1980), 47-52.

[13] T. Imai and I. Yokota, Non-compact simple Lie group $E_{8(-24)}$ of type E_8, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 15 (1980), 53-76.

[14] T. Imai and I. Yokota, Simpiy connecyed compact simple Lie groups $E_{7(-133)}$ of type E_7, J. Math. Kyoto Univ. 21(1981), 383-395.

[15] T. Imai and I. Yokota, Simply connected simple Lie group $E_{8(-248)}$ of type E_8, J. Math. Kyoto Univ. 21 (1981), 741-762.

[16] 伊勢幹夫, Lie 群 I, 岩波書店, 東京, 1978.

[17] N. Jacobson, Lie Algebras, Dover Publ., New York, 1962.

[18] S. Kaneyuki, On the subalgebra $\mathfrak{g}_0$ and $\mathfrak{g}_{ev}$ of semisimple graded Lie algebras, J. Math. Soc. Japan 45(1993), 1-19.

[19] 小林俊行，大島利雄，Lie 群と Lie 環 1, 2, 岩波書店，東京，1999.

[20] T. Miyasaka, O. Shukuzawa and I. Yokota, Spinor-generators of compact exceptional Lie groups F_4, E_6 and E_7, Tsukuba J. Math. 22(1998), 705-721.

[21] T. Miyasaka, O. Yasukura and I. Yokota, Diagonalization of an element P of $\mathfrak{P}^C$ by the compact Lie group E_7, Tsukuba J. Math. 22(1998), 687-703.

[22] T. Miyasaka and I. Yokota, Orbit types of the compact Lie group E_7 in the Freudenthal vector space $\mathfrak{P}^C$, Tsukuba J. Math. 23(1999), 229-234.

[23] T. Miyashita and I. Yokota, Realization of automorphisms σ of order 3 and G^σ of compact exceptional Lie groups G, II, $G = E_7$, Yokohama Math. J. 47(1999), 31-44.

[24] T. Miyashita and I. Yokota, 2-graded decompositions of exceptional Lie algebra $\mathfrak{g}$ and group realizations of $\mathfrak{g}_{ev}, \mathfrak{g}_0$, Part III, $G = E_8$, Japanese J. Math. 26-1(2000), 31-50.

[25] T. Miyashita and I. Yokota, Fixed points subgroups $G^{\sigma,\sigma'}$ by two involutive automorphisms σ, σ' of compact exceptional Lie group $G = F_4, E_6$ and E_7, Math. J. Toyama Univ. 24(2001), 135-149 .

[26] T. Miyashita and I. Yokota, An explicit isomorphism between $(\mathfrak{e}_8)^{\sigma,\sigma'}$ and $\mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8)$ as Lie algebras, Math. J. Toyama Univ. 24(2001), 151-158.

[27] T. Miyashita, Decomposition of spinor groups by the involution σ' in exceptional Lie groups, Math. J. Okayama Univ. 44(2002), 1-27.

[28] T. Miyashita, Fixed points subgroups by two involutive automorphisms σ, γ of compact exceptional Lie group F_4, E_6 and E_7, Tsukuba J. Math. 27-1(2003), 199-215.

[29] T. Miyashita and I. Yokota, Fixed points subgroups by two involutive automorphisms γ, γ' of compact exceptional Lie group G_2, F_4, E_6 and E_7, Yokohama Math. J. 53(2006), 9-38.

[30] T. Miyashita and I. Yokota, 3-graded decompositions of exceptional Lie algebras $\mathfrak{g}$ and group realizations of $\mathfrak{g}_{ev}, \mathfrak{g}_0$ and $\mathfrak{g}_{ed}$, Part II, $G = E_7$, Case 1, J. Math. Kyoto Univ. 46-2(2006), 383-413.

[31] T. Miyashita and I. Yokota, 3-graded decompositions of exceptional Lie algebras $\mathfrak{g}$ and group realizations of $\mathfrak{g}_{ev}, \mathfrak{g}_0$ and $\mathfrak{g}_{ed}$, Part II, $G = E_7$, Case 2, 3 and 4, J. Math. Kyoto Univ. 46-4(2006), 805-832.

[32] T. Miyashita and I. Yokota, 3-graded decompositions of exceptional Lie algebras $\mathfrak{g}$ and group realizations of $\mathfrak{g}_{ev}, \mathfrak{g}_0$ and $\mathfrak{g}_{ed}$, Part II, $G = E_7$, Case 5, J. Math. Kyoto Univ. 47-1(2007), 121-128.

[33] T. Miyashita, The intersection of fixed points subgroups by involutive automorphisms of compact exceptional Lie groups $G = G_2, F_4, E_6$ and E_7, preprint.

[34] O. Shukuzawa, Diagonalization of elements of Freudenthal $\boldsymbol{R}$-vector space and split Freudenthal $\boldsymbol{R}$-vector space, Tsukuba J. Math. 27(2003), 113-128.

[35] O. Shukuzawa, Orbit space of split Freudenthal vector space, Yokohama Math. J. 50(2003), 1-10.

[36] O. Shukuzawa and I. Yokota, Non-compact simple Lie group $E_{6(6)}$ of type E_6, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 14(1979), 1-13.

[37] O. Shukuzawa and I. Yokota, Non-compact simple Lie group $E_{6(-14)}$ and $E_{6(2)}$ of type E_6, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 14(1979), 15-28.

[38] I. Yokota, On a non-compact simple Lie groups $F_{4,1}$ of type F_4, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 10(1975), 71-80.

[39] I. Yokota, Non-compact simple Lie groups G_2' of type G_2, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 12(1977), 45-52.

[40] I. Yokota, Non-compact simple Lie groups $F_{4,2}$ of type F_4, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 12(1977), 53-64.

[41] I. Yokota, Simply connected compact simple Lie groups $E_{6(-78)}$ of type E_6 and its involutive automorphisms, J. Math. Kyoto Univ. 20(1980), 447-473.

[42] I. Yokota, $SU(8)/\boldsymbol{Z}_2$ of compact simple Lie groups E_7 and non-compact simple Lie groups $E_{7(7)}$ of type E_7, Math. J. Okayama Univ. 24(1982), 53-71.

[43] I. Yokota, Realization of automorphisms σ of order 3 and G^σ of compact exceptional Lie groups, I. $G = G_2, F_4, E_6$, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 20(1985), 131-144.

[44] I. Yokota, Realizations of involutive automorphisms σ and G^σ of exceptional linear Lie groups G, Part I, $G = G_2, F_4$ and E_6, Tsukuba J. Math. 4(1990), 185-223.

[45] I. Yokota. Realizations of involutive automorphisms σ and G^σ of exceptional linear Lie groups G, Part II, $G = E_7$, Tsukuba J. Math. 14(1990), 379-404.

[46] I. Yokota, Realizations of involutive automorphisms σ and G^σ of exceptional linear Lie groups G, Part III, $G = E_8$, Tsukuba J. Math. 14(1991), 301-314.

[47] I. Yokota, 2-graded decompositions of exceptional Lie algebra $\mathfrak{g}$ and group realizations of $\mathfrak{g}_{ev}, \mathfrak{g}_0$, Part I, $G = G_2, F_4, E_6$, Japanese J. Math. 24(1998), 257-296.

[48] I. Yokota, 2-graded decompositions of exceptional Lie algebras $\mathfrak{g}$ and group realizations of $\mathfrak{g}_{ev}, \mathfrak{g}_0$, Part II, $G = E_7$, Japanese J. Math. 25(1999), 155-179.

[49] I. Yokota, 3-graded decompositions of exceptional Lie algebra $\mathfrak{g}$ and group realizations of $\mathfrak{g}_{ev}, \mathfrak{g}_0$ and $\mathfrak{g}_{ed}$, Part II, $G = G_2, F_4, E_6$, Part I, J. Math. Kyoto Univ. 41-3(2001), 449-474.

[50] I. Yokota ,T. Ishihara and O. Yasukura, Subgroup$((SU(3) \times SU(6))/\boldsymbol{Z}_3) \cdot \boldsymbol{Z}_2$ of the simply connected compact simple Lie groups E_7, J. Math. Kyoto Univ. 23(1983), 715-737.

[51] I. Yokota and T. Miyashita, Global Isomorphisms of Lower Dimensional Lie Groups, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 25-2(1990), 59-63.

[52] I. Yokota and T. Miyashita, Determination of fixed subgroups $G^{\gamma,\gamma'}$ of involutive automorphisms γ, γ' of compact exceptional groups $G = G_2, F_4, E_6$(in Japanese), J. Fac. Edu. Yamanashi Univ. 3-1(2001), 7-11.

[53] I. Yokota and O. Yasukura, Subgroup $(SU(2) \times Spin(12))/\boldsymbol{Z}_2$ of compact simple Lie groups E_7 and non-compact simple Lie group $E_{7,\sigma}$ of type $E_{7(-5)}$, Hiroshima Univ. J. 12(1982), 59-76.

[54] I. Yokota and O. Yasukura, Non-compact simple Lie group $E_{8(8)}$, Tsukuba J. Math. 10(1986), 331-349.

[55] 横田一郎, 古典型単純リー群, 現代数学社，京都, 1990.

[56] 横田一郎, 例外型単純リー群, 現代数学社，京都，1992.

[57] H. Weyl, Classical Groups, Princeton Univ. Press, 1939.

[58] J. A. Wolf and A. Gray, Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms I, J. diff. Geometry, 2(1968), 77-114.