

主 論 文 要 旨

報告番号	甲 乙 第	号	氏 名	黒沢 健
<p>主 論 文 題 目 :</p> <p style="text-align: center;">Transcendence criterion of Mahler functions</p> <p>(マーラー関数の超越性判定定理)</p>				
<p>(内容の要旨)</p> <p>m次元ベクトル $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ に対して, $\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i$, $\alpha^\lambda = \prod_{i=1}^m \alpha_i^{\lambda_i}$ と置く. $r \geq 2$ を整数とし, ベクトル $z = (z_1, \dots, z_m)$ の変換 $\Omega_n z := (z_1^{r^n}, \dots, z_m^{r^n})$ を定義する. 次の m 変数関数を考える.</p> $\Phi_0(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{E_k(\Omega_k z)}{F_k(\Omega_k z)} \in K[[z]] = K[[z_1, \dots, z_m]].$ <p>但し K は代数体,</p> $E_k(z) = \sum_{1 \leq \lambda \leq L} e_{k\lambda} z^\lambda, \quad F_k(z) = 1 + \sum_{1 \leq \lambda \leq L} f_{k\lambda} z^\lambda \in K[z]$ <p>である. $E_k(z)$ と $F_k(z)$ は互いに素で $E_k(z)$ と $F_k(z)$ の係数は $\log \ e_{k\lambda}\ , \log \ f_{k\lambda}\ = o(r^k)$ を満たすものとする. 但し代数的数 α に対して, $\ \alpha\ = \max\{ \alpha , \text{den}(\alpha)\}$ と定義する. ここで α は α の共役の絶対値の最大値, $\text{den}(\alpha)$ は $\text{den}(\alpha)\alpha$ が代数的整数となる最小の自然数とする. $\Phi_0(z)$ はマーラー型と呼ばれる関数方程式を満たす.</p> <p>本論文の主定理を述べる.</p> <p>定理 1. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (K^\times)^m$ を $\alpha_1 , \dots, \alpha_m$ が乗法的に独立で $0 < \alpha_1 , \dots, \alpha_m < 1$ かつ $F_k(\Omega_k \alpha) \neq 0$ ($k \geq 0$) を満たす代数点とする. このとき, $\Phi_0(\alpha)$ が代数的数となるための必要十分条件は $\Phi_0(z)$ が K 上の有理関数になることである.</p> <p>定理 1 は多変数のマーラー関数 $\Phi_0(z)$ の有理性と代数点における関数値の代数性が同値であることを主張する. 定理を精密化することによって, 関数 $\Phi_0(z)$ の K 上の有理性のいくつかの判定定理を導く. これらの判定定理の応用として, 二項回帰数列の逆数和の超越性を示すことができる. 二項回帰数列</p> $R_{n+2} = AR_{n+1} + BR_n \quad (n \geq 0), \tag{1}$ <p>但し $A, B, R_0, R_1 \in \mathbb{Z}$, $(A, B), (R_0, R_1) \neq (0, 0)$ を考える. ここで判別式 $\Delta = A^2 + 4B$ を正とする. $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{R_{r^k}}$ を $R_{r^k} \neq 0$ となる $k \geq 0$ をわたる和とする.</p> <p>定理 2. $\{R_n\}_{n \geq 0}$ を (1) で定義される二項回帰数列とする. 但し $\{R_n\}_{n \geq 0}$ は周期列でなく, 無限に多くの k に対して $R_{r^k} \neq 0$ とする. $\{a_k\}_{k \geq 0}$ は代数体 K 内の数列で, 無限に多くの k に対して $a_k \neq 0$ であり, また $\log \ a_k\ = o(r^k)$ を満たすとする. このとき</p> $\theta = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{R_{r^k}}$ <p>は下記の 2 つの例外ケースを除き超越数となる.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) $r = 2$ で, ある $N \in \mathbb{N}$ と $a \in K$ が存在して, $a_n = a$ ($n \geq N$) が成り立ち, $B = 1, R_0 = 0$ を満たす. このとき $\theta \in K(\sqrt{\Delta})$ となる. 2) $r = 2$ で, ある $N \in \mathbb{N}$ と $a \in K$ が存在して, $a_n = a2^n$ ($n \geq N$) が成り立ち, $A = \pm(B - 1), AR_0 = 2R_1$ を満たす. このとき $\theta \in K$ となる. 				