

学位論文 博士（工学）

ウェーブレット変換・フィルタバンクの  
高次元化と画像処理への応用

2009 年度

慶應義塾大学大学院理工学研究科

京地 清介



# 目次

第 1 章	序論	1
1.1	本論文の背景	1
1.2	本論文の構成	3
1.2.1	表記	3
1.2.2	略語	4
第 2 章	ウェーブレット・フィルタバンク理論	6
2.1	マルチレートシステム	6
2.1.1	ダウンサンプリング	6
2.1.2	アップサンプリング	7
2.2	フィルタバンク	7
2.2.1	2 分割フィルタバンク	10
2.2.2	$M$ 分割フィルタバンク	11
2.2.3	パラユニタリフィルタバンク	14
2.2.4	線形位相フィルタバンク	15
2.2.5	2 分割線形位相パラユニタリフィルタバンク	16
2.3	画像拡張法	16
2.3.1	周期拡張法	17
2.3.2	対称拡張法	17
2.3.3	エルミート対称拡張法	17
2.4	ウェーブレット変換	18
2.4.1	ウェーブレット変換基礎	19
2.4.2	高速離散ウェーブレット変換	20
2.4.3	離散ウェーブレット変換とフィルタバンクの等価性	23
2.5	フィルタバンクの設計	24
2.5.1	構造・性質の導入	25
2.5.2	フィルタバンクの設計方式	25
2.5.3	フィルタバンクの性能の指標と最適化	27
2.6	画像圧縮符号化	30
2.6.1	画像圧縮符号化の原理	30
2.6.2	EZW-IP 符号化	31
2.7	画像のノイズ除去	35

第 3 章	関連研究と本研究の位置づけ	37
3.1	ウェーブレット変換とフィルタバンクの高次元化に関する先行研究	37
3.1.1	複素ウェーブレット変換, 複素フィルタバンク	37
3.1.2	2次元実ウェーブレット変換・2次元実フィルタバンク	39
3.2	本論文の提案法の概要と位置づけ	39
3.2.1	2分割複素線形位相擬直交フィルタバンク	40
3.2.2	$M$ 分割 Dual-tree 複素ウェーブレット変換の設計法	41
3.2.3	ボトムアップ方式に基づく最大間引き Contourlet 変換	43
第 4 章	2分割複素線形位相擬直交フィルタバンクの設計と画像圧縮符号化への応用	45
4.1	本章の概要	45
4.2	準備	46
4.2.1	2分割複素パラユニタリフィルタバンク	46
4.2.2	2分割複素線形位相フィルタバンク	47
4.3	従来法: 2分割複素偶対称奇対称パラユニタリフィルタバンク	47
4.4	2分割複素線形位相擬直交フィルタバンク	48
4.4.1	擬直交性	48
4.4.2	擬直交行列	49
4.4.3	2分割複素擬直交フィルタバンク	50
4.4.4	2分割複素擬直交フィルタバンクのラティス構造	50
4.4.5	2分割複素擬直交線形位相フィルタバンクのラティス構造	51
4.5	複素フィルタバンクを用いた画像符号化アルゴリズム	52
4.5.1	提案アルゴリズム	52
4.5.2	画像の複素化処理において発生するエイリアシングについて	53
4.6	シミュレーション	54
4.6.1	フィルタバンクの設計	54
4.6.2	画像圧縮符号化	55
4.7	本章の結論	56
第 5 章	最小二乗法に基づく Dual-tree 複素ウェーブレット変換の設計法と画像ノイズ除去への適用	61
5.1	本章の概要	61
5.2	準備	62
5.2.1	離散ウェーブレット変換の問題点	62
5.2.2	Dual-Tree 複素ウェーブレット変換	66
5.3	従来法: 全域通過フィルタを用いた Dual-Tree 複素ウェーブレット変換の設計法	73
5.4	最小二乗法に基づく Dual-tree 複素ウェーブレット変換の設計法	76
5.4.1	評価関数	76
5.4.2	最適化	77
5.5	シミュレーション	78
5.5.1	フィルタバンクの設計	78

5.5.2	シフト不変性の近似精度の評価	78
5.5.3	方向分解能の評価	81
5.5.4	非線形近似	82
5.5.5	画像ノイズ除去への応用	83
5.6	本章の結論	85
第 6 章	コサイン・サイン変調フィルタバンクに基づく複素ウェーブレット変換と画像ノイズ除去への適用	88
6.1	本章の概要	88
6.2	準備	89
6.2.1	$M$ 分割 Dual-tree 複素ウェーブレット変換	89
6.2.2	コサイン変調フィルタバンク	90
6.2.3	$2^r$ 分割 DTCWT の設計法: Dual-tree 複素ウェーブレットパケット	93
6.3	コサイン・サイン変調フィルタバンク	94
6.3.1	偶数型コサイン・サイン変調フィルタバンク	94
6.3.2	奇数型コサイン・サイン変調フィルタバンク	96
6.3.3	コサイン・サイン変調フィルタバンクのシフト不変性	97
6.3.4	コサイン・サイン変調フィルタバンクの方向分解能	101
6.4	シミュレーション	102
6.4.1	フィルタバンクの設計	102
6.4.2	シフト不変性の近似精度の評価	102
6.4.3	方向分解能の評価	103
6.4.4	符号化利得	105
6.4.5	非線形近似	106
6.4.6	画像ノイズ除去	106
6.5	本章の結論	107
第 7 章	ボトムアップ方式に基づく最大間引き Contourlet 変換の設計と画像圧縮符号化への適用	117
7.1	本章の概要	117
7.2	準備	118
7.2.1	2 次元マルチレートシステム	118
7.2.2	2 次元フィルタバンク	121
7.3	従来の 2 次元フィルタバンク	124
7.3.1	Directional Filter Bank	124
7.3.2	最大間引き Contourlet 変換	126
7.4	提案法: ボトムアップ方式に基づく最大間引き Contourlet 変換の設計	128
7.4.1	分割ステップ	129
7.4.2	合成ステップ	131
7.5	シミュレーション	133
7.5.1	フィルタバンクの設計	133

7.5.2	提案 CRISP-CT の方向分解能について . . . . .	134
7.5.3	画像圧縮符号化 . . . . .	134
7.6	本章の結論 . . . . .	136
第 8 章	結論	141
	参考文献	143
	謝辞	150

# 目次

2.1	時間及び周波数領域におけるダウンサンプリング	8
2.2	ダウンサンプリングによるエイリアシング	8
2.3	デシメーションシステムと理想的なデシメーションフィルタ	8
2.4	時間及び周波数領域におけるアップサンプリング	9
2.5	アップサンプリングされた入力信号のスペクトル	9
2.6	インターポレーションシステムとインターポレーションフィルタ	9
2.7	$M$ 分割フィルタバンクの構造	10
2.8	2 分割フィルタバンクの構造	10
2.9	等価回路 1	11
2.10	等価回路 2	11
2.11	デシメーション及びインターポレーションのポリフェーズ構造	14
2.12	$M$ 分割最大間引きフィルタバンクのポリフェーズ構造	14
2.13	ハールフィルタバンクの周波数応答	17
2.14	周期拡張法	18
2.15	対称拡張法	18
2.16	エルミート対称拡張法	18
2.17	フィルタバンクによる 1 次元離散ウェーブレット変換 (2 レベル)	24
2.18	フィルタバンクによる可分型 2 次元離散ウェーブレット変換 (1 レベル)	24
2.19	フィルタバンクのラティス構造による表現	26
2.20	ツリー構造による 4 分割フィルタバンクの構造	27
2.21	プロトタイプフィルタの周波数応答	28
2.22	プロトタイプフィルタの変調による $M$ 分割フィルタバンクの設計	28
2.23	(a) <i>Lena</i> (b) <i>Lena</i> の離散ウェーブレット変換出力画像 (3 レベル)	30
2.24	画像圧縮符号化 (JPEG2000) の全体図	31
2.25	(a) 原画像 <i>Lena</i> (b) <i>Lena</i> の復元画像 (1[bpp])	32
2.26	ビットプレーン	33
2.27	クワッドツリー分割	33
2.28	ノイズ画像例	35
3.1	各種フィルタバンクの包含関係	41
4.1	提案アルゴリズム全体図	58
4.2	プリフィルタのシステム	59

4.3	設計されたフィルタバンクの周波数応答 . . . . .	59
4.4	画像圧縮符号化の結果画像 . . . . .	60
5.1	16 サンプルの入力信号に対する DWT の出力信号 . . . . .	63
5.2	1 サンプルシフトされた 16 サンプルの入力信号に対する DWT の出力信号 . . . . .	63
5.3	$\phi(x), \phi(y), \psi(x), \psi(y)$ の周波数スペクトル . . . . .	64
5.4	2 次元ウェーブレット関数の周波数スペクトル . . . . .	65
5.5	DWT において取り扱うことができるエッジパターン . . . . .	66
5.6	(a) 原画像 <i>Zone plate</i> (b) <i>Zone plate</i> の可分型 2 次元 DWT による出力画像 . . . . .	66
5.7	DTCWT のフィルタバンク . . . . .	67
5.8	16 サンプルの入力信号に対する DTCWT の出力信号 . . . . .	70
5.9	1 サンプルシフトされた 16 サンプルの入力信号に対する DTCWT の出力信号 . . . . .	71
5.10	$\psi_1(x, y)(= \psi(x)\psi(y))$ のスペクトル . . . . .	71
5.11	$\text{RealPart}\{\psi_1(x, y)\}$ のスペクトル . . . . .	72
5.12	DTCWT における 2 次元ウェーブレット関数 . . . . .	72
5.13	$\psi_2(x, y)(= \psi(x)\overline{\psi(y)})$ のスペクトル . . . . .	72
5.14	$\text{Real Part}\{\psi_2(x, y)\}$ のスペクトル . . . . .	73
5.15	DTCWT による <i>Zone plate</i> の出力画像 . . . . .	74
5.16	DTCWT のシフト不変性評価のための信号出力の図 (レベル 2) . . . . .	78
5.17	入力信号 . . . . .	79
5.18	DWT によって得られた出力信号 . . . . .	79
5.19	DTCWT によって得られた出力信号 (レベル:4, フィルタ長:8) . . . . .	79
5.20	DTCWT によって得られた出力信号 (レベル:4, フィルタ長:10) . . . . .	80
5.21	DTCWT によって得られた出力信号 (レベル:4, フィルタ長:14) . . . . .	80
5.22	周波数スペクトル (レベル:3, フィルタ長:8) . . . . .	81
5.23	周波数スペクトル (レベル:3, フィルタ長:10) . . . . .	81
5.24	周波数スペクトル (レベル:3, フィルタ長:14) . . . . .	82
5.25	2 次元ウェーブレット関数 (レベル:4, フィルタ長:8) . . . . .	83
5.26	2 次元ウェーブレット関数 (レベル:4, フィルタ長:10) . . . . .	83
5.27	2 次元ウェーブレット関数 (レベル:4, フィルタ長:14) . . . . .	84
5.28	非線形近似復元画像 <i>Barbara</i> . . . . .	84
5.29	非線形近似復元画像 <i>Lena</i> . . . . .	86
5.30	ノイズ除去結果画像 <i>Barbara</i> . . . . .	87
5.31	ノイズ除去結果画像 <i>Lena</i> . . . . .	87
6.1	$M$ 分割 DTCWT . . . . .	89
6.2	プロトタイプフィルタの周波数応答例 . . . . .	90
6.3	OCMFB の周波数応答例 . . . . .	91
6.4	OCMFB のシステム構造 . . . . .	91
6.5	ECMFB のシステム構造 . . . . .	92
6.6	ECMFB の周波数応答例 . . . . .	92



6.7	4分割 DTCWT	94
6.8	OCSMFB のシステム構造	96
6.9	シフト不変性に関する信号の入力出力図	98
6.10	図 6.9 の分割レベル $J$ ・帯域 $m \in (0, \dots, M - 1)$ におけるサブバンドフィルタ・ ダウンサンプリング・アップサンプリングを等価変換したシステム	99
6.11	分割レベル $J$ 番目における帯域 $m = 0$ or $M$ 番目の入力出力の関係図	100
6.12	方向成分抽出のための 2 次元変換 (ECSMFB)	108
6.13	方向成分抽出のための 2 次元変換 (OCSMFB)	109
6.14	出力サブバンド信号	110
6.15	出力サブバンド信号	111
6.16	DWT の 2 次元ウェーブレット関数	111
6.17	ECSMFB の 2 次元ウェーブレット関数	112
6.18	OCSMFB の方向分解能	112
6.19	非線形近似結果 <i>Barbara</i>	113
6.20	非線形近似結果 <i>Lena</i>	113
6.21	非線形近似結果 <i>Barbara</i>	114
6.22	非線形近似結果 <i>Lena</i>	114
6.23	ノイズ除去結果画像 <i>Barbara</i>	115
6.24	ノイズ除去結果画像 <i>Lena</i>	116
7.1	2 次元デシメーション	119
7.2	2 次元デシメーションシステム	119
7.3	2 次元周波数領域におけるデシメーション	120
7.4	2 次元インターポレーション	120
7.5	2 次元インターポレーションシステム	121
7.6	2 次元周波数領域におけるインターポレーション	121
7.7	2 分割 2 次元マルチレートフィルタバンク	121
7.8	2 分割 1 次元マルチレートフィルタバンクの帯域分割形状	122
7.9	2 分割 2 次元フィルタバンクの帯域分割形状	122
7.10	設計されたファンフィルタの周波数応答 (左: $H_0(z_1, z_2)$ , 右: $F_0(z_1, z_2)$ )	124
7.11	8 分割 DFB のツリー構造	125
7.12	8 分割 DFB の周波数帯域分割形状	125
7.13	DWT による周波数帯域分割形状	126
7.14	DWT(a) と 8 分割 DFB(b) の出力画像 ( <i>Yogi</i> )	126
7.15	DWT と DFB の画像圧縮符号化性能の比較 (1 bit/pixel)	127
7.16	理想的な帯域分割形状 ( $L$ : 低周波成分, $H1 \sim H8$ 高周波成分)	127
7.17	CRISP-CT に用いられる 2 次元フィルタバンク	128
7.18	CRISP-CT のツリー構造	129
7.19	CRISP-CT の周波数帯域分割形状	129
7.20	2 次元フィルタ例	130

7.21	提案する帯域分割形状 . . . . .	130
7.22	分割ステップの流れ . . . . .	131
7.23	DWT の出力 $LH$ , $HL$ 成分に接続する Tree A . . . . .	132
7.24	DWT の出力 $HH$ 成分に接続する Tree B . . . . .	132
7.25	提案帯域分割形状取得のための合成処理 . . . . .	133
7.26	トランスマルチプレクサ . . . . .	133
7.27	使用するフィルタ . . . . .	133
7.28	$HH$ 成分の周波数応答 . . . . .	134
7.29	$HL/LH$ 成分の周波数応答 . . . . .	134
7.30	合成に使用したフィルタバンク ( $F_0(z), F_1(z), F_2(z)$ ) の周波数応答 . . . . .	135
7.31	16 方向のエッジ成分を持つテスト画像 . . . . .	135
7.32	図 7.31 の変換後の高周波成分の出力 . . . . .	136
7.33	<i>Zone plate</i> 結果画像 . . . . .	138
7.34	<i>Barbara</i> 結果画像 . . . . .	139
7.35	<i>Bike</i> 結果画像 . . . . .	140

# 表目次

2.1	9/7 タップフィルタの係数 . . . . .	31
3.1	シフト不変性及び高い方向分解能を持つ複素ウェーブレット変換の特徴 . . . . .	38
3.2	提案法一覧 . . . . .	40
3.3	各種直交フィルタバンクの特徴 ( $N$ はフィルタ長) . . . . .	41
3.4	2 分割 DTCWT の従来設計法と提案設計法の特徴 . . . . .	43
3.5	$M$ 分割 DTCWT の従来設計法と提案設計法の特徴 . . . . .	43
3.6	最大間引き Contourlet 変換の従来設計法と提案設計法の特徴 . . . . .	44
4.1	設計パラメータ数 . . . . .	55
4.2	画像圧縮符号化結果 (複素 LPPOFB) . . . . .	56
4.3	画像圧縮符号化結果 (複素 PUFB) . . . . .	56
4.4	画像の高周波成分のエネルギー . . . . .	56
5.1	シフト不変性の比較 . . . . .	80
5.2	負の領域のエネルギーの比較 . . . . .	82
5.3	非線形近似数値結果 (PSNR [dB]). . . . .	85
5.4	ノイズ除去結果 (PSNR [dB]). . . . .	86
6.1	平均相関係数結果 . . . . .	104
6.2	平均相関係数結果 . . . . .	105
6.3	平均相関係数結果 . . . . .	105
6.4	設計フィルタの符号化利得 . . . . .	106
6.5	ノイズ除去結果 (PSNR) . . . . .	107
7.1	符号化結果 1 . . . . .	137



# 第 1 章

## 序論

### 1.1 本論文の背景

近年 PC，インターネットを構築するハードウェア技術は急速な進化を遂げている．例えば，高速並列演算可能な LSI，大容量の情報が保存可能なメモリやハードディスクなどのストレージ，高速通信を可能にする光ファイバーなど，枚挙に暇がない．更に，それらの製品やサービスが安価で利用できるようになった結果，PC やインターネットは急速に普及し，今や我々の生活に不可欠なものとなった．一般的に我々が，PC やインターネット上で日々利用しているのは，「文字情報」「音声」「画像」「動画像」などのマルチメディアである．以前はそれぞれがアナログ情報として，紙・フィルム写真・磁気テープなど，全く別の形態で利用されていたが，PC はそれらすべてをデジタル情報の形に一元化することができる．更にデジタルコンテンツは，保存・伝送・加工が容易で，かつハードウェアの劣化に伴う情報損失が無いという利点を持つ．以上のような利便性，頑健性及び信頼性から，マルチメディアは我々の生活に深く浸透しており，その用途は音楽，映画鑑賞などの個人の娯楽目的から，個人対個人の情報伝達手段に至るまで多様化している．その結果，マルチメディアデータの利用目的に応じて，圧縮，ノイズ除去，認識を行うためのデジタル信号処理技術の重要性が高まり，そして急速に発達した．今やデジタル信号処理技術は，医療や通信など実社会の様々な場面に貢献しており，高度情報化社会を形成する上で必須の基盤技術となっている．本論文では，圧縮，ノイズ除去，認識などの処理のための，より高性能なデジタル信号処理技術の確立に貢献することを目的とする．

デジタル信号に対して，圧縮・ノイズ除去・認識などの処理を行うためには，デジタル信号の加工や解析を行うことが必要となるが，デジタル信号を直接操作して加工や解析を行うことは難しい．なぜならデジタル信号は，自然界や実社会から発生する物理量を時々刻々と記録しただけの情報であり，その時系列のみから構造や特徴を詳細に把握することが難しいからである．そこで原信号を，加工や解析が容易にできるような情報に“変換”することが重要となる．その道具として最も重要であるのがフーリエ変換である [1]．19 世紀初頭，数学者フーリエは「ほとんどの関数は三角関数の重ね合わせによって表現される」と主張し，三角関数一つ一つの重み係数，即ち周波数情報に変換する“フーリエ変換”を提案した．フーリエ変換によって得られる周波数情報は，デジタル信号の構造や特徴を把握するのに非常に有効であることから，現在のデジタル信号処理では，フーリエ変換を用いて対象信号を一度周波数情報に変換することによって様々な加工や解析処理を行うという，“調波解析”が基本となっている．

かくしてフーリエ変換の誕生は，数学や工学に多大なインパクトをもたらすこととなった．その後も更なる有効な調波解析のために，フーリエ変換は数学と工学の分野でそれぞれ独立に進化

を遂げ、数学ではウェーブレット変換・工学ではフィルタバンク [2-6] に発展する。数学におけるフーリエ変換からウェーブレット変換への発展の経緯を振り返る。フーリエ変換は関数全体を周波数情報に変換し、解析対象の大域的な構造を把握することを可能とするが、関数の局所的な周波数情報は解析できないという欠点があった。そこで、関数の局所領域を切り出すための窓関数を施し、その後フーリエ変換を施す「窓フーリエ変換」[2] が提案され、関数の局所領域における周波数解析が可能になった。窓関数とフーリエ基底関数の積は新しい基底関数を構築することが示され [3, 4]、その結果、解析対象関数を切り出す窓機能、振動関数としての機能の双方を兼ね備えたウェーブレット関数が構築された。そしてウェーブレット関数を基底関数として用いた、ウェーブレット変換が完成する。一方工学におけるフーリエ変換からフィルタバンクへの発展の経緯に関しては以下の通りである。まずハードウェア上での高速演算、省メモリ演算が必要となる場面を想定し、信号のブロック毎にフーリエ変換を施す離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform : DFT) が提案された。その後、更なる演算コストの削減を図るため、複素数演算ではなく実数演算に基づく離散コサイン変換 (Discrete Cosine Transform : DCT) [7] が導入される。DFT・DCT は、間引き処理を伴うフィルタリングであるフィルタバンク [5] とみなすことができ、重複直交変換 (Lapped Orthogonal Transform : LOT) [8]・一般化重複直交変換 (Generalized Lapped Orthogonal Transform : GenLOT) [9] など、より周波数選択性の高いフィルタバンクに関する研究が行われた。そして最後にウェーブレット変換の実行アルゴリズムはフィルタバンクと等価であることが示され、数学と工学の両分野は融合した [4]。以降、数学では工学的なアプローチが、工学では数学的なアプローチが導入されるなどの相互的な研究によって、ウェーブレット変換/フィルタバンク (Wavelet Transform/Filter Bank : WT/FB) は現在も急速に発展している。

WT/FB はデジタル信号処理の諸応用で成功を収めている。マルチメディア信号処理における WT/FB の最も重要な応用例としては、情報圧縮符号化が挙げられる。例えば標準画像圧縮符号化である JPEG (Joint Photographic Experts Group) [10]・JPEG2000 [11] において、前者では DCT、後者では離散ウェーブレット変換 (Discrete Wavelet Transform : DWT) が用いられている。標準音声圧縮符号化では MPEG-1 Audio Layer-3 (MP3) [12] に修正 DCT [12] が用いられている。標準映像圧縮符号化では、MPEG-4 に DCT、H.264/AVC [13] に整数 DCT [13] が用いられている。圧縮符号化の他にも、信号のノイズ除去 [14-17]・信号輪郭強調 [18]・信号特徴抽出 [19-22]・電子透かし [23, 24] など、WT/FB の応用は多岐に亘る。また無線通信の MIMO (Multiple Input Multiple Output) 方式に離散フーリエ変換が導入されているように [25]、応用範囲はマルチメディア信号処理のみに留まらず、WT/FB は今や情報工学の必須基盤技術であると言える。

前述したように、実用的には DCT や DWT のような 1 次元実数変換が多く用いられているため、現在までは 1 次元実 WT/FB が主に研究されてきた。しかし近年、1 次元実 WT/FB の更なる高性能化に対して障害となる、いくつかの欠点が報告されている [26, 27]。例としては、多次元信号を処理する際の方向分解能の欠乏が挙げられる。方向分解能とは、多次元信号に存在する、様々な方向性を持つ高周波成分 (画像のエッジなど) を、方向に応じて区別して抽出する性能のことを意味する。この欠点によって、画像圧縮や画像ノイズ除去では、画像の細かなテクスチャの方向情報が失われ、画質が著しく低下する問題が生じる。方向分解能の欠乏を含め、以下に示すような 1 次元実 WT/FB に存在する欠点を克服する新しい変換を提案し、応用することが、現在の WT/FB に関する研究の 1 つの潮流となっている。

そこで近年では、1次元複素 WT/FB や 2次元実 WT/FB などの、WT/FB の高次元化が注目を集めている。その理由としては、例えば 1次元複素 WT/FB の一種である DFT が、本来高い方向分解能を備えているように、高次元化された WT/FB が、1次元実 WT/FB には実現できない様々な利点を持つことからである。近年の研究で報告されている、1次元複素 WT/FB や 2次元実 WT/FB の利点としては、

1. 構造の多様性
2. シフト不変性
3. 高い方向分解能

などが挙げられる [26, 27]。ここで、構造の多様性とは、WT/FB に対して、フィルタの直交性や対称性など、様々な有効な数理構造を導入できること、シフト不変性とは入力信号の時間遅延によらずに出力信号の形状が一定となる性能を意味する。よってこれらの特性を持つ 1次元複素 WT/FB や 2次元実 WT/FB を応用することによって、1次元実 WT/FB よりも高い性能が得られると考えられる。

しかし、1次元複素 WT/FB や 2次元実 WT/FB によって、前述の利点を得るためには、フィルタに適切な制約条件を課さなければならない。次章以降で詳述するように、それらの条件を課すことは決して簡単ではない。実際現在までも、制約条件を考慮に入れた、1次元複素 WT/FB や 2次元実 WT/FB の設計法が提案され、諸応用での有効性が報告されているが、いずれも性能の最適性や再現性などの点で問題を持つため、高次元化された WT/FB の設計法が確立しているとは一概にいうことができない。そこで本論文では WT/FB の高次元化をテーマとし、その中で特に、1次元複素 WT/FB、2次元実 WT/FB の利点を引き出すための有効な設計法を提案し、応用にて有効性を示すことを目的とする。

## 1.2 本論文の構成

ここで本論文の構成について記す。第 2 章では、本論文全体に用いられる基本事項を述べる。主に 1次元マルチレートシステム、ウェーブレット変換、フィルタバンクの理論を示す。次に第 3 章として、WT/FB の高次元化に関する先行研究と、その中で本研究の提案法の位置づけを示す。以降本論文における提案法を述べる。まず、第 4 章では、新しい 1次元複素フィルタバンクの構造として、2分割複素線形位相擬直交フィルタバンクを提案する。また複素フィルタバンクを画像圧縮符号化に应用するためのアルゴリズムを提案し、2分割複素線形位相フィルタバンクと提案アルゴリズムを用いた画像圧縮符号化の有効性を示す。次に、シフト不変性及び高い方向分解能を持つ 1次元複素ウェーブレット変換である、 $M$  分割 Dual-tree 複素ウェーブレット変換の設計法を、第 5 章では  $M = 2$  の場合について、第 6 章では  $M > 2$  の場合について示す。また、応用として画像ノイズ除去に適用し、提案法の有効性を示す。第 7 章においては、高い方向分解能を持つ 2次元実フィルタバンクである、最大間引き Contourlet 変換の設計法に関して、ボトムアップ方式を提案し、画像圧縮符号化への応用を示す。最後に第 8 章で全体の総括をし、本論文を結ぶ。

### 1.2.1 表記

本論文で用いられる表記を記す。

- $\mathbb{N}$  : 自然数の集合,  $\mathbb{Z}$  : 整数の集合,  $\mathbb{R}$  : 実数の集合,  $\mathbb{C}$  : 複素数の集合
- $\mathbb{N}^2 := \left\{ \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ ,  $\mathbb{Z}^2 := \left\{ \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} : m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ ,  $\mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ .
- $M_N(\mathbb{C})$  : 複素数の要素を持つ  $N \times N$  行列の集合.
- $j$  は複素単位  $\sqrt{-1}$  を表す.
- 太字で書かれた大文字のアルファベットは行列を, 小文字はベクトルを意味する.
- $M^T$  :  $M$  の転置,  $M^\dagger$  :  $M$  の共役転置 ( $\overline{M}^T$ )
- $\mathbf{I}$  : 単位行列
- $\mathbf{J}_M$  : 反転行列

$$\mathbf{J}_M = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

ただし  $M$  は正方行列のサイズを表す.

- $\tilde{\mathbf{E}}(z) : \mathbf{E}^\dagger(z^{-1})$
- $\delta(k)$  : クロネッカーのデルタ

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

- $\langle f, g \rangle$  は関数  $f(x)$  と  $g(x)$  の内積

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g(x)} dx \quad (1.2)$$

を表す.

- $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{n=1}^N |x_n|$  及び  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^N |x_n|^2}$  は, ベクトル  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_N]^T$  の  $L_1$  ノルム,  $L_2$  ノルムとする.
- $H(\omega) := \sum h(n)e^{-j\omega n}$ ,  $H(z) := \sum h(n)z^{-n}$  はそれぞれ 1 次元デジタルフィルタ  $h(n)$  のフーリエ変換及び  $z$  変換.  $H(\omega)$  をフィルタ  $h(n)$  のスペクトルまたは周波数応答と呼ぶ.
- $H(\boldsymbol{\omega}) := H(\omega_1, \omega_2) := \sum h(n_1, n_2)e^{-j(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}$ ,  $H(\mathbf{z}) := H(z_1, z_2) := \sum h(n_1, n_2)z_1^{-n_1}z_2^{-n_2}$  はそれぞれ, 2 次元デジタルフィルタ  $h(n_1, n_2)$  の 2 次元フーリエ変換及び 2 次元  $z$  変換とする.
- 関数  $f(x)$  に対して  $\hat{f}(\omega)$  を  $f(x)$  のフーリエ変換 ( $\hat{f}(\omega) = \int f(x)e^{-j\omega x} dx$ ) とし,  $\hat{f}(\omega)$  をスペクトル, 周波数スペクトルなどと呼ぶ.

## 1.2.2 略語

また本論文でしばしば用いられる略語を以下に記す.

- FIR : 有限長フィルタ (Finite Impulse Response)
- IIR : 無限長フィルタ (Infinite Impulse Response)
- DFT : 離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform)
- DWT : 離散ウェーブレット変換 (Discrete Wavelet Transform)
- DCT : 離散コサイン変換 (Discrete Cosine Transform)



- DTCWT : Dual-tree 複素ウェーブレット変換 (Dual-Tree Complex WT)
- BOFB : 双直交フィルタバンク (BiOrthogonal Filter Bank)
- PUFB : パラユニタリフィルタバンク (ParaUnitary Filter Bank)
- LPFB : 線形位相フィルタバンク (Linear Phase Filter Bank)
- LPPUFB : 線形位相パラユニタリフィルタバンク
- SAPUFB : 偶対称・奇対称パラユニタリフィルタバンク (Symmetry-Antisymmetry PUFB)
- POFB : 擬直交フィルタバンク (Pseudo-Orthogonal Filter Bank)
- LPPOFB : 線形位相擬直交フィルタバンク (Linear Phase POFB)
- CMFB : コサイン変調フィルタバンク (Cosine Modulated Filter Bank)
- CSMFB : コサイン・サイン変調フィルタバンク (Cosine Sine Modulated Filter Bank)
- OCMFB : 奇数型コサイン変調フィルタバンク (Odd-type Cosine Modulated Filter Bank) ,  
OCSMFB : 奇数型コサイン・サイン変調フィルタバンク (Odd-type Cosine Sine Modulated Filter Bank)
- ECMFB : 偶数型コサイン変調フィルタバンク (Even-type Cosine Modulated Filter Bank) ,  
ECSMFB : 偶数型コサイン・サイン変調フィルタバンク (Even-type Cosine Sine Modulated Filter Bank)
- CRISP-CT : 最大間引き Contourlet 変換 (CRItically-SamPled Contourlet Transform)

また本論文では特に断りが無い限り ,

- 1次元実ウェーブレット変換 , 1次元実フィルタバンク  $\Leftrightarrow$  1次元ウェーブレット変換 , 1次元フィルタバンク (若しくは単にウェーブレット変換 , フィルタバンク)
- 1次元複素ウェーブレット変換 , 1次元複素フィルタバンク  $\Leftrightarrow$  複素ウェーブレット変換 , 複素フィルタバンク
- 2次元実ウェーブレット変換 , 2次元実フィルタバンク  $\Leftrightarrow$  2次元ウェーブレット変換 , 2次元フィルタバンク

のように略記する .

## 第 2 章

# ウェーブレット・フィルタバンク理論

本章では，本論文全体で用いるウェーブレット変換・フィルタバンクの基礎的な理論について概説する．まず，2.1 節でフィルタバンク理論を考える上で基礎となるマルチレートシステムを述べ，その後 2.2 節においてフィルタバンクの基礎を示す．有限長の信号にフィルタリングを施す場合，必ず信号端処理が問題となるが，2.3 節では信号端の処理法について述べる．2.4 節ではウェーブレット変換の基礎理論を述べる．2.5 節では，代表的なフィルタバンクの設計法を述べる．また本論文では，設計したフィルタバンクを画像圧縮符号化及び画像ノイズ除去に適用するため，2.6 節にて画像圧縮符号化の原理，及び画像圧縮符号化のアルゴリズムである EZW-IP について説明し，2.7 節にて画像ノイズ除去について説明する．

### 2.1 マルチレートシステム

マルチレートシステムとは，入力信号のサンプリング周期を変化させることができるシステムである．次節で述べるフィルタバンクもマルチレートシステムの一例である．本節では，マルチレートシステムにおいて重要な間引き処理（ダウンサンプリングまたはデシメーションと呼ばれる）及び・補間処理（アップサンプリングまたはインターポレーションと呼ばれる）について述べる．

#### 2.1.1 ダウンサンプリング

間引き率  $D$  のダウンサンプリング，つまり離散信号  $x(n)$  のサンプリング周波数を  $1/D$  にする操作は，サンプルを  $D$  個置きに抜き出すことに相当する．ここで入力信号  $x(n)$  と出力信号  $y(n)$  の関係は，

$$y(n) = x(Dn) \quad (2.1)$$

と表される．これは， $z$  領域及び周波数領域では次のようになる．

$$Y(z) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(W_D^k z^{1/D}) \quad (2.2)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(e^{j(\omega-2\pi k)/D}) \quad (2.3)$$

ただし， $W_D = e^{j2\pi/D}$  である．このダウンサンプリングの様子を図 2.1 に示す．この図からも分かるように，サンプリング周波数が  $1/D$  になることによって，信号のスペクトルは  $D$  倍に引き伸ばされる．また引き伸ばされた信号のスペクトルのコピーが周波数領域上で  $2\pi k/D$  シフトされて

現れる．このとき，基本帯域と高周波帯域の重なり合いにより，エイリアシングが発生する場合がある．図 2.1 では，入力信号が  $\pi/D$  以下に帯域制限されており，エイリアシングは生じていない．つまり，ダウンサンプリングされた信号から元の信号を復元することが可能である．一方，図 2.2 では，帯域制限されておらず，エイリアシングが生じているのが分かる．この場合，ダウンサンプリングされた信号から元の信号を復元することは不可能である．つまり，エイリアシングを防ぐためには，図 2.3 のように低域通過フィルタを用いて帯域制限を行う必要がある．この低域通過フィルタは，デシメーションフィルタと呼ばれる．ただし，現実には図のような理想的な低域通過フィルタは存在せず，多少のエイリアシングが生じることになるが，フィルタが十分大きな阻止域減衰量（2.5 節参照）を持っていれば，エイリアシングは無視できる程小さくなる．

### 2.1.2 アップサンプリング

零挿入率  $U$  のアップサンプリング，即ち離散信号  $x(n)$  のサンプリング周波数を  $U$  倍にする操作は，サンプル間に  $U - 1$  個のゼロを挿入することに相当する．ここで入力信号  $x(n)$  と出力信号  $y(n)$  の関係は，

$$y(n) = \begin{cases} x(n/U) & : n = 0, \pm U, \pm 2U, \dots \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.4)$$

となる．これは， $z$  領域及び周波数領域では次のように表される．

$$Y(z) = X(z^U) \quad (2.5)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{jU\omega}) \quad (2.6)$$

この様子を図 2.4 に示す．ここでは，サンプリング周波数が  $U$  倍になることによって，信号のスペクトルが  $1/U$  に圧縮される．またこれにより， $U - 1$  個の新たなスペクトルが生じているのが分かる（図 2.5）． $U - 1$  個の新たなスペクトルはイメージングと呼ばれ，これを除去するために図 2.6 のような低域通過フィルタが用いられる．このフィルタはインターポレーションフィルタまたはイメージング除去フィルタと呼ばれる．

## 2.2 フィルタバンク

フィルタバンクの基本処理は信号を帯域分割し，更に合成を行うことである．入力信号を帯域分割フィルタ（サブバンドフィルタ）によって，幾つかの帯域成分（サブバンド）に分割し，帯域ごとに並列処理し，出力部においてその総和を取れば元の入力信号が復元される．この並列処理過程において，各通過帯域は帯域制限されているため，サンプリング周波数を低減させることができ，マルチレート手法が適用される．各帯域通過フィルタの出力信号はデシメーション処理され，この状態で符号化，復号化，伝送など，目的に応じた処理が行われる．これらの各種処理を受けた後，今までは逆にサンプリング周波数を増加させるインターポレーション処理がなされ，元のサンプリング周波数に変換される．最後に各帯域信号が取り出され，それらを加算することによって元の入力信号が復元される．

帯域を  $M$  分割し，再び元の信号を復元する  $M$  分割最大間引きフィルタバンクを図 2.7 に示す．ここで， $x(n)$  は入力信号， $y(n)$  は出力信号， $H_i(z)$  と  $F_i(z)$  はそれぞれ  $i$  番目の分割サブバンドフィルタ，合成サブバンドフィルタである．最大間引きフィルタバンクであることから，間引き率

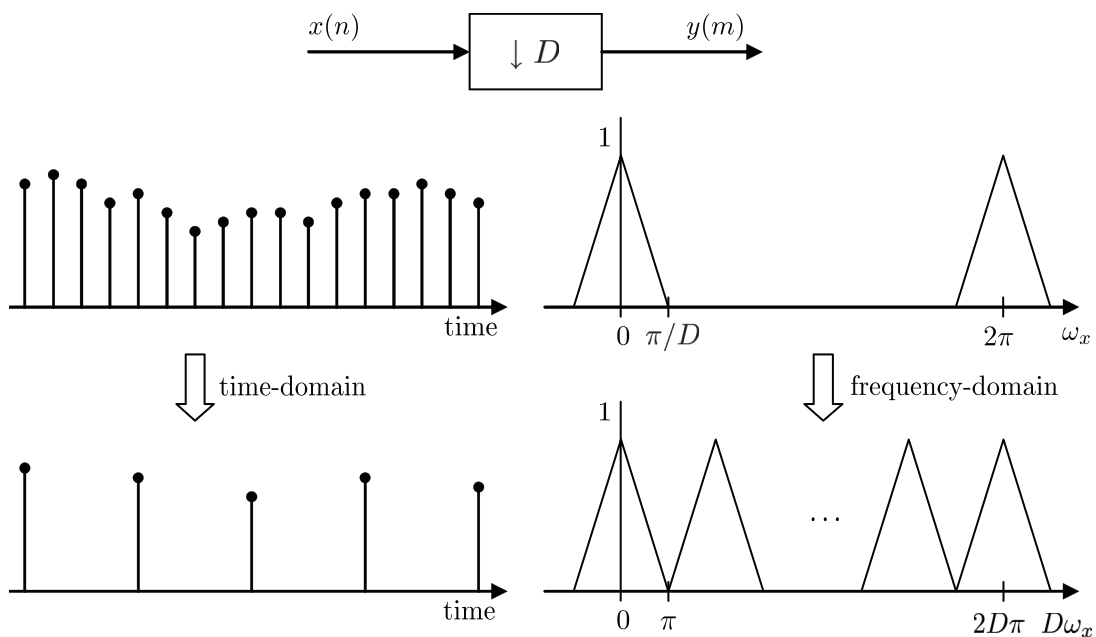


図 2.1 時間及び周波数領域におけるダウンサンプリング (左: 時間領域, 右: 周波数領域)

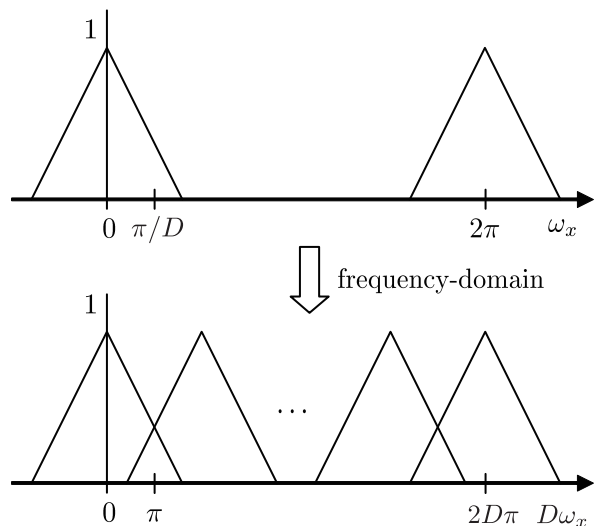


図 2.2 ダウンサンプリングによるエイリアシング. 入力信号のスペクトルは  $D$  倍に伸張り,  $D - 1$  個のコピーが現れる.

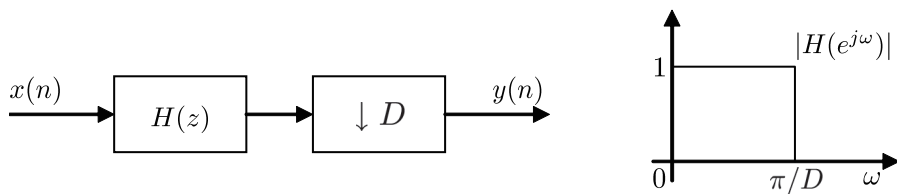


図 2.3 デシメーションシステムとデシメーションフィルタ

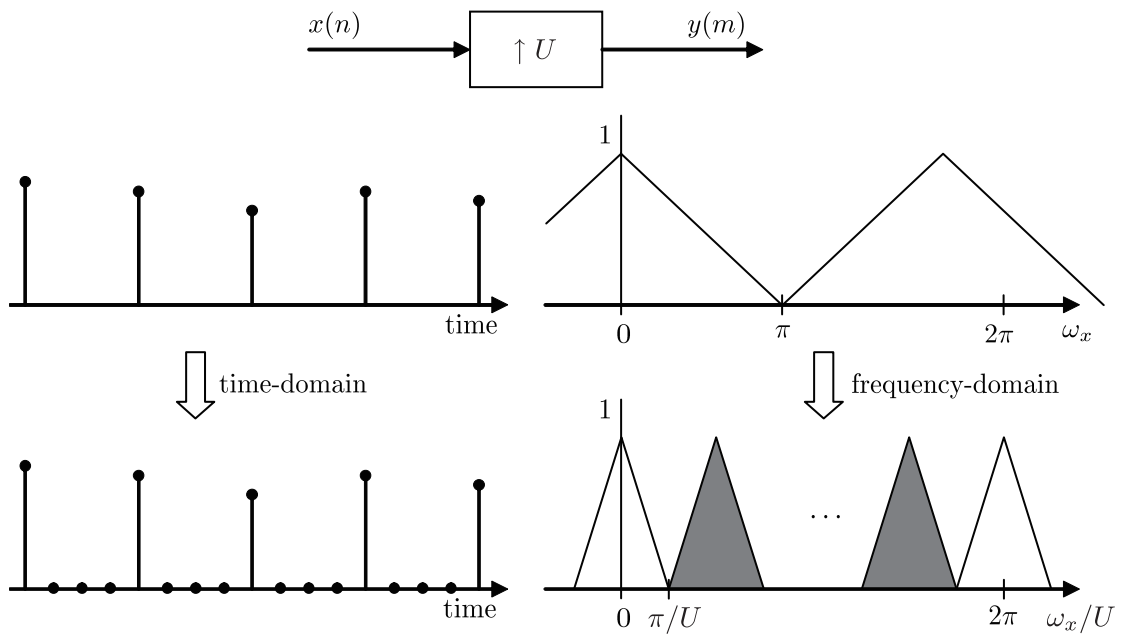


図 2.4 時間及び周波数領域におけるアップサンプリング (左: 時間領域, 右: 周波数領域)

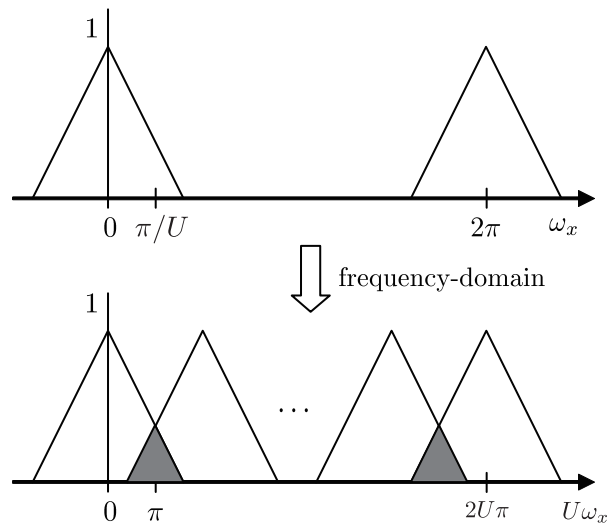


図 2.5 アップサンプリングされた入力信号のスペクトル. 入力信号のスペクトルは  $1/U$  に圧縮される.

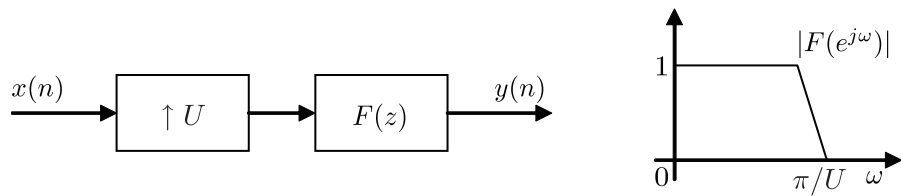


図 2.6 インターポレーションシステムとインターポレーションフィルタ

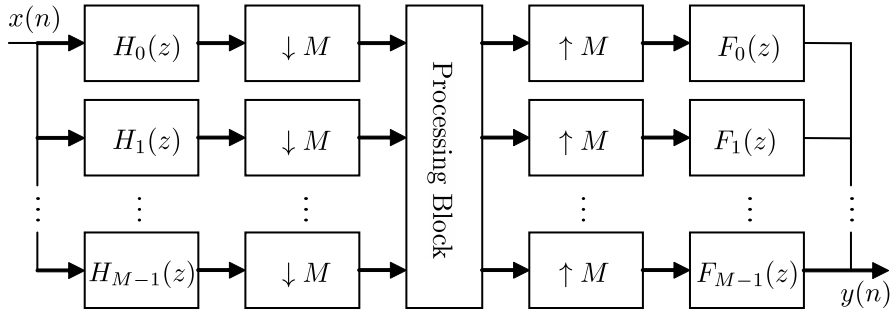


図 2.7  $M$  分割最大間引きフィルタバンクの構造．分割側のサブバンドフィルタ  $H_0(z), \dots, H_{M-1}(z)$ ，合成側の低域・高域通過フィルタ  $F_0(z), \dots, F_{M-1}(z)$ ，及び間引き率  $M$  と零挿入率  $M$  のダウンサンプリング・アップサンプリングによって構成される．

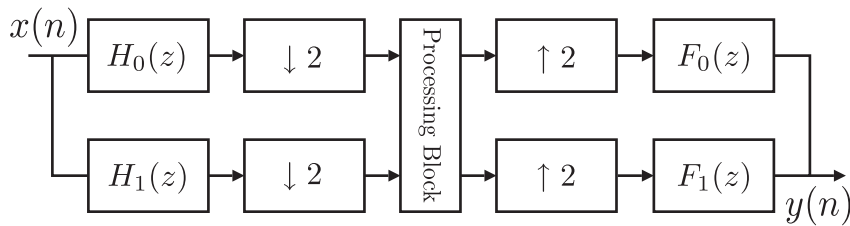


図 2.8 2 分割フィルタバンクの構造．分割側の低域・高域通過フィルタ  $H_0(z), H_1(z)$ ，合成側の低域・高域通過フィルタ  $F_0(z), F_1(z)$  及び間引き率 2 と零挿入率 2 のダウンサンプリング・アップサンプリングによって構成される．

$D$  と零挿入率  $U$  は  $D = M, U = M$  となる．以降，間引き率及び零挿入率は  $M$  と記す．

## 2.2.1 2 分割フィルタバンク

### 2 分割フィルタバンクにおける完全再構成条件

ここでは最も単純な場合である，2 分割フィルタバンクの場合について言及する． $M = 2$  の場合は，図 2.8 で示すものである．フィルタバンクは途中で量子化・符号化などの処理が無ければ完全に出力信号は入力信号と同じものに復元されなければならない．これを完全再構成条件という．2 分割フィルタバンクが完全再構成条件を満たすときの  $H_0(z), H_1(z), F_0(z), F_1(z)$  が満たすべき条件を考える．

すでに示したようにダウンサンプリングとアップサンプリングの  $z$  変換は式 (2.2) と式 (2.5) である．これを  $M = 2$  として考慮し，2 分割フィルタバンクの出力信号の  $z$  変換を求める．低域側を  $Y_L(z)$  とすると，

$$Y_L(z) = \frac{1}{2}F_0(z)[H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)] \quad (2.7)$$

高域側を  $Y_H(z)$  とすると

$$Y_H(z) = \frac{1}{2}F_1(z)[H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)] \quad (2.8)$$

よって，2 つのチャンネルの  $z$  変換を加えると，次式のような  $y(n)$  の  $z$  変換が得られる．

$$Y(z) = \frac{1}{2}[F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z)]X(z) + \frac{1}{2}[F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z)]X(-z). \quad (2.9)$$

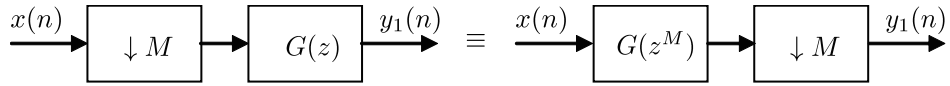


図 2.9 等価回路 1

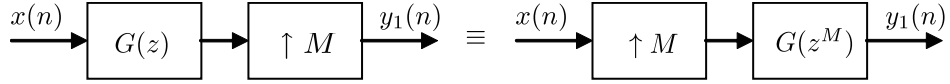


図 2.10 等価回路 2

上式の第 1 項は  $X(z)$  を含む振幅歪みに関する項で歪み項, 第 2 項は  $X(-z)$  を含むエイリアシングに関する項でエイリアシング項と呼ぶ。完全再構成を満たすフィルタバンクでは  $Y(z) = z^{-\ell}X(z)$  でなければならない(ただし完全再構成に時間遅延は許容するものとする)。したがって歪み項は  $z^{-\ell}$  エイリアシング項は 0 とならなければならない。以上を以下の定理にまとめる。

定理 1. (完全再構成条件)

2 分割フィルタバンクは以下の条件が満たされるとき, 完全再構成である。

$$F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z) = 2z^{-\ell} \quad (2.10)$$

$$F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) = 0 \quad (2.11)$$

### 2.2.2 $M$ 分割フィルタバンク

本節では, 前節で説明した 2 分割フィルタバンクを一般化した,  $M$  分割フィルタバンクについて説明する(図 2.7)。

#### ポリフェーズ構造

まず  $M$  分割フィルタバンクについて議論する際に重要なポリフェーズ構造について説明する。ポリフェーズ構造の基本は以下の 2 つの等価回路である。

#### 【等価回路 1】

図 2.9 に示すように,  $M$  でダウンサンプリングされた後に,  $G(z)$  でフィルタリングされるシステムは,  $G(z^M)$  でフィルタリングされ,  $M$  でダウンサンプリングされるシステムと等価である。

#### 【等価回路 2】

図 2.10 に示すように,  $G(z)$  でフィルタリングされた後に,  $M$  でアップサンプリングされるシステムは,  $M$  でアップサンプリングされるシステムは,  $M$  でアップサンプリングされ,  $G(z^M)$  でフィルタリングされるシステムと等価である。

等価回路 1 はダウンサンプリング前のフィルタが  $G(z^M)$  という形であれば, これらを入れ替えることができることを示している。同様に, 等価回路 2 はアップサンプリングとフィルタリングの

入れ替えが可能な状況を示している．ここで，フィルタの伝達関数が，

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (2.12)$$

であるとする．このとき， $H(z)$  は必ず以下のように分解される．

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nM)z^{-nM} \\ &+ z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nM+1)z^{-nM} \\ &\vdots \\ &+ z^{-(M-1)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nM+M-1)z^{-nM} \end{aligned} \quad (2.13)$$

つまり，

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} z^{-n} E_l(z^M) \quad (2.14)$$

と表すことができる．ただし，

$$E_l(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nM+l)z^{-n}, \quad 0 \leq l \leq M-1 \quad (2.15)$$

である．また，

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-(M-1-l)} R_l(z^M) \quad (2.16)$$

と表すこともできる．ただし，

$$R_l(z) = E_{M-1-l}(z) \quad (2.17)$$

である．式 (2.13) をタイプ 1 のポリフェーズ，式 (2.16) をタイプ 2 のポリフェーズと呼ぶ．これらの関係を用いることによりデシメーション，インターポレーションはそれぞれ図 2.11 のようにポリフェーズ構造で実現される．

#### $M$ 分割フィルタバンクのポリフェーズ表現

次にポリフェーズ表現のフィルタバンクの適用を考える． $M$  分割フィルタバンクの  $k$  番目のフィルタ  $H_k(z)$  はポリフェーズ構造で表すと，

$$H_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_{k,l}(z^M) \quad \text{for } 1 \leq k \leq M \quad (2.18)$$

となり，次式のように書き表すことができる．

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0,0}(z^M) & E_{0,1}(z^M) & \cdots & E_{0,M-1}(z^M) \\ E_{1,0}(z^M) & E_{1,1}(z^M) & \cdots & E_{1,M-1}(z^M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{M-1,0}(z^M) & E_{M-1,1}(z^M) & \cdots & E_{M-1,M-1}(z^M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(M-1)} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$



すなわち,

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{E}(z^M)\mathbf{e}(z) \quad (2.20)$$

となる。ただし,

$$\mathbf{E}(z) = \begin{bmatrix} E_{0,0}(z) & E_{0,1}(z) & \cdots & E_{0,M-1}(z) \\ E_{1,0}(z) & E_{1,1}(z) & \cdots & E_{1,M-1}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{M-1,0}(z) & E_{M-1,1}(z) & \cdots & E_{M-1,M-1}(z) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

とし, この行列  $\mathbf{E}(z)$  を分割側ポリフェーズ行列と呼ぶ。

合成側のフィルタ  $F_k(z)$  についても同様にポリフェーズ構造で表すと,

$$F_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-(M-1-l)} R_{l,k}(z^M) \quad \text{for } 1 \leq k \leq M \quad (2.22)$$

となり, 次式のように書き表すことができる。

$$\begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ \vdots \\ F_{M-1}(z) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} z^{-(M-1)} \\ z^{-(M-2)} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_{0,0}(z^M) & R_{0,1}(z^M) & \cdots & R_{0,M-1}(z^M) \\ R_{1,0}(z^M) & R_{1,1}(z^M) & \cdots & R_{1,M-1}(z^M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{M-1,0}(z^M) & R_{M-1,1}(z^M) & \cdots & R_{M-1,M-1}(z^M) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

すなわち,

$$\mathbf{F}^T(z) = z^{-(M-1)}\mathbf{e}^T(z)\mathbf{R}(z^M) \quad (2.24)$$

となる。ただし,  $T$  は転置行列を表す。また,

$$\mathbf{R}(z) = \begin{bmatrix} R_{0,0}(z) & R_{0,1}(z) & \cdots & R_{0,M-1}(z) \\ R_{1,0}(z) & R_{1,1}(z) & \cdots & R_{1,M-1}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{M-1,0}(z) & R_{M-1,1}(z) & \cdots & R_{M-1,M-1}(z) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

とする。この行列  $\mathbf{R}(z)$  を, 合成側ポリフェーズ行列と呼ぶ。

ポリフェーズ構造を用いて  $M$  分割フィルタバンクを表したものが図 2.12 であり, フィルタリングが最も低いレートで実現されるため, 効果的な構成法と知られている。これらのことから本論文では, このポリフェーズ行列を構成することによって, フィルタバンクを実現する。

#### $M$ 分割フィルタバンクの完全再構成条件/双直交フィルタバンク

フィルタバンクに入力された信号が完全に復元される,  $M$  分割フィルタバンクの完全再構成条件は重要である。ただし, ここでは出力信号が入力信号に対する時間遅延と定数倍を含むことを許す。完全再構成条件は前述のポリフェーズ行列で表現すると非常に簡潔である。つまり, 分割側ポリフェーズ行列  $\mathbf{E}(z)$  と合成側ポリフェーズ行列  $\mathbf{R}(z)$  を用いて

$$\mathbf{R}(z)\mathbf{E}(z) = z^{-\eta}\mathbf{I} \quad (2.26)$$

と表される。完全再構成条件を満たすフィルタバンクを, 一般に双直交フィルタバンク (BiOrthogonal Filter Bank : BOFB) と呼ぶ。

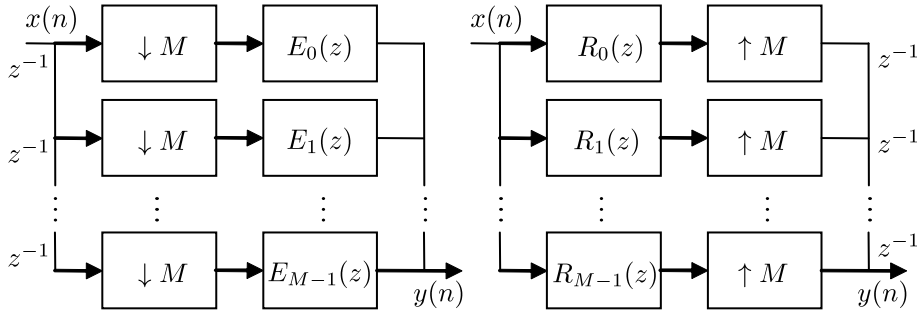


図 2.11 デシメーション及びインターポレーションのポリフェーズ構造

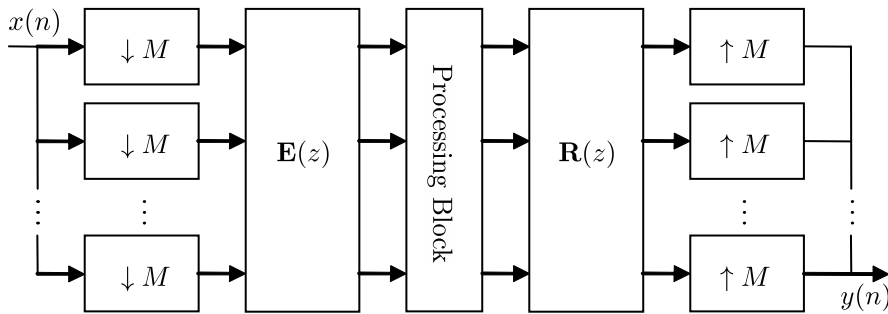


図 2.12  $M$  分割最大間引きフィルタバンクのポリフェーズ構造． $\mathbf{E}(z)$ ：分割側ポリフェーズ行列， $\mathbf{R}(z)$ ：合成側ポリフェーズ行列

### 2.2.3 パラユニタリフィルタバンク

定義 1. 分割フィルタのポリフェーズ行列  $\mathbf{E}(z)$  によって

$$\mathbf{E}(z)\tilde{\mathbf{E}}(z) = \mathbf{I} \quad (2.27)$$

と表される条件を，パラユニタリ性と呼び，パラユニタリ性を満たしているフィルタバンクをパラユニタリフィルタバンク (ParaUnitary Filter Bank : PUFB) と呼ぶ．ただし， $\tilde{\mathbf{E}}(z) := \mathbf{E}^\dagger(z^{-1})$  である．

#### 特徴

パラユニタリフィルタバンクは，双直交フィルタバンクの特殊な場合であるとみなせる． $\mathbf{E}(z)$  がパラユニタリ性を満たすメリットとして，合成ポリフェーズ行列  $\mathbf{R}(z)$  を  $\mathbf{R}(z) = \tilde{\mathbf{E}}(z)$  とおくことで，自動的に完全再構成を満たすフィルタバンクが設計できること，またエネルギー保存則を有しているので設計における最適化の際最適解へ早く収束することなど，フィルタバンクの設計の簡単さが挙げられる．

#### 諸命題

1.  $M$  分割パラユニタリフィルタバンクの性質

(a) 時間反転

フィルタバンクの分割側のサブバンドフィルタを  $h_k(n)$  , 合成側のサブバンドフィルタを  $f_k(n)$  とするとき ( $0 \leq k \leq M-1$ ) ,

$$f_k(n) = h_k(N-1-n) \quad (2.28)$$

(b) エネルギー保存則

分割側のサブバンドフィルタ  $h_k(n)$  の周波数応答を  $H_k(\omega)$  で表す ( $0 \leq k \leq M-1$ ) .  
このとき

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_1(\omega)|^2 + \cdots + |H_{M-1}(\omega)|^2 = 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (2.29)$$

が成り立つ .

## 2. 2 分割パラユニタリフィルタバンクの性質

(a) 交番反転

$h_0(n)$  と  $h_1(n)$  をそれぞれ低域通過フィルタ・高域通過フィルタとするとき ,

$$h_1(n) = -(-1)^n \overline{h_0(N-n)} \quad (2.30)$$

が成り立つ .

(b) 2重シフト直交性

低域通過フィルタ  $h_0(n)$  に対して

$$\sum_n h_0(n) \overline{h_0(n-2k)} = \delta(k) \quad (2.31)$$

が成り立つ .

### 2.2.4 線形位相フィルタバンク

定義 2. デジタルフィルタ  $h(n)$  が線形位相性を満たす , または線形位相であるとは ,  $h(n)$  の周波数特性を  $H(\omega)$  とするとき ,

$$H(\omega) = e^{j\theta(\omega)} |H(\omega)|$$

の位相項  $\theta(\omega)$  が

$$\theta(\omega) = a\omega$$

と  $\omega$  に関する一次関数で表されることをいう .

またフィルタバンクのすべてのサブバンドフィルタが線形位相であるとき , フィルタバンクは線形位相である , もしくは線形位相フィルタバンク (Linear Phase Filter Bank : LPFB) と呼ぶ .

#### 特徴

一般的に非線形フィルタによって信号をフィルタリングした場合 , フィルタの伝達関数の位相項が非線形であるために , 入力信号の位相は各周波数  $\omega$  で不規則に変化してしまうので , 出力信号の波形は歪んでしまう . 通信などでは伝送する信号の位相が歪められてしまうことは , 正確な情報伝送に関して誤りが生じるなど大きな問題となるので , 線形位相をもつフィルタはそのような位相を歪められないことが望ましい状況において有効である .

また画像符号化において画像端で畳み込み演算を行うときに対称拡張法（またはエルミート対称拡張法）(2.3 節参照)の使用が可能で、周期拡張法よりも高い圧縮効率を示すことが知られている。よって、デジタルフィルタが線形位相性を有することは非常に有用である

### 諸命題

#### 1. フィルタ係数の対称性

フィルタ長  $N$  のデジタルフィルタ  $h(n)$  が線形位相であるとする。このとき  $h(n)$  の係数が実数ならば、偶対称もしくは奇対称性、

$$h(n) = h(N - 1 - n) \quad \text{or} \quad h(n) = -h(N - 1 - n) \quad (2.32)$$

が成立しており、複素数ならばエルミート偶対称、すなわち

$$h(n) = \overline{h(N - 1 - n)} \quad \text{or} \quad h(n) = -\overline{h(N - 1 - n)} \quad (2.33)$$

が成立する。すべてのサブバンドフィルタが(エルミート)偶対称・奇対称であるとき、フィルタバンクは線形位相フィルタバンクとなる。

#### 2. $M$ 分割 (ただし $M$ は偶数とする) フィルタバンクの (エルミート) 偶対称・(エルミート) 奇対称サブバンドフィルタの本数

$M$  分割のフィルタバンクが線形位相であるとき、(エルミート) 偶対称サブバンドフィルタ・(エルミート) 奇対称サブバンドフィルタ共に  $\frac{M}{2}$  本である。

### 2.2.5 2 分割線形位相パラユニタリフィルタバンク

前述のように、パラユニタリ性と線形位相性はそれぞれ、フィルタバンクに対して有効な利点を与えるので、それらの条件を同時に課すことは有効なフィルタバンクの 1 つの設計法となる。しかし 2 分割フィルタバンクにおいて以下の事実が成立することが知られている [2]。

**定理 2.** 2 分割線形位相パラユニタリフィルタバンク (Linear Phase ParaUnitary Filter Bank : LPPUFB) は、その係数が実数・複素数のどちらの場合においても、ハールフィルタバンク

$$\mathbf{E}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

に限る。

この定理によって、パラユニタリ性及び線形位相性を、フィルタ長 2 より長い 2 分割フィルタバンクに同時に導入できないことになる。ハールフィルタバンクはパラユニタリ性と線形位相性を有しているが、フィルタ長が短いため、図 2.13 に示すように良好な振幅特性を持たず実用的ではない。

## 2.3 画像拡張法

長さ  $L$  の有限信号  $x(n)$  ( $n = 1, 2, \dots, L$ ) を入力信号として  $M$  タップのフィルタ  $h(n)$  ( $n = 1, 2, \dots, M$ ) との畳み込み  $y(n) = h(n) * x(n) = \sum h(k)x(n - k)$  を行うと、出力信号  $y(n)$  は長

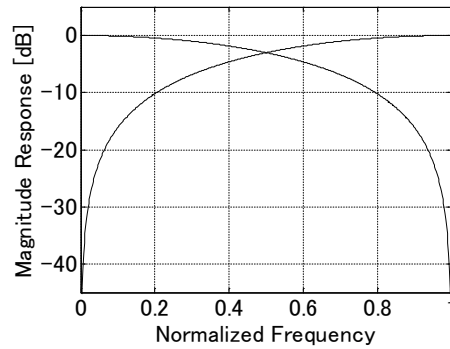


図 2.13 ハールフィルタバンクの周波数応答

さ  $L + M - 1$  の有限信号となり、 $M - 1$  点の点数増加が生じることになる。したがって、フィルタリングの過程で情報量が増加するため、画像圧縮符号化等には不適切となる。一方、この信号数の増加を防止するため、伸びた信号を切り取ることも考えられる。しかし、信号を切り取ることで、情報損失が生じることになり、信号の境界に歪みが発生するため、不適切である。そこで、信号の増加問題を効果的に回避する手法として、フィルタリングを行う前に入力信号に施す、周期拡張法や対称拡張法などの信号拡張法が有効である。

### 2.3.1 周期拡張法

周期拡張法は、有限長信号  $x(n)$  を図 2.14 のように周期的に拡張させることを意味する。

周期性（周期  $L$ ）を持たせた入力信号  $\tilde{x}(n)$  とフィルタ  $h(n)$  との畳み込みによる出力信号は、周期  $N$  の周期信号として表されるとき、点数増加を回避できる。しかし、 $x(0)$  ( $x(N - 1)$ ) の前（後）に  $x(N - 1)$  ( $x(0)$ ) が続くため、有限長信号  $x(0)$  と  $x(N - 1)$  の値に大きな差が存在する場合、拡張部に不連続性が生じる。これは高周波成分に相当し、画像圧縮符号化においては復元画像の境界にしばしば歪みが生じる。

### 2.3.2 対称拡張法

周期拡張法による境界問題を解決するものとして、対称拡張法と呼ばれる手法がある（図 2.15）。この手法は信号拡張部に連続性を持たせるために、信号端を対称に拡張するものである。対称拡張法を用いるためにはフィルタのインパルス応答が対称になる必要があり、そのためフィルタに線形位相性の制約を課す必要がある。しかし、周期拡張と異なり信号端を滑らかに拡張できるので、画像圧縮符号化等に適した拡張法と言える。

### 2.3.3 エルミート対称拡張法

対称拡張法のもう 1 つの種類として、エルミート対称拡張法がある（図 2.16）。実係数のフィルタバンクで線形位相を満たしていればフィルタ係数は対称となるので対称拡張法が使えるが、複素係数のフィルタバンクの場合はフィルタ係数がエルミート対称性を満たしている。通常の対称拡張では出力信号が対称にならない。この問題を解決するには  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_N)$  という信号列

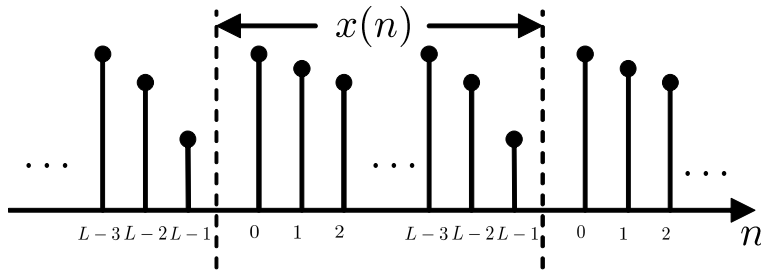


図 2.14 周期拡張法

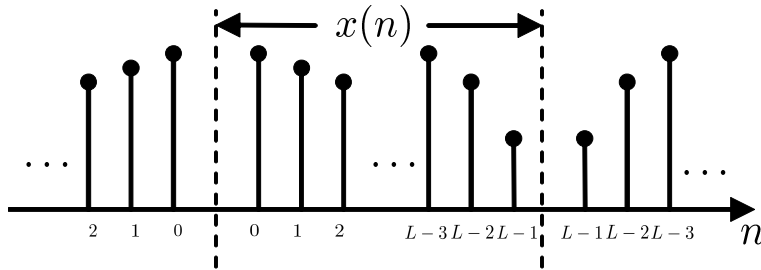


図 2.15 対称拡張法

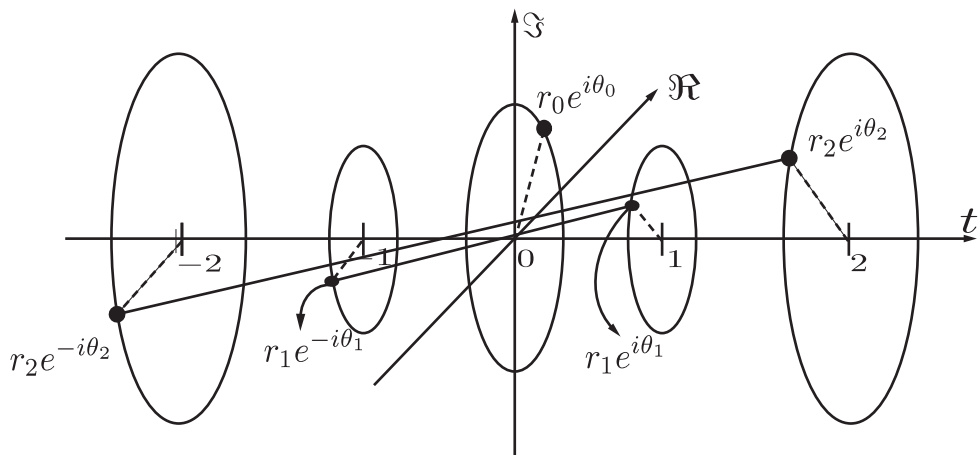


図 2.16 エルミート対称拡張法

に対して,

$$(\dots, \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_0, x_0, x_1, \dots, x_N, \bar{x}_N, \bar{x}_{N-1}, \bar{x}_{N-2})$$

と拡張すればよいことになる。このような拡張法をエルミート対称拡張法と呼ぶ。実信号に対してはエルミート対称拡張された信号列はまた実信号なので対称拡張法に等価である。

## 2.4 ウェーブレット変換

前節まではマルチレートシステムの観点からフィルタバンクについて示した。本節では数学的な基底関数の側面からウェーブレット変換を説明し、フィルタバンクと等価な変換であることを示す。

### 2.4.1 ウェーブレット変換基礎

ウェーブレット変換は信号処理の観点では、 $M$  分割フィルタバンクの 1 つの特殊な形であるが、本来はフィルタバンクとは独立に研究された。ウェーブレット変換は初め、連続ウェーブレット変換として議論されていたが、その後離散ウェーブレット変換も研究され、1988 年 Mallat の高速ウェーブレット変換のアルゴリズム [4] によって 2 分割フィルタバンクに等価な変換であることが示されてからは、以降様々な信号処理の分野に応用されている。

ウェーブレット変換はフーリエ変換の改良と見なすことができる。フーリエ変換の定義は

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx$$

であった。この式を考察すると、信号に対して全体的に各  $e^{-ix\xi}$  がどのくらい含まれているかという情報が  $\hat{f}(\xi)$  から分かるが、信号の局所的な周波数スペクトルの情報は分からない。一方ウェーブレット変換の定義は

$$W_{\psi}f(b, a) := |a|^{-n/2} \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (2.35)$$

である。ここで  $\psi$  はアドミッシブル条件

$$C_{\psi} := \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi|} < +\infty$$

を満たすウェーブレットと呼ばれる関数である。ただし、 $|\hat{\psi}(\xi)|$  は解析学のリーマン・ルベグの定理より、原点の近傍で連続であるので、関数  $\psi$  が許容条件を満たし、 $C_{\psi} < +\infty$  となるためには、 $\hat{\psi}(0) = 0$ 、すなわち

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$$

とならなければならない。ウェーブレットという言葉が意味するように、上式より  $\psi$  が局所的に振動して存在している関数であると解釈できる。式 (2.35) を考察すると局所的に振動している  $\psi$  を周波数に相当するパラメータを  $a$  とし  $x = b$  まで平行移動させて  $f(x)$  にかけている。これはすなわち、 $f(x)$  の  $x = b$  まわりに含まれる周波数  $a$  の波の量を検出していることに相当する。よってウェーブレット変換ならば、厳密にはフーリエ変換におけるスペクトルではないが、信号の局所的なスペクトル類似の情報が得られるのである。

信号処理で離散信号を扱うには、多重解像度解析の概念に基づく、離散ウェーブレット変換を用いる。数学的に多重解像度解析は以下のように定式化される。

定義 3. (多重解像度解析)

$L^2(\mathbb{R})$  の閉部分空間の列  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  で 1. ~ 5. を満たす時  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  を多重解像度解析と呼ぶ。

1.  $V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$
2.  $f \in V_j \iff f(2 \cdot) \in V_{j+1}$
3. ある  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  で  $V_0$  の正規直交基底となるような関数が存在。
- 4.

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad (2.36)$$

5.

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad (2.37)$$

この  $\phi$  はスケーリング関数と呼ばれ、ツースケール関係

$$\phi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k)$$

を満たす。そして多重解像度解析からウェーブレット  $\psi$  は

$$\hat{\psi}(\xi) := e^{i\frac{\xi}{2}} \nu(\xi) \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (2.38)$$

$$\psi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k \phi(2x - k) \quad (2.39)$$

と構成できることが知られている。  $p_k$  及び  $q_k$  はスケーリング係数・ウェーブレット係数と呼ばれる。  $V_j$  と  $W_j$  各レベルにおいて  $V_j$  は閉部分空間だから、直交分解によって  $V_j$  の直交補空間  $W_j$  で

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

と書き表される。ここで  $\{\phi_{j,k} = 2^j \phi(2^j x - k)\}$  と  $\{\psi_{j,k} = 2^j \psi(2^j x - k)\}$  はそれぞれ  $V_j$  と  $W_j$  の正規直交基底となる。したがって  $V_{j+1}$  に属する関数  $f$  は 1 レベル解像度の荒い  $g \in V_j$  と細部を表す関数  $h \in W_j$  で

$$f = g + h = \sum_{j,k} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} + \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

と一意的に表される。このように与えられた関数を、上式のように荒い近似を表す関数と細部を表す関数に分解し、  $\langle f, \phi_{j,k} \rangle$  と  $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$  を求めることを離散ウェーブレット変換と呼び、  $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$  自体を離散ウェーブレット変換係数などと呼ぶ。ただし、  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は内積（式 (1.2)）である。しかしすべてのレベルにおいて  $\langle f, \phi_{j,k} \rangle$  と  $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$  をすべての  $k$  について計算するには、膨大な計算コストを必要とする。この問題に対して、離散ウェーブレット変換を高速化するための分解・再構成アルゴリズム提案されている。

## 2.4.2 高速離散ウェーブレット変換

ここでは離散ウェーブレット変換の分解・再構成アルゴリズムを与える理論を述べる。

1次元の場合

まず簡単な 1 次元から議論を始める。

$\phi$  をスケーリング関数、  $\psi$  をウェーブレット関数とする。多重解像度解析の考え方をを用いると  $f$  はレベル  $j$  において

$$f(x) = \sum_{\mathbf{z}} s_{jk} \phi_{jk}(x) + \sum_{\mathbf{z}} w_{jk} \psi_{jk}(x)$$

と展開できる。ただし

$$s_k := \langle f, \phi_{jk} \rangle, \quad w_k := \langle f, \psi_{jk} \rangle. \quad (2.40)$$



である．ここで  $\phi$  には，ある  $\{p_k\} \subset \ell^2$  が存在して，ツースケール関係

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k) \quad (2.41)$$

が成り立っている．これより

$$\begin{aligned} \phi_{jk}(x) &= 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \\ &= 2^{j/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} p_\ell \phi(2^{j+1} x - 2k - \ell) \\ &= 2^{-1/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} p_{\ell-2k} 2^{j+1/2} \phi(2^{j+1} x - \ell) \\ &= 2^{-1/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} p_{\ell-2k} \phi_{j+1,\ell}(x) \end{aligned}$$

と変形できる．これを式 (2.41) に代入すると，

$$\begin{aligned} s_{jk} &= \langle f, \phi_{jk} \rangle \\ &= \int f(x) \overline{\phi_{jk}(x)} dx \\ &= \int f(x) 2^{-1/2} \overline{\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} p_{\ell-2k} \phi_{j+1,\ell}(x)} dx \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} 2^{-1/2} \overline{p_{\ell-2k}} \int f(x) \overline{\phi_{j+1,\ell}(x)} dx \\ &= 2^{-1/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{p_{\ell-2k}} s_{j+1,\ell} \end{aligned}$$

となるので，結局

$$s_{jk} = 2^{-1/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{p_{\ell-2k}} s_{j+1,\ell} \quad (2.42)$$

の式を得る．同様にして  $w_{jk}$  はある  $\{q_k\} \subset \ell^2$  が存在して，

$$w_{jk} = 2^{-1/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{q_{\ell-2k}} s_{j+1,\ell} \quad (2.43)$$

とかける．上の 2 つの式を分解アルゴリズムと呼ぶ．

一方， $s_{j+1,k} = \langle f, \phi_{j+1,k} \rangle$  の  $f$  に  $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{jk} \phi_{jk} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_{jk} \psi_{jk}$  を代入すると，

$$\begin{aligned} s_{j+1,k} &= \langle f, \phi_{j+1,k} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} s_{j\ell} \phi_{j\ell} + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} w_{j\ell} \psi_{j\ell}, \phi_{j+1,k} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} s_{j\ell} \phi_{j\ell}, \phi_{j+1,k} \right\rangle + \left\langle \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} w_{j\ell} \psi_{j\ell}, \phi_{j+1,k} \right\rangle \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} s_{j\ell} \langle \phi_{j\ell}, \phi_{j+1,k} \rangle + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} w_{j\ell} \langle \psi_{j\ell}, \phi_{j+1,k} \rangle \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} s_{j\ell} \left\langle 2^{-1/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} p_{m-2\ell} \phi_{j+1,m}, \phi_{j+1,k} \right\rangle \\ &\quad + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} w_{j\ell} \left\langle 2^{-1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_{n-2\ell} \phi_{j+1,n}, \phi_{j+1,k} \right\rangle \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} 2^{-1/2} p_{k-2\ell} s_{j\ell} + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} 2^{-1/2} q_{k-2\ell} w_{j\ell} \end{aligned}$$

となり，結局

$$s_{j+1,k} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (2^{-1/2} p_{k-2\ell} s_{j\ell} + 2^{-1/2} q_{k-2\ell} w_{j\ell})$$

とかける．上式を再構成アルゴリズムと呼ぶ．

一般にスケーリング関数  $\phi(x)$ ，ウェーブレット関数  $\psi(x)$  の具体的な値を求めることは容易でないが，分解・再構成アルゴリズムによると，スケーリング関数とウェーブレット関数が満たすツースケール関係におけるスケーリング係数  $\{p_k\}$  と  $\{q_k\}$  が求まれば，求めたい係数  $s_{jk}, w_{jk}$  が逐次的に得られるのである．

ただし，初期値  $s_{0k}$  に対してやはり，

$$s_{0k} := \langle f, \phi_{0k} \rangle$$

を求める必要があり，具体的なスケーリング関数が求まらないときは  $s_{0k}$  が計算できないという問題がでてくる．しかしこの場合  $f$  をサンプリングして得られる  $\{f(k)\}$  を  $\{s_{0k}\}$  として用いてよいことが示されている [4]．

2次元の場合

次に2次元の離散ウェーブレット変換について議論する．

2次元信号  $f(m, n)$  が与えられたとする．これに対して1次元の多重解像度解析の考え方を拡張する．

まず  $n = n_0$  と  $n$  を任意に固定する．そうすれば行に関する1次元の離散データとみなせるので，これに対して分解アルゴリズムを適用すると，

$$\begin{aligned} L_{m,n_0}^{(j)} &= \sum_k \overline{p_{k-2m}} s_{k,n_0}^{(j+1)} \\ H_{m,n_0}^{(j)} &= \sum_k \overline{q_{k-2m}} s_{k,n_0}^{(j+1)} \end{aligned}$$

を得る．次に  $m = m_0$  と  $m$  を任意に固定すると，更に列に関する1次元の離散データとみなせるので，これに対して更に分解アルゴリズムを適用すると，

$$\begin{aligned} LL_{m_0,n}^{(j)} &= \sum_{\ell} \overline{p_{\ell-2n}} L_{m_0,\ell}^{(j)} \\ HL_{m_0,n}^{(j)} &= \sum_{\ell} \overline{q_{\ell-2n}} L_{m_0,\ell}^{(j)} \\ LH_{m_0,n}^{(j)} &= \sum_{\ell} \overline{p_{\ell-2n}} H_{m_0,\ell}^{(j)} \\ HH_{m_0,n}^{(j)} &= \sum_{\ell} \overline{q_{\ell-2n}} H_{m_0,\ell}^{(j)} \end{aligned}$$

したがって  $(m, n)$  における展開係数  $LL, HL, LH, HH$  はまとめると

$$\begin{aligned} LL_{m,n}^{(j)} &= \sum_{\ell} \sum_k \overline{p_{\ell-2n}} \overline{p_{k-2m}} s_{k,n}^{(j+1)} \\ HL_{m,n}^{(j)} &= \sum_{\ell} \sum_k \overline{q_{\ell-2n}} \overline{p_{k-2m}} s_{k,n}^{(j+1)} \\ LH_{m,n}^{(j)} &= \sum_{\ell} \sum_k \overline{p_{\ell-2n}} \overline{q_{k-2m}} s_{k,n}^{(j+1)} \\ HH_{m,n}^{(j)} &= \sum_{\ell} \sum_k \overline{q_{\ell-2n}} \overline{q_{k-2m}} s_{k,n}^{(j+1)} \end{aligned}$$

となる．再構成アルゴリズムは

$$\begin{aligned} L_{m_0,n}^{(j)} &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (2^{-1/2} p_{m_0-2\ell} LL_{\ell,n}^{(j)} + 2^{-1/2} q_{m_0-2\ell} HL_{\ell,n}^{(j)}) \\ H_{m_0,n}^{(j)} &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (2^{-1/2} p_{m_0-2\ell} LH_{\ell,n}^{(j)} + 2^{-1/2} q_{m_0-2\ell} HH_{\ell,n}^{(j)}) \\ s_{m,n_0}^{(j+1)} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{-1/2} p_{n_0-2k} L_{k,n_0}^{(j)} + 2^{-1/2} q_{n_0-2k} H_{k,n_0}^{(j)}) \end{aligned}$$

であるから，結局

$$\begin{aligned} s_{m,n}^{(j+1)} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{-1/2} p_{n-2k} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (2^{-1/2} p_{m-2\ell} LL_{\ell,n}^{(j)} + 2^{-1/2} q_{m-2\ell} HL_{\ell,n}^{(j)}) \\ &\quad + 2^{-1/2} q_{n-2k} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (2^{-1/2} p_{m_0-2\ell} LH_{\ell,n}^{(j)} + 2^{-1/2} q_{m_0-2\ell} HH_{\ell,n}^{(j)})) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (2^{-1/2} p_{n-2k} 2^{-1/2} p_{m-2\ell} LL_{\ell,n}^{(j)} + 2^{-1/2} p_{n-2k} 2^{-1/2} q_{m-2\ell} HL_{\ell,n}^{(j)}) \end{aligned}$$

を得る．

以上に述べた 2 次元離散ウェーブレット変換は 2 次元信号に対しての鉛直・水平方向の 1 次元ウェーブレット変換に帰着されることから“可分型”2 次元離散ウェーブレット変換と呼ばれ，本論文でしばしばこの表現を用いる．

### 2.4.3 離散ウェーブレット変換とフィルタバンクの等価性

信号処理の観点から式 (2.42) 及び式 (2.43) を考察すると，これは離散信号  $s_{j,\ell}$  と  $p_\ell$  または  $s_{j,\ell}$  と  $q_\ell$  の畳み込み演算及び間引き率 2 の処理であると解釈できる．またスケーリング係数  $p_\ell$  とウェーブレット係数  $q_\ell$  はそれぞれ粗い近似を表すスケーリング関数  $\phi$  と細分を表すウェーブレット関数  $\psi$  に付随する係数であることから， $p_\ell$  は低域通過フィルタ， $q_\ell$  は高域通過フィルタとみなすことができ，結果的に離散ウェーブレット変換はフィルタバンクに等価であることが分かる．

$p_\ell$  と  $q_\ell$  を改めて低域通過フィルタ  $h_0(n)$ ，高域通過フィルタ  $h_1(n)$  とおくと，1 次元高速離散ウェーブレット変換のアルゴリズムは図 2.17 のように表すことができる（ただし，図では 2 レベルの変換を表している）．同じく 1 レベルの可分型 2 次元高速離散ウェーブレット変換の場合には図 2.18 のように表される．2 レベル以降の場合には，低域通過フィルタの出力に対して 1 レベル目の処理を同様に行うことによって逐次的に実行される．

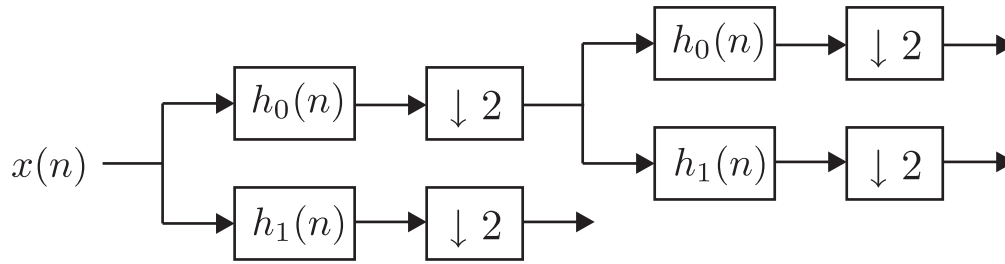


図 2.17 フィルタバンクによる 1 次元離散ウェーブレット変換 (2 レベル)

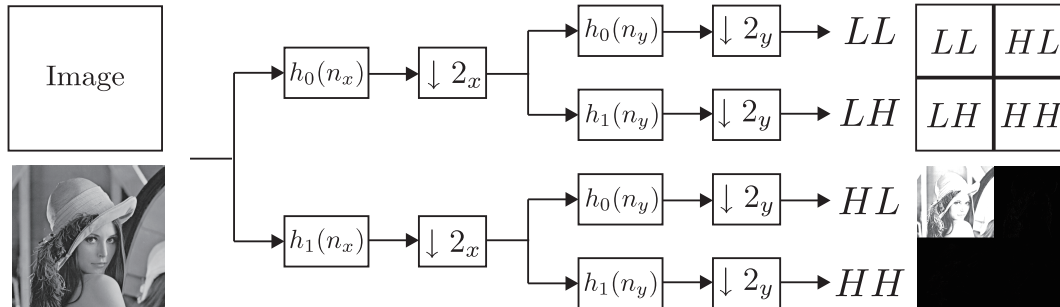


図 2.18 フィルタバンクによる可分型 2 次元離散ウェーブレット変換 (1 レベル)

前述のように，離散ウェーブレット変換とフィルタバンクは互いに等価であることが示された．ここで，周波数領域においてスケーリング関数  $\phi$ ，ウェーブレット関数  $\psi$  と低域通過フィルタ  $h_0(n)$ ，高域通過フィルタ  $h_1(n)$  は以下の無限積公式によって表すことができる．

定理 3. 無限積公式

$$\hat{\phi}(\omega) = H_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{i=2}^{\infty} H_0\left(\frac{\omega}{2^i}\right) \quad (2.44)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = H_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{i=2}^{\infty} H_0\left(\frac{\omega}{2^i}\right) \quad (2.45)$$

## 2.5 フィルタバンクの設計

前節までは，主にフィルタバンクの理論的な側面について焦点を当てて説明した．本節ではフィルタバンクの設計について述べる．ここで，フィルタバンクを設計するとは，1) フィルタバンクに構造または性質を導入し，2) その条件の下でフィルタバンクを構成するフィルタの係数を決定することを意味する．実際の画像圧縮符号化や画像ノイズ除去などで，フィルタバンクが効果的に機能するためには，有効な構造・性質を満たし，かつフィルタバンクの性能の指標に対して，優れた結果を示すようなフィルタ係数を決定する必要がある．以下ではフィルタ係数を決定するまでの一般的な手順について述べる．

### 2.5.1 構造・性質の導入

フィルタバンクの設計の最初の手順として、フィルタバンクに対して、必要不可欠な、または満たされることが望ましい構造や性質を導入する。ここでいう“構造や性質”とは、例えば双直交性（完全再構成条件）、パラユニタリ性、線形位相性などを意味する（2.2.1 項, 2.2.2 項）。これらの構造をフィルタバンクに導入するための制約条件は、

1. 双直交性： $\mathbf{E}(z)\mathbf{R}(z) = z^{-N}\mathbf{I}$
2. パラユニタリ性： $\mathbf{E}(z)\tilde{\mathbf{E}}(z) = \mathbf{I}$
3. 線形位相性： $h(n) = h(N - n)$

である。双直交性は、信号の完全再構成のために必ずフィルタバンクに課される条件であるが、パラユニタリ性や線形位相性は、適用する処理の対象によって選択する。

### 2.5.2 フィルタバンクの設計方式

次の手順として、前項に挙げた制約条件を満たしながら、フィルタ係数を最適化する。ただしこの段階では、前項に挙げた制約条件を考慮しながら、フィルタ係数を最適化することは難しい。本節では、より簡易にフィルタバンクを設計するためにしばしば用いられる、 $M$  分割フィルタバンクの代表的な設計方式を述べる。

#### ハーフバンドフィルタの因数分解（2 分割フィルタバンク）

本項では、2 分割完全再構成フィルタバンクを構成するフィルタ  $H_0(z), H_1(z), F_0(z), F_1(z)$  の係数の決定法として、ハーフバンドフィルタの因数分解に基づく手法について述べる。決定すべき  $H_0(z), H_1(z), F_0(z), F_1(z)$  の条件を詳しく調べる。今  $F_0(z) = H_1(-z), F_1(z) = -H_0(z)$  とすると  $H_0(z), H_1(z), F_0(z), F_1(z)$  は式 (2.11) を満たす。これはエイリアス除去条件と呼ばれる。

条件 1.

$$F_0(z) = H_1(-z), F_1(z) = -H_0(z) \quad (2.46)$$

ここで  $P_0(z), P_1(z)$  を

$$P_0(z) = F_0(z)H_0(z), P_1(z) = F_1(z)H_1(z)$$

と定義する。条件 1 より  $P_0(z)$  と  $P_1(z)$  は

$$P_1(z) = -H_0(-z)H_1(z) = -H_0(-z)F_0(-z) = -P_0(-z) \quad (2.47)$$

より  $P_1(z) = -P_0(-z)$  の関係を満たす。式 (2.10) は条件 1 と  $P_0(z), P_1(z)$  を用いて

$$F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z) = P_0(z) - P_0(-z) = 2z^{-\ell} \quad (2.48)$$

と書き直せる。更に上式で両辺に  $z^\ell$  をかけて  $P(z) = z^\ell P_0(z)$  とおくと

$$P(z) + P(-z) = 2 \quad (2.49)$$

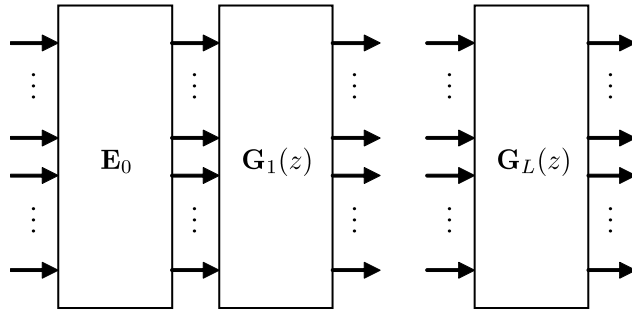


図 2.19 フィルタバンクのラティス構造による表現

と簡潔に表現できる．式 (2.49) を満たす  $P(z)$  をハーフバンドフィルタと呼ぶ．式 (2.49) は定数項を除いて  $P(z)$  のすべての偶数べきの係数がゼロであることを示している．以上を踏まえ，完全再構成を満たす 2 分割フィルタバンク  $H_0(z), H_1(z), F_0(z), F_1(z)$  の設計手順を整理する．

1. ハーフバンドフィルタ  $P(z)$  の設計．
2.  $P(z)$  を  $P(z) = z^\ell F_0(z)H_0(z)$  と因数分解する．
3. 条件 1 より  $F_1(z), H_1(z)$  を設計する．

また，阻止域減衰量や直流漏れ (2.5.3 項参照) に関して高い性能を持つように，ハーフバンドフィルタ  $P(z)$  に対して，レギュラリティと呼ばれる， $(1 + z^{-1})^K$  を含めることが有効となる [2] ．

#### ラティス構造 ( $M$ 分割フィルタバンク)

フィルタバンクの分割数  $M$ ，フィルタ長  $MK$  ( $K$  は自然数) を満たすフィルタバンクの分割側ポリフェーズ行列は一般的に，

$$\mathbf{E}(z) = \left( \prod_{k=L}^1 \mathbf{G}_k(z) \right) \mathbf{E}_0 \quad (2.50)$$

と表すことができる． $\mathbf{G}_k(z)$ ， $\mathbf{E}_0$  をそれぞれビルディングブロック，ファーストブロックと呼ぶ．このような構造をラティス構造と呼ぶ．また，これを図 2.19 に示す．ラティス構造を用いて分割ポリフェーズ行列  $\mathbf{E}(z)$  を設計することによって以下の利点が挙げられる．

- すべてのビルディングブロックが双直交性を持てば， $\mathbf{E}(z)$  は双直交性を保持できる．
- すべてのビルディングブロックがパラユニタリ性を持てば， $\mathbf{E}(z)$  はパラユニタリ性を保持できる．
- すべてのビルディングブロックが線形位相性を保つ性質を持てば， $\mathbf{E}(z)$  は線形位相性を保持できる．

これらの利点から，一般に  $M$  分割フィルタバンクは，ラティス構造に基づく方式によって設計されることが多い [9, 28–30] ．

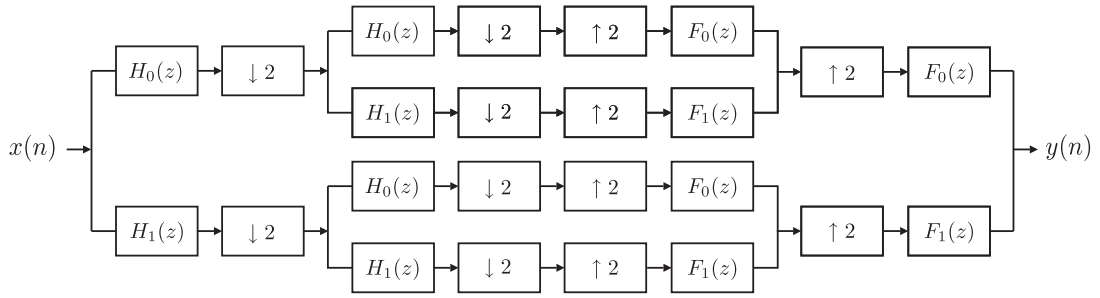


図 2.20 ツリー構造による 4 分割フィルタバンクの構造 .

### 2 分割フィルタバンクのツリー構造 ( $M$ 分割フィルタバンク)

設計すべきフィルタバンクの帯域分割数が 2 のべき ( $M = 2^r$ ) のときには, 2 分割フィルタバンクをツリー構造状に接続することで, 実現することができる. 例として図 2.20 に, ツリー構造に基づく 4 分割フィルタバンクの構造を示す. 同様にして,  $2^r$  分割のフィルタバンクは, 2 分割フィルタバンクの低域通過フィルタ, 高域通過フィルタを逐次接続することで実現できる. 結果的に, ツリー構造による  $2^r$  分割フィルタバンクの設計は, 基本となる 2 分割フィルタバンクの設計に帰着される. そのため, 前項のラティス構造による  $M$  分割フィルタバンクの直接設計法に比べ, 阻止域減衰量・符号化利得などの性能が制限されるが, 非常に簡易に多分割のフィルタバンクを実現できる利点がある. 更に, 2 次元フィルタバンクなどでは, Directional filter bank [31–33] など, 一般にラティス構造で簡単には表現できないフィルタバンクが多く存在するため, そのようなフィルタバンクの設計手法として有効である.  $M$  分割パラユニタリフィルタバンク, もしくは  $M$  分割線形位相フィルタバンクの設計のためには, 基本となる 2 分割フィルタバンクにパラユニタリ性, もしくは線形位相性を課せばよい.

### プロトタイプフィルタの変調 ( $M$ 分割フィルタバンク)

$M$  分割フィルタバンクの設計方式のもう一つの代表的な例として, プロトタイプフィルタ (図 2.21) の変調を用いた方法がある [5]. 図 2.22 が示すように,  $M$  分割フィルタバンクのサブバンドフィルタ  $H_0(z), \dots, H_{M-1}(z)$  は, プロトタイプフィルタの周波数応答を, 周波数領域上で平行移動させることによって実現できる. 2 分割フィルタバンクのツリー構造による設計方式を用いた場合, 実質設計しなければならないフィルタは, 低域通過フィルタ, 高域通過フィルタの 2 つであるが, プロトタイプフィルタの変調による設計方式では, 1 つの低域通過フィルタを設計するだけで,  $M$  分割フィルタバンクの全てのサブバンドフィルタが設計できるので, 最も簡易な設計手法であるといえる.

### 2.5.3 フィルタバンクの性能の指標と最適化

最後に, 前項で挙げた設計方式を利用しながら, フィルタバンクの性能が最大となるように, フィルタの係数を最適化する. 本項ではフィルタバンクの性能のための指標と, 最適化手法として代表的である, 非線形最適化について説明する.

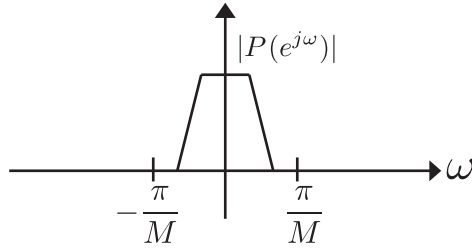


図 2.21 プロトタイプフィルタの周波数応答

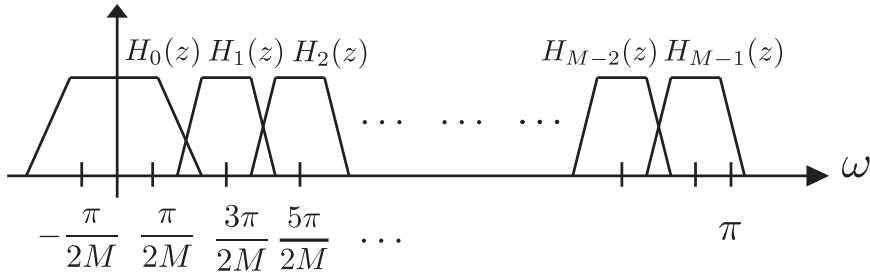


図 2.22 プロトタイプフィルタの変調による  $M$  分割フィルタバンクの設計 .  
( $H_0(z), \dots, H_{M-1}(z)$  は  $M$  分割フィルタバンクのサブバンドフィルタ)

### フィルタバンクの性能の指標

- 阻止域減衰量

阻止域減衰量は、信号の所望の周波数帯域成分を選択して抽出する性能を評価する、最も基本的な指標である。阻止域減衰量  $C_{STOP}$  は、具体的に以下の式で表すことができる。

$$C_{STOP} = \sum_{k=0}^{M-1} \int_{\omega \in \Omega_s} |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (2.51)$$

阻止域減衰量が十分小さいとき、信号の所望の周波数帯域成分のみを精度良く抽出することが可能となり、高性能なフィルタバンクとなる。

- 符号化利得 (Coding Gain)

符号化利得は、画像圧縮符号化に用いるフィルタバンクを設計する際にしばしば使用される指標であり、阻止域減衰量と同じくフィルタバンクの変換性能を評価する尺度である。具体的には、PCM 符号化と比べた変換符号化の SN 比によるエネルギー圧縮比を表しており、フィルタバンクが高い符号化利得を持つ変換ならば、低ビットレートでも高品質な復元画像が得られる。符号化利得は次式で示される。

$$C_{CG} = \frac{\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sigma_{y_k}^2}{\prod_{k=0}^{M-1} \sigma_{y_k}^{\frac{1}{M}}} \quad (2.52)$$

$C_{CG}$  は信号の統計的性質によっても異なるので、ある統計モデルを考える。自然画像に近い統計モデルとして、1 次元の 1 次自己回帰 (AR) 過程  $x(n)$  に基づく可分型モデルがよく



用いられ、期待値 0 の白色雑音  $w(n)$  と相関係数  $\rho$  により、次式のように定義される。

$$x(n) = w(n) + \rho x(n-1) \quad (2.53)$$

$\rho$  が 1 に近い程隣り合う信号同士で似た値をとり、一般的な自然画像では  $\rho = 0.95$  と仮定できることが知られている [2]。  $C_{CG}$  を算出するための  $\sigma_{yk}^2$  は  $N$  次元の 1 次 AR 過程の共分散行列を用いて求めることができる。  $\mathbf{R}_{xx}$  を

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{N-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{N-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{N-1} & \rho^{N-2} & \rho^{N-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

とし、更にある  $N$  次元ベクトルに対し、  $M \times N$  の変換行列  $\mathbf{P}$  による変換を施すと、その変換係数ベクトルの共分散行列、及び  $\sigma_{yk}^2$  は次式で表される。

$$\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P}^T, \quad \sigma_{yk}^2 = [\mathbf{R}_{yy}]_{k,k} \quad (2.55)$$

- 直流漏れ

DC (直流) 成分が、分割側の低域のサブバンド以外にどれだけ漏れているかを示す評価量であり、特に画像圧縮符号化で重要である。高域のサブバンド信号を低ビットレートで符号化する際に、そのサブバンド信号に DC 成分が含まれていると、再構成画像にチェス盤状の歪みが生じる。この直流漏れ  $C_{DC}$  は、以下の式で表すことができる。

$$C_{DC} = \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} h_k(i) \quad (2.56)$$

$C_{DC}$  は十分小さいことが望ましい。

### 非線形最適化

一般に阻止域減衰量、符号化利得、直流漏れなどの指標に対して最適となるような、フィルタバンクの設計パラメータを決定することを最適化と呼ぶ。しかし阻止域減衰量、符号化利得、直流漏れなどの指標を定義する関数は、一般に非線形であるため、解析的に最適解を求めることができない。このような場合の最適化は一般に“非線形最適化”と呼ばれ、数値計算的に最適解を導くことになる。より具体的には、まず阻止域減衰量、符号化利得、直流漏れを表す  $C_{STOP}$ 、 $C_{CG}$ 、 $C_{DC}$  を

$$C = \alpha C_{STOP} + \beta C_{CG} + \gamma C_{DC} \quad (2.57)$$

のように重み係数  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  を含めて線形結合の形に表し、この  $C$  に対して初期パラメータを与える。その際、初期パラメータにおける勾配を算出し、その勾配を基に解を更新する。そして最終的に収束した解を最適解とする。本論文で用いられる非線形最適化では、Matlab<sup>®</sup>、optimization toolbox の関数 fminunc を使用する。通常  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  は、重視する性能に応じて経験的に調整する。



(a)

(b)

図 2.23 (a) *Lena* (b) *Lena* の離散ウェーブレット変換出力画像 (3 レベル)

## 2.6 画像圧縮符号化

### 2.6.1 画像圧縮符号化の原理

本項では一般的な画像圧縮符号化の原理について説明する．まずデジタル画像とは  $0 \sim 255$  までの整数値 (画素値) をとる 2 次元離散信号である．したがって各画素は  $8[\text{bit}]$  の情報量を持っている．一般的に図 2.23(a) に示すような自然画像についてよく知られている性質として，画像の各局所領域における，隣接画素の画素値の相関が高いということが挙げられる．つまり画像は低周波数にエネルギーが集中しているということになる．図 2.23(b) に示した画像は 2.23(a) に対して 3 レベルの可分型 2 次元離散ウェーブレット変換を行った結果である．3 レベル目の  $LL$  成分に相当する出力係数 (図 2.23(b) の左上の矩形領域) に高いエネルギーが集中し，高周波成分の出力のエネルギーが低いことが分かる．一方で，人間の視覚特性について知られている性質として，高周波成分の画素値の変化が低周波成分の画素値の変化に比べて認識しにくいということが知られている．これはつまり，エネルギーが低い高周波成分の係数を 0 に置き換えて復元したとしても，ある程度は画質を保つことができる，ということの意味する．これら 2 つの性質を利用して画像圧縮符号化は行われている．

ここで標準画像圧縮符号化 JPEG2000 を例に画像圧縮符号化の全体的な処理の流れを説明する．図 2.24 のように，まず入力画像に可分型 2 次元離散ウェーブレット変換を施す．JPEG2000 では離散ウェーブレット変換に用いる低域通過フィルタ  $h_0(n)$ ，高域通過フィルタ  $h_1(n)$  として  $9/7$  タップフィルタを用いている．フィルタ係数を表 2.1 に示す．次に可分型 2 次元離散ウェーブレット変換で得られた，実数値の画像を量子化によって整数値に変換し，整数化された変換画像をビットプレーン符号化によってバイナリデータに変換する．ビットプレーン符号化としては，本論文全体を通して EZW-IP を用いており，次節でアルゴリズムの詳細を説明する．ビットプレーン符号

表 2.1 9/7 タップフィルタの係数

9/7 タップフィルタ		
	低域通過フィルタ $h_0(n)$	高域通過フィルタ $h_1(n)$
0	0.0267487574	0.0912717631
1	-0.0168641184	-0.0575435262
2	-0.0782232665	-0.5912717631
3	0.2668641184	1.1150870525
4	0.6029490182	-0.5912717631
5	0.2668641184	-0.0575435262
6	-0.0782232665	0.0912717631
7	-0.0168641184	
8	0.0267487574	

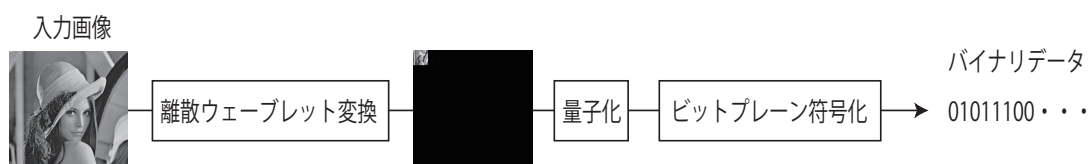


図 2.24 画像圧縮符号化 (JPEG2000) の全体図

化によって生成された符号列は、先頭から低周波成分を表す符号が並び、後ろになるにつれて高周波成分を表す符号が並ぶ構造となる。最後に、指定された符号量で符号列を打ち切ることによって画像圧縮が達成される。ここで、打ち切られた符号列のほとんどが高周波成分に関する符号であるので、人間の視覚の性質から、圧縮による画質の劣化はある程度までは認識できない。ここで図 2.25(a) に原画像 *Lena* を、図 2.25(b) に 9/7 タップフィルタを用いた分解レベル 6 の可分型 2 次元離散ウェーブレット変換、量子化、EZW-IP 符号化を用いて 8[bpp]([bit per pixel]) から 1[bpp] に圧縮した復元結果を示す。この図から分かるように、原画像を 1/8 のファイルサイズに圧縮しても、画質は維持されていることが分かる。

## 2.6.2 EZW-IP 符号化

### ビットプレーン符号化

JPEG2000 を始めとして現在の一般的な画像圧縮符号化は、指定された圧縮率（または符号量）に応じて、その都度符号化するのではなく、SNR スケーラビリティを満たす符号列を 1 つ生成し、所望の符号量で符号列を打ち切る方式をとっている。SNR スケーラビリティとは、打ち切って得られた符号列の長さが長いほど、復元画像の画質が単調に向上するという性質である。この SNR スケーラビリティを与える符号化法がビットプレーン符号化である。

ビットプレーンとは、すべてのウェーブレット変換係数を 2 進数で表したときの、 $2^N$  の位毎に切り出された 1 または 0 の値を持つ符号平面のことをいう（図 2.26 参照）。ビットプレーン符号化では最上位ビットプレーンから順に符号列に変換し、伝送する。そこで良好な符号化効率を実現す



(a) (b)  
図 2.25 (a) 原画像 *Lena* (b) *Lena* の復元画像 (1[bpp])

るためには、各ビットプレーンをどのように符号列に変換すれば良いかが問題となる。

ビットプレーン符号化としては 1993 年に J.M.Shapiro により Embedded Zerotree Wavelet (EZW) [34] が導入されて以来、EZW based on Intra-band Partitioning (EZW-IP) [35], Set Partitioning In Hierarchical Trees (SPIHT) [36], Set Partitioned Embedded block (SPECK) [37], independent Embedded Block Coding with Optimized Truncation of the embedded bit-streams (EBCOT) [38], などの有効な符号化方法が提案されている。

本論文では、その中で特に優れた符号化結果を示す EZW-IP 符号化を取り上げる。

#### 理論

EZW-IP 符号化法は、まず可分型 2 次元離散ウェーブレット変換により変換された係数をビットプレーンに変換する。その後、最上位ビットプレーンから順にクワッドツリー分割と呼ばれる手法を用いて符号列に変換する。クワッドツリー分割とは、図 2.27 に示すように、閾値  $2^N$  に対して変換変数のブロックに 1 が 1 つでもあれば 1 を出力して縦横を四つの領域に分割し、分割された各ブロックで 1 が含まれるか判定する。更に 1 が含まれていれば、分割を繰り返し、画素単位になった時点でその値と共に正負の符号を伝送する。1 が含まれていなければ、0 を符号化し、そのツリーはその段階で終了する。この部分でデータ圧縮を行い、より大きなブロックを 0 で符号化できれば圧縮効率は向上する。すなわち、変換係数の大きな値が密集して集まっていればいるほど EZW-IP の性能は向上するといえる。一般に画像は低周波に多くのエネルギーを含んでおり高周波の変換係数は小さい。したがって、高周波成分は、1 つのゼロだけで符号化できる可能性が大きいと言える。これは離散ウェーブレット変換による多重解像度表現があって初めて成り立つことであり、EZW-IP 符号化において画像の変換に離散ウェーブレット変換を用いる最大の理由がここにある。

64	48	13	2	2	3	0	1
21	35	22	16	0	2	8	6
12	15	34	15	1	7	0	1
10	8	11	14	0	3	7	3
8	9	1	11	8	2	0	6
2	4	2	0	0	3	8	0
4	6	0	9	5	0	2	0
6	0	3	3	4	1	0	8

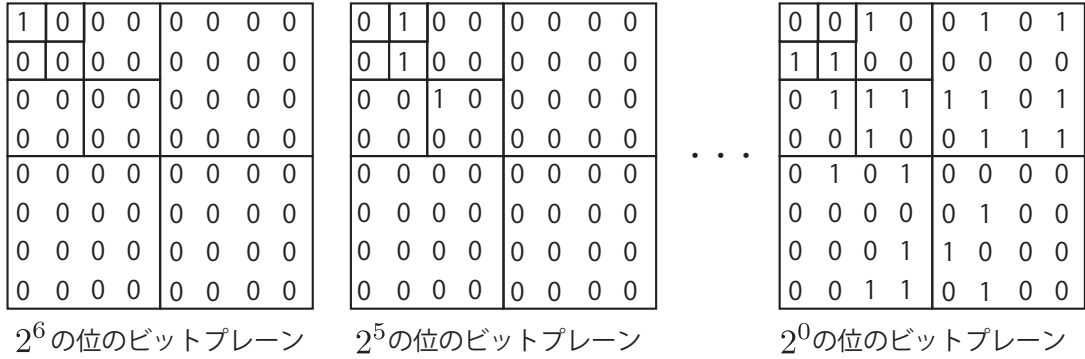
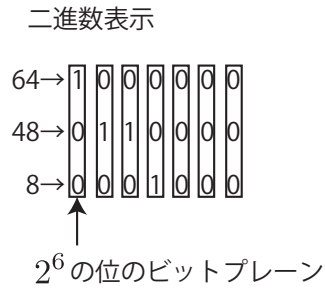


図 2.26 ビットプレーン

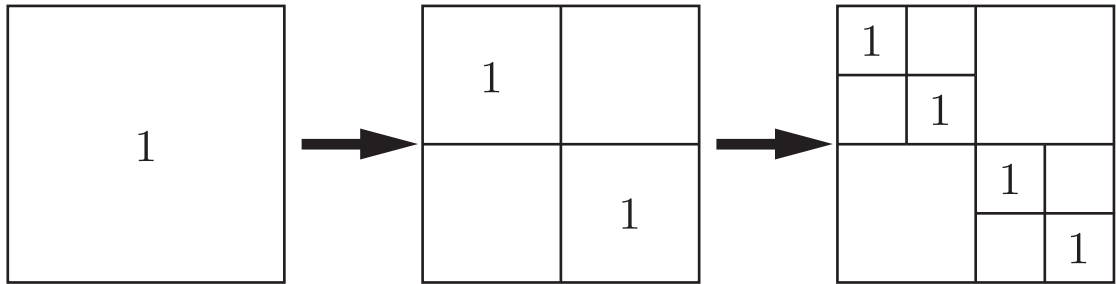


図 2.27 クワッドツリー分割

アルゴリズム

ここで EZW-IP 符号下方のアルゴリズムを示す．まず，3 つのリスト LIP・LSP・LIB を用意する．これらのリストはそれぞれ次のいみである．

- LIP : 重要でない (0 の) ピクセルのリスト
- LSP : 重要な (1 の) ピクセルのリスト
- LIB : 重要でないバンドのリスト

アルゴリズムを通じて上記の 3 つのリストにすべてのピクセルの座標を振り分けていき，符号化する．画像のサイズは M × N とする．

1. 初期化

$N = \lfloor \log(\max_{(x,y)} |c_{x,y}|) \rfloor$  を出力する。(  $c_{x,y}$  は座標  $(x, y)$  の変換係数 )

LIP と LSP の空行列を設定する .

LIB に変換画像の左上の座標  $(1, 1)$  と右下  $(M, N)$  の座標入れる .

## 2. ソーティングパス

(a) LIP にあるすべての座標に対して

- i. もし  $|c_{x,y}| \geq 2^N$  ならば, 1 と係数の符号 ( 正なら 1, 負なら 0 ) を出力し, その座標  $(x, y)$  を LIP から LSP へ移動する .
- ii. そうでなければ, 0 を出力する .

(b) LIB にあるすべてのブロックに対して

- i. もし  $\max\{|c_{x,y}|\} \geq 2^{N-1}$  ならば, 1 を出力し, そのブロックの頂点座標  $(x_{start}, y_{start}, x_{end}, y_{end})$  を LIB から除く .

A. もし  $x_{end} - x_{start} \geq 1$  かつ  $y_{end} - y_{start} \geq 1$  ならば

ブロックを 4 分割し, それぞれのブロックが 2 ピクセル以上の場合, ブロックの頂点座標を LIB に追加する .

それぞれのブロックが 1 ピクセルの場合,  $|c_{x,y}| \geq 2^N$  ならば 1 と係数の符号を出力し, 座標を LSP に追加する . そうでなければ, 0 を出力し, 座標を LIP に追加する .

B. A. でなく,  $x_{end} - x_{start} \geq 1$  ならば

ブロックを x 軸方向に 2 分割し, それぞれのブロックが 2 ピクセル以上の場合, ブロックの頂点座標を LIB に追加する .

それぞれのブロックが 1 ピクセルの場合,  $|c_{x,y}| \geq 2^N$  ならば 1 と係数の符号を出力し, 座標を LSP に追加する . そうでなければ, 0 を出力し, 座標を LIP に追加する .

C. A. または B. でなく,  $y_{end} - y_{start} \geq 1$  ならばブロックを y 軸方向に 2 分割し, それぞれのブロックが 2 ピクセル以上の場合, ブロックの頂点座標を LIB に追加する .

それぞれのブロックが 1 ピクセルの場合,  $|c_{x,y}| \geq 2^N$  ならば 1 と係数の符号を出力し, 座標を LSP に追加する . そうでなければ, 0 を出力し, 座標を LIP に追加する .

D. A. B. C. のいずれでもないならばブロックは 1 ピクセルなので  $|c_{x,y}| \geq 2^N$  ならば 1 と係数の符号を出力し, 座標を LSP に追加する . そうでなければ, 0 を出力し, 座標を LIP に追加する .

- ii. そうでなければ, 0 を出力する .

## 3. リファインメントパス

直前のソーティングパスで追加された座標を除いたすべての LSP の座標に対して

- (a) もし  $|c_{x,y}| \geq 2^N$  ならば, 1 を出力する .
- (b) そうでなければ, 0 を出力する .

## 4. 量子化ステップの更新

$N = N - 1$  として, 2. に戻る .



(a)

(b)

図 2.28 ノイズ画像例 . (a) : 原画像 *Lena* , (b) : 原画像 *Lena* にガウシアンノイズが混入した画像 (分散  $\sigma^2 = 10$ ) .

## 2.7 画像のノイズ除去

本節では画像のノイズ除去について説明する . ノイズとは , 画像をセンシングするハードウェアの性能や , ハードウェアを使用した環境によって , しばしば画像に混入する不必要な成分の総称である . ノイズには , その統計的な性質や形状などによって , 様々な種類が存在する . 典型的な例としては , ガウス過程に基づくガウシアンノイズ , ポアソン過程に基づくポアソンノイズ , インパルスノイズなどが挙げられる . 図 2.28(a) , (b) に , 原画像 *Lena* 及び分散  $\sigma^2 = 10$  のガウシアンノイズが混入した画像を示す .

原画像にノイズが混入し , ノイズ画像が生成される過程は , 以下の式によって表現できる .

$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) + \epsilon(n_1, n_2) \quad (2.58)$$

ここで ,  $x(n_1, n_2)$  は原画像 ,  $\epsilon(n_1, n_2)$  はノイズ成分 ,  $y(n_1, n_2)$  はノイズ画像を表すとする . 観測されたノイズ画像  $y(n_1, n_2)$  から , ノイズ成分  $\epsilon(n_1, n_2)$  を  $y(n_1, n_2)$  から除去することによって , 原画像  $x(n_1, n_2)$  を復元する処理を , ノイズ除去という . ただし , 一般的にノイズ成分は未知であるため , 観測されたノイズ画像からノイズ成分を推定することによって , 原画像を復元しなければならない .

古くからノイズ除去に関しては様々な手法が提案されている . 最も古典的な手法としては , 低域通過フィルタを用いて画像にフィルタリングを施す , 平滑化処理がある . この処理はすなわち , 画像に含まれる高周波成分が全てノイズであると仮定することで , 原画像を復元する手法である . しかしこの手法では , ノイズ成分と共に , 原画像が本来持つエッジ , テクスチャなどの高周波成分も失われてしまい , 鮮明さが著しく損なわれてしまう .

画像ノイズ除去では , 画像のノイズを除去する一方で , 画像が本来持つ高周波成分を鮮明に復元できることが求められる . 離散ウェーブレット変換は画像ノイズ除去に有効であることが知られており , ノイズの種類に応じて様々な手法が現在までに提案されている [14–17, 39–41] . ここで , 離散ウェーブレット変換を用いた基本的なノイズ除去について説明する . まず式 (2.58) において ,

ノイズ画像  $y(n_1, n_2)$  に分解レベル  $J$  の可分型 2 次元離散ウェーブレット変換を施し，次式のように，1 つの低周波成分と高周波成分に分解する．

$$\begin{aligned} y_w^{J,LL}(n_1, n_2) &= x_w^{J,LL}(n_1, n_2) + \epsilon_w^{J,LL}(n_1, n_2) \\ y_w^{j,LH}(n_1, n_2) &= x_w^{j,LH}(n_1, n_2) + \epsilon_w^{j,LH}(n_1, n_2) \quad (1 \leq j \leq J) \\ y_w^{j,HL}(n_1, n_2) &= x_w^{j,HL}(n_1, n_2) + \epsilon_w^{j,HL}(n_1, n_2) \quad (1 \leq j \leq J) \\ y_w^{j,HH}(n_1, n_2) &= x_w^{j,HH}(n_1, n_2) + \epsilon_w^{j,HH}(n_1, n_2) \quad (1 \leq j \leq J) \end{aligned} \quad (2.59)$$

となる． $y_w^{j,LH}(n_1, n_2)$ ， $y_w^{j,HL}(n_1, n_2)$ ， $y_w^{j,HH}(n_1, n_2)$  は原画像の  $j$  レベルの高周波成分に加え，ノイズ成分の  $j$  レベルの高周波成分  $\epsilon_w^{j,LH}(n_1, n_2)$ ， $\epsilon_w^{j,HL}(n_1, n_2)$ ， $\epsilon_w^{j,HH}(n_1, n_2)$  も含んでいる．そこで， $y_w^{j,LH}(n_1, n_2)$ ， $y_w^{j,HL}(n_1, n_2)$ ， $y_w^{j,HH}(n_1, n_2)$  から，原画像のウェーブレット変換係数  $x_w^{j,LH}(n_1, n_2)$ ， $x_w^{j,HL}(n_1, n_2)$ ， $x_w^{j,HH}(n_1, n_2)$  を推定する．

$$\begin{aligned} y_w^{j,LH}(n_1, n_2) &\rightarrow \tilde{x}_w^{j,LH}(n_1, n_2) \quad (1 \leq j \leq J) \\ y_w^{j,HL}(n_1, n_2) &\rightarrow \tilde{x}_w^{j,HL}(n_1, n_2) \quad (1 \leq j \leq J) \\ y_w^{j,HH}(n_1, n_2) &\rightarrow \tilde{x}_w^{j,HH}(n_1, n_2) \quad (1 \leq j \leq J) \end{aligned} \quad (2.60)$$

ただし， $\tilde{x}_w^{j,LH}(n_1, n_2)$ ， $\tilde{x}_w^{j,HL}(n_1, n_2)$ ， $\tilde{x}_w^{j,HH}(n_1, n_2)$  は推定された原画像のウェーブレット変換係数を表す．最後に  $y_w^{J,LL}(n_1, n_2)$  及び  $\{y_w^{j,LH}(n_1, n_2), y_w^{j,HL}(n_1, n_2), y_w^{j,HH}(n_1, n_2)\}$  ( $1 \leq j \leq J$ ) に対して，可分型 2 次元逆離散ウェーブレット変換を施し，画像を復元する．離散ウェーブレット変換を用いることで，各分解レベル  $j$  において，原画像の高周波成分を考慮しながらノイズを除去することができ，原画像の詳細なテクスチャの画質劣化を抑えることが可能となる．

ノイズ除去の性能は，原画像のウェーブレット変換係数を推定する精度に依存する．推定手法に関しては，ノイズの種類に応じて様々な手法が提案されているが，それらの中の基本的なものとして Hard thresholding がある．Hard thresholding とは，与えられた閾値  $T > 0$  に対して，

$$\tilde{x}_w^{j,LH}(n_1, n_2) = \begin{cases} y_w^{j,LH}(n_1, n_2) & |y_w^{j,LH}(n_1, n_2)| > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1 \leq j \leq J) \quad (2.61)$$

のように， $\tilde{x}_w^{j,LH}(n_1, n_2)$  を推定する手法である． $\tilde{x}_w^{j,HL}(n_1, n_2)$ ， $\tilde{x}_w^{j,HH}(n_1, n_2)$  に関しても， $y_w^{j,HL}(n_1, n_2)$  及び  $y_w^{j,HH}(n_1, n_2)$  から式 (2.61) を用いて推定する．一般に，画像は低周波数にエネルギーが集中しており，その一方でノイズ成分はテクスチャ等の高周波成分に比べ，エネルギーが小さい．よって式 (2.61) のように，絶対値の小さい高周波成分のウェーブレット変換係数がノイズ成分であると仮定することで，テクスチャ情報を保存しながらノイズを除去することができる．

Hard thresholding によるノイズ除去の効果は設定する閾値  $T$  に依存する．Hard thresholding のための最適な閾値  $T$  に関しても，対象とするノイズの種類によって，いくつかの文献が報告されているが，ガウシアンノイズに関しては Universal threshold  $T = \sigma\sqrt{2\log N}$  が有効であるとされている [14]．ここで， $\sigma$  はノイズの分散， $N$  は画像のサンプル数である．本論文では，設計したフィルタバンクを画像ノイズ除去に適用し評価する際，簡単のために，ガウシアンノイズを画像に付加し，Universal threshold を用いた Hard thresholding によってノイズ除去を行う．



# 第 3 章

## 関連研究と本研究の位置づけ

本章では、ウェーブレット変換、フィルタバンクの高次元化として本論文で取り扱う、複素化及び 2 次元化に関する先行研究について言及し、それらの中における本研究の位置づけを明確にすることを目的とする。

### 3.1 ウェーブレット変換とフィルタバンクの高次元化に関する先行研究

#### 3.1.1 複素ウェーブレット変換，複素フィルタバンク

現在までのウェーブレット変換，フィルタバンクの複素化に関する研究は，主に

1. 直交性，対称性を満たす 2 分割複素フィルタバンクに関する研究
2. シフト不変性及び高い方向分解能を満たす複素ウェーブレット変換に関する研究

の 2 点に集約される。

#### 直交性，対称性を満たす 2 分割複素フィルタバンクに関する研究

諸応用に対して有効なフィルタバンクを設計するために，パラユニタリ性（直交性）及び線形位相性（対称性）を課すことが望ましいことは，第 2 章，2.2.3 項，2.2.4 項で述べた。フィルタバンクがパラユニタリ性を満たすことで，入出力信号のエネルギーの保存が可能となることや，分割フィルタを合成フィルタに使用できることにより，フィルタバンクの設計が容易になること，などの利点が挙げられる [2, 4, 5]。一方線形位相性によって，信号の位相を歪ますことなくフィルタリングができることや，画像圧縮符号化において対称拡張法が使用可能となり，符号化効率が向上するというメリットがある [2, 4, 5]。更にフィルタが良好な周波数選択特性を持つためには，フィルタ長（フィルタ係数の数）を十分長くすることが望ましい。しかし 2 分割実フィルタバンクにおいては，線形位相パラユニタリフィルタバンクはハールフィルタバンクのみであることが示された [2, 4, 5]。フィルタ長が 2 であるハールフィルタバンクは十分な阻止域減衰量を持たないため一般的に有効ではない。そのため，実数の範疇で 2 分割線形位相パラユニタリフィルタバンクを模索するのではなく，フィルタ係数を複素化したフィルタバンクに，そのような構造の存在を探索することとなる。

しかし複素係数を持つ 2 分割フィルタバンクにおいても，線形位相パラユニタリフィルタバンクがハールフィルタバンクのみである，という結果が Zhang らによって示された [42]。この結果を受け，複素に対する線形位相性の条件であるエルミート対称性 ( $h(n) = \overline{h(N-n)}$ ) を通常の対称

表 3.1 シフト不変性及び高い方向分解能を持つ複素ウェーブレット変換の特徴

	完全再構成	帯域分割数
射影型複素ウェーブレット変換	×	任意
RI-Spline 複素ウェーブレット変換		2
Dual-tree 複素ウェーブレット変換		任意

性 ( $h(n) = h(N - n)$ ) に緩和した, 2 分割複素偶対称・奇対称パラユニタリフィルタバンクの実現へと研究対象が移ることになる. そして, Lowton によって, ハーフバンドフィルタの因数分解に基づく, 2 分割複素偶対称・奇対称フィルタバンクが提案された [43]. ハーフバンドフィルタの因数分解に基づく設計法は, ラティス構造に基づく設計法に比べて, フィルタ性能を調整する柔軟性に乏しいため, Gao らは 2 分割複素偶対称・奇対称フィルタバンクのラティス構造を提案している [44, 45].

#### シフト不変性及び高い方向分解能を満たす複素ウェーブレット変換に関する研究

前項で取り上げた問題点の一方で, 実ウェーブレット変換, 実フィルタバンクの弱点として, 変換の安定性を示すシフト不変性が欠如していることや, 画像におけるエッジなどの方向を解析するための方向分解能に乏しいといった問題が報告されている [26, 27]. シフト不変性の問題に関しては, 1 次元フィルタバンクに含まれるダウンサンプリングを取り払う, もしくはフィルタバンクの帯域分割数よりも間引き率を小さくすることによって, 解決できることが報告されている [46–51]. しかし, これらの冗長変換を用いた場合, 出力信号のサンプル数が著しく増加してしまうため有効ではない. また, 1 次元ウェーブレット変換の可分型 2 次元変換では, 方向分解能の欠乏を改善することができない.

ここで, 従来の離散フーリエ変換がシフト不変性や高い方向分解能を満たしていることに着目し, 近年のフィルタバンクの複素化に関する研究は, シフト不変性や高い方向分解能を持つような変換を実現することに焦点が当てられている. 現在までに, シフト不変性及び高い方向分解能を持つ複素ウェーブレット変換, 複素フィルタバンクとして, いくつかの変換が提案されている [52–60]. それらの代表的なものに, 射影型複素ウェーブレット変換, RI-Spline 複素ウェーブレット変換, Dual-tree 複素ウェーブレット変換が挙げられる. それぞれの特徴をまとめたものを, 表 3.1 に示す. 射影型複素ウェーブレット変換 [52–54] は, 画像に複素フィルタを施した複素数画像に対して, 従来の 1 次元実ウェーブレット変換に基づく可分型 2 次元変換を行う複素ウェーブレット変換である. しかし, この複素ウェーブレット変換では IIR フィルタが必要なるため実用的であるとはいえない. なぜなら, 一般に IIR フィルタは, 計算の都合上のフィルタ係数を打ち切って FIR フィルタとして用いなければならないため, 厳密な完全再構成が満たされなくなるからである. 一方で RI-Spline 複素ウェーブレット変換 [55] はフィルタを FIR として用いることが可能であり, 射影型複素ウェーブレット変換のような問題は生じない. しかしこの変換では, 帯域分割数は 2 に限定される問題がある. Dual-tree 複素ウェーブレット変換 [56–60] は 2 つの実フィルタバンクを並列に配し, 1 つは実部, もう 1 つは虚部を計算する構造をとる. この変換の場合, 任意の帯域分割数を実現でき, 更に完全再構成条件も満たすことが出来る点で, 射影型複素ウェー

ブレット変換や RI-Spline 複素ウェーブレット変換に比べて有効であり，様々な応用で高い性能を発揮することが報告されている [61–66]．本研究では，シフト不変性及び高い方向分解能を持つ複素ウェーブレット変換として，Dual-tree 複素ウェーブレット変換の設計に注目する．

### 3.1.2 2次元実ウェーブレット変換・2次元実フィルタバンク

古典的には，画像のような2次元信号に対しては，1次元フィルタバンクに基づく可分型2次元変換が用いられていたが，より効果的に，2次元信号を直接変換するための，非可分型2次元フィルタバンクの理論が Vetterli を初めとして，様々な研究者によって提案された [67–69]．可分型2次元フィルタバンクの周波数応答の形状は，必ず矩形型であるのに対し，2次元的に直接設計された，非可分型2次元フィルタバンクの周波数応答は，ダイヤモンド型（ダイヤモンドフィルタ），砂時計型（ファンフィルタ），平行四辺形型（Parallelogram フィルタ）など様々な周波数応答の形状を実現することができる [5, 70]．また，非可分型2次元フィルタバンクの周波数応答の形状を，可分型2次元フィルタバンクと同様の周波数特性の形状に設定して最適化した場合，可分型2次元フィルタバンクよりも，阻止域減衰量，符号化利得に関して，高い性能が実現できることも報告されている [71]．

#### 高い方向分解能を満たす2次元フィルタバンクに関する研究

1次元実ウェーブレット変換に基づく可分型2次元変換の弱点である方向分解能の欠乏が報告されてから，近年2次元フィルタバンクの分野では，高い方向分解能を満たす2次元フィルタバンクの実現が盛んに研究されている．最も先駆的なフィルタバンクとしては，Directional filter bank が挙げられる [31–33]．これはダイヤモンドフィルタバンク，ファンフィルタバンク，Parallelogram フィルタバンクなどをツリー状に組み合わせることによって，画像の様々な角度のエッジ成分を解析する手法である．しかしこの手法は，画像の低周波成分を効率良く抽出することができない．この問題点を克服するために，Contourlet 変換が提案された [72–74]．Contourlet 変換はラプラシアンピラミッド [75] によって，低周波成分と高周波成分に分解してから，Directional filter bank によって高周波の方向成分を抽出する手法である．これにより，ノイズ除去や画像解析などで高い効果が得られることが報告されている [72–74]．しかし，変換後の出力信号数が入力画像の信号数の  $5/4$  倍に増加するという冗長性があり，画像圧縮符号化などの非冗長変換が要求される応用において有効ではない．このため，近年では非冗長型の Contourlet 変換である，“最大間引き Contourlet 変換” が盛んに研究されている [76–80]．本研究では，高い方向分解能を満たす2次元フィルタバンクとして，最大間引き Contourlet 変換に注目する．

## 3.2 本論文の提案法の概要と位置づけ

本節では，本論文の提案法の概要と位置づけを示す．ウェーブレット変換，フィルタバンクの1) 構造，2) 設計方式，3) パラメータ最適化法に関して，各章の提案箇所をまとめたものを表 3.2 に示す（印が提案箇所を示しており，それ以外は既存の手法であることを示す）．

表 3.2 提案法一覧 ( 印が提案箇所を示しており, それ以外は既存の手法であることを示す)

	1) 構造	2) 設計方式	3) フィルタ係数の最適化法
第 4 章	○ 擬直交	ラティス構造	非線形最適化
第 5 章	直交	直接設計	○ 最小二乗法に基づく最適化
第 6 章	直交	○ コサイン・サイン変調方式	非線形最適化
第 7 章	双直交	○ ボトムアップ方式	非線形最適化

### 3.2.1 2 分割複素線形位相擬直交フィルタバンク

#### 概要

本研究では, 実フィルタバンクでは実現できない有効な構造を持つ新しいフィルタバンク, 2 分割複素フィルタバンクを提案する.

前節で述べたように, 2 分割フィルタバンクにおいては, 実係数・複素係数のどちらの場合でも, 線形位相パラユニタリフィルタバンクは, ハールフィルタバンクのみである. この結果を受けて, Lowton や Gao らは, パラユニタリ性 ( $\mathbf{E}(z)\mathbf{E}^H(z^{-1}) = \mathbf{I}$ ) と偶対称・奇対称性 ( $h(n) = h(N-n)$ ) を導入したフィルタバンクを提案した [43–45]. このクラスはハールフィルタバンクとは異なり, 任意のフィルタ長で設計できる. ただし, 複素フィルタが線形位相を満たすためには, 通常偶対称・奇対称ではなく, “エルミート” 偶対称・奇対称 ( $h(n) = \overline{h(N-n)}$ ) の構造が必要となるので, 厳密には線形位相性を満たしていない. パラユニタリ性は重要ではあるが, JPEG2000 で採用されている 9/7 タップ離散ウェーブレット変換がパラユニタリ性を満たしていないように, 実用的にはエネルギー保存則よりもフィルタバンクの線形位相性の方が有効であることが少なくない. そこで本研究では第 4 章にて, 実数における直交性 ( $\mathbf{E}(z)\mathbf{E}^T(z^{-1}) = \mathbf{I}$ ) を保持したまま, 係数を複素数に拡張した擬似的な直交性 “擬直交” を導入することによって, 任意長のフィルタバンクに線形位相性と (擬似的な) 直交性を課することができる, 新しい複素フィルタバンクが存在することを示す.

また提案する複素フィルタバンクの応用例として画像圧縮符号化へ適用し, 有効性を示す. 提案する複素フィルタバンクには線形位相性を導入できるため, 画像圧縮符号化に有効であると考えられる. しかし一般に整数値のデータである画像に複素フィルタバンクを用いて変換した場合, 出力は複素数となる. このことは, 実部と虚部合わせて原画像の 2 倍のサンプル数の信号が出力されることを意味し, 情報量が増えてしまうので, 画像圧縮においては致命的な問題となる. 本研究では同じく第 4 章にて, 出力サンプル数が増えるという変換の冗長性を解決するための画像圧縮符号化アルゴリズムを提案する.

#### 位置づけ

ここで, 提案する複素擬直交フィルタバンク (Pseudo Orthogonal Filter Bank: POFB)・複素線形位相擬直交フィルタバンク (Linear Phase POFB: LPPOFB) の, フィルタバンク全体における位置づけと利点を述べる. 図 3.1(a) は複素双直交フィルタバンク (BOFB), 複素パラユニタリフィルタバンク (PUFB), 複素 POFB のクラスの包含関係, 図 3.1(b) はそれぞれのフィルタバ

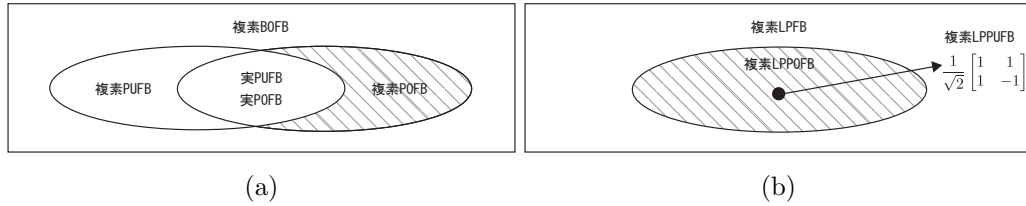


図 3.1 各種フィルタバンクの包含関係 (斜線部分が提案複素フィルタバンクの領域). (a) 複素 POFB は複素 BOFB のサブクラスである. 複素 POFB は条件  $\mathbf{E}\mathbf{E}^T = \mathbf{I}$  を, 複素 PUFB は条件  $\mathbf{E}\mathbf{E}^H = \mathbf{I}$  を満たしている, それぞれ係数を実数に制限した実 POFB と実 PUFB は互いに等価となる. (b) 複素 LPPOFB は複素 LPFB のサブクラスとなる. 複素 PUFB に線形位相性を課した複素 LPPUFB はハールフィルタバンクのみであるが, 複素 LPPOFB の場合ハールフィルタバンク以外にも様々な LPFB を設計することができる.

表 3.3 各種直交フィルタバンクの特徴 ( $N$  はフィルタ長)

	LP ( $N > 2$ )	時間反転	エネルギー保存則
複素 BOFB*	○	×	×
複素 PUFB	×	○	○
複素 POFB	○	○	×

ンクに線形位相性を課した, 複素線形位相フィルタバンク (LPFB), 複素線形位相パラユニタリフィルタバンク (LPPUFB), 複素 LPPOFB のクラスの包含関係を表したものである. 図 3.1(a) 及び (b) が示すように, 提案する複素 POFB 及び複素 LPPOFB はそれぞれ複素 BOFB, 複素 LPFB のサブクラスを形成する. 特筆すべき点として, 図 3.1(b) が示すように, 複素 LPPOFB は従来のハールフィルタバンク以外にも様々なフィルタバンクを実現することができる. 次に, 表 3.3 は複素 BOFB, 複素 PUFB, 複素 POFB に対し, 1) フィルタ長 ( $N > 2$ ) を満たすフィルタバンクに線形位相性を導入できるかどうか, 2) 合成フィルタは分割フィルタの時間反転で設計できるかどうか, 3) エネルギー保存則を保障できるかどうか, をまとめたものである (\*ただし, ここでの複素 BOFB は複素 PUFB・複素 POFB を除く複素 BOFB とする). 以下の節で述べるように, 擬直交性は従来のパラユニタリ性と厳密には異なるためエネルギー保存則を満たさないが, 合成フィルタが分割フィルタの時間反転で設計でき, かつ任意長のフィルタに線形位相性を課することができる. つまり複素 POFB は, PUFB の利点 2) を持ち, かつ線形位相性を同時に満たしながら, 良好な周波数特性得るためにフィルタ長を十分大きくすることが可能であるという, 実数に基づく 2 分割フィルタバンクでは実現できない無い利点を有する.

### 3.2.2 $M$ 分割 Dual-tree 複素ウェーブレット変換の設計法

#### 概要

本研究ではシフト不変性と高い方向分解能を持つ  $M$  分割 Dual-tree 複素ウェーブレット変換 (Dual-Tree Complex Wavelet Transform : DTCWT) の有効な設計法を提案する.

DTCWT は実ウェーブレット変換に欠如しているシフト不変性・方向分解能の両方を改善し, かつ離散フーリエ変換よりも高い周波数選択特性を持つものとして提案された [27]. 初めに提案さ

れた DTCWT は周波数帯域を 2 分割する変換であったが、その後、一般的な  $M$  分割 DTCWT が提案された [56–58]。複素変換により、出力サンプル数が 2 倍になる冗長性が生じるため、画像圧縮符号化には適していないが、画像ノイズ除去など、変換の冗長性が許される応用では実ウェーブレット変換よりも有効であることが報告されている [56, 61–63]。この変換は共役関係にある 2 つのフィルタバンクの並列処理により実現され、2 つのフィルタバンクには半サンプルの遅延関係が課されている [81–85]。一般的に離散信号処理において有限長フィルタを用いた場合、半サンプル遅延は厳密には満たされない。よって半サンプル遅延条件を近似しながら、周波数選択特性の高いフィルタのペアを設計しなければならないという問題が生じる。いくつかの設計法は提案されているが [81–91]、最適な DTCWT の設計法は未だ確立されていない。本研究では第 5 章にて、最小二乗法を用いた最適化アルゴリズムに基づく 2 分割 DTCWT の設計法を提案し、画像ノイズ除去を実用例として、その有効性を示す。

一般の  $M (> 2)$  分割の場合には、更に設計は困難となり、 $2^r$  分割 DTCWT の設計法が提案されているものの [92–94]、未だに一般的な  $M$  分割 DTCWT の有効な設計法は提案されていない。本研究では第 6 章にて、コサイン変調フィルタバンク [95–98] を拡張したコサイン・サイン変調フィルタバンクを提案し、コサイン・サイン変調フィルタバンクに基づく一般的な  $M (> 2)$  分割 DTCWT の設計法を示す。また提案 DTCWT を画像ノイズ除去に適用し、その有効性を示す。

#### 位置づけ

$M$  分割 DTCWT を構成するフィルタに必要な条件は以下のように集約できる。

1. 完全再構成条件
2. 良好な周波数特性（阻止域減衰量・符号化利得などに関して）
3. 対となるフィルタの周波数特性の同一性
4. 半サンプル遅延条件

これらの条件を同時に実現することは難しく、今までに、良好な  $M$  分割 DTCWT のための設計法が盛んに研究されてきた。

#### 【2 分割 DTCWT の設計法】

2 分割 DTCWT の設計法は大まかに、奇数長・偶数長線形位相フィルタを用いる手法 [86]、非線形最適化 [81, 87]、因数分解法 [82–85, 89–91] の 3 種類に分類される（表 3.4 参照）。

奇数長・偶数長線形位相フィルタを用いる手法は、唯一半サンプル遅延が厳密に満たされる手法である。しかし、異なるフィルタ長のフィルタを用いるため、対応するフィルタのペアの周波数応答が異なる問題が生じる。DTCWT が正常に機能するためには 2 つのフィルタバンクを構成するフィルタのペアが、同一の周波数応答を持たなければならない。よって奇数長・偶数長のフィルタの周波数応答が近似的に一致するようなフィルタ係数を決定しなければならないため、阻止域減衰量などのフィルタの性能が著しく制限されてしまう。非線形最適化は、フィルタのペアの周波数応答を揃えた状態で、半サンプル遅延条件を非線形最適化によって近似する手法である。この手法は、奇数長・偶数長線形位相フィルタを用いる手法や因数分解法に比べ、半サンプル遅延の近似精度やフィルタの周波数特性を総合的に最適化することができるが、フィルタ長が長い場合、パラメータが局所解に落ちてしまい、フィルタ特性や半サンプル遅延近似精度の性能に偏りが生じるなどの問題がある。因数分解法は、2 分割 DTCWT を構成するすべてのフィルタを、振幅特性を決

表 3.4 2 分割 DTCWT の従来設計法と提案設計法の特徴

	完全再構成	周波数特性	周波数応答の同一性	半サンプル遅延近似
従来法：奇数・偶数長 [86]	○	×	×	○
従来法：非線形最適化 [81, 87]	○		○	
従来法：因数分解法 [82-85, 88-90]	○		○	
提案法：最小二乗法	○	○	○	○

表 3.5  $M$  分割 DTCWT の従来設計法と提案設計法の特徴

	設計方式	完全再構成	周波数特性	半サンプル遅延近似
従来法	IIR フィルタ	×	○	○
従来法	ツリー構造	○	×	○
提案法	コサイン・サイン変調構造	○	○	○

定するフィルタと位相特性を決定するフィルタの積として構成する．この手法は長いフィルタに対しても安定的に，良好な振幅特性，良好な半サンプル遅延近似，完全再構成条件を満たすことができ，これまで有効であるとされてきた．しかし，振幅特性や半サンプル遅延近似に関して十分に最適化できるとは一概にいうことができない．

本論文で提案する 2 分割 DTCWT の設計法は，非線形最適化による，最適解への収束の不安定性を取り除き，完全再構成条件，良好な周波数特性，高精度の半サンプル遅延近似を満たすことができる利点を持つ．

【 $M(> 2)$  分割 DTCWT の設計法】

$M$  分割 DTCWT では， $M$  個のフィルタのペアに対して，上記の 4 つの条件を満たさなければならないため，2 分割 DTCWT よりも設計は困難になる．現在までに提案されている手法としては，IIR フィルタを用いる手法 [56]，2 分割 DTCWT のツリー構造を用いる手法 [92] が挙げられる（表 3.5 参照）．IIR フィルタを用いることによって厳密な半サンプル遅延が実現できるが，実用的には FIR フィルタが必要となり，完全再構成が厳密に満たされない場合があるため有効であるとはいえない．また 2 分割 DTCWT のツリー構造に基づく  $M$  分割 DTCWT の手法は，完全再構成，半サンプル遅延条件を簡易に満たすことができるが，周波数特性は 2 分割フィルタバンクの特性によって決定されてしまうため，良好な周波数特性を実現することができない．これに対して，本研究で提案するコサイン・サイン変調フィルタバンクは，完全再構成を容易に満たし， $M$  分割フィルタバンクを直接設計することにより，良好な周波数特性が実現できる．更に，厳密な半サンプル遅延条件とは異なるが，半サンプル遅延条件で得られる性質が簡単に実現できる利点を持つ．

### 3.2.3 ボトムアップ方式に基づく最大間引き Contourlet 変換

概要

本研究では，高い方向分解能を持ち，かつ非冗長性を満たす 2 次元実フィルタバンクである，最大間引き Contourlet 変換の設計法を提案する．

前述のように，従来の 1 次元実フィルタバンクの組み合わせによる 2 次元変換には方向分

表 3.6 最大間引き Contourlet 変換の従来設計法と提案設計法の特徴

	設計方式	実用性・再現性
従来法 [76-80]	トップダウン方式	×
提案法	ボトムアップ方式	○

解能に乏しいという問題があった。この問題によって、例えば画像圧縮符号化では、高圧縮率の場合に画像の詳細なテクスチャが著しく損傷してしまうという問題が生じる。一方 2 次元実フィルタバンクを導入することで複素変換と同様に高い方向分解能を実現することが可能である [26, 31, 72, 73, 76-79, 99, 100]。また 2 次元実フィルタバンクを導入することによる特筆すべき利点は、1 次元複素 WT では出力信号数が入力信号数よりも増加してしまうという冗長性が生じていたが、2 次元実フィルタバンクでは非冗長型（最大間引き）の変換が実現できることである [76-78]。この性質は画像圧縮符号化に非常に有効であり、高い方向分解能を持つ 2 次元実フィルタバンクを用いることで、高圧縮率の場合でも画像の詳細なテクスチャを損傷させることなく画像圧縮ができると考えられる。高い方向分解能を持つ 2 次元実最大間引きフィルタバンクとしては、例えば Directional filter bank [31-33] や最大間引き Contourlet 変換 [76-80] などが提案されている。しかし、一般に方向分解能の高い 2 次元最大間引きフィルタバンクは 1 次元フィルタバンクに比べフィルタ設計が困難であるという問題があり、これらの従来法には所望のフィルタが実現できないという問題がある。本研究では有効な最大間引き Contourlet 変換の設計を可能にするボトムアップ設計法を提案し、画像圧縮符号化に適用した際の有効性を示す。

#### 位置づけ

高い方向分解能のための、従来の 2 次元フィルタバンクの設計法は、トップダウン方式に基づく手法である [76-80]。ここでトップダウン方式とは所望の周波数特性を得るために、ダイヤモンドフィルタバンク、ファンフィルタバンク、Parallelogram フィルタバンクなどの基本的な 2 分割フィルタバンクをツリー状に接続して得るものである。しかし、この方式では 2 次元的なダウンサンプリングによって生じるエイリアシングを除去するために、ツリー構造の中に、複雑な周波数特性を持つ 2 次元フィルタバンクが必要となり、実用的ではないという問題点がある。

これに対し、提案するボトムアップ方式では、トップダウン方式と同様に、基本的な 2 分割フィルタバンクのツリー構造を用いるが、所望の周波数特性よりも細かく分解した後、合成するという手法である。この方式を用いることによって、従来提案されている基本的な 2 分割フィルタバンクのみを用いて設計できるため、方向分解能の高い 2 次元フィルタバンクを容易に設計することが可能となる。



## 第 4 章

### 2 分割複素線形位相擬直交フィルタバンク の設計と画像圧縮符号化への応用

#### 4.1 本章の概要

本章では複素ウェーブレット変換/フィルタバンクが持つ利点の中で、構造の多様性に焦点を当て、実フィルタバンクでは実現されない有効な性質を持つ新しいフィルタバンクを提案する。

有効なフィルタバンクの設計ために、パラユニタリ性と線形位相性を構造的に課することが重要であることは 2.2 節で述べた。パラユニタリフィルタバンク (PUFB) の利点としては、1) エネルギー保存則が成立し、2) 合成フィルタが分割フィルタの時間反転の関係にあることから分割フィルタのみを設計すれば合成フィルタが得られる。一方、線形位相フィルタバンク (LPFB) の利点としては、画像圧縮に有効な対称拡張法の使用が可能であることが挙げられる。更に、良好な周波数特性を実現するために、フィルタ長を十分大きくすることも必要となる。したがって、パラユニタリ性と線形位相性の両方の性質を長いフィルタからなるフィルタバンクに導入することが、有効なフィルタバンクを設計するために重要である。しかし、実数の範囲でパラユニタリと線形位相の両方を導入できる 2 分割フィルタバンクは、分割ポリフェーズ行列  $\mathbf{E}(z)$  が  $\mathbf{E}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  で表されるハールフィルタバンクに限られることを 2.2 節、定理 2 で述べた。ハールフィルタバンクのフィルタ長は非常に短いため、十分な阻止域減衰量を得ることができず、応用には適していない。パラユニタリ性と線形位相性の構造を持つフィルタバンクを設計するための他のアプローチとしては、係数を実数から複素数に拡張した複素フィルタバンクが考えられる。複素フィルタバンクの集合は、実フィルタバンクの集合を完全に包含することから、実フィルタバンクでは設計できない構造が複素フィルタバンクによって実現できると期待できる。しかし、その場合においてもハールフィルタバンクに限るという結果となることが知られている (2.2 節、定理 2)。

本来、複素線形位相パラユニタリフィルタバンクに必要な構造はポリフェーズ行列のユニタリ性  $\mathbf{E}(z)\mathbf{E}^H(z^{-1}) = \mathbf{I}$  (ただし  $\cdot^H$  は共役転置) とエルミート対称性 ( $h(n) = \overline{h(N-n)}$ ) である。しかし、Lowton や Gao らはフィルタのエルミート対称性ではなく、通常対称性 ( $h(n) = h(N-n)$ ) に注目し、ユニタリ性と対称性を保持したまま、実数を複素数に拡張することで、パラユニタリ性と対称性を同時に課した新しいフィルタバンク “2 分割複素偶対称・奇対称フィルタバンク (SAPUFB)” のクラスを示した [43–45]。このような直交性と対称性を持つ構造は実フィルタバンクでは実現できないことから、複素 SAPUFB というクラスは複素フィルタバンクが持つ構造の多様性によって得られた 1 つの結果と言える。ただし、複素 SAPUFB はエルミート対称性を満たしておらず、線形位相を持たないので、画像圧縮などでは有効ではない。

本研究ではフィルタバンクの実から複素への拡張法として, Lowton や Gao らとは別のアプローチを導入し, 新たな複素フィルタバンクを提案する. Lowton や Gao らは対称性に着目し, 実数から複素数へ拡張したが, パラユニタリ性に関して同様の議論ができる. すなわち, 実フィルタバンクにおけるパラユニタリ条件は  $\mathbf{E}(z)\mathbf{E}^T(z^{-1}) = \mathbf{I}$  (ただし  $\cdot^T$  は転置) であるが, この構造とエルミート対称性を保持したまま実数から複素数に拡張することで新しい双直交フィルタバンク (BOFB) のサブクラスを導くことが可能ということである. 本章では実数におけるユニタリ条件の下で, 複素数に拡張した擬似的な直交性の概念 “擬直交性” に基づく 2 分割複素擬直交フィルタバンク (POFB), 更に線形位相性を同時に課した 2 分割複素線形位相擬直交フィルタバンク (LPPOFB) を提案する.

更に本研究では, 応用例として複素 LPPOFB を画像圧縮符号化に適用する. ただし, 整数信号である画像に複素フィルタバンクを用いた場合, 出力は複素となり, 情報量が実質 2 倍となるので, 複素フィルタバンクを直接画像圧縮符号化に適用しても有効ではないという問題がある. この問題を解決するために, 本章では, 情報量の増倍を防ぐアルゴリズムを提案し, その上で複素 LPPOFB を画像圧縮符号化に適用する.

本章ではまず 4.2.1 項, 4.2.2 項にて, 基本的な複素 PUFB と複素 LPFB について述べる. 更に 4.3 節にて, 従来法として提案されている 2 分割複素 SAPUFB の構造を挙げ問題点を述べる. 4.4 節にて提案する 2 分割複素 POFB 及び 2 分割複素 LPPOFB を示す. その後に 4.5 節にて, 複素フィルタバンクを用いた画像符号化アルゴリズムを示す. 4.6 節で提案アルゴリズム及び提案複素フィルタバンクを用いた画像圧縮符号化の有効性を評価し, 4.7 節にて本章を結ぶ.

## 4.2 準備

### 4.2.1 2 分割複素パラユニタリフィルタバンク

本項ではパラユニタリ性を満たす 2 分割複素 PUFB について述べる. この 2 分割複素 PUFB は以下のラティス構造で特徴付けられる [5].

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{V}_{N-1}\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{V}_{N-2}\mathbf{\Lambda}(z)\dots\mathbf{V}_1\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{V}_0\mathbf{\Lambda}(z) \quad (4.1)$$

ここで  $\mathbf{V}_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) は,

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{X}_k\mathbf{\Theta}_k\mathbf{Y}_k, \quad \mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} \cos \theta_{X_k} & \sin \theta_{X_k} \\ -\sin \theta_{X_k} & \cos \theta_{X_k} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_k = \begin{bmatrix} \cos \theta_{Y_k} & \sin \theta_{Y_k} \\ -\sin \theta_{Y_k} & \cos \theta_{Y_k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Theta}_k = \begin{bmatrix} e^{j\theta_{k,0}} & 0 \\ 0 & e^{j\theta_{k,1}} \end{bmatrix}$$

と表される. ここで各ビルディングブロックのパラメータ数は 4 である.

一方, 2 分割実 PUFB のラティス構造は,

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{T}_{N-1}\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{T}_{N-2}\mathbf{\Lambda}(z)\dots\mathbf{T}_1\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{T}_0\mathbf{\Lambda}(z) \quad (4.2)$$

のように与えられる. ただし  $\mathbf{T}_k$  は

$$\mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

であり, 各ビルディングブロックのパラメータ数は 1 に制限される.

一般的に、同一条件の下、実数から複素数に拡張することによって、複素フィルタバンクは実フィルタバンクよりも豊富な設計の自由度を得ることが可能となる。よって 2.5.3 項で示した各種フィルタの設計指標に関して、より高い特性を持つフィルタバンクが設計できる可能性がある。

#### 4.2.2 2 分割複素線形位相フィルタバンク

本項では線形位相性を有する 2 分割複素 LPFB のラティス構造について述べる。既に述べたように、複素数の線形位相性にはフィルタ係数のエルミート対称性 ( $h(n) = \overline{h(N-n)}$ ) が必要となる。2 分割複素 LPFB は以下のラティス構造で特徴付けられる [5]。

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{S}_{N-1}\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{S}_{N-2}\mathbf{\Lambda}(z)\dots\mathbf{S}_1\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{S}_0 \quad (4.4)$$

ただし  $\mathbf{S}_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) は、 $\mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$  で与えられる。したがって 2 分割 CLPFB の場合の各ビルディングブロックのパラメータ数は 2 である。

#### 4.3 従来法：2 分割複素偶対称奇対称パラユニタリフィルタバンク

2.2 節、定理 2 で述べたように、実係数・複素係数いずれの場合にも 2 分割線形位相パラユニタリフィルタバンクはハールフィルタバンク（低域通過フィルタ  $h_0 = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ 、高域通過フィルタ  $h_1 = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}]$ ）に限る。しかし、厳密な線形位相性を満たすことはできないが、通常対称性 ( $h(n) = h(N-1-n)$ ) の条件の下、実数から複素数に拡張することによって ( $h(n) \in \mathbb{R} \rightarrow h(n) \in \mathbb{C}$ )、任意のフィルタ長（偶数長）でパラユニタリ性と対称性を導入できるクラスが存在することが示されている [44]。これは 2 分割複素偶対称・奇対称パラユニタリフィルタバンク (SAPUFB) と呼ばれている。

2 分割複素 SAPUFB は以下のラティス構造で特徴付けられる。

$$\mathbf{E}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2^N} \begin{bmatrix} v_{k-1} & 0 \\ 0 & v_k \end{bmatrix} \prod_{k=N-2}^0 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v_k \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

一般的に複素フィルタバンクの周波数特性は非対称であるが、この複素 SAPUFB はフィルタ係数の対称性から振幅特性が対称になることが特徴である。これから導かれる事実として次の定理が知られている [44]。

定理 4. 任意の 2 分割複素 SAPUFB に対して、ある完全再構成を満たす実フィルタバンクで振幅特性が一致するものが存在する。

複素フィルタバンクは実フィルタバンクよりも設計パラメータを豊富に持つため、実フィルタバンクよりも良好な周波数選択性を持つ。しかし複素 SAPUFB の周波数特性は実フィルタバンクによって実現できるので、複素フィルタバンクが持つ周波数選択性の高さを引き出す構造であるとは言えないことも問題点として挙げられる。

## 4.4 2分割複素線形位相擬直交フィルタバンク

本節では新しい2分割複素線形位相擬直交フィルタバンク (LPPOFB) の理論とラティス構造による実現を示す。

前節で説明した複素 SAPUFB はパラユニタリ条件  $\mathbf{E}(z)\mathbf{E}^H(z^{-1}) = \mathbf{I}$  と対称性 ( $h(n) = h(N-1-n)$ ) の条件の下, 実数から複素数に係数を拡張することで導かれた。この複素フィルタバンクは, 実フィルタバンクでは実現できないパラユニタリ性と対称性の構造を持つが, 線形位相性を満たしていない問題点があった。

一方, 複素のパラユニタリ条件  $\mathbf{E}(z)\mathbf{E}^H(z^{-1}) = \mathbf{I}$  ではなく, 実フィルタバンクにおけるパラユニタリ条件  $\mathbf{E}(z)\mathbf{E}^T(z^{-1}) = \mathbf{I}$  とエルミート対称性 ( $h(n) = \overline{h(N-1-n)}$ ) を保持したまま係数を実数から複素数へ拡張することで, 従来の実フィルタバンクや複素 SAPUFB では実現できない新しいフィルタバンクが導かれることを示す。

### 4.4.1 擬直交性

ここでは「擬直交性」という数学的概念を導入する。 $\mathcal{H}$  をヒルベルト空間とし, ヒルベルト空間に定義された内積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  とする。内積の定義を以下に示す。

定義 4.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$  ( $\mathbb{C}$  or  $\mathbb{R}$ ) が  $\mathcal{H}$  の内積であるとは,

1. 任意の  $x \in \mathcal{H}$  に対して  $\langle x, x \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$  で  $\langle x, x \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} = \overline{\langle y, x \rangle_{\mathcal{H}}}$
3.  $\langle \alpha x, y \rangle_{\mathcal{H}} = \alpha \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}}$
4.  $\langle x + y, z \rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, z \rangle_{\mathcal{H}} + \langle y, z \rangle_{\mathcal{H}}$

を満たすことである。更に  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  に関して,  $\langle x, y \rangle = 0$  ( $x, y \in \mathcal{H}$ ) となる時  $x$  と  $y$  は互いに直交するという。

今  $\mathcal{H}$  を  $N$  次元複素数ベクトル空間  $\mathbb{C}^N$  とする。 $N$  次元複素数ベクトル空間に定義される最も標準的な内積としては  $x = (x_1, \dots, x_N), y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{C}^N$  として

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} := \sum_{k=1}^N x_k \overline{y_k} \quad (4.6)$$

が挙げられる。また  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{K}$  を

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} := \sum_{k=1}^N x_k y_k \quad (4.7)$$

と定義する。この式もヒルベルト空間  $\mathbb{R}^N$  上の内積となる。 $x \in \mathbb{R}$  に対しては  $x = \bar{x}$  であることから,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$  の定義域を  $\mathbb{R}^N$  に制限すると  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$  に一致する。よって  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$  は  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$  の拡張 (すなわち  $\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}$  ( $x, y \in \mathbb{R}^N$ )) となっている。

ここでもう1つの  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$  の拡張を考えることができる。式 (4.6) で複素共役を外したものを

$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{K}$  として以下のように定義する .

$$\langle x, y \rangle_p = \sum_{k=1}^N x_k y_k \quad (4.8)$$

この  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  は  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$  に一致せず , 更に定義 4 を満たしていない . (例えば  $x = (i, 0, \dots, 0), y = (i, 0, \dots, 0)$  とすると  $\langle x, y \rangle_p = -1 \leq 0$ )

ただし  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  の定義域を  $\mathbb{R}^N$  に制限すれば ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$  に一致し ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  は  $\mathbb{R}^N$  において内積の定義を満たしている . よって  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  は  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$  のもう 1 つの拡張である . この  $\mathbb{R}^N$  において内積となる  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$  から拡張された  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  を用いて

$$\langle x, y \rangle_p = 0 \quad (4.9)$$

を考える . 上式を満たす  $x$  と  $y$  は擬似的な直交関係にあるという意味で , 擬直交であると呼ぶことにする .

#### 4.4.2 擬直交行列

この擬直交の概念を行列に適用し , 擬似的な直交行列「擬直交行列」を定義する .

定義 5.  $\mathbf{E} \in M_N(\mathbb{C})$  が擬直交行列であるとは

$$\mathbf{E}\mathbf{E}^T = \mathbf{E}^T\mathbf{E} = \mathbf{I} \quad (4.10)$$

を満たすことと定義する .

擬直交行列に関して次の命題が成立する .

命題 1.  $\mathbf{A} \in M_N(\mathbb{C})$  と  $\mathbf{B} \in M_N(\mathbb{C})$  が共に擬直交行列であるとする . このとき 2 つの積  $\mathbf{AB}$  は擬直交である

証明.

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^T = \mathbf{ABB}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$$

□

よって擬直交行列の全体は積に関して閉じている .

$\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$  に関する擬直交行列は簡単な操作で構成することができる .

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$  を  $a_{11} \neq \pm ja_{12}$  である行列とする . この  $\mathbf{A}$  を用いて  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$  が擬直交行列になるようにしたい . そのためには

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{b_{11}=a_{11}, b_{12}=a_{12}, b_{21}=-a_{12}, b_{22}=a_{11}} \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

とすれば,

$$\mathbf{BB}^T = \mathbf{B}^T\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

つまり，一行目の成分を反転させ符号を  $-1$  と  $+1$  とおくことで，擬直交行列が構成できることになる．以上をまとめて命題として与える．

命題 2.  $\mathbf{A}$  を  $\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$  とするとき  $a \neq jb$  であれば  $\mathbf{A}$  は擬直交行列である．

#### 4.4.3 2分割複素擬直交フィルタバンク

前項の擬直交行列をフィルタバンクにおけるポリフェーズ行列にも導入する．

定義 6.  $\mathbf{E}(z)$  が擬直交行列であるとは

$$\mathbf{E}(z)\mathbf{E}^T(z^{-1}) = \mathbf{I} \quad (4.11)$$

を満たすことと定義する．更に複素フィルタバンクの分割ポリフェーズ行列が擬直交行列であるとき CPOFB と呼ぶことにする．

式 (4.11) は複素共役を外した擬似的な直交であるから，従来のパラユニタリで成立していた式の複素共役を外して，以下の性質を導くことができる．

命題 3.  $h_0(n)$  ,  $h_1(n)$  を 2 分割 CPOFB の低域通過フィルタ，高域通過フィルタとするとき

$$h_1(n) = -(-1)^n h_0(N-n) \quad (4.12)$$

$$\sum_n h_0(n)h_0(n-2k) = \delta(k) \quad (4.13)$$

が成立する．

#### 4.4.4 2分割複素擬直交フィルタバンクのラティス構造

命題 1 より擬直交行列と擬直交行列の積はまた擬直交行列となることが示された．更に遅延を表すビルディングブロック  $\mathbf{\Lambda}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$  は

$$\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{\Lambda}(z^{-1}) = \mathbf{I}$$

となることから，擬直交行列である．よって  $\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{bmatrix}$  として

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{P}_{N-1}\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{P}_{N-2}\mathbf{\Lambda}(z)\cdots\mathbf{P}_1\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{P}_0 \quad (4.14)$$

で与えられる  $\mathbf{E}(z)$  は擬直交行列となるので，これを分割ポリフェーズ行列とすれば，複素 POFB が設計できる．

逆に，任意の複素 POFB は式 (4.14) で表現できることを示すことができる．

定理 5. 任意の 2 分割複素 POFB は

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{P}_{N-1}\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{P}_{N-2}\mathbf{\Lambda}(z)\cdots\mathbf{P}_1\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{P}_0$$

で表すことができる．ただし

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

証明．Order- $N$  のポリフェーズ行列  $\mathbf{E}_{poly}(z)$  は

$$\mathbf{E}_{poly}(z) = \sum_{k=0}^N \mathbf{E}_k z^{-k}, \quad (4.15)$$

と表現できる．ただし  $\mathbf{E}_k \in M_2(\mathbb{C})$ . 擬直交性の条件より

$$\mathbf{E}_{poly}^T(z^{-1})\mathbf{E}_{poly}(z) = \mathbf{I} \quad (4.16)$$

である．ここで  $\mathbf{E}_0$  と  $\mathbf{E}_N$  を

$$\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} e_{11}^{(0)} & e_{12}^{(0)} \\ e_{21}^{(0)} & e_{22}^{(0)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_N = \begin{bmatrix} e_{11}^{(N)} & e_{12}^{(N)} \\ e_{21}^{(N)} & e_{22}^{(N)} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

とおくと，

$$\mathbf{E}_N^T \mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} e_{11}^{(N)} & e_{21}^{(N)} \\ e_{12}^{(N)} & e_{22}^{(N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11}^{(0)} & e_{12}^{(0)} \\ e_{21}^{(0)} & e_{22}^{(0)} \end{bmatrix} = 0. \quad (4.18)$$

となる． $\mathbf{U}$  を

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} e_{22}^{(N)} & -e_{12}^{(N)} \\ e_{12}^{(N)} & e_{22}^{(N)} \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

とおき  $\mathbf{U}$  を  $\mathbf{E}_{poly}$  の左からかけると

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{E}_{poly} &= \mathbf{U}\mathbf{E}_0 + \mathbf{U}\mathbf{E}_1 z^{-1} + \cdots + \mathbf{U}\mathbf{E}_N z^{-N} \\ &= \begin{bmatrix} \times & \times \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \times & \times \end{bmatrix} z^{-N}, \end{aligned}$$

となる． $\times$  は非ゼロ要素を表す．これより，以下に示すような Order- $N$  と Order- $N-1$  のポリフェーズ行列の間に漸化式が成立する．

$$\mathbf{E}_{poly} = \mathbf{U}^T \mathbf{\Lambda}(z) \hat{\mathbf{E}}(z) \quad (4.20)$$

ここで  $\hat{\mathbf{E}}(z)$  は Order- $(N-1)$  の擬直交行列である．よって帰納的に (4.17) から (4.20) を繰り返すことで，(4.14) の表現を得ることができる．  $\square$

#### 4.4.5 2分割複素擬直交線形位相フィルタバンクのラティス構造

本項では，複素 POFB に線形位相性を導入することを考える．複素 POFB ( $\mathbf{E}_{CPO}(z)$ ) と複素 LPFB ( $\mathbf{E}_{CLP}(z)$ ) の分割ポリフェーズ行列は以下のように書ける．

$$\mathbf{E}_{CPO}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_N \mathbf{\Lambda}(z) \mathbf{P}_{N-1} \cdots \mathbf{P}_1 \mathbf{\Lambda}(z) \mathbf{P}_0 \quad (4.21)$$

$$\mathbf{E}_{CLP}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{H}_N \mathbf{\Lambda}(z) \mathbf{H}_{N-1} \cdots \mathbf{H}_1 \mathbf{\Lambda}(z) \mathbf{H}_0, \quad (4.22)$$

ここで  $\mathbf{P}_k$  と  $\mathbf{H}_k$  は

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{bmatrix} \quad (a_k, b_k \in \mathbb{C}).$$

と書ける．もしビルディングブロックが式 (4.21) と式 (4.22) を同時満たすならば複素 LPPOFB のビルディングブロックを得ることができる．式 (4.21) と式 (4.22) を比較することで以下の必要十分条件を得ることができる．

$$a_k = \overline{a_k}, \quad \overline{b_k} = -b_k. \quad (4.23)$$

これより  $a_k$  は実数,  $b_k$  は純虚数でなければならないということになる．以上より, 複素 LPPOFB のラティス構造が得られる．結局, 複素 LPPOFB のポリフェーズ行列 ( $\mathbf{E}_{CLPPO}$ ) は以下のように表すことができる:

$$\mathbf{E}_{CLPPO}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{V}_N \mathbf{\Lambda}(z) \mathbf{V}_{N-1} \cdots \mathbf{V}_1 \mathbf{\Lambda}(z) \mathbf{V}_0 \quad (4.24)$$

ここで  $\mathbf{V}_k$  は

$$\mathbf{V}_k = \begin{bmatrix} s_k & jt_k \\ -jt_k & s_k \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

と表される行列で,  $s_k$  と  $t_k$  は実数である．

## 4.5 複素フィルタバンクを用いた画像符号化アルゴリズム

既に述べたように複素フィルタバンクを画像の周波数変換に用いた場合, 変換係数は複素数となる．複素数が実部虚部に 2 つの実数を有していることから, 実質 2 倍のサンプル数が出力されることになる．本節では複素フィルタバンクを適用したときに起こる情報量倍増を防止し, 同量の情報量を出力するためのアルゴリズムを提案する．

### 4.5.1 提案アルゴリズム

図 4.1 に提案アルゴリズム全体の流れを示す．提案アルゴリズムは以下の 5 段階の処理によって構成される．

#### 1. 複素数画像作成

$M \times N$  のサイズの画像信号を  $M \times \frac{N}{2}$  のサイズの複素数画像信号に変換する．その処理を図 4.2 に示す．

##### (a) プリフィルタリング

図 4.2 が示すように, 入力画像をダウンサンプリングするために, エイリアシング除去フィルタ  $E_0(z)$ ,  $E_1(z)$  によって入力画像を帯域制限する．

##### (b) 複素数画像化

次に, プリサブバンドフィルタによって処理された 2 つの信号に対して水平または鉛直方向に, 間引き率 2 のダウンサンプリングを行う．本節での提案アルゴリズムの説明では, ダウンサンプリングは水平方向としている．図 4.2 のように, 入力画像を  $x(n_1, n_2)$ ,  $x(n_1, n_2)$  にプリフィルタリング及びダウンサンプリングを施した出力画像



を  $x_0(n_1, n_2)$  及び  $x_1(n_1, n_2)$  とする．この  $x_0(n_1, n_2)$  と  $x_1(n_1, n_2)$  を用いて，複素数画像  $x_c(n_1, n_2)$  を  $x_c(n_1, n_2) = x_0(n_1, n_2) + j \times x_1(n_1, n_2)$  ( $j : \sqrt{-1}$ ) によって生成する．入力画像のサイズを  $M \times N$  とするとき，生成された複素数画像は  $M \times \frac{N}{2}$  となる．同様にして，鉛直方向にダウンサンプリングを施した場合は，複素数画像のサイズは  $\frac{M}{2} \times N$  となる．

#### 2. 複素フィルタバンクによる変換

このフェーズで複素フィルタバンクによって1レベルの変換を行う．通常，入力画像は整数値であり，出力は複素数値となるので，実部・虚部合わせてサンプル数  $2MN$  の実数画像が出力されることになる．しかし，入力画像の複素数化を行うことによって，複素数から複素数への変換とすることができるので，複素数フィルタバンクを用いたとしても同サンプル数（同情報量）を出力することが可能となる．

#### 3. 離散ウェーブレット変換

複素フィルタバンクによる出力の  $LL$  成分に対して DWT を行う．

#### 4. 変換行列の並び替え

最終的に出力された変換複素行列を実部・虚部に分け，更に  $LL \cdot LH \cdot HL \cdot HH$  ごとに実部虚部を並べ替える．

#### 5. 符号化

並べ替えられた変換行列はすべて実数であり，入力信号と同情報量である．この行列に対して EZW-IP 符号化法を適用する．

### 4.5.2 画像の複素化処理において発生するエイリアシングについて

本提案法では，入力画像を複素数化する処理において，1次元のフィルタリングとダウンサンプリングを用いている．この際，水平方向及び鉛直方向のどちらにダウンサンプリングを施すのが適切かという問題が生じる．そのために本項では，画像の複素化処理をマルチレートシステムの理論に基づき考察する．

画像  $X(z_1, z_2)$  に対して， $E_0(z)$ ， $E_1(z)$  によるプリフィルタリング，及びダウンサンプリングを，水平方向 ( $z_1$  方向) に施して複素数画像  $Y_1(z_1, z_2)$  を作成した場合，

$$\begin{aligned} Y_1(z_1, z_2) &= \frac{1}{2} \left\{ E_0(z_1^{\frac{1}{2}}, z_2) X(z_1^{\frac{1}{2}}, z_2) + E_0(-z_1^{\frac{1}{2}}, z_2) X(-z_1^{\frac{1}{2}}, z_2) \right\} \\ &\quad + j \frac{1}{2} \left\{ E_1(z_1^{\frac{1}{2}}, z_2) X(z_1^{\frac{1}{2}}, z_2) + E_1(-z_1^{\frac{1}{2}}, z_2) X(-z_1^{\frac{1}{2}}, z_2) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (E_0(z_1^{\frac{1}{2}}, z_2) + j E_1(z_1^{\frac{1}{2}}, z_2)) X(z_1^{\frac{1}{2}}, z_2) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ (E_0(-z_1^{\frac{1}{2}}, z_2) + j E_1(-z_1^{\frac{1}{2}}, z_2)) X(-z_1^{\frac{1}{2}}, z_2) \right\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

となり，周波数領域では

$$\begin{aligned} Y_1(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) &= \frac{1}{2} \left\{ (E_0(e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2}) + j E_1(e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2})) X(e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2}) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ (E_0(-e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2}) + j E_1(-e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2})) X(-e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2}) \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

となる．同様に，鉛直方向 ( $z_2$  方向) の  $E_0(z)$ ， $E_1(z)$  によるプリフィルタリング，及びダウンサン

プリングによって得られた  $Y_2(z_1, z_2)$  の周波数応答  $Y_2(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$  に対しても同様の計算により，

$$Y_2(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \frac{1}{2} \left\{ (E_0(e^{j\omega_1}, e^{j\frac{\omega_2}{2}}) + jE_1(e^{j\omega_1}, e^{j\frac{\omega_2}{2}}))X(e^{j\omega_1}, e^{j\frac{\omega_2}{2}}) \right\} \\ + \frac{1}{2} \left\{ (E_0(e^{j\omega_1}, -e^{j\frac{\omega_2}{2}}) + jE_1(e^{j\omega_1}, -e^{j\frac{\omega_2}{2}}))X(e^{j\omega_1}, -e^{j\frac{\omega_2}{2}}) \right\} \quad (4.28)$$

となる．ここで，

$$(E_0(e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2}) + jE_1(e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2}))X(e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2}) \text{ と} \\ (E_0(-e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2}) + jE_1(-e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2}))X(-e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2}) \quad (4.29)$$

の重なり，及び

$$(E_0(e^{j\omega_1}, e^{j\frac{\omega_2}{2}}) + jE_1(e^{j\omega_1}, e^{j\frac{\omega_2}{2}}))X(e^{j\omega_1}, e^{j\frac{\omega_2}{2}}) \text{ と} \\ (E_0(e^{j\omega_1}, -e^{j\frac{\omega_2}{2}}) + jE_1(e^{j\omega_1}, -e^{j\frac{\omega_2}{2}}))X(e^{j\omega_1}, -e^{j\frac{\omega_2}{2}}) \quad (4.30)$$

の重なる部分はそれぞれエイリアシングとなり，画像圧縮符号化の際に悪影響を及ぼす．よって

$$|(E_0(e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2}) + jE_1(e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2}))X(e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2})| \times \\ |(E_0(-e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2}) + jE_1(-e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2}))X(-e^{j\frac{\omega_1}{2}}, e^{j\omega_2})| \quad (4.31)$$

及び

$$|(E_0(e^{j\omega_1}, e^{j\frac{\omega_2}{2}}) + jE_1(e^{j\omega_1}, e^{j\frac{\omega_2}{2}}))X(e^{j\omega_1}, e^{j\frac{\omega_2}{2}})| \times \\ |(E_0(e^{j\omega_1}, -e^{j\frac{\omega_2}{2}}) + jE_1(e^{j\omega_1}, -e^{j\frac{\omega_2}{2}}))X(e^{j\omega_1}, -e^{j\frac{\omega_2}{2}})| \quad (4.32)$$

が，できるだけ小さくなる方向に複素数化処理を施す方が，より高い符号化性能を実現できると考えられる．そのためには，入力画像  $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$  が水平方向・鉛直方向のどちらかに初めから帯域制限されていることが望ましい．したがって，画像の複素数化処理は，入力画像の，水平方向または鉛直方向の 1 次元的な相関に関して，より高い方向に行えばよいことになる．

## 4.6 シミュレーション

### 4.6.1 フィルタバンクの設計

本節では画像符号化のシミュレーションに用いるフィルタバンクの設計例を示す．提案法としては，2 分割複素 LPPOFB，比較法としては JPEG2000 に採用されている 9/7 タップ離散ウェーブレット変換 (DWT) (2.6 節，表 2.1)，2 分割複素 PUFB を用いる．

既に示したように，2 分割複素 LPPOFB 及び 2 分割複素 PUFB の分割ポリフェーズ行列は式 (4.24)，式 (4.1) に示したものである．フィルタ長  $N$  は 16 とする．このときの設計パラメータ数を，表 4.1 に示す．フィルタバンク設計に用いる評価関数は阻止域減衰量  $C_{STOP}$ ・DC 漏れ  $C_{DC}$  である (2.5 節)． $C_{STOP}$  と  $C_{DC}$  の重みつき線形結合，

$$C = C_{STOP} + C_{DC} \quad (4.33)$$

が最小となるように，Matlab<sup>®</sup>，optimization toolbox の関数 fminunc による非線形最適化を行う．

表 4.1 設計パラメータ数

	複素 PUFB	複素 LPPOFB
フィルタ長 $N = 16$	32	7

設計された 2 分割複素 LPPOFB の周波数応答を図 4.3(a) に示し、比較として 2 分割複素 PUFB、9/7 タップ DWT 及びハールフィルタバンクの周波数応答を図 4.3(b), (c), (d) に示す。ハールフィルタバンクはフィルタ長 2 であることから急峻な周波数特性を実現できず、良好な周波数選択性能を持たないのに対し、2 分割複素 LPPOFB、2 分割複素 CPUFB、9/7 タップ DWT は高い周波数選択性能を有する。また 2 つの複素フィルタバンクは、各複素フィルタの係数が実部・虚部に 2 つの設計パラメータを持つため、9/7 タップ DWT よりも急峻な周波数特性を実現している。更に表 4.1 が示すように、2 分割複素 LPPOFB は 2 分割複素 CPUFB よりも設計パラメータ数が少ない分、周波数選択性能は劣る。しかし線形位相性を有しているため、画像圧縮符号化に有効な対称拡張の使用が可能である。

#### 4.6.2 画像圧縮符号化

本節では前節で示した提案フィルタバンクの応用例として、提案アルゴリズムを用いた画像圧縮符号化を行う。圧縮画像の画質を評価する関数として PSNR を用いる。

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{255^2}{MSE} \right) \quad (4.34)$$

ここで MSE は元画像と再構成画像との平均二乗誤差である。複素 LPPOFB はエルミート対称拡張法を用いる。比較対象として用いる複素 PUFB は周期拡張、9/7 タップ DWT は対称拡張法を用いる。シミュレーションでは、まず DWT を使用し、ビットレート 1[bpp] の下で画像圧縮符号化した際の PSNR を算出する。次に複素 LPPOFB、複素 PUFB を使用して、DWT のビットレート 1[bpp] によって算出された PSNR に一致するように、ビットレートを調整して画像圧縮符号化を行う。各複素フィルタバンクについて、ビットレートの結果が 1[bpp] を下回る場合、DWT を用いて画像圧縮した際の画質を、より少ないビットで表現できることになり、性能の高さを示すことになる。また提案アルゴリズムである画像の複素化を行う際、水平方向、鉛直方向のそれぞれの場合についてシミュレーションを行う。

複素 LPPOFB 及び複素 PUFB を用いた画像圧縮符号化の結果のビットレートを、表 4.2、表 4.3 に、結果画像を図 4.4 示す。また表 4.4 に、画像に対して鉛直方向・水平方向に 9/7 タップ DWT の高域通過フィルタを施した際のエネルギーを示す。表 4.2、4.3 の結果を合わせると、4.5.2 項で議論したように、画像の高周波成分のエネルギーが少ない（より信号の相関が高い）方向の場合の方が、高い符号化性能が得られていることが確認できる。また表 4.2、4.3 が示すように、水平方向及び鉛直方向のどちらの場合の複素化においても、複素 LPPOFB、複素 PUFB は DWT が 1[bpp] のビットレートを必要とする画質を同等もしくはそれ以下のビットレートでその画質を表現している。更に、複素 LPPOFB は、DWT よりも良好な周波数選択性能を有しているため、DWT よりも高い符号化性能を有しており、また複素 PUFB と異なり、画像端において対象拡張法が使用できるため、全ビットレートの結果の平均に関して、複素 PUFB より高い圧縮が実現で

表 4.2 画像圧縮符号化結果 (複素 LPPOFB)

Image	PSNR	9/7 タップ DWT	複素 LPPOFB (水平)	複素 LPPOFB (鉛直)
<i>Barbara</i>	34.915	1.000	0.956	0.915
<i>Baboon</i>	27.592	1.000	0.988	0.996
<i>Bridge</i>	28.744	1.000	0.994	0.999
<i>Tank</i>	35.126	1.000	0.976	0.978
<i>Car and APC</i>	35.746	1.000	0.984	0.978
平均		1.000	0.970	0.971

表 4.3 画像圧縮符号化結果 (複素 PUFB)

Image	PSNR	9/7 タップ DWT	複素 PUFB (水平)	複素 PUFB (鉛直)
<i>Barbara</i>	34.915	1.000	0.948	0.909
<i>Baboon</i>	27.592	1.000	0.999	1.003
<i>Bridge</i>	28.744	1.000	1.002	1.006
<i>Tank</i>	35.126	1.000	0.984	0.993
<i>Car and APC</i>	35.746	1.000	0.982	0.978
平均		1.000	0.975	0.976

表 4.4 画像の高周波成分のエネルギー

Image	水平方向	鉛直方向
<i>Barbara</i>	1.216e+6	3.947e+5
<i>Baboon</i>	1.116e+6	1.603e+6
<i>Bridge</i>	9.436e+5	1.043e+6
<i>Tank</i>	4.825e+5	5.639e+5
<i>Car and APC</i>	6.829e+5	6.526e+5

きていることが確認できる。

## 4.7 本章の結論

本章では擬似的な直交性に基づく新しい複素フィルタバンクのクラスである“2分割複素擬直交フィルタバンク/線形位相擬直交フィルタバンク”を提案した。提案フィルタバンクは、擬似的な直交性を有することから、設計が簡易であることと線形位相性を有することから画像端において対称拡張法の使用が可能で圧縮効率が向上するというメリットを兼ね備えたものである。更に特筆すべき点は、提案フィルタバンクはハールフィルタバンクのようにフィルタ長が2に限定されるものではなく、十分長いフィルタ長によって設計できるので、高い周波数選択性能が得られる。

また提案複素フィルタバンクの実用例として画像圧縮符号化に適用した。ただし、一般の複素フィルタバンクによる変換の冗長性は画像圧縮符号化において問題となるので、入力画像を複素数

化するアルゴリズムを提案した上で、提案複素フィルタバンクを適用した。このアルゴリズムを用いて画像圧縮符号化を行った結果、良好な周波数特性と、対称拡張法の使用が可能な、複素擬直交線形位相フィルタバンクは従来の JPEG2000 における離散ウェーブレット変換よりも高い画像圧縮符号化性能を示した。

今回の複素擬直交フィルタバンクは簡単のために 2 分割に限定したが、これを一般の  $M$  分割にすることによって周波数選択性能を高めることができ、更に性能の高い画像符号化法が実現できることが期待できる。

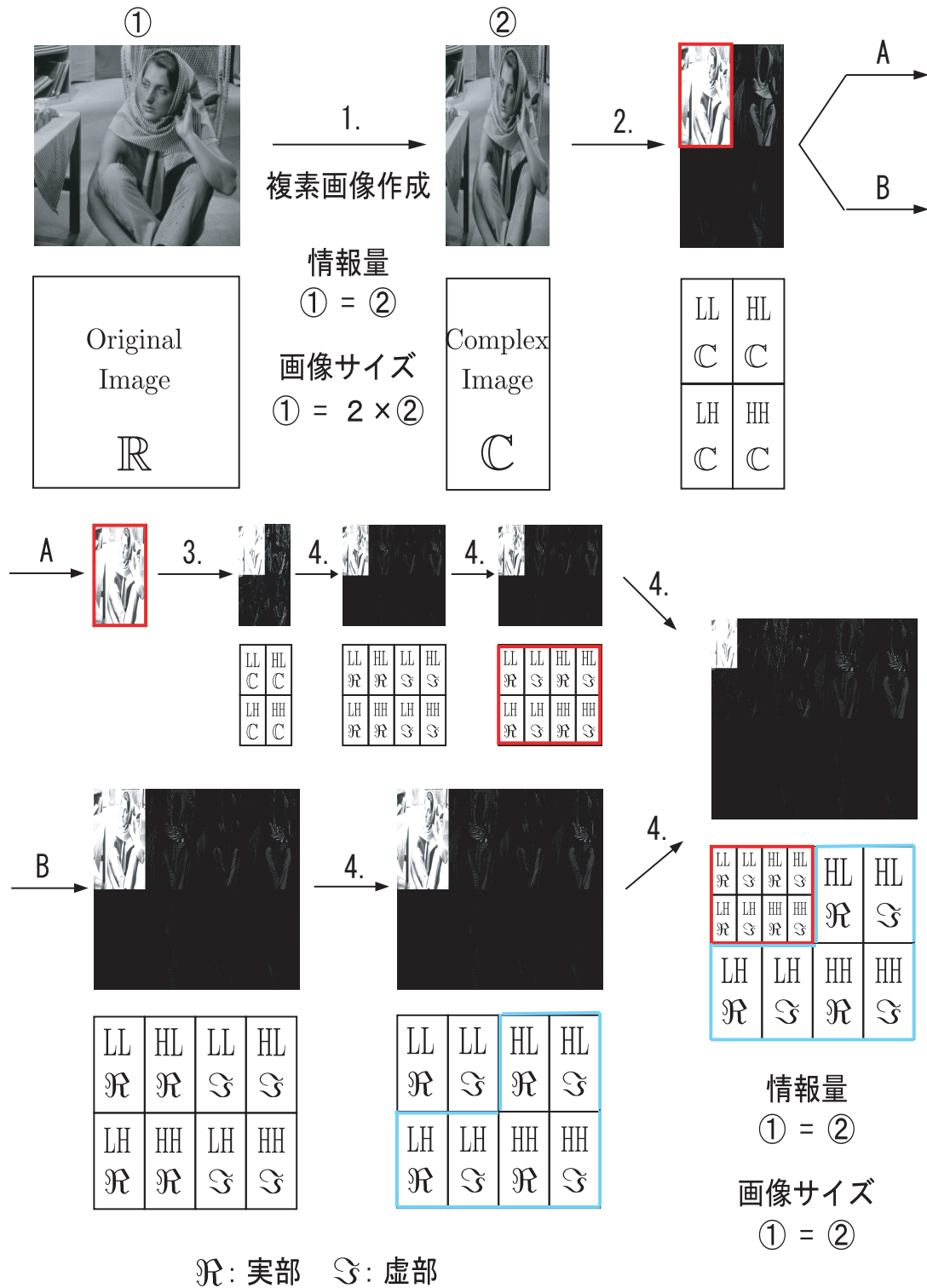


図 4.1 提案アルゴリズム全体図 . 1 : 入力画像のサイズ  $M \times N$  に対して ,  $M \times \frac{N}{2}$  のサイズを持つ複素数画像を作成 . 2 : 複素フィルタバンクを用いて複素数画像を変換する . 複素信号から複素信号となるのでサンプル数の増加は発生しない . 3 : 複素フィルタバンクで得られた LL 成分に対して実ウェーブレット変換を施す . 4 : すべての実部・虚部を並べ替えて最終的な出力画像を生成する . この後に , 出力画像を EZW-IP によって符号化する .

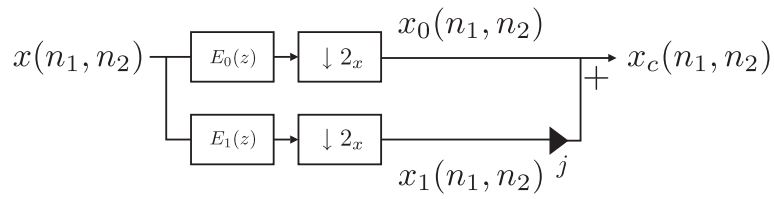


図 4.2 プリフィルタのシステム .  $E_0(z)$  ,  $E_1(z)$  はプリフィルタ .  $\downarrow 2_x$  は画像の水平方向のダウンサンプリング .  $x(n_1, n_2)$  は入力画像 ,  $x_0(n_1, n_2)$  及び  $x_1(n_1, n_2)$  はプリフィルタリングとダウンサンプリングされた出力画像 ,  $x_c(n_1, n_2)$  は複素数画像 .

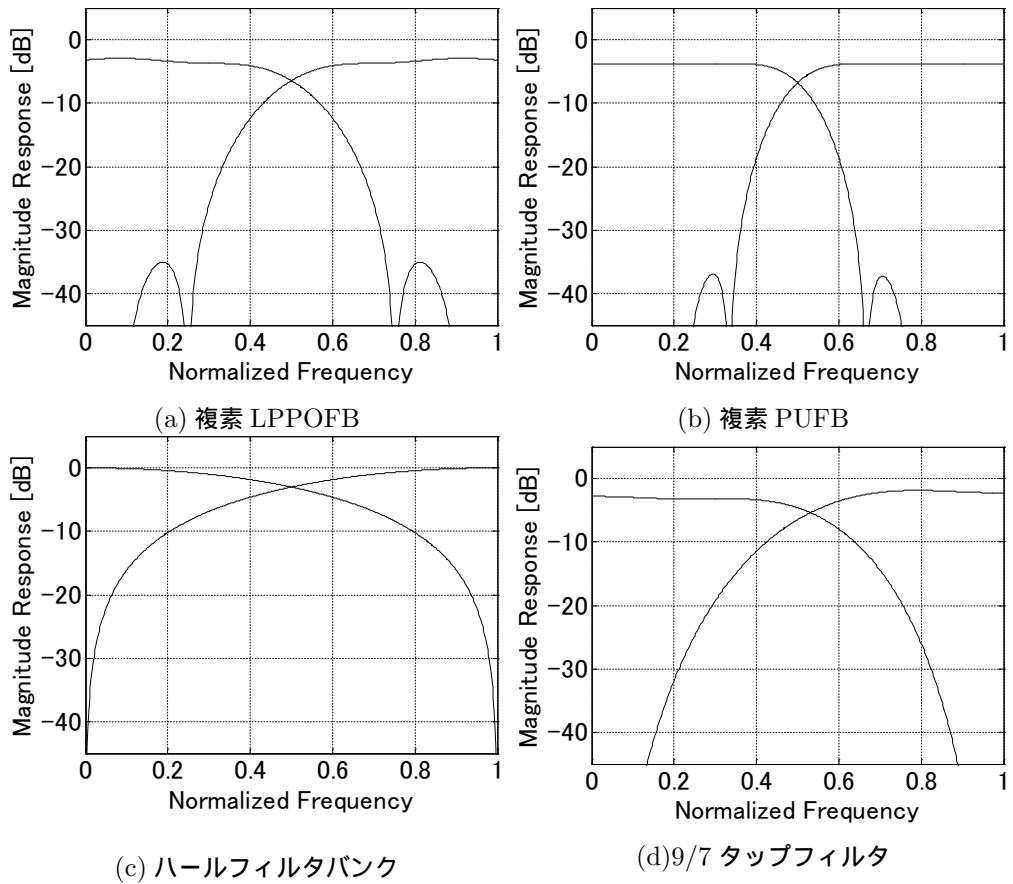


図 4.3 設計されたフィルタバンクの周波数応答



(a)9/7 タップ DWT



(b) 複素 PUFB



(c) 複素 LPPOFB



(d)9/7 タップ DWT



(e) 複素 PUFB



(f) 複素 LPPOFB

図 4.4 画像圧縮符号化の結果画像 . (a) , (b) , (c) : *Barbara* (PSNR: 34.915 [dB]) , (d) , (e) , (f) : *Baboon* (PSNR: 27.592 [dB]) .



# 第 5 章

## 最小二乗法に基づく Dual-tree 複素ウェーブレット変換 の設計法と画像ノイズ除去への適用

### 5.1 本章の概要

本章では、複素ウェーブレット変換・複素フィルタバンクが持つ利点としてシフト不変性・方向分解能の高さに焦点を当てる。

離散ウェーブレット変換 (DWT) は画像圧縮や画像ノイズ除去など、信号処理の様々な場面に応用されているが、いくつかの欠点が知られている。1 つ目はシフト不変性の欠如が挙げられる。すなわちフィルタバンクに含まれる間引き処理の影響で、信号の整数シフトに対して出力信号の波形が大きく変化してしまうという欠点である。また 2 つ目としては 2 次元信号 (画像など) に対する方向分解能が乏しいという欠点である。すなわち、可分型 2 次元 DWT は 1 次元低域通過・高域通過フィルタを鉛直・水平方向に処理することにより実行されるため、画像から鉛直・水平方向のエッジ情報しか抽出できないということである。これら 2 つの欠点は画像処理の応用で悪影響を及ぼす。例えば画像ノイズ除去では、DWT の変換係数に閾値処理を行う際に、シフト不変性の欠如によって、画像のノイズレベルが高い場合に効率良くノイズが除去できないことや、方向分解能の低さから、様々なエッジの情報が失われ、詳細なテクスチャが著しく損傷する問題が生じる。この問題点を改善するものとして、近年射影型複素ウェーブレット変換、RI-Spline 複素ウェーブレット変換など、いくつかの複素ウェーブレット変換が提案されている [52–60]。その中で、特に Dual-tree 複素ウェーブレット変換 (DTCWT) が、その有効性から注目されている [56–60]。DTCWT では DWT のフィルタバンクを 2 つ並列に使い、対となるフィルタ間に半サンプル遅延の関係を持たせている。これにより、方向分解能の改善及び近似的シフト不変性が実現できる。よってこの変換を用いることによって、例えば画像ノイズ除去などでは、詳細なテクスチャの画質を保存しながら、画像を復元することが可能となる。本章では DTCWT に用いられるフィルタの設計法に着目し、従来法よりも性能の高い DTCWT を設計することを目的とする。

DTCWT の設計に必要な半サンプル遅延条件は、FIR フィルタでは厳密に実現することができないため、近似的に条件を満たす DTCWT を設計することになる。よって半サンプル遅延条件を精度良く近似し、かつ高い周波数選択性を持つような、FIR フィルタに基づく DTCWT の設計法が重要であり、盛んに研究されている [81–91]。いくつかの従来法の中で、文献 [88] で提案されている全域通過フィルタを用いた手法が有効であることが知られている。これは DTCWT の各サブ

バンドフィルタを2つのフィルタの合成として実現する手法である。1つ目のフィルタは振幅特性を決定し、2つ目のフィルタが半サンプル遅延のための位相特性を決定する。しかし、与えられた設計パラメータを2つの別々な近似に分配しなければならないことから、全体の設計パラメータを有効に活用することができず、十分な周波数選択性と半サンプル遅延条件を満たす DTCWT を設計することができないという問題点がある。

本章では、最小二乗法に基づく DTCWT の設計法を提案する。提案法では1つのフィルタによって、振幅特性と半サンプル遅延のための位相特性を同時に近似する。この手法によって、与えられた設計パラメータのすべてが振幅特性と位相特性の両方の近似に貢献することが可能となる。したがって従来法よりも、より高い周波数選択性・半サンプル遅延近似精度を持つ DTCWT の設計が可能となる。振幅特性と位相特性の最適化に関しては、周波数選択性と半サンプル遅延近似精度を評価する二乗誤差関数を定義し、最小二乗法に基づく最適化アルゴリズムによってフィルタを設計する。そして設計された DTCWT が、シフト不変性、高い方向分解能を持つことをシミュレーションによって評価する。更に本提案法を画像ノイズ除去に応用し、実用上の有効性を評価する。

本章の構成を以下に示す。まず本章の前提事項を 5.2 節にて述べる。5.2.1 項において、ウェーブレット変換の問題点である、シフト不変性の欠如と方向分解能の低さを述べ、5.2.2 節において、DTCWT の構造、設計条件、シフト不変性、方向分解能を説明する。次に 5.3 節にて、DTCWT の従来設計法として全域通過フィルタを用いた手法 [88] を説明し、問題点を述べる。後に 5.4 節にて最小二乗法に基づく提案設計法を述べる。5.5 節において、提案法で設計された DTCWT の性能をシフト不変性近似精度・方向分解能・画像ノイズ除去などに関して従来法と比較し有効性を示す。最後に 5.6 節にて本章を結ぶ。

## 5.2 準備

### 5.2.1 離散ウェーブレット変換の問題点

JPEG2000 などに用いられている DWT は、画像圧縮を始めとして様々な応用で成功している。しかし、DWT にはシフト不変性の欠如・方向分解能の低さの2つの欠点があることが知られている [27]。本節ではこれらの詳細と原因を説明する。

#### シフト不変性の欠如

シフト不変性を持たない場合、入力信号のシフトに依存して出力信号の波形が大きく変化してしまう。この欠点により、例えば高いレベルのノイズを含む画像のウェーブレット変換係数はそのエネルギーが激しく変化し、変換係数に対する閾値処理などを行った結果、ノイズが効率良く除去できないという問題が生じる。またフーリエ変換の位相相関法に代表される認識技術にも応用することができない。

逆にシフト不変性を持つ場合、入力信号のシフトに依らずに安定した出力信号が得られる。結果、画像処理で閾値処理などを行った場合、ノイズ除去の性能が向上することや、認識のためのマッチング手法にも応用できる。

DWT のシフト不変性の欠如のメカニズムは以下のように説明できる。まず入力信号に間引き率 2 のダウンサンプリングを伴う DWT 処理を図 5.1 のように表すことができる。更に、入力信号



図 5.1 16 サンプルの入力信号に対する DWT の出力信号

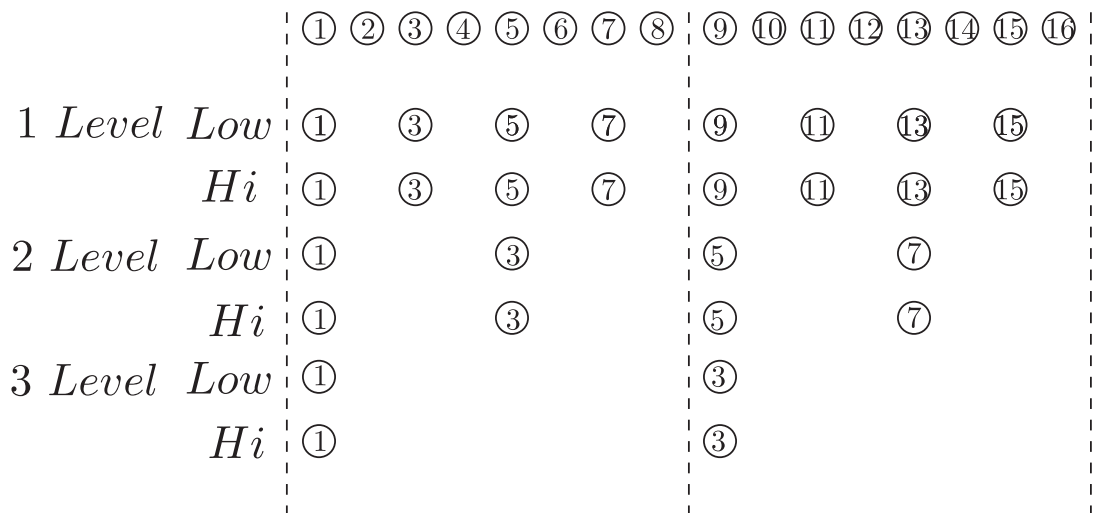


図 5.2 1 サンプルシフトされた 16 サンプルの入力信号に対する DWT の出力信号

を 1 サンプルシフトさせた信号に対しては，図 5.2 のように表すことができる．ただし，図中の  $0, 1, \dots, 16$  の数字は，時間領域における各サンプルのインデックスを示す．図 5.1，図 5.2 が示すように，1 サンプルシフトしたことによって，フィルタリングの後の信号から異なる部分信号列をサンプリングして出力しまうため，出力信号の波形は大きく変化してしまうことになる．

#### 可分型 2 次元離散ウェーブレット変換の低い方向分解能

1 次元 DWT を水平方向，鉛直方向に処理する，可分型 2 次元 DWT は方向分解能が低く，画像のエッジ成分の検出が  $0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ$  の 3 パターンでしか行うことができない．更に  $\pm 45^\circ$  のエッジ成分が同一サブバンドに含んでしまい，分離して扱うことができない．このメカニズムを 2.4 節の 1 次元 DWT に従って，可分型 2 次元 DWT のウェーブレット基底関数を用いて以下のように説明できる．

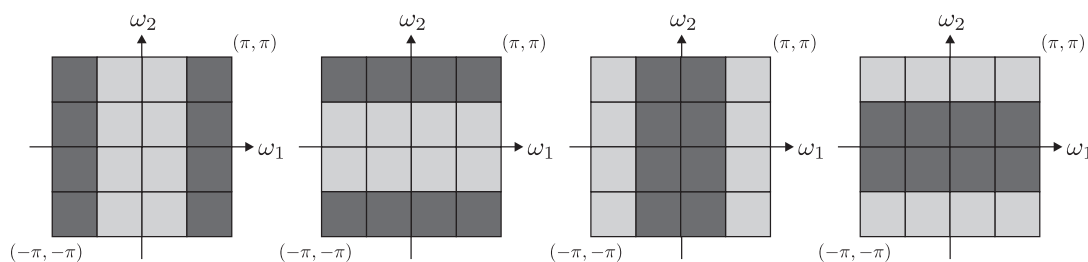


図 5.3  $\phi(x)$ ,  $\phi(y)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\psi(y)$  の周波数スペクトル  $\hat{\phi}(\omega_1)$ ,  $\hat{\phi}(\omega_2)$ ,  $\hat{\psi}(\omega_1)$ ,  $\hat{\psi}(\omega_2)$  . ただし , 色が濃い部分が阻止域 , 色が薄い部分が通過域を示す .

可分型 2 次元 DWT のウェーブレット関数は , 1 次元スケーリング関数  $\phi(\cdot)$  及び 1 次元ウェーブレット関数と  $\psi(\cdot)$  を用いて , 以下の 3 種類から構成される .

$$\psi_1(x, y) = \phi(x)\psi(y) \quad (LH \text{ wavelet}) \quad (5.1)$$

$$\psi_2(x, y) = \psi(x)\phi(y) \quad (HL \text{ wavelet}) \quad (5.2)$$

$$\psi_3(x, y) = \psi(x)\psi(y) \quad (HH \text{ wavelet}) \quad (5.3)$$

更に 2 次元スケーリング関数  $\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$  を用いると , 2 次元可分型 DWT は与えられた画像  $f(x, y)$  に対して ,

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \sum_{j,m,n} c_{j,m,n} \phi_{j,m,n}(x, y) + \sum_{j,m,n} d_{j,m,n}^{(LH)} \psi_{1,j,m,n}(x, y) \\ & + \sum_{j,m,n} d_{j,m,n}^{(HL)} \psi_{2,j,m,n}(x, y) + \sum_{j,m,n} d_{j,m,n}^{(HH)} \psi_{3,j,m,n}(x, y) \end{aligned} \quad (5.4)$$

と表したときの  $c_{j,m,n}$ ,  $d_{1,j,m,n}$ ,  $d_{2,j,m,n}$ ,  $d_{3,j,m,n}$  を求める演算であると考え . ただし ,

$$\begin{aligned} c_{j,m,n} &= \langle f, \phi_{j,m,n} \rangle, \quad \phi_{j,m,n}(x, y) = 2^j \phi(2^j x - m, 2^j y - n) \\ d_{j,m,n}^{(LH)} &= \langle f, \psi_{1,j,m,n} \rangle, \quad \psi_{1,j,m,n}(x, y) = 2^j \psi_1(2^j x - m, 2^j y - n) \\ d_{j,m,n}^{(HL)} &= \langle f, \psi_{2,j,m,n} \rangle, \quad \psi_{2,j,m,n}(x, y) = 2^j \psi_2(2^j x - m, 2^j y - n) \\ c_{j,m,n}^{(HH)} &= \langle f, \psi_{3,j,m,n} \rangle, \quad \psi_{3,j,m,n}(x, y) = 2^j \psi_3(2^j x - m, 2^j y - n) \end{aligned}$$

である .  $d_{1,j,m,n}$ ,  $d_{2,j,m,n}$ ,  $d_{3,j,m,n}$  は  $f(x, y)$  に含まれる  $\psi_{1,j,m,n}(x, y)$ ,  $\psi_{2,j,m,n}(x, y)$ ,  $\psi_{3,j,m,n}(x, y)$  の量を表している . よって可分型 2 次元 DWT が抽出している高周波情報は ,  $\psi_1(x, y)$ ,  $\psi_2(x, y)$ ,  $\psi_3(x, y)$  の形状依存することになる . これらの形状を周波数領域から考察する .

$\phi(x)$ ,  $\phi(y)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\psi(y)$  は  $x$  軸方向 ,  $y$  軸方向の低周波数関数及び高周波関数であるため , 周波数領域におけるスペクトル  $\hat{\phi}(\omega_1)$ ,  $\hat{\phi}(\omega_2)$ ,  $\hat{\psi}(\omega_1)$ ,  $\hat{\psi}(\omega_2)$  はそれぞれ図 5.3 のようになる . ここで , 色が濃い部分が阻止域であり , 色が薄い部分が通過域である .  $\psi(x)$  は実関数であるので , フーリエ変換の性質によってそのスペクトルは原点に対して対称に現れる .  $\hat{\psi}_1(\omega_1, \omega_2) = \hat{\phi}(\omega_1)\hat{\psi}(\omega_2)$ ,  $\hat{\psi}_2(\omega_1, \omega_2) = \hat{\psi}(\omega_1)\hat{\phi}(\omega_2)$ ,  $\hat{\psi}_3(\omega_1, \omega_2) = \hat{\psi}(\omega_1)\hat{\psi}(\omega_2)$  であることから , 周波数スペクトル  $\hat{\psi}_1(\omega_1, \omega_2)$ ,  $\hat{\psi}_2(\omega_1, \omega_2)$ ,  $\hat{\psi}_3(\omega_1, \omega_2)$  は図 5.4 のようになる . よって , 周波数スペクトル  $\hat{\psi}_1(\omega_1, \omega_2)$ ,  $\hat{\psi}_2(\omega_1, \omega_2)$ ,  $\hat{\psi}_3(\omega_1, \omega_2)$  を逆フーリエ変換することによって , 時間領域における  $\psi_1(x, y)$ ,  $\psi_2(x, y)$ ,  $\psi_3(x, y)$  の形状は図 5.5 のようになる . 例えば ,  $\psi_1(x, y)$  は

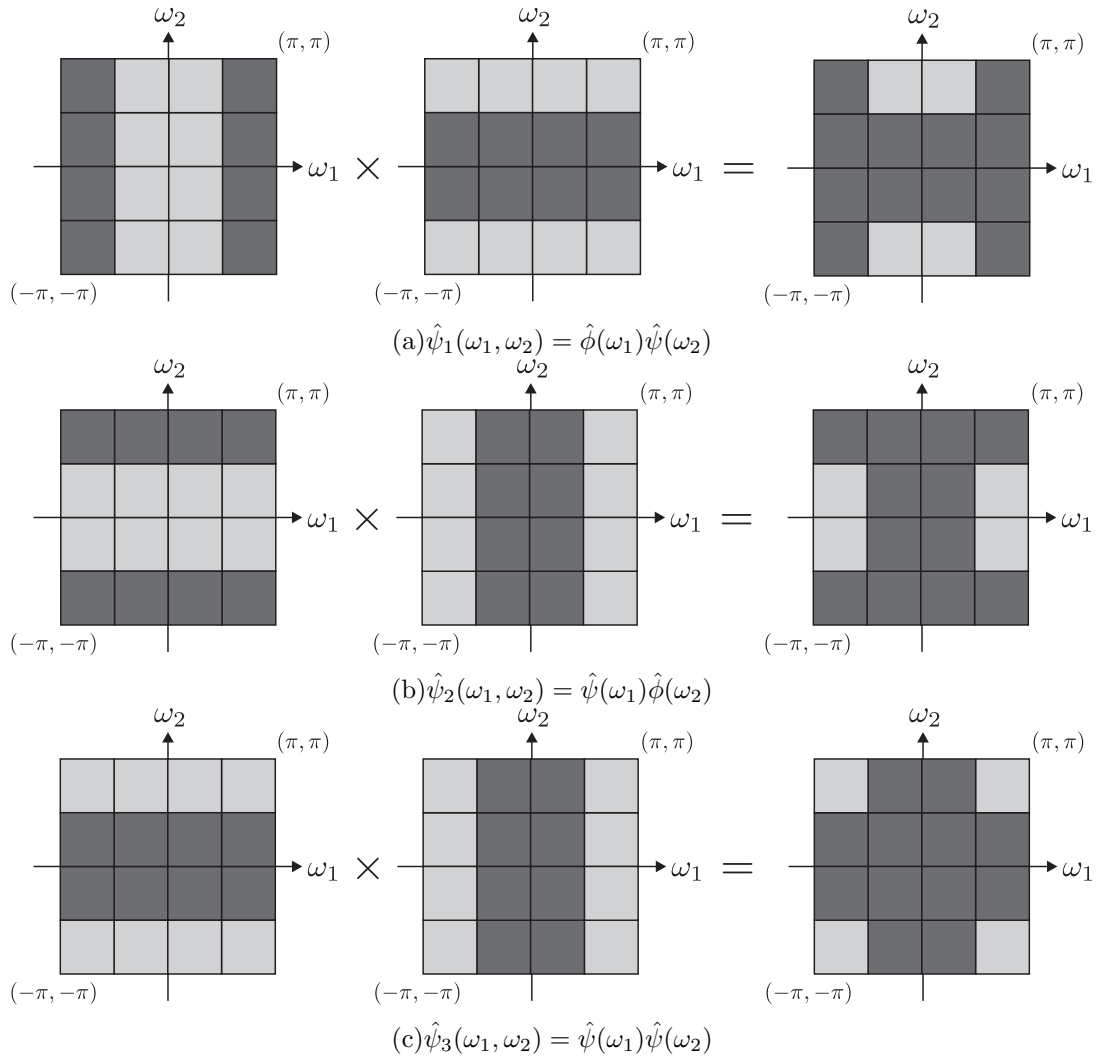


図 5.4 2次元ウェーブレット関数の周波数スペクトル。(a)  $\hat{\psi}_1(\omega_1, \omega_2)$  (LH), (b)  $\hat{\psi}_2(\omega_1, \omega_2)$  (HL), (c)  $\hat{\psi}_3(\omega_1, \omega_2)$  (HH). ただし, 色が濃い部分が阻止域, 色が薄い部分が通過域を示す.

$$\psi_1(x, y) = \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \right) e^{j\omega_1 x} e^{j\omega_2 y} dx dy \quad (5.5)$$

として導かれる.

以上の議論から可分型2次元DWTは $0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ$ の3通りの高周波成分情報しか抽出できないということが分かる. 実際, テスト画像 *Zone plate* (図 5.6(a)) に可分型2次元DWTを1レベル行った出力画像を図 5.6(b) に示す. *Zone plate* は画像の中心から外側に向って半径が広がる円を複数並べた画像であり, 周波数 $0 \sim \pi$ , 角度 $0^\circ \sim 180^\circ$ のすべてのエッジ成分を含む. 図 5.6(b) から分かるように, DWTは*Zone plate*のすべてのエッジ成分を鉛直・水平・ $\pm 45^\circ$ の成分にしか分解できていない. 更に $\pm 45^\circ$ は $+45^\circ$ と $-45^\circ$ のエッジ成分が混在しており, 区別して取り扱うことができない.

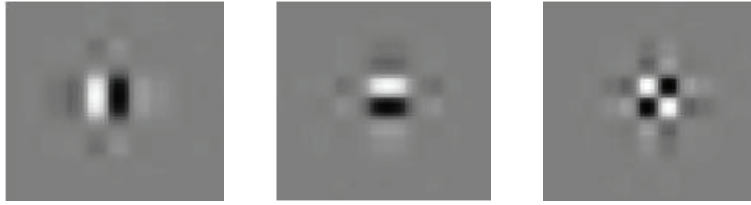


図 5.5 DWT において取り扱うことができるエッジパターン (2次元可分型 DWT のウェーブレット関数)

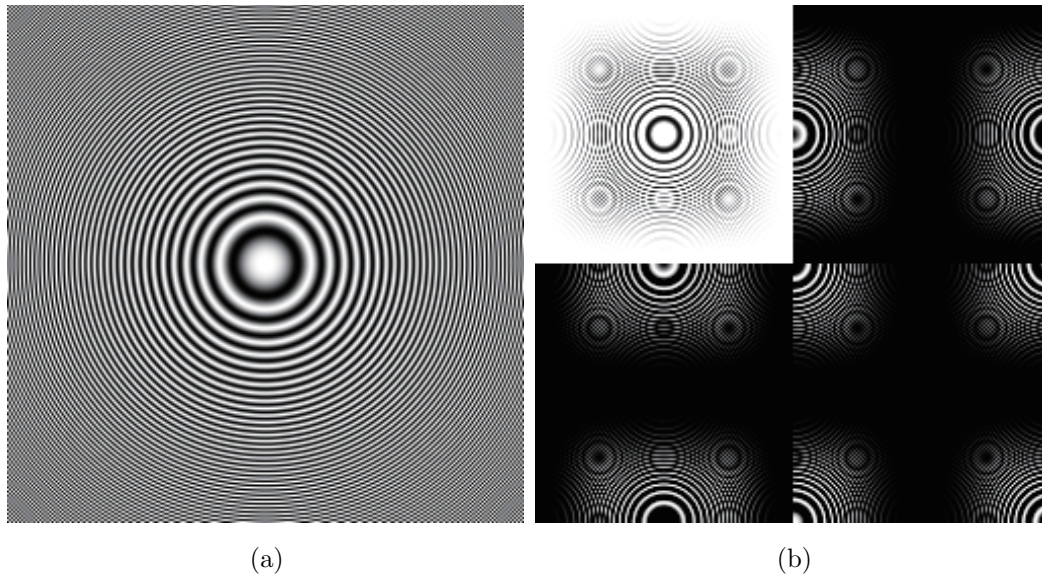


図 5.6 (a) 原画像 *Zone plate* (b) *Zone plate* の可分型 2次元 DWT による出力画像 (左上: 低周波数成分, 右上: 鉛直方向のエッジに対応する高周波成分, 左下: 水平方向のエッジに対応する高周波成分, 右下:  $\pm 45^\circ$  のエッジに対応する高周波成分. 明るい画素は, 変換された係数が高いエネルギーを持つことを示す. この図が示すように, 可分型 2次元 DWT は  $0^\circ \sim 180^\circ$  のすべての角度のエッジ成分を, 鉛直 ( $180^\circ$ )・水平 ( $0^\circ$ )・ $\pm 45^\circ$  の 3種類に分解している.

これらの問題点を改善する手法として, DTCWT が提案されている [27, 81, 86, 87]. 次節において, DTCWT について説明を行う.

## 5.2.2 Dual-Tree 複素ウェーブレット変換

DTCWT とは, 図 5.7 に示すような, 2つの 2分割フィルタバンクを並列に配置した構造をとる. この変換は複素変換であり, まず上のツリーにおいて構成される離散ウェーブレット変換より実部を出力し, 下のツリーより虚部を出力する構造になっている. DTCWT には 2組のフィルタを用いており, それぞれにおいて完全再構成が満たされている.  $h_0(n)$ ,  $h_1(n)$  はそれぞれ上のツリーの低域通過フィルタと高域通過フィルタであり,  $g_0(n)$  と  $g_1(n)$  はそれぞれ下のツリーの低域通過フィルタと高域通過フィルタである. フィルタがそれぞれ実数であるので, DTCWT を実行するには複素数の計算は必要としない. また, DTCWT は最大間引きフィルタバンクを 2つ持つため, 全体のフィルタバンクとしては最大間引き変換ではなく, 入力信号に対し 2倍のサンプル

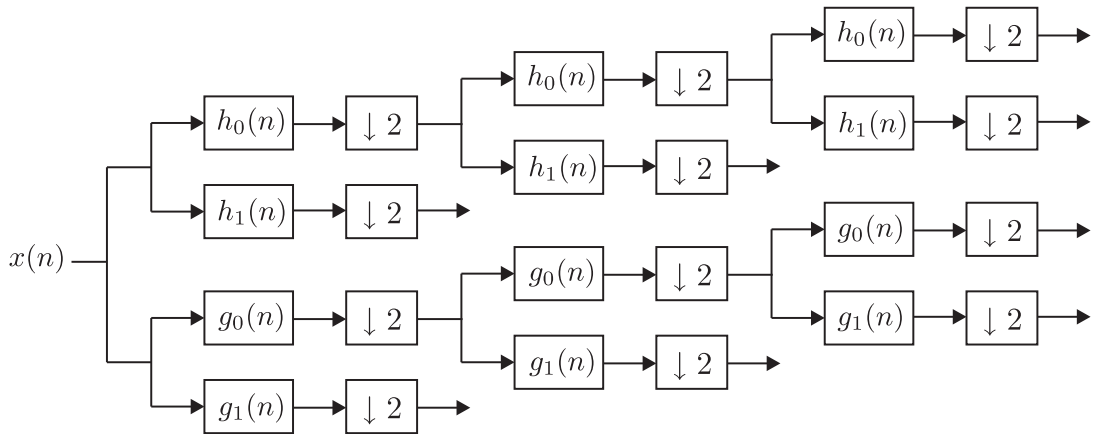


図 5.7 DTCWT のフィルタバンク．上のツリー：複素数の実部を出力するフィルタバンク，下のツリー：複素数の虚部を出力するフィルタバンク．

数の信号を出力する．つまり 2 倍の冗長度を持つことになる．ここで DTCWT を設計するにあたり，重要なヒルベルト変換と解析信号（または解析関数）を説明しておく．

#### ヒルベルト変換

定義 7. 実時間信号  $x(t)$  に対して

$$x_{\mathcal{H}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (5.6)$$

のように  $x_{\mathcal{H}}(t)$  を得ることを  $x(t)$  のヒルベルト変換と呼び， $x(t)$  と  $x_{\mathcal{H}}(t)$  はヒルベルト変換対の関係にあるという．

フィルタ  $h_{\mathcal{H}}(t)$  を

$$h_{\mathcal{H}}(t) = \frac{1}{\pi t} \quad (5.7)$$

とすると，上式は

$$x_{\mathcal{H}}(t) = \frac{1}{\pi} h_{\mathcal{H}}(t) * x(t) \quad (5.8)$$

の畳み込み演算で表現できる．また周波数領域では式 (5.8) は

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\mathcal{H}}(\omega) &= -j \operatorname{sgn}(\omega) \hat{x}(\omega) \\ \operatorname{sgn}(\omega) &= \begin{cases} 1 & (\omega > 0) \\ 0 & (\omega = 0) \\ -1 & (\omega < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.9)$$

となる．

#### 解析信号

ヒルベルト変換には，信号処理において有効かつ興味深い性質がある．まず，第一に， $x(t) = a(t) \cos(\rho(t))$  とするとき， $x_{\mathcal{H}}(t) = a(t) \sin(\rho(t))$  となることから， $x(t)$  と  $x_{\mathcal{H}}(t)$  は同じ振幅項

$a(t)$  を持ち、位相項には  $\frac{\pi}{2}$  のずれがある．第二に、ヒルベルト変換器の周波数応答を  $H_{\mathcal{H}}(\omega)$  とすると、式 (5.8) より、

$$H_{\mathcal{H}}(\omega) = \begin{cases} -j, & (\omega > 0) \\ 0, & (\omega = 0) \\ j, & (\omega < 0) \end{cases} \quad (5.10)$$

とすることができる．ここで、実時間信号  $x(t)$  を実部、 $x(t)$  にヒルベルト変換をかけた信号  $x_{\mathcal{H}}(t)$  を虚部に用いて、複素数信号  $x_a(t)$  として表現すると

$$\begin{aligned} x_a(t) &= x(t) + jx_{\mathcal{H}}(t) \\ &= a(t) \cos(\rho(t)) + ja(t) \sin(\rho(t)) \\ &= a(t)e^{j\rho(t)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

と表すことができる．したがって、 $x(t) \rightarrow x_a(t)$  を生成するフィルタを  $H_a(\omega) := 1 + jH_{\mathcal{H}}(\omega)$  とすると、以下に示すように、 $H_a(\omega)$  によって入力信号の負の周波数成分の振幅が抑制され 0 となる．

$$\begin{aligned} H_a(\omega) &= 1 + jH_{\mathcal{H}}(\omega) \\ &= \begin{cases} 2, & (\omega > 0) \\ 1, & (\omega = 0) \\ 0, & (\omega < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.12)$$

このような、ヒルベルト変換の関係にある 2 つの関数  $x(t)$  と  $x_{\mathcal{H}}(t)$  の複素数合成  $x(t) + jx_{\mathcal{H}}(t)$  を解析信号 (関数) と呼び、DTCWT の理論において重要な役割を果たす． $x(t)$  は実数であるので、それをフーリエ変換した  $\hat{x}(\omega)$  は複素共役対称である．すなわち、フィルタ  $H_a(\omega)$  を用いることにより、 $\omega > 0$  においては、 $\hat{x}_a(\omega) = 2\hat{x}(\omega)$ 、 $\omega < 0$  においては、 $\hat{x}_a(\omega) = 0$  とすることができる．そして、位相項が  $\rho(t) = \omega t$  として線形位相で表されるときは、その実信号を時間シフトさせた信号は、その振幅の時間シフトと位相シフトさせたものによって表される．つまり、 $y(t) = x(t - t_0)$  のとき、

$$\begin{aligned} y_a(t) &= x_a(t - t_0) \\ &= a(t - t_0)e^{j\rho(t)}e^{-j\omega_0 t_0} \end{aligned} \quad (5.13)$$

となる．ヒルベルト変換と解析信号の定義は離散時間信号においても同様に扱うことができる．

#### 半サンプル遅延条件

DTCWT が複素ウェーブレット変換となるためには  $h_1(n)$  及び  $g_1(n)$  に対応するウェーブレット関数  $\psi_h(t)$  と  $\psi_g(t)$  がヒルベルト変換対の関係 ( $\psi_h(t) \approx \mathcal{H}\{\psi_g(t)\}$ ) を満たしていることが必要となる [27]．この時  $\psi(t) := \psi_h(t) + j\psi_g(t)$  は解析関数であり、周波数正領域にのみスペクトルを持つ関数となる．ここで  $\psi_h(t)$  と  $\psi_g(t)$  がヒルベルト変換対となる時の DTCWT が持つフィル



タ  $h_0(n), h_1(n), g_0(n), g_1(n)$  の条件を示す． $\psi_h(t)$  と  $\psi_g(t)$  は  $h_0(n)$  と  $g_0(n)$  によって

$$\psi_h(t) = \sqrt{2} \sum_n h_1(n) \phi_h(2t - n) \quad (5.14)$$

$$\phi_h(t) = \sqrt{2} \sum_n h_0(n) \phi_h(2t - n) \quad (5.15)$$

$$\psi_g(t) = \sqrt{2} \sum_n g_1(n) \phi_g(2t - n) \quad (5.16)$$

$$\phi_g(t) = \sqrt{2} \sum_n g_0(n) \phi_g(2t - n) \quad (5.17)$$

と表される．ただし簡単のため，両方の実 DWT は直交であるものと仮定すると  $h_1(t) = (-1)^n h_0(-n)$ ， $g_1(n) = (-1)^n g_0(-n)$  である (2.2.3 項参照)．式 (5.9) に代入し，式を整理すると次式の条件が得られる．

$$g_0(n) \approx h_0(n - 0.5) \iff \psi_g(t) \approx \mathcal{H}\{\psi_h(t)\} \quad (5.18)$$

この条件を半サンプル遅延条件と呼ぶ [27]．更に，周波数領域における半サンプル遅延条件を絶対値と位相部分を分けて書き直すと，

$$|G_0(e^{j\omega})| = |H_0(e^{j\omega})| \quad (5.19)$$

$$\angle G_0(e^{j\omega}) = \angle H_0(e^{j\omega}) - 0.5\omega \quad (5.20)$$

となる．

#### Dual-tree 複素ウェーブレット変換のシフト不変性

従来の DWT ではダウンサンプリングの際に情報が失われてしまい，シフト不変性を満たすことができない問題があった．しかし DTCWT では半サンプル遅延条件を満たした 2 つのフィルタバンクが，片方のフィルタバンクで失われたサンプルを他方のフィルタバンクが保持できる構造になっている．よって 2 つのツリーの同帯域 (低域または高域) から出力される 2 つの信号を加算することによって得られる信号は，入力信号のシフトに依らずに形状はほぼ一定となる．(図 5.8，図 5.9 参照)

#### 2 次元 Dual-Tree 複素ウェーブレット変換と高い方向分解能について

本節では 1 次元 DTCWT の 2 次元への拡張である，2 次元 DTCWT の方向分解能について議論する．前項の 2 次元 DWT と同様に，DTCWT から得られるウェーブレット関数の方向を考察する．ウェーブレット関数  $\psi(x)$  を  $\psi(x) = \psi_h(x) + j\psi_g(x)$  のような複素ウェーブレット関数として与え，2 次元のウェーブレット関数について考える．前節の可分型 2 次元 DWT の場合と同様にして  $\psi_1(x, y)$  は次のように表される．

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= \psi(x)\psi(y) \\ &= [\psi_h(x) + j\psi_g(x)][\psi_h(y) + j\psi_g(y)] \\ &= [\psi_h(x)\psi_h(y) - \psi_g(x)\psi_g(y)] + j[\psi_g(x)\psi_h(y) + \psi_h(x)\psi_g(y)] \end{aligned}$$

1 次元複素ウェーブレット関数  $\psi(x)$  の解析関数の性質から，スペクトルは正の周波数領域 (または負の周波数領域) のみに表れるので，2 次元複素ウェーブレット関数  $\psi_1(x, y)$  の周波数領域に

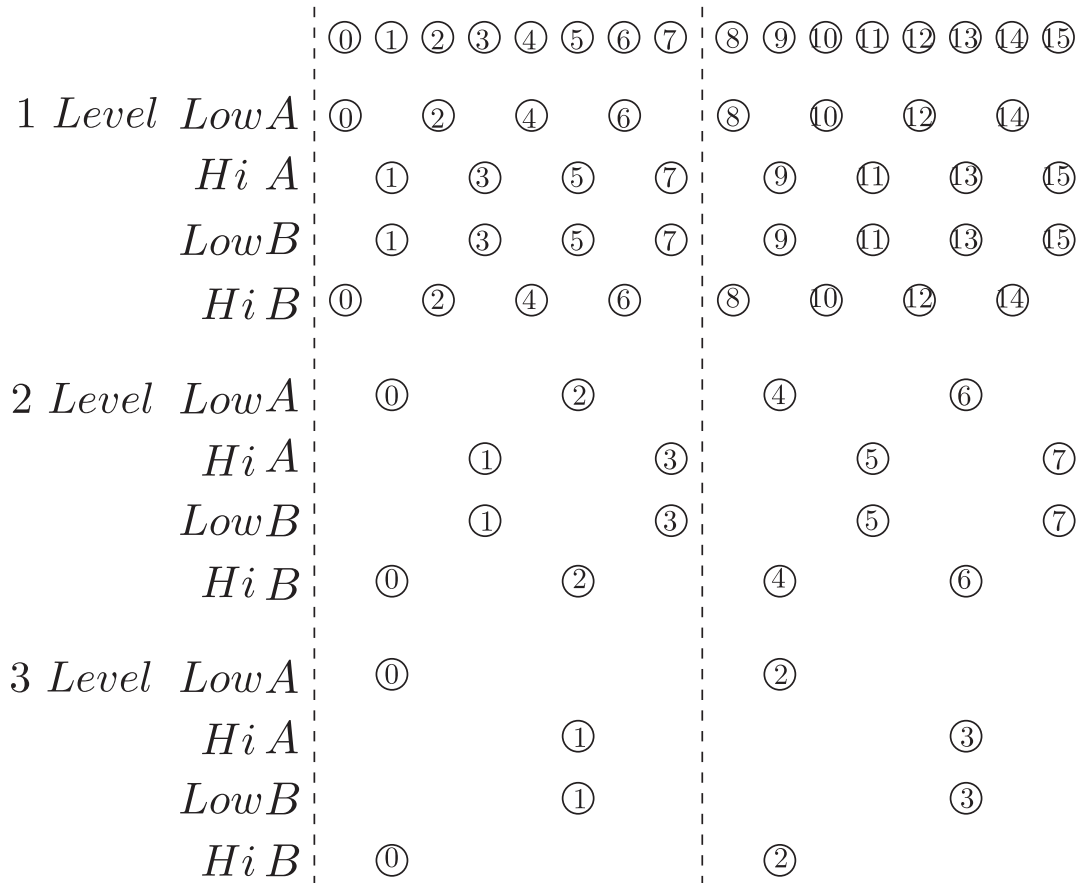


図 5.8 16 サンプルの入力信号に対する DTCWT の出力信号

おけるスペクトルは図 5.10 のように表される．原点に対して右上の領域から反時計回りに第 1 象限～第 4 象限とすると，2次元の複素ウェーブレット関数  $\psi_1(x, y)$  のスペクトルは第 1 象限に存在しているのが分かる．よって，この複素ウェーブレット関数の実部をとると，2つの分離可能なウェーブレット関数の和を得ることができる．2次元実関数の 2次元フーリエ変換スペクトルは原点に関して対称に表れる性質を持つので，2次元の複素ウェーブレット関数  $\psi_1(x, y)$  の実部をとって得られる実ウェーブレット関数，

$$\text{RealPart}\{\psi_1(x, y)\} = \psi_h(x)\psi_h(y) - \psi_g(x)\psi_g(y)$$

のスペクトルは，図 5.11 で示されるように 2次元周波数領域の 2つの象限において表れることになる．2次元 DWT のウェーブレット関数のスペクトルは 4つの象限で対称に現れていたが，DTCWT の実ウェーブレット関数  $\text{RealPart}\{\psi_1(x, y)\}$  では，原点を中心に 2象限対称なスペクトルを持つ．このスペクトルを逆フーリエ変換することによって，ウェーブレット関数  $\text{RealPart}\{\psi_1(x, y)\}$  の形状は図 5.12 の第 2 図で示されているような  $-45^\circ$  の方向性をもつ形状を持つことが分かる．

次に， $+45^\circ$  の方向成分を持つ 2次元実ウェーブレット関数を得るために複素係数 2次元ウェーブレット関数  $\psi_2(x, y) = \psi(x)\overline{\psi(y)}$  を考える．ここで， $\overline{\psi(y)}$  はウェーブレット関数  $\psi(y)$  の複素共

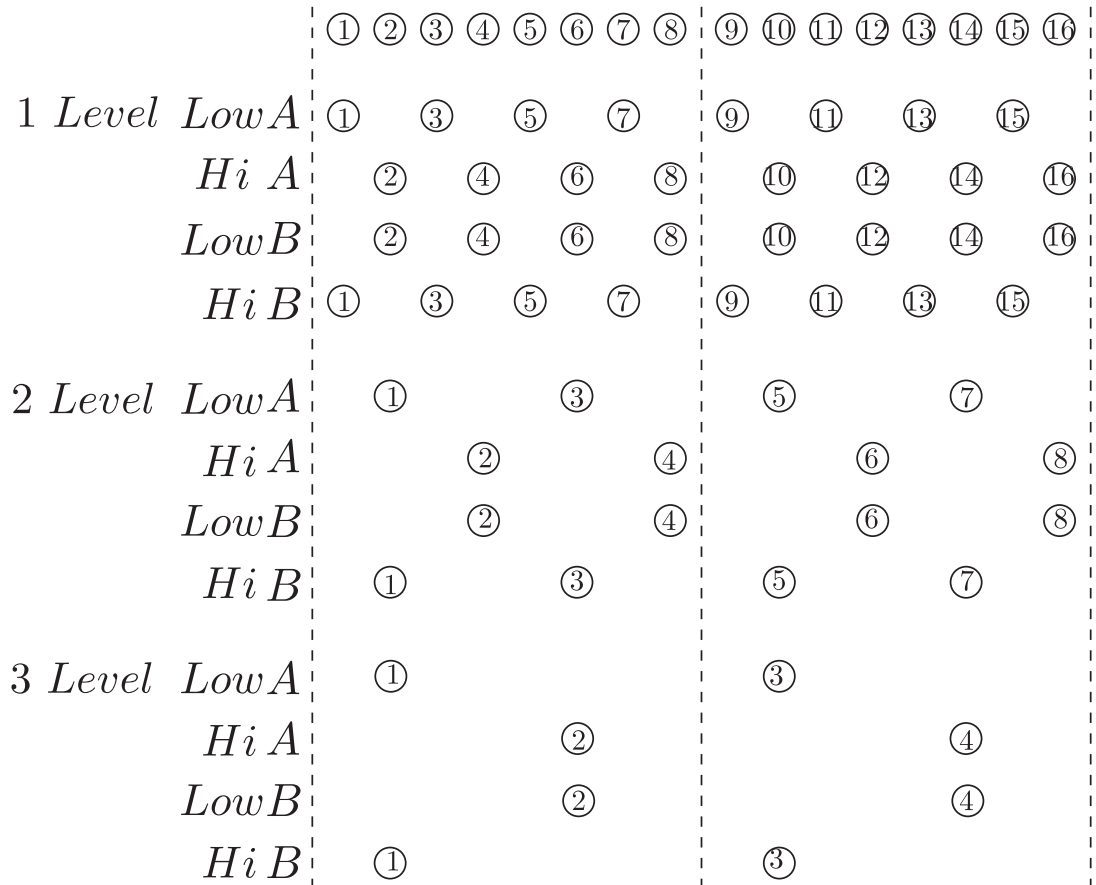


図 5.9 1 サンプルシフトされた 16 サンプルの入力信号に対する DTCWT の出力信号

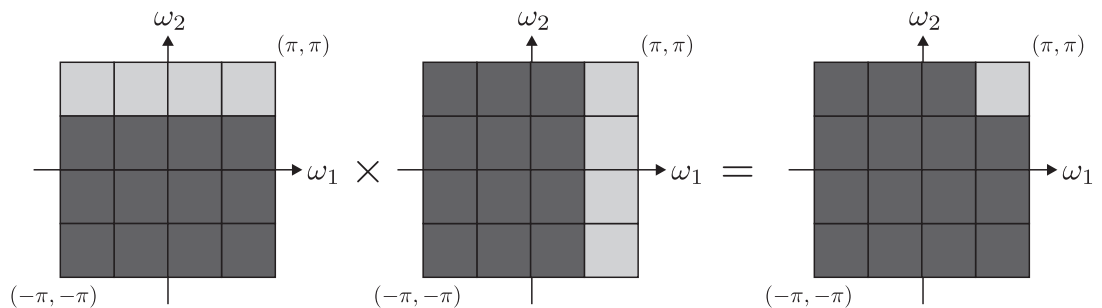


図 5.10  $\psi_1(x, y) (= \psi(x)\psi(y))$  のスペクトル

役である . このとき  $\psi_2(x, y)$  は次のように表される .

$$\begin{aligned}
 \psi_2(x, y) &= [\psi_h(x) + j\psi_g(x)][\overline{\psi_h(y) + j\psi_g(y)}] \\
 &= [\psi_h(x) + j\psi_g(x)][\psi_h(y) - j\psi_g(y)] \\
 &= \psi_h(x)\psi_h(y) + \psi_g(x)\psi_g(y) + j[\psi_g(x)\psi_h(y) - \psi_h(x)\psi_g(y)]
 \end{aligned}$$

上式から ,  $\psi_2(x, y)$  は図 5.13 に示されるように , 第 2 象限のみにスペクトルを持つ . そして ,

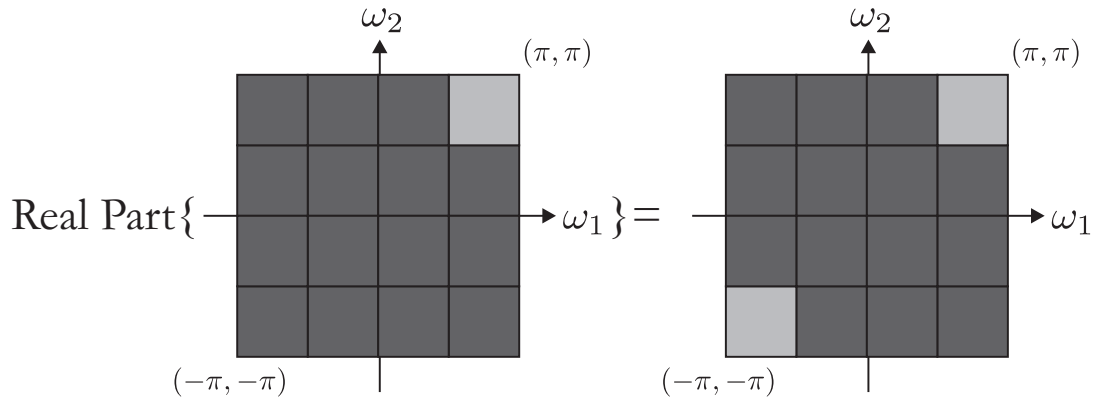


図 5.11  $\text{RealPart}\{\psi_1(x, y)\}$  のスペクトル



図 5.12 DTCWT における 2 次元ウェーブレット関数

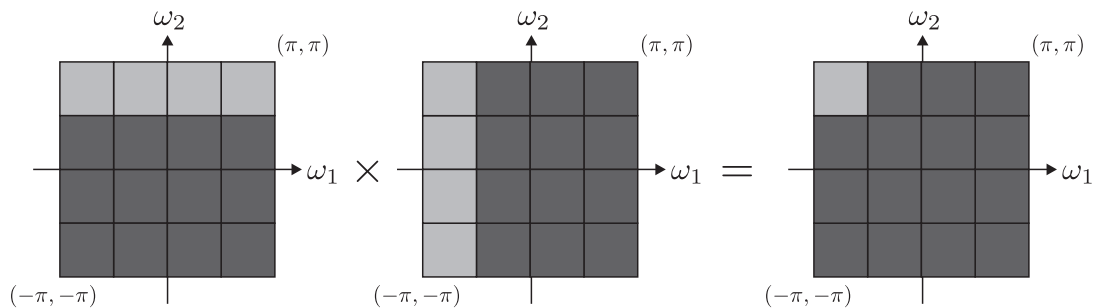


図 5.13  $\psi_2(x, y)(= \psi(x)\overline{\psi(y)})$  のスペクトル

$\psi_2(x, y)$  の実部をとると,

$$\text{RealPart}\{\psi_2(x, y)\} = \psi_h(x)\psi_h(y) + \psi_g(x)\psi_g(y)$$

となる．このスペクトルを図 5.14 に示す．図が示すように， $\text{RealPart}\{\psi_2(x, y)\}$  のスペクトルも原点を中心に 2 象限対称なスペクトルとなる．この 2 象限対称なスペクトルを逆フーリエ変換することによって，図 5.12 の第 5 図で示されるように， $\text{RealPart}\{\psi_2(x, y)\}$  は  $+45^\circ$  の方向成分をもつ 2 次元ウェーブレット関数であることが分かる．同様に， $\psi(x) = \psi_h(x) + j\psi_g(x)$  と  $\phi(x) = \phi_h(x) + j\phi_g(x)$  として  $\phi(x)\psi(y)$ ， $\psi(x)\phi(y)$ ， $\phi(x)\overline{\psi(y)}$ ， $\psi(x)\overline{\phi(y)}$  の組み合わせを考えることで，計 6 つの異なる方向性を持った 2 次元実ウェーブレット関数を次式のように得ることがで

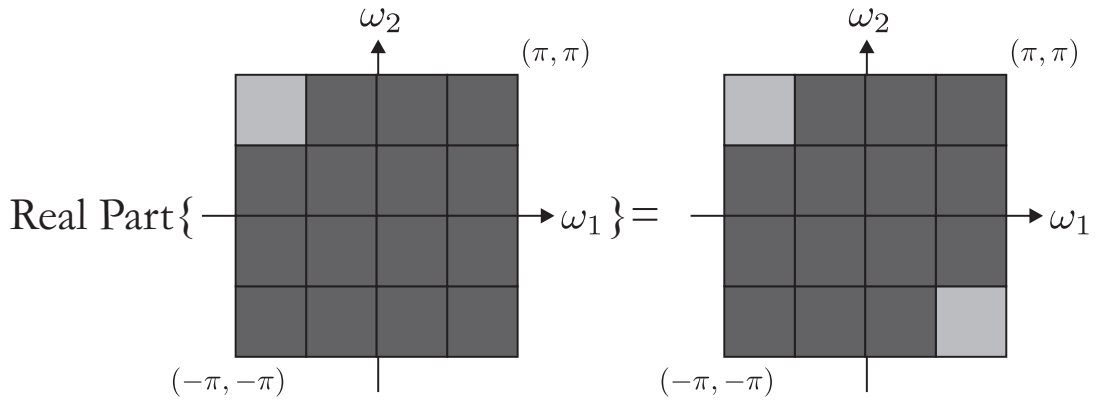


図 5.14 Real Part $\{\psi_2(x, y)\}$  のスペクトル

きる .

$$\psi_i(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,i}(x, y) - \psi_{2,i}(x, y)) \quad (5.21)$$

$$\psi_{i+3}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,i}(x, y) + \psi_{2,i}(x, y)) \quad (5.22)$$

ここで ,  $i = 1, 2, 3$  であり , 2 次元ウェーブレット基底は同様に定義される .

$$\begin{aligned} \psi_{1,1}(x, y) &= \phi_h(x)\psi_h(y) & , & & \psi_{2,1}(x, y) &= \phi_g(x)\psi_g(y) \\ \psi_{1,2}(x, y) &= \psi_h(x)\phi_h(y) & , & & \psi_{2,2}(x, y) &= \psi_g(x)\phi_g(y) \\ \psi_{1,3}(x, y) &= \psi_h(x)\psi_h(y) & , & & \psi_{2,3}(x, y) &= \psi_g(x)\psi_g(y) \end{aligned} \quad (5.23)$$

ここで  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  により , 正規化を行っている .

以上より , 2 次元 DTCWT は , 図 5.12 に示されるような , 6 つの方向を持つ 2 次元ウェーブレット関数を持つことが分かった . これは DWT よりも多方向のエッジ成分を分離して取り扱うことができることを示しており , 画像処理を行う上で非常に有効である .

DWT と同様 , テスト画像 *Zone plate* に DTCWT を用いて変換した結果画像を図 5.15 に示す . DWT とは異なり DTCWT は高い方向分解能を持つため , *Zone plate* を 6 方向のエッジ成分  $+15^\circ$  ,  $+45^\circ$  ,  $+75^\circ$  ,  $-15^\circ$  ,  $-45^\circ$  ,  $-75^\circ$  に分解できていることが分かる .

### 5.3 従来法 : 全域通過フィルタを用いた Dual-Tree 複素ウェーブレット変換の設計法

DTCWT に含まれるフィルタは式 (5.19) , 式 (5.20) を満たさなければならないが , 離散信号処理においてこのようなシステムを厳密に満たすには無限長のインパルス応答を持つ IIR フィルタを用いなければならない . すべてのフィルタを有限長のインパルス応答を持つ FIR フィルタにした際は厳密な式 (5.19) , 式 (5.20) の実現は不可能となり , 近似的な実現となる . つまり , ウェーブレット関数  $\psi_h(t)$  と  $\psi_g(t)$  は近似的なヒルベルト変換対を構成することになる . その結果 , シフト不変性や方向分解能の諸性質はすべて近似的なものとなる . このため式 (5.19) , 式 (5.20) を精

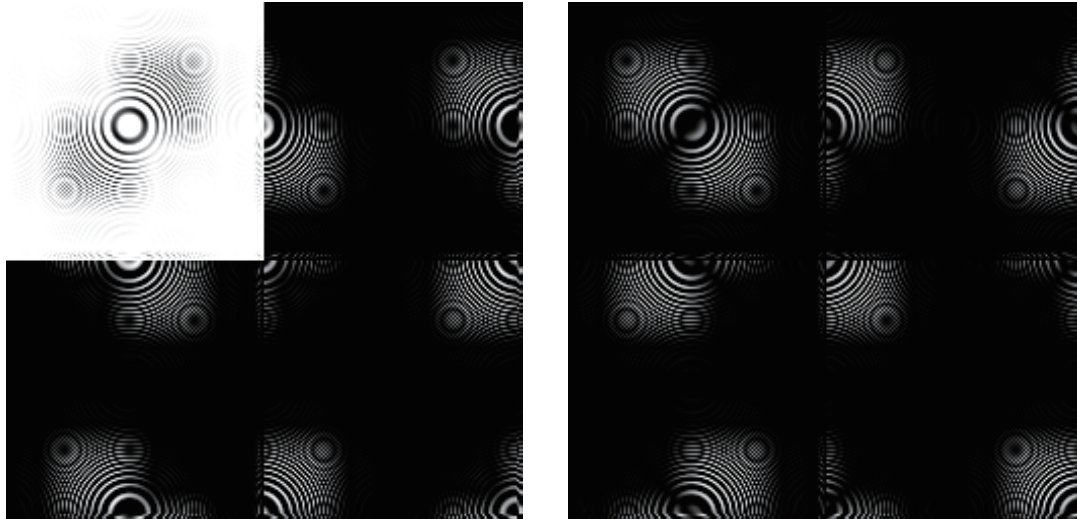


図 5.15 DTCWT による *Zone plate* の出力画像

度よく近似でき、かつ高い周波数選択性を持つ FIR フィルタのセットの設計法について近年盛んに研究されている。

この節では従来法として、全域通過フィルタを用いた DTCWT の設計 [88] について述べる。この設計法は、DTCWT の各フィルタ対が半サンプル遅延の関係を満たすための、全域通過フィルタに基づく位相近似項と、周波数選択性を決定する振幅項を独立に設計し、2 つを合成する手法である。

従来法においては、近似的ヒルベルト変換対の設計問題を全域通過フィルタの群遅延の設計問題に帰着させて考えている。まず、 $\tau$  サンプルの遅延を持つ近似的全域通過フィルタは以下の公式で与えられる。

$$A(z) = \frac{z^{-L} D_{\tau}(1/z)}{D_{\tau}(z)} \quad (5.24)$$

ここで、

$$D_{\tau}(z) = 1 + \sum_{n=1}^L d_{\tau}(n) z^{-n} \quad (5.25)$$

$$d_{\tau}(n) = (-1)^n \binom{L}{n} \frac{(\tau - L)_n}{(\tau + 1)_n} \quad (5.26)$$

である。これは、 $D_{\tau}(z)$  を用いて、 $z = 1$  の近傍において

$$A(z) \approx z^{-\tau}$$

の近似を行っており、すなわち、 $\omega = 0$  の近傍において

$$A(\omega) \approx e^{-j\omega\tau}$$

の近似を行っていることと等価である。

次に、上述した全域通過フィルタを用いて、ヒルベルト変換対の関係を満たす、低域通過の特性を持つ直交フィルタの設計について述べる。従来法における設計では、低域通過フィルタは次のような形をしている。

$$h_0(n) = f(n) * d_\tau(n) \quad (5.27)$$

$$g_0(n) = f(n) * d_\tau(L - n) \quad (5.28)$$

ここで、フィルタ  $d_\tau(n)$  の設計によって、半サンプル遅延を近似することになる。すなわち、設計の第1のステップは、フィルタ  $h_0(n)$  と  $g_0(n)$  の間の所望の関係を満たすフィルタ  $d_\tau(n)$  の決定である。

式 (5.27) と式 (5.28) を  $z$  変換すると、

$$H_0(z) = F(z)D_\tau(z) \quad (5.29)$$

$$G_0(z) = F(z)z^{-L}D_\tau(1/z) \quad (5.30)$$

となる。ここで  $H_0(z)$  と  $G_0(z)$  は因数に同一の関数  $F(z)$  を持っている。 $F(z)$  については後述するが、この部分が振幅項となっている。式 (5.29) と式 (5.30) より、

$$G_0(z) = H_0(z) \frac{z^{-L}D_\tau(1/z)}{D_\tau(z)} \quad (5.31)$$

と書ける。ここで、上述した全域通過フィルタと関連付けて次のように書ける。

$$A(z) := \frac{z^{-L}D_\tau(1/z)}{D_\tau(z)} \quad (5.32)$$

$A(z)$  は全域通過システムであるので、 $|A(\omega)| = 1$  であり、それゆえ、

$$|G_0(\omega)| = |H_0(\omega)| \quad , \quad |G_1(\omega)| = |H_1(\omega)|$$

すなわち、

$$|\psi_g(\omega)| = |\psi_h(\omega)|$$

である。ここで、 $A(z)$  に半サンプル遅延の条件を持たせるためには  $\omega = 0$  の近傍において

$$A(\omega) \approx e^{-j\frac{\omega}{2}}$$

とする必要がある。このとき、

$$G_0(\omega) \approx H_0(\omega)e^{-j\frac{\omega}{2}} \quad (5.33)$$

が満たされる。式 (5.33) を満たすための  $D(z)$  は、 $\tau = 1/2$  と設定すればよい。

一方振幅項については、 $K$  次レギュラリティ（滑らかさの指標）を持ち、低域通過の特性を持ったフィルタ  $F(z)$  を

$$F(z) = Q(z)(1 + z^{-1})^K \quad (5.34)$$

として設計する。結局、ヒルベルト変換対の関係をを持ったフィルタ  $H_0(z)$ 、 $G_0(z)$  は

$$\begin{aligned} H_0(z) &= Q(z)(1 + z^{-1})^K D(z) \\ G_0(z) &= Q(z)(1 + z^{-1})^K z^{-L} D(1/z) \end{aligned} \quad (5.35)$$

と設計される。

## 5.4 最小二乗法に基づく Dual-tree 複素ウェーブレット変換の設計法

前節にて述べた従来法では，式 (5.29)，式 (5.30) のように，まず半サンプル遅延条件を近似するための位相項  $d(n)$  を設計し，次いで振幅項  $f(n)$  を設計し，最後に  $f(n) * d(n)$  のように合成してフィルタを設計する．ただしこの手法では，振幅項と位相項に割り当てられるフィルタ係数が独立に必要となる．例えばフィルタ長  $N$  の低域通過フィルタを設計するために，フィルタ長  $N_f$  の  $f(n)$  とフィルタ長  $N_d$  の  $d(n)$  を設計することになる ( $N_f, N_d < N$ )．結果として，設計の自由度は低くなる．これに対し本提案法においては，半サンプル遅延の関係のためのフィルタの振幅項と位相項を一括して設計する．すなわち  $h_0(n)$ ， $g_0(n)$  を次式のように設定する．

$$H_0(z) = D(z) \quad (5.36)$$

$$G_0(z) = z^{-L} D(1/z) \quad (5.37)$$

そして  $D(z)$  をフィルタの直交条件 (完全再構成条件)，振幅特性条件，ヒルベルト変換対の関係を満たすための位相条件すべてを近似するように設計する．この方法により，設計すべきフィルタ長  $N$  のすべての係数が，周波数選択性及び半サンプル遅延近似精度の両方に貢献することが可能となり，従来法よりも高い性能を持つ DTCWT が設計できる．近似手法には 3 つの条件に対する誤差評価関数を設定し，それを最小にするようなフィルタ係数を再帰的アルゴリズムにより最適化する．

### 5.4.1 評価関数

直交条件

2 分割フィルタバンクの直交条件は低域通過フィルタ  $h_0(n)$  を用いて  $\sum_k h_0(k)h_0(k+2l) = \mathbf{h}_0^T \mathbf{Q}_l \mathbf{h}_0 = \delta(l)$  と書き直すことができる (ただし， $\mathbf{h}_0 = [h_0(0), \dots, h_0(N-1)]^T$ )．これを用いて評価関数は次のように書ける．

$$\Phi_O = \sum_l \{ \mathbf{h}_0^T \mathbf{Q}_l \mathbf{h}_0 - \delta(l) \}^2 \quad (5.38)$$

また， $\mathbf{Q}_l \in \mathbf{R}_{M \times N}$  において

$$[\mathbf{Q}_l]_{i,j} = \begin{cases} 1, & (i-j = ml) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (5.39)$$

である． $\Phi_O$  が十分小さいとき，フィルタバンクは直交条件を満たすので，結果的に完全再構成が満たされる．

振幅特性条件

次に，振幅特性の評価関数を設計する．ここでは良好な低域通過特性を近似するために，阻止域のエネルギーを評価関数として設計し，これを最小にすることにより低域通過特性を持たせる．すなわち，フィルタを  $H(e^{j\omega})$  とすると，評価関数は

$$\Phi_A = \int_{\pi/2}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 = \mathbf{h}_0^T \mathbf{A} \mathbf{h}_0 \quad (5.40)$$



となる．また， $\mathbf{e} = [1, e^{j\omega}, e^{j2\omega}, \dots, e^{j\omega(n-1)}]^T$  として，

$$\mathbf{A} = \int_{\pi/2}^{\pi} \mathbf{e} \mathbf{e}^T d\omega \quad (5.41)$$

である．

位相条件

最後に，対となるフィルタの間に半サンプル遅延条件を課するための位相条件を定義する．対のフィルタ  $H_0(e^{j\omega})$ ， $G_0(e^{j\omega})$  に対する条件は周波数領域で以下ようになる．

$$G_0(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega}{2}} H_0(e^{j\omega}) \quad (5.42)$$

また， $G_0(e^{j\omega})$  は  $H(e^{j\omega})$  の時間反転とするので，評価関数は

$$\begin{aligned} \Phi_P &= \int_0^{\pi} |e^{-j\omega N} H_0(e^{-j\omega}) - e^{-j\frac{\omega}{2}} H_0(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= 2 \int_0^{\pi} \left( \sum_n h(n) \sin \left\{ \omega \left( n - \frac{1}{2} \left( N - \frac{1}{2} \right) \right) \right\} \right)^2 d\omega \\ &= \mathbf{h}_0^T \mathbf{P} \mathbf{h}_0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

である．また，

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \int_0^{\pi} \mathbf{S}^T \mathbf{S} d\omega \\ \mathbf{S} &= \left[ \sin \left\{ \omega \left( 0 - \frac{1}{2} \left( N - \frac{1}{2} \right) \right) \right\}, \dots, \sin \left\{ \omega \left( N - 1 - \frac{1}{2} \left( N - \frac{1}{2} \right) \right) \right\} \right]^T \end{aligned} \quad (5.44)$$

である．

以上より，全体のフィルタ設計評価関数は以下ようになる．

$$\Phi = \alpha \Phi_O + \beta \Phi_A + \gamma \Phi_P \quad (5.45)$$

ただし， $\alpha$ ， $\beta$ ， $\gamma$  は重み係数で，経験的に決定される．

#### 5.4.2 最適化

前節のように評価関数を定義することができたが，この評価関数が最小となるようなフィルタ係数，すなわち  $\mathbf{h}_0$  を求めたい．しかしながら，式 (5.45) から  $\mathbf{h}_0$  を直接求めることはできない．そこで [101, 102] で提案されている再帰的アルゴリズムを基に，評価関数  $\Phi$  が最小となるような  $\mathbf{h}_0$  を求める．ここで， $\mathbf{h}_0^{(i-1)}$  は  $(i-1)$  回目の再帰における  $H_0(z)$  のフィルタ係数とする．このとき， $i$  回目の再帰におけるフィルタ係数  $\mathbf{h}_0^{(i)}$  は  $\mathbf{h}_0^{(i-1)}$  を用いて

$$\mathbf{h}_0^{(i)} = \left\{ \alpha \sum_l \mathbf{Q}_l^T \mathbf{h}_0^{(i-1)} \mathbf{h}_0^{(i-1)T} \mathbf{Q}_l + \beta \mathbf{A} + \gamma \mathbf{P} \right\}^{-1} \mathbf{h}_0^{(i-1)} \quad (5.46)$$

として求める．次に，求まった  $\mathbf{h}_0^{(i)}$  と  $\mathbf{h}_0^{(i-1)}$  の平均を求め，これを  $\mathbf{h}_0^{(i)}$  とする．すなわち， $\mathbf{h}_0^{(i)} = ((\mathbf{h}_0^{(i)} + \mathbf{h}_0^{(i-1)})/2)$  となる．この平均をとる操作によって， $\mathbf{h}_0$  をより最適なものとすることができ， $\mathbf{h}_0^{(i)}$  を用いて， $(i+1)$  回目の最適化を行う．この操作を評価関数  $\Phi$  が収束するまで繰り返す．以上の処理によって  $\mathbf{h}_0$  を求め， $\mathbf{h}_0$  から高域通過フィルタ  $\mathbf{h}_1$ ，及び半サンプル遅延の関係にある  $\mathbf{g}_0$  及び  $\mathbf{g}_1$  を生成することができる．

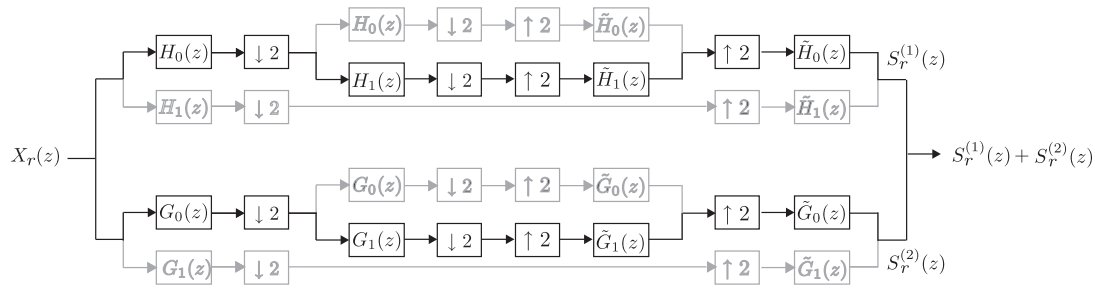


図 5.16 DTCWT のシフト不変性評価のための信号出力の図 (レベル 2)。

## 5.5 シミュレーション

本節では、本提案法で設計した DTCWT と、全域通過フィルタに基づく従来法を用いて設計した DTCWT をシフト不変性，方向分解能，非線形近似，ノイズ除去のシミュレーションによって性能を比較する。

### 5.5.1 フィルタバンクの設計

提案法，従来法共に，フィルタ長 8, 10, 14 の 3 種類のフィルタバンクを設計する．提案法は 5.4 節で示した最小二乗法に基づく最適化アルゴリズムである．ここで式 (5.45) において， $\alpha = 1$ ， $\beta = 0.00001$ ， $\gamma = 0.0005$  とした．従来法では 5.3 節で説明した，全域通過フィルタに基づく設計法である．設計に必要なパラメータ  $K$  (式 (5.34))  $L$  (式 (5.26)) は  $(K, L) = (1, 3), (1, 4), (1, 6)$  とした．

### 5.5.2 シフト不変性の近似精度の評価

DWT ではダウンサンプリングの影響で，入力信号のシフトに依存して出力信号は大きく変化するが，一方 DTCWT では 2 つのツリーが片方のダウンサンプリングで間引かれた情報を保持しているため，2 つのツリーの同帯域から出力される信号の和を取って生成された信号はシフトに依存せずに一定の形状となることを 5.2.2 節で述べた．本節では，9/7 タップ DWT (2.6 節，表 2.1 参照)，従来法及び提案法によって設計された DTCWT を用いて，シフト不変性の近似精度のシミュレーションを以下のように行う．

DTCWT の場合は，原信号を  $r$  サンプルシフトした信号  $X_r(z)$  を，図 5.16 に示されるような DTCWT に入力し，指定されたレベル数分の変換を行う (図 5.16 では 2 レベルの変換を行っている)．更に各ツリーの同帯域を通過した 2 つの信号 (図 5.16 中の， $S_r^{(1)}(z)$  及び  $S_r^{(2)}(z)$ ) の和を取り，最終的な出力信号とする．ただし，DWT の場合はツリーが 1 つであるので  $S_r^{(1)}(z)$  をそのまま出力信号とする．

本シミュレーションでは，入力信号として単位インパルスを用い，1 サンプル-15 サンプルまでシフトさせる (図 5.17 参照)．DWT と DTCWT の変換レベルは 4 とする．DWT によって得られた出力信号を図 5.18 に，DTCWT によって得られた出力信号を図 5.19 ~ 図 5.21 に示す．こ

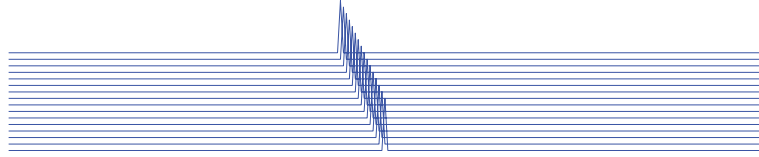


図 5.17 入力信号 (単位インパルス, 及び 1 サンプル-15 サンプルまでシフトされた単位インパルス.)

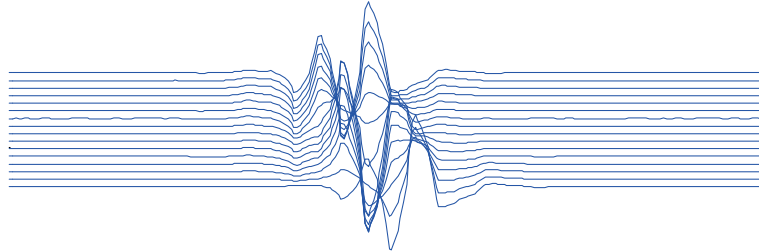


図 5.18 単位インパルス及び 1-15 サンプルシフトされた単位インパルスの入力に対して, DWT によって得られた出力信号 (レベル:4, フィルタ長: 9(低域フィルタ), 7(高域フィルタ))

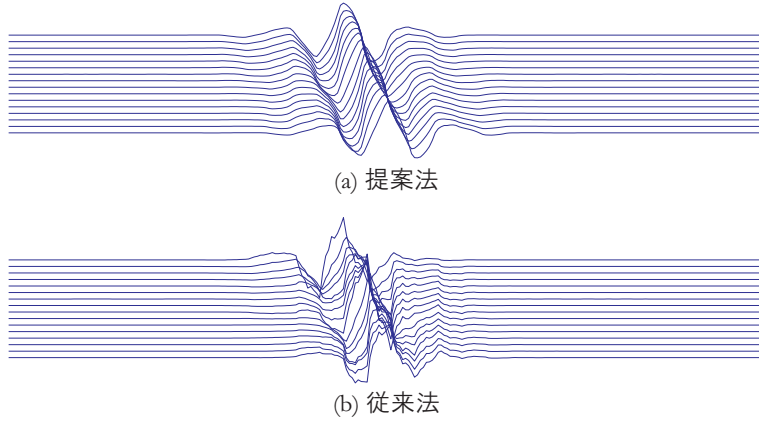


図 5.19 単位インパルス及び 1-15 サンプルシフトされた単位インパルスの入力に対して, DTCWT によって得られた出力信号 (レベル:4, フィルタ長:8)

これらの図より, 提案法及び従来法によって得られた出力信号が DWT の出力信号よりも安定していることが, まず確認できる. これは DWT に根本的にシフト不変性が欠如していることが原因と考えられる. そして提案法の DTCWT は従来法の DTCWT に比べて, より安定した出力信号を生成していることが分かる. これは提案法が従来法よりも高い設計の自由度を有しており, 従来法よりも半サンプル遅延近似精度の高い DTCWT を実現できるからであると言える.

更に以下のように出力信号の平均相関係数を算出することで, シフト不変性を定量的に評価する. まず相関係数  $\Gamma(r)$  ( $r = 1, \dots, 15$ ) を

$$\Gamma(r) = \begin{cases} \left\langle \left\langle \frac{s_0^{(1)}(-r) + s_0^{(2)}(-r)}{\|s_0^{(1)} + s_0^{(2)}\|}, \frac{s_r^{(1)} + s_r^{(2)}}{\|s_r^{(1)} + s_r^{(2)}\|} \right\rangle \right\rangle & \text{(DTCWT)} \\ \left\langle \left\langle \frac{s_0^{(1)}(n-r)}{\|s_0^{(1)}\|}, \frac{s_r^{(1)}}{\|s_r^{(1)}\|} \right\rangle \right\rangle & \text{(DWT)} \end{cases} \quad (5.47)$$

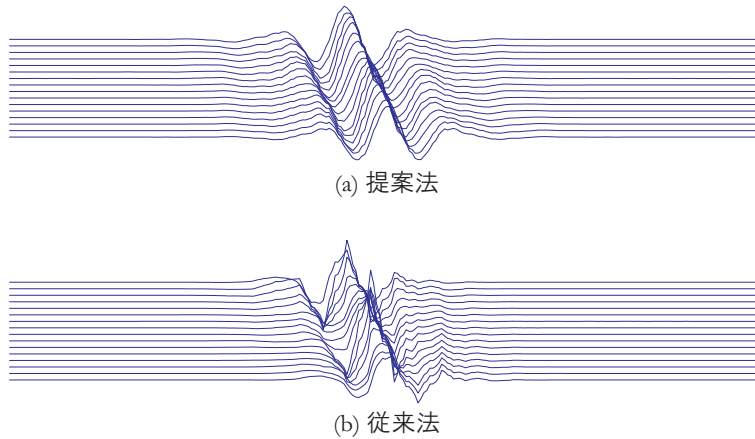


図 5.20 単位インパルス及び 1-15 サンプルシフトされた単位インパルスの入力に対して，DTCWT によって得られた出力信号（レベル:4，フィルタ長:10）

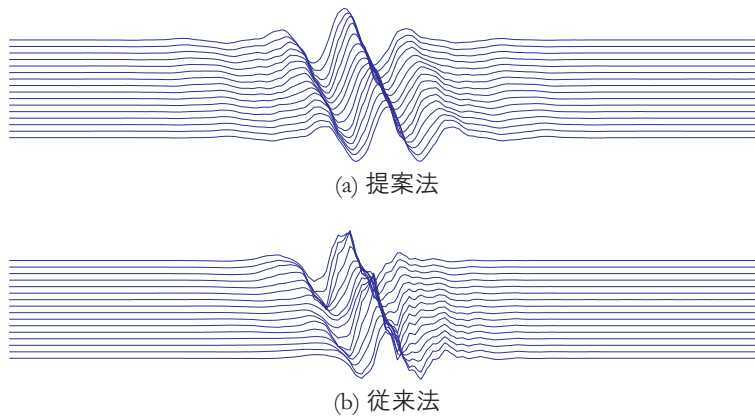


図 5.21 単位インパルス及び 1-15 サンプルシフトされた単位インパルスの入力に対して，DTCWT によって得られた出力信号（レベル:4，フィルタ長:14）

の式を用いて求める．ただし， $\langle f, g \rangle := \sum_n f(n)\overline{g(n)}$ ， $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ である．そして  $\Gamma(r)$  の平均相関係数  $\Gamma_{AC} := \frac{1}{15} \sum_{r=1}^{15} \Gamma(r)$  を算出することによって評価する．表 5.1 は，DWT，従来法によって設計された DTCWT，及び提案法によって設計された DTCWT の平均相関係数の結果を示す．表 5.1 より，すべてのフィルタ長において提案法の方が，入力信号をシフトした際の出力信号

表 5.1 シフト不変性の比較

フィルタ長	設計法	N=8		N=10		N=14	
		提案法	従来法	提案法	従来法	提案法	従来法
	9/7 タップ DWT						
平均相関係数 $\Gamma_{AC}$	0.5878	0.9678	0.8533	0.9824	0.9240	0.9836	0.9441

に対して高い相関が得られているので，高い近似精度でシフト不変性を実現している事が分かる．

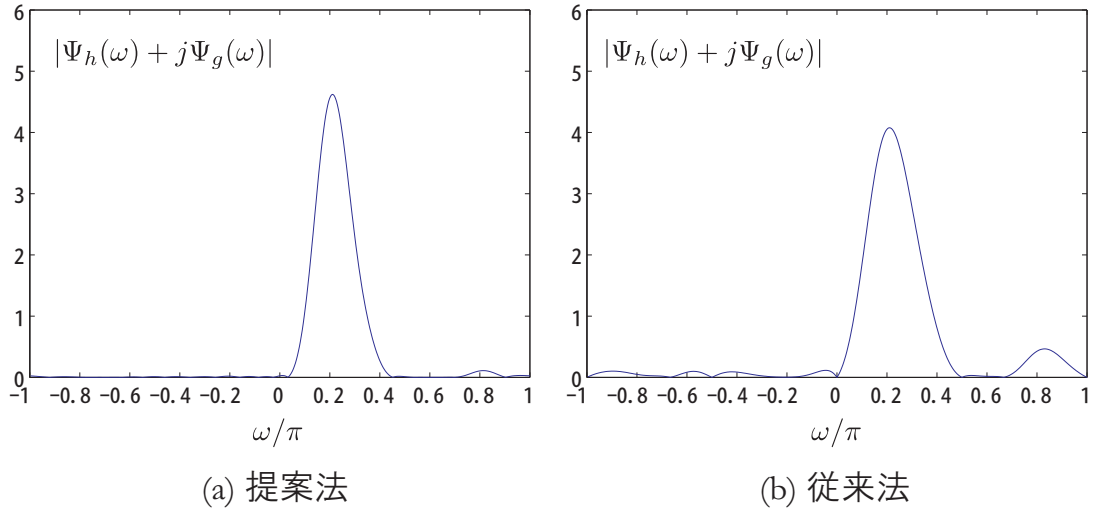


図 5.22 周波数スペクトル (レベル:3, フィルタ長:8)

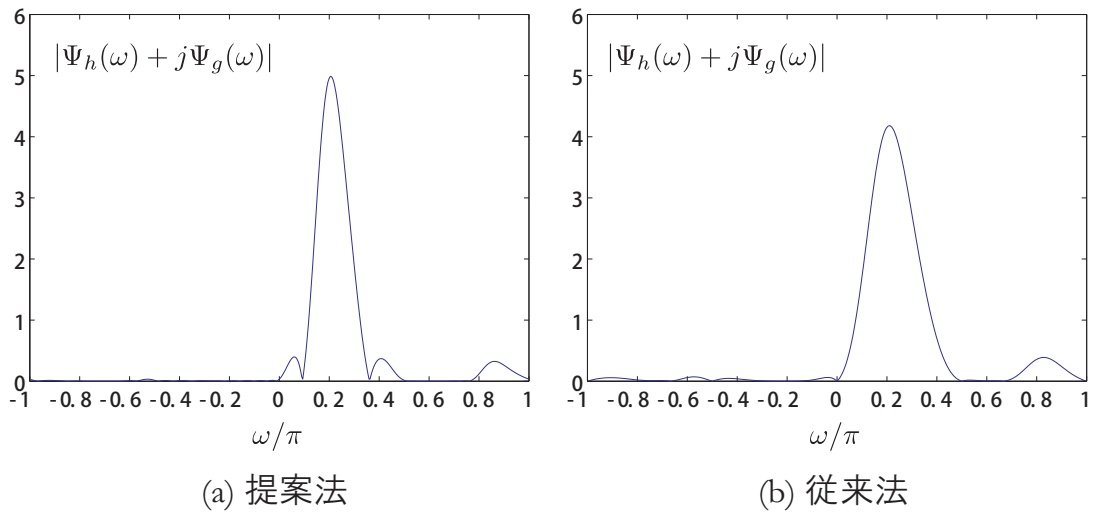


図 5.23 周波数スペクトル (レベル:3, フィルタ長:10)

### 5.5.3 方向分解能の評価

まず、方向分解能について評価する。高い方向分解能を持つためには、設計された複素ウェーブレット関数が精度良く解析関数の条件を満たしていること、すなわちスペクトルが周波数の負の領域においてエネルギーが近似的に 0 となっていることが必要である。以下の図 5.22～図 5.24 は、提案法と従来法の、3 レベルでの複素ウェーブレット関数の周波数スペクトルを示している。また、表 5.2 は、周波数の負の領域において残存しているエネルギーの量について定量的な比較を行っている。図 5.22～図 5.24 及び表 5.2 より、すべてのフィルタ長において提案法が負の周波数領域に残存するエネルギーを小さく抑えている事が分かり、より高い方向分解能を実現していることが分かる。

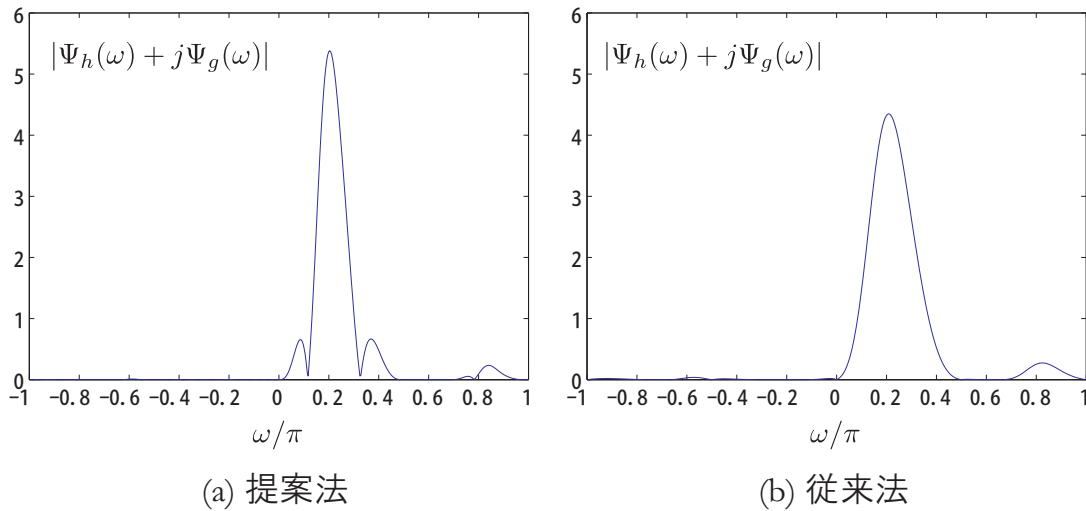


図 5.24 周波数スペクトル (レベル:3, フィルタ長:14)

表 5.2 負の領域のエネルギーの比較 ( $10 \log |\Psi_h(\omega) + j\Psi_g(\omega)|, \omega < 0$ )

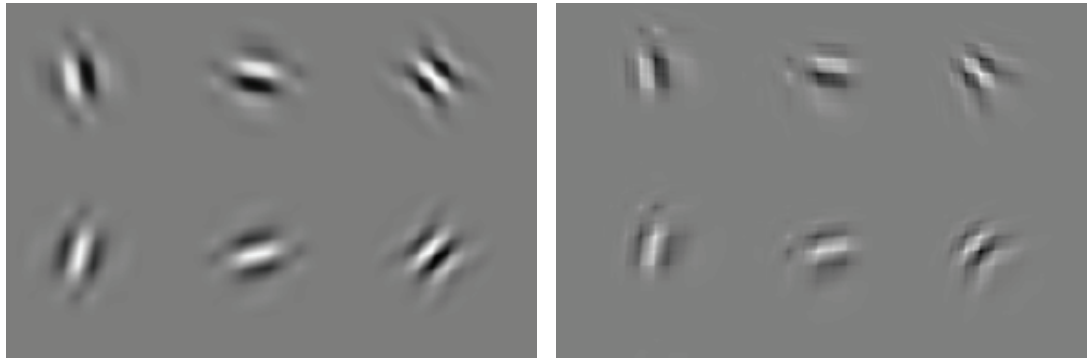
フィルタ長	N=8		N=10		N=14	
	提案法	従来法	提案法	従来法	提案法	従来法
負の領域の エネルギー (dB)	-33.08	-0.06	-31.84	-10.24	-57.22	-27.00

図 5.25 ~ 図 5.27 は提案法と従来法によって設計された 2 次元ウェーブレット関数を示している。提案法は従来法に比べ、歪みのない 2 次元ウェーブレット関数の形状を実現していることが分かる。この要因としては、提案法によって設計された DTCWT のウェーブレット関数が持つ周波数スペクトルにおいて、負の周波数領域に残存しているエネルギーが従来法よりも低減されているからであると考えられる。この結果から提案法の DTCWT は所望の角度の方向成分情報をよりの確に抽出することが可能となる。

#### 5.5.4 非線形近似

非線形近似はウェーブレット/フィルタバンクの実用応用上の有効性を評価する指標としてしばしば用いられる [4]。非線形近似は以下のように行われる。  $f(n_1, n_2)$ ,  $c_1(k_1, k_2)$ ,  $c_2(k_1, k_2)$  を入力画像, 第 1 フィルタバンクの出力画像・第二フィルタバンクの出力画像とする。更に  $f_M(n_1, n_2)$  を  $c_1(k_1, k_2)$ ,  $c_2(k_1, k_2)$  の中から絶対値の大きさに関して上位  $M$  位までを選択し逆変換を施した画像とする。非線形近似の精度  $\|f - f_M\|$  は、使用する変換が、どのくらい入力信号を近似よく再構成できているかを示すことになる。良好な非線形近似結果は信号処理の諸応用 (画像圧縮・画像ノイズ除去など) への有効性を示す [4]。

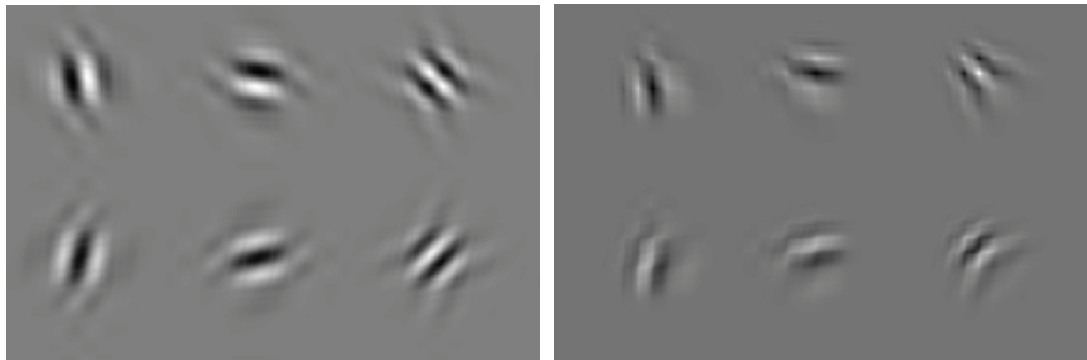
ここで提案 DTCWT をテスト画像 *Barbara*, *Lena*, *Boat* (512×512 画素) に適用し非線形近似を評価する。提案 DTCWT, 従来 DTCWT 共に 4 レベルの分解を施す。表 5.3 は係数選択数に対



(a) 提案法

(b) 従来法

図 5.25 2次元ウェーブレット関数 (レベル:4, フィルタ長:8)



(a) 提案法

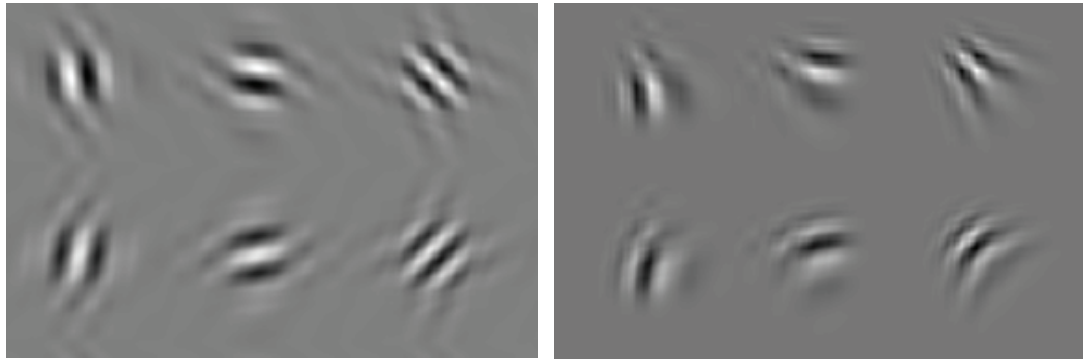
(b) 従来法

図 5.26 2次元ウェーブレット関数 (レベル:4, フィルタ長:10)

する PSNR (式 (4.34)) 値の結果を示す。表が示すように、すべての場合において提案法は従来法を上回っている。図 6.21 及び図 6.22 は *Barbara* と *Lena* の非線形近似結果画像を示している。これらの図からも分かるように提案 DTCWT は従来 DTCWT に比べ良好な画質が得られていることが分かる。*Lena* は低周波成分を多く含み *Barbara* は高周波成分を多く含んでいるが、結果より、提案法は画像の性質に独立に、様々な画像に対して優位性を示すことができると考えられる。

### 5.5.5 画像ノイズ除去への応用

本節では、提案 DTCWT を画像ノイズ除去に応用し、従来 DTCWT 及び 9/7 タップ DWT (2.6 節, 表 2.1) と比較することによって提案法の有効性を評価する。テスト画像として *Lena*, *Barbara*, *Boat* (512×512 画素) にガウシアンノイズを分散  $\sigma^2$  ( $\sigma = 10, 20, 30$ ) として付加したものをを用いた。画質評価には PSNR (式 (4.34)) を用いる。DTCWT の分割数は 6 レベルとした。画像ノイズ除去のために変換係数の高周波成分に対して Hard thresholding を行う。閾値としては Universal threshold  $\sigma\sqrt{2\log N}$  [14] を用いた。ここで  $N$  は画像のサンプル数である。



(a) 提案法

(b) 従来法

図 5.27 2次元ウェーブレット関数 (レベル:4, フィルタ長:14)



(a)

(b)

図 5.28 非線形近似復元画像 *Barbara* ( $N = 14$ , 選択した変換係数の数: 6000). (a): 従来法 [88], (b): 提案法.

表 5.4 に数値結果を示す. すべての場合について提案設計法に基づく DTCWT が従来設計法の DTCWT 及び 9/7 タップ DWT よりも PSNR において上回っている. また  $\sigma = 20$  の場合の *Barbara* と *Lena* の結果画像を図 5.30 と図 5.31 に示す. どちらの画像についても原画像とノイズ画像は (a) と (b) に, 9/7 タップ DWT, 従来法による DTCWT, 提案法による DTCWT を用いて得られたノイズ除去画像の結果をそれぞれ (c), (d), (e) に示す.

まず図 5.30 の結果画像について考察する. 9/7 タップ DWT にはシフト不変性の欠如と低方向分解能の問題がある. そのため, (特に滑らかな領域で) ノイズが効率良く除去できていないことや, 斜めの線などのテクスチャの方向情報が閾値処理を受けて失われてしまうため, 結果画像の詳細なテクスチャが変化している. 一方従来法・提案法のどちらの DTCWT も DWT に比べて方向分解能及びシフト不変性が高いため, ノイズを効率よく除去しながらテクスチャの形状を保存できていることが分かる. また, 従来法の DTCWT に比べ提案法の DTCWT は, テクスチャの画質を, より鮮明に復元できていることが分かる (斜めのエッジにおいて, 提案法がより鮮明に復元している). これは高い設計の自由度を持つ提案設計法が従来設計法よりも高い方向分解能・シフト



表 5.3 非線形近似数値結果 (PSNR [dB]).

係数選択数	4000	6000	8000	10000	12000		
<i>Barbara</i>	フィルタ長: $N = 8$						
	従来法	23.86	24.79	25.59	26.28	26.91	
	提案法	23.89	24.81	25.61	26.31	26.94	
	フィルタ長: $N = 10$						
	従来法	23.89	24.89	25.74	26.49	27.15	
	提案法	24.09	25.10	25.96	26.71	27.37	
	フィルタ長: $N = 14$						
	従来法	24.00	25.02	25.91	26.72	27.44	
	提案法	24.16	25.20	26.10	26.91	27.62	
	<i>Lena</i>	フィルタ長: $N = 8$					
		従来法	27.84	29.30	30.36	31.14	31.67
		提案法	27.92	29.36	30.38	31.16	31.64
フィルタ長: $N = 10$							
従来法		27.88	29.35	30.25	30.34	30.39	
提案法		28.28	29.73	30.36	30.41	30.48	
フィルタ長: $N = 14$							
従来法		28.13	29.67	30.81	31.69	32.31	
提案法		28.52	30.05	31.16	32.00	32.43	
<i>Boat</i>		フィルタ長: $N = 8$					
		従来法	25.31	26.43	27.28	27.97	28.53
		提案法	25.39	26.51	27.35	28.04	28.59
	フィルタ長: $N = 10$						
	従来法	25.31	26.40	27.19	27.77	28.12	
	提案法	25.55	26.65	27.44	27.95	28.25	
	フィルタ長: $N = 14$						
	従来法	25.44	26.56	27.44	28.15	28.77	
	提案法	25.68	26.78	27.65	28.35	28.93	

不変性を持つ DTCWT を設計できることが要因になっていると考えられる。

次に図 5.31 の結果画像について考察する。図 5.30 と同様に、9/7 タップ DWT は方向分解能の低さから、提案 DTCWT 及び従来 DTCWT のどちらと比べても画質が劣っている。更に提案の DTCWT は従来の DTCWT よりも、背景や顔などの低周波成分からなる領域においてより滑らかに画像を復元していることが分かる。これは提案設計法が高いシフト不変性精度を持つ DTCWT を設計できるので、効率良くノイズを除去できるからであると考えられる。

## 5.6 本章の結論

本研究では Dual-tree 複素ウェーブレット変換の設計を行う際に、近似すべき直交条件・振幅条件・位相条件のそれぞれに対して二乗誤差を用いて評価関数を定義し、この評価関数を再帰的アルゴリズムを用いて最適化することでフィルタ係数を求めた。従来法においてはフィルタの振幅項と位相項を独立に設計していたために位相項の設計のために振幅項に割り振ることができるフィルタ係数が制限されるという問題があったが、本提案法においては振幅項と位相項を一括して設計する



図 5.29 非線形近似復元画像 *Lena* ( $N = 14$ , 選択した変換係数の数 : 4000). (a): 従来法 [88], (b): 提案法.

表 5.4 ノイズ除去結果 (PSNR [dB]).

ノイズの分散	$\sigma = 10$			$\sigma = 20$			$\sigma = 30$		
原画像	<i>Barbara</i>	<i>Lena</i>	<i>Boat</i>	<i>Barbara</i>	<i>Lena</i>	<i>Boat</i>	<i>Barbara</i>	<i>Lena</i>	<i>Boat</i>
ノイズ画像	28.13	28.13	28.13	22.11	22.11	22.11	18.59	18.59	18.59
9/7 タップ DWT	29.92	31.98	30.18	25.69	28.41	26.70	23.53	26.27	24.75
Filter length: $N = 8$									
従来 DTCWT	30.29	32.23	30.28	26.06	29.23	27.09	24.12	27.47	25.40
提案 DTCWT	30.30	32.57	30.48	26.14	29.32	27.14	24.20	27.51	25.42
Filter length: $N = 10$									
従来 DTCWT	30.35	32.56	30.46	26.17	29.34	27.14	24.17	27.51	25.41
提案 DTCWT	30.70	32.78	30.59	26.43	29.58	27.28	24.34	27.76	25.55
Filter length: $N = 14$									
従来 DTCWT	30.44	32.60	30.47	26.20	29.35	27.15	24.19	27.52	25.42
提案 DTCWT	30.85	32.81	30.61	26.52	29.67	27.32	24.40	27.83	25.57

ことにより, 設計の自由度を高めることが可能となった. 設計の自由度向上に伴い, 同一のフィルタ長において, 従来の設計法によって得られたフィルタよりも精度の高い振幅特性, 半サンプル遅延近似, シフト不変性, 方向分解能が得られた.

更に本研究では, 提案法によって設計された Dual-tree 複素ウェーブレット変換を非線形近似, 画像ノイズ除去に適用し, 提案法の実用上の有効性を評価した. その結果によって, 提案法が従来法よりも優れた性能を持つことを示した.

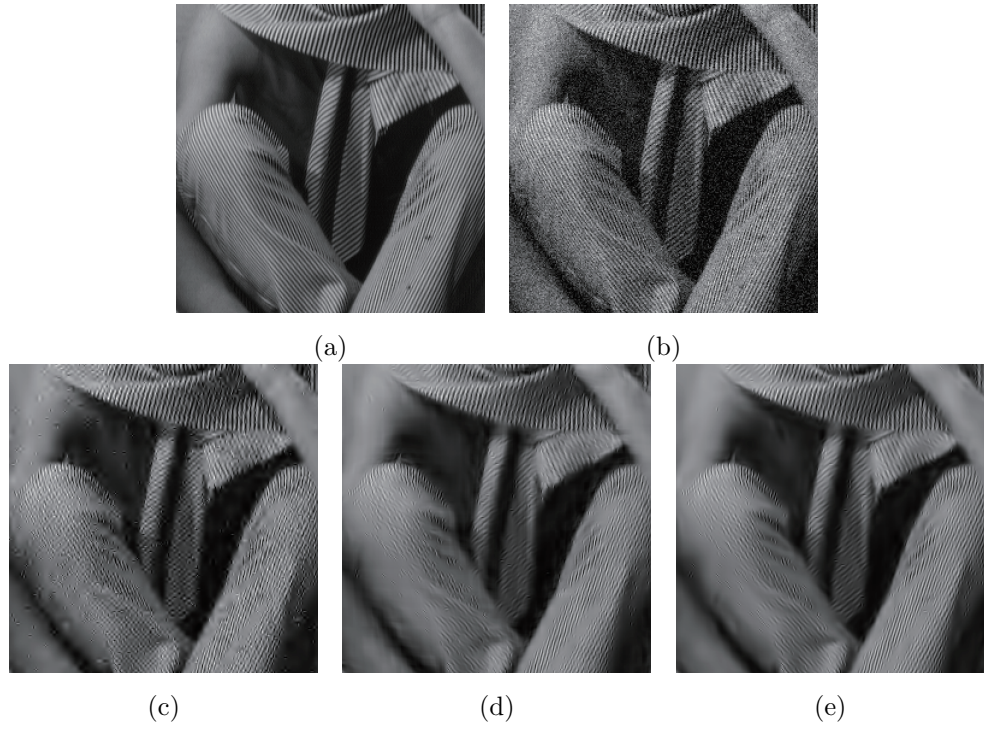


図 5.30 ノイズ除去結果画像 (*Barbara*) ( $\sigma = 20, N = 14$ ). (a): 原画像, (b): ノイズ付加画像, (c): DWT, (d): 従来 DTCWT, (e): 提案 DTCWT

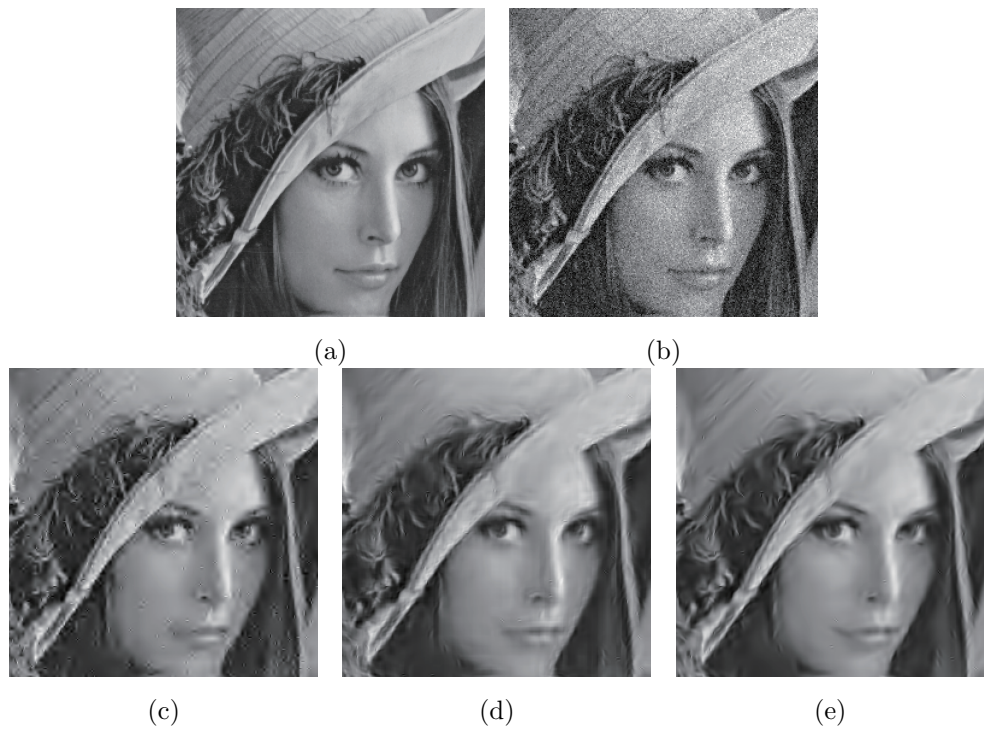


図 5.31 ノイズ除去結果画像 (*Lena*) ( $\sigma = 20, N = 14$ ). (a): 原画像, (b): ノイズ付加画像, (c): DWT, (d): 従来 DTCWT, (e): 提案 DTCWT

# 第 6 章

## コサイン・サイン変調フィルタバンクに基づく 複素ウェーブレット変換の設計と 画像ノイズ除去への適用

### 6.1 本章の概要

本章ではコサイン・サイン変調フィルタバンクに基づく  $M (> 2)$  分割 Dual-tree 複素ウェーブレット変換 (DTCWT) の設計法を提案する。

前章では近似的シフト不変性・高い方向分解能を満たす 2 分割 DTCWT の設計法を提案した。近年では、より一般化された、周波数帯域を  $M$  分割する  $M$  分割 DTCWT が提案されている [56]。2 分割 DTCWT は第 1 フィルタバンク及び第 2 フィルタバンクの間に半サンプル遅延の関係を満たさなければならなかったが、 $M$  分割の場合も同様に、2 つのフィルタバンクの間には半サンプル遅延の関係を課す必要がある。FIR フィルタで  $M$  分割 DTCWT を設計する際には、半サンプル遅延の関係を近似しながら周波数分解能の高いフィルタバンクを設計しなければならない。しかし  $M$  個のフィルタのペアに半サンプル遅延の関係を近似的に課すことは 2 分割の場合以上に困難となり、有効な  $M$  分割 DTCWT の設計法は未だ確立していない。

現在 FIR フィルタに基づく  $M$  分割 DTCWT の設計法として提案されているものは、Selesnick [92] の Dual-tree 複素ウェーブレットパケット (Dual-Tree Complex Wavelet Packet : DTCWP) のみであるが、この手法は任意の  $M$  分割ではなく、2 のべきで表される  $2^r$  分割の設計に限る。更に、この設計手法は 2 分割 DTCWT をツリー状に接続するものであるため、本質的には 2 分割 DTCWT の周波数選択性能に制限されてしまい、 $M$  分割フィルタバンクが本来持つ周波数選択性能の高さを引き出すことができない。

この問題を解決するために、本章ではコサイン・サイン変調フィルタバンクに基づく DTCWT の設計法を提案する。コサイン変調フィルタバンクはプロトタイプフィルタを変調することによって、任意の分割数のフィルタバンクが簡単に設計できるという特徴を持つ。本研究では、コサイン変調フィルタバンクの拡張として 2 種類のコサイン・サイン変調フィルタバンクを提案し、それぞれによって  $M$  分割 DTCWT が実現できることを示す。また提案フィルタバンクを画像ノイズ除去に応用し、その有効性を従来法の DTCWT と比較し、評価する。

本章は以下のように構成される。6.2 節にて、本章の前提事項となる  $M$  分割 DTCWT 及びコサイン変調フィルタバンクについて述べる。次に  $M$  分割 DTCWT の従来設計法である DTCWP を 6.2.3 節で述べ、問題点を示す。そして 6.3 節にてコサイン・サイン変調フィルタバンクに基づ

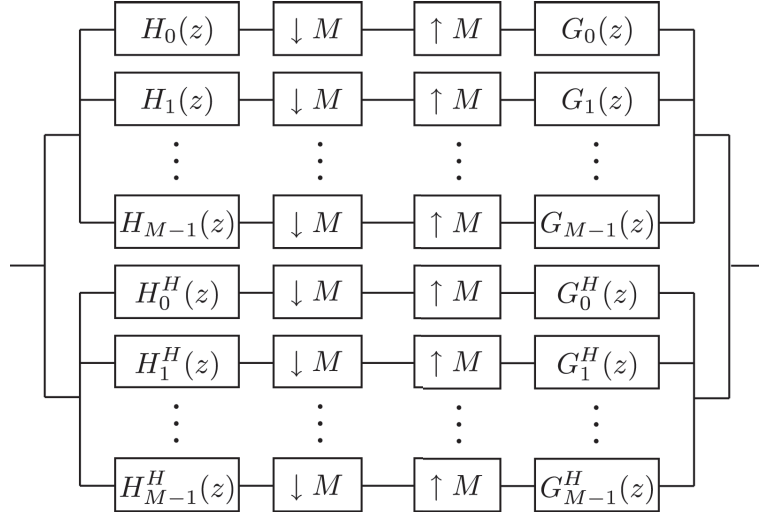


図 6.1  $M$  分割 DTCWT

く  $M$  分割 DTCWT の設計法を示し，任意の帯域分割数が実現できることを示す．6.4 節で，提案  $M$  分割 DTCWT を非線形近似，画像ノイズ除去に適用し，従来の  $M$  分割 DTCWT に対する優位性を示す．最後に 6.5 節にて，本章を結ぶ．

## 6.2 準備

### 6.2.1 $M$ 分割 Dual-tree 複素ウェーブレット変換

構造

本節では 2 分割の DTCWT の拡張として提案された  $M$  分割 DTCWT について説明する [56]．図 6.1 は  $M$  分割 DTCWT の構造を示す．2 分割 DTCWT と同様に冗長度は 2 倍である．ここで  $\psi_m$  及び  $\psi_m^H$  ( $m = 0, \dots, M-1$ ) をサブバンドフィルタ  $H_m(z)$  及び  $H_m^H(z)$  に対応する，スケーリング関数 ( $m = 0$ ) とウェーブレット関数 ( $m = 0, \dots, M-1$ ) とする． $\psi_m$  と  $\psi_m^H$  がヒルベルト変換対をなすとは次式を満たすことである．

$$\hat{\psi}_m^H(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) \hat{\psi}_m(\omega), \quad (6.1)$$

$\operatorname{sgn}(\omega)$  は，

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega > 0 \\ 0 & \omega = 0 \\ -1 & \omega < 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

である．ここで  $\psi_m$  と  $\psi_m^H$  がヒルベルト変換対となるならば  $\psi_m^A := \psi_m + j\psi_m^H$  は解析関数となる ( $\hat{\psi}_m^A(\omega) \approx 0, \omega < 0$ )．

ヒルベルト変換対を構成するためにサブバンドフィルタの対に課される条件は次式となる．

$$\begin{aligned} G_m(\omega) &= e^{-j\theta_m} H_m(\omega) \\ G_m^H(\omega) &= e^{-j\tilde{\theta}_m} H_m^H(\omega) \end{aligned} \quad (6.3)$$

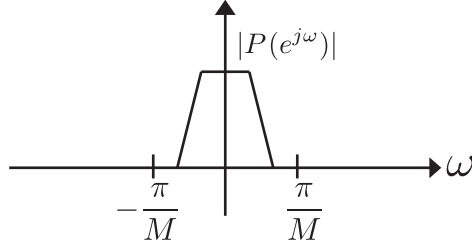


図 6.2 プロトタイプフィルタの周波数応答例

$$\theta_0(\omega) = \tilde{\theta}_0(\omega) = \left(d + \frac{1}{2}\right)(M-1)\omega - p\omega \quad (6.4)$$

ただし,  $\forall p \in \{0, \dots, \lceil \frac{M}{2} \rceil - 1\}$ ,  $\forall \omega \in [\frac{2\pi}{M}p, \frac{2\pi}{M}(p+1))$  であり,

$$\begin{aligned} \theta_m(\omega) &= \tilde{\theta}_m(\omega) \\ &= \begin{cases} \left(d + \frac{1}{2}\right)(M-1)\omega - p\omega & \omega \in (0, 2\pi), \\ 0 & \omega = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (6.5)$$

である ( $m \in \{1, \dots, M-1\}$ ). 上式に含まれる “ $e^{\frac{\omega}{2}}$ ” の項は時間領域において半サンプル遅延の関係となることを示しており, 2分割 DTCWT と同様, FIR に基づく半サンプル遅延近似問題を解くことになる.

## 6.2.2 コサイン変調フィルタバンク

$M$  分割コサイン変調フィルタバンク (Cosine Modulated Filter Bank: CMFB) とは, すべてのバンドパスフィルタを図 6.2 に示すような 1 つのプロトタイプフィルタ ( $p(n)$ ) の変調のみで設計できるという, 設計の容易さを利点に持つフィルタバンクの 1 つのクラスである. 本研究ではプロトタイプフィルタの周波数応答は次式のように制限されていると仮定する;

$$\text{supp}(P(e^{j\omega})) \subset \left[-\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{M}\right]. \quad (6.6)$$

CMFB はそのプロトタイプフィルタの変調方式によって 2 つのクラスに分類できる. 1 つは奇数型 [95, 96, 98, 103, 104] でもう 1 つは偶数型 [97, 98, 105, 106] である. 以下の章で 2 つのフィルタバンクの詳細を説明する.

### 奇数型コサイン変調フィルタバンク

ここでは奇数型コサイン変調フィルタバンク (Odd-type CMFB: OCMFB) について説明する. 「奇数」とは図 6.3 に示すようにプロトタイプフィルタの変調座標が周波数  $\frac{(2m+1)\pi}{2M}$  上にあることに由来する. このクラスのフィルタバンクはプロトタイプフィルタの変調によってすべてのサブバンドフィルタが実現できるため, 1 つずつ独立に決定される従来のフィルタバンクよりも設計が容易である. 図 6.4 に示す  $M$  分割 OCMFB の各サブバンドフィルタ  $H_m(z)$  と  $G_m(z)$  のフィルタ係数  $h_m(n)$ ,  $g_m(n)$  は次式で表現される.

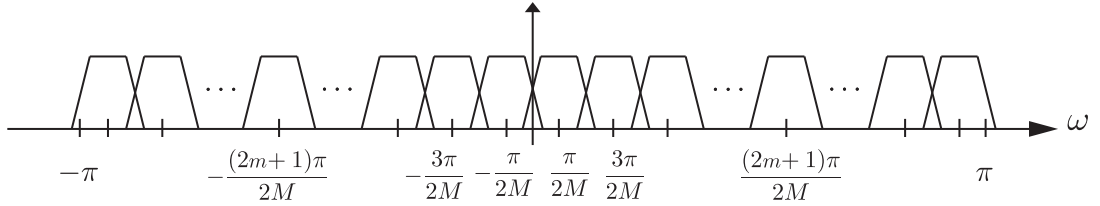


図 6.3 OCMFB の周波数応答例

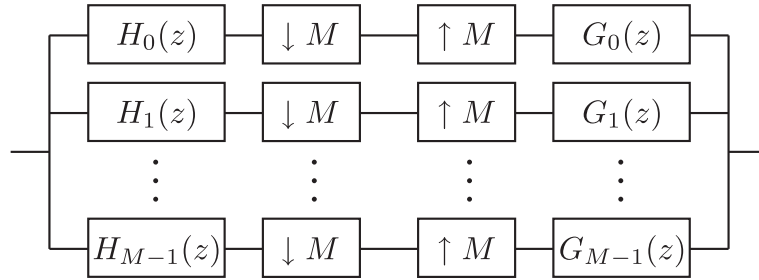


図 6.4 OCMFB のシステム構造

$$\begin{aligned}
 h_m(n) &:= 2p(n) \cos \left( (2m+1) \frac{\pi}{2M} \left( n - \frac{N-1}{2} \right) + \theta_m \right) \\
 g_m(n) &:= 2p(n) \cos \left( (2m+1) \frac{\pi}{2M} \left( n - \frac{N-1}{2} \right) - \theta_m \right)
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

ここで  $m = 0, \dots, M-1$ ,  $\theta_m = (-1)^m \frac{\pi}{4}$ ,  $p(n)$  はプロトタイプフィルタである。同様に, これらのサブバンドフィルタは  $z$  領域で次式で表現される。

$$\begin{aligned}
 H_m(z) &:= c_m U_m(z) + \overline{c_m} V_m(z) \\
 U_m(z) &= P \left( z W_{2M}^{m+\frac{1}{2}} \right), \quad V_m(z) = P \left( z W_{2M}^{-(m+\frac{1}{2})} \right) \\
 G_m(z) &= z^{N-1} H_m(z).
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

ここで  $P(z)$  はプロトタイプフィルタ  $p(n)$  の  $z$  変換であり,  $c_m = e^{j\theta_m} W_{2M}^{(m+\frac{1}{2}) \frac{N-1}{2}}$  である。

完全再構成条件を満たすためには, プロトタイプフィルタのポリフェーズ成分  $E_i(z)$  ( $0 \leq i \leq 2M-1$ ) に関して次式が成立することが必要十分である [95]:

$$\begin{bmatrix} E_i(z) \\ E_{i+M}(z) \end{bmatrix} = \mathbf{U}_{i,m-1} \mathbf{\Lambda}(z) \cdots \mathbf{U}_{i,1} \mathbf{\Lambda}(z) \begin{bmatrix} \cos \theta_{i,0} \\ \sin \theta_{i,0} \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

$$\mathbf{U}_{i,m-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{i,m-1} & \sin \theta_{i,m-1} \\ -\sin \theta_{i,m-1} & \cos \theta_{i,m-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}. \tag{6.10}$$

#### 偶数型コサイン変調フィルタバンク

OCMFB はプロトタイプフィルタを奇数点に変調させることでフィルタバンク全体を構成していたが, 偶数点に変調させることでもう一種類のコサイン変調フィルタバンクを設計することができる。

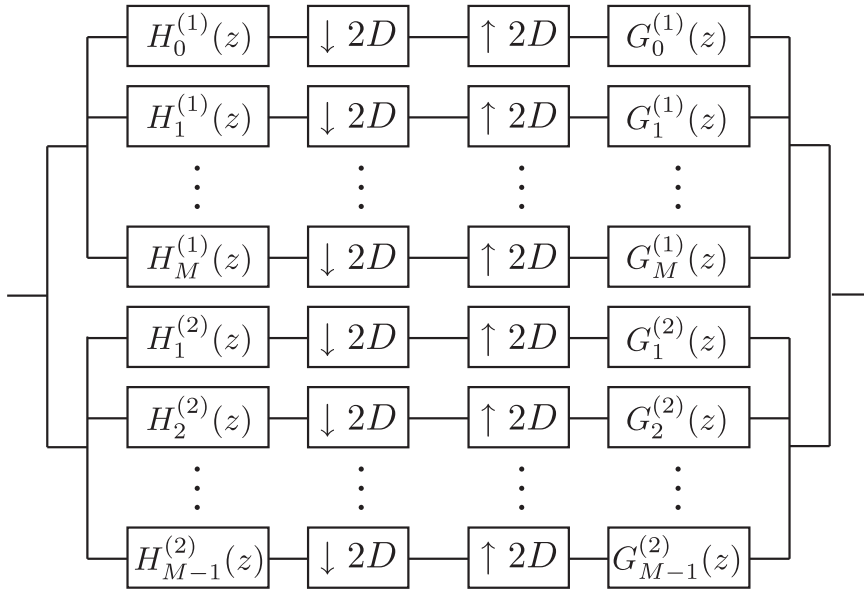


図 6.5 ECMFB のシステム構造

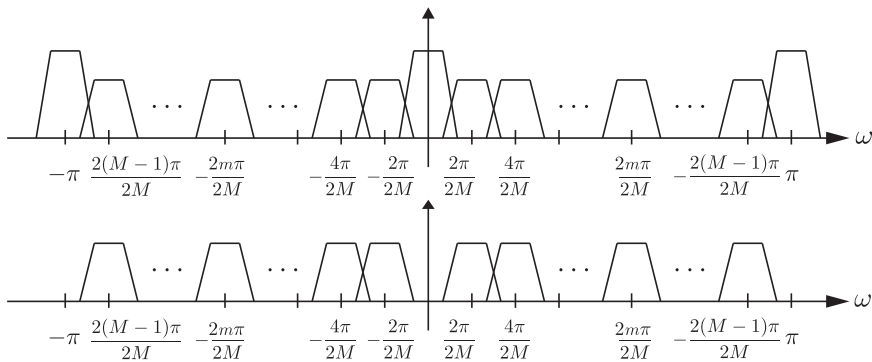


図 6.6 ECMFB の周波数応答例

Lin らと Bölskei は偶数型コサイン変調フィルタバンク (Even-type CMFB : ECMFB) を提案した [97, 98] . ある  $2D$  間引きの  $M + 1$  分割 ECMFB は 2 つのシステムから構成される ( 図 6.5) . 第 1 システムは  $H_0^{(1)}(z), \dots, H_M^{(1)}(z)$  と  $G_0^{(1)}(z), \dots, G_M^{(1)}(z)$  が分割フィルタ・合成フィルタであり,  $H_0^{(2)}(z), \dots, H_{M-1}^{(2)}(z)$  及び  $G_0^{(2)}(z), \dots, G_{M-1}^{(2)}(z)$  が第 2 システムである . 図 6.6 は ECMFB の周波数応答を示す . 図よりプロトタイプフィルタは偶数点  $\frac{2\pi m}{2M}$  に変調されていることが分かる . サブバンドフィルタのフィルタ係数は次式のように与えられる [98] .



$$\begin{cases}
H_0^{(1)}(z) := U_0(z) \\
H_m^{(1)}(z) := \frac{1}{\sqrt{2}} (U_m(z) + U_{-m}(z)) \\
H_M^{(1)}(z) := U_M(z) \\
H_m^{(2)}(z) := -\frac{1}{\sqrt{2}} j z^{-D} (U_m(z) - U_{-m}(z)) \\
G_m^{(1)}(z) := z^{-(N+D)} \tilde{H}_m^{(1)}(z) \\
G_m^{(2)}(z) := z^{-(N+D)} \tilde{H}_m^{(2)}(z)
\end{cases} \quad (6.11)$$

ここで  $1 \leq m \leq M-1$ ,  $U_m(z)$  and  $U_{-m}(z)$  は

$$U_m(z) := P(zW_{2D}^m), \quad U_{-m}(z) := P(zW_{2D}^{-m}) \quad (6.12)$$

である。ただし  $P(z)$  はプロトタイプフィルタである。プロトタイプフィルタが対称性を満たし、タップ長  $N = (2m_0 + 1)M + 1$  のとき、すべてのサブバンドフィルタは線形位相性を有する。ここで第 2 システムは  $z^{-N}$  によって一様に  $N$  サンプル遅れていることが分かる。

$D = M$  のとき最大間引き ECMFB が実現される [97]。タップ長  $N = (2m_0 + 1)M$  のプロトタイプフィルタ  $p(n)$  の周波数応答が  $\text{supp}[P(e^{j\omega})] \subset [-\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{M}]$  に制限されているとし、更に次式を満たすとき完全再構成となる。[97];

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_k(z)E_k(z) &= 1 \quad (k = 0 \text{ or } M), \\
\tilde{E}_k(z)E_k(z) + \tilde{E}_{k+M}(z)E_{k+M}(z) &= 2. \\
(k = 1 \dots M-1), &
\end{aligned} \quad (6.13)$$

ただし  $E_k(z)$  は  $P(z)$  のポリフェーズ成分である。

### 6.2.3 $2^r$ 分割 DTCWT の設計法：Dual-tree 複素ウェーブレットパケット

DTCWT において任意の帯域分割数を設計する手法は未だ提案されていない。しかし Selesnick によって 2 分割 DTCWT のツリー構造に基づく  $2^r$  分割 DTCWT 設計法 “Dual-tree 複素ウェーブレットパケット” (DTCWP) が提案されている [92]。本章では 4 分割 DTCWT を例としてその設計法を説明する。

2 分割 DTCWT のフィルタ対  $\{H_0(z), H_1(z), H_0^{\mathcal{H}}(z), H_1^{\mathcal{H}}(z)\}$ , 2 分割直交フィルタバンク  $\{F_0(z), F_1(z)\}$ , 及び 1 レベル用のフィルタ  $\{H_{0f}(z), H_{1f}(z), H_{0f}^{\mathcal{H}}(z), H_{1f}^{\mathcal{H}}(z)\}$  を図 6.7 のように置く。2 分割 DTCWT は 5.3 節のように設計できる。1 レベル用のフィルタ  $\{H_{0f}(z), H_{1f}(z), H_{0f}^{\mathcal{H}}(z), H_{1f}^{\mathcal{H}}(z)\}$  は次式を満たす [92]:

$$\begin{aligned}
H_{0f}^{\mathcal{H}}(z) &= z^{-1}H_{0f}(z) \\
H_{1f}^{\mathcal{H}}(z) &= z^{-1}H_{1f}(z)
\end{aligned} \quad (6.14)$$

本章のシミュレーションでは  $H_{0f}(z) = F_0(z), H_{1f}(z) = F_1(z), H_{0f}^{\mathcal{H}}(z) = z^{-1}F_0(z), H_{1f}^{\mathcal{H}}(z) = z^{-1}F_1(z)$  とし  $F_0(z), F_1(z)$  は平面回転行列によるラティス構造を用いて設計する [5]。

以上のようにして 4 分割 DTCWT を設計することができる。しかし、この設計法は本質的に 2 分割 DTCWT を直列接続したものであり、設計できる周波数分解能は 2 分割の場合に制限されてしまう。また設計可能な DTCWT の帯域分割数は  $2^r$  に限られてしまうので、一般的な構造ではない。

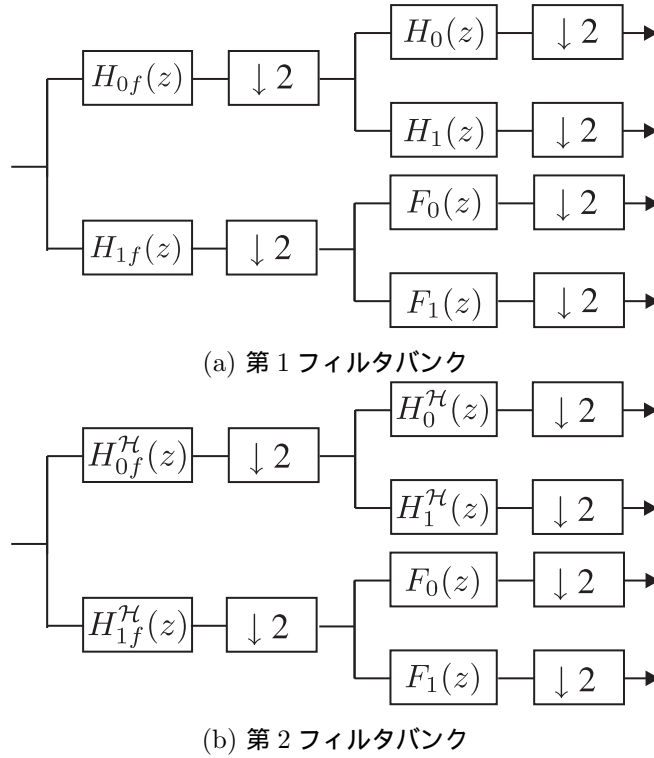


図 6.7 4 分割 DTCWT

## 6.3 コサイン・サイン変調フィルタバンク

### 6.3.1 偶数型コサイン・サイン変調フィルタバンク

本節では偶数型コサイン・サイン変調フィルタバンクを提案する．議論を始める前に，次の交換定理を挙げる [107]．

**定理 6 (交換条件)**．完全再構成を満たす冗長型フィルタバンクは最大間引きフィルタバンクの間引き率を約数に取り替えることで構成できる．

ある  $M + 1$  分割の最大間引き完全再構成 ECMFB のサブバンドフィルタを  $\{H_m^{(1)}(z), G_m^{(1)}(z)\}$  と  $\{H_m^{(2)}(z), G_m^{(2)}(z)\}$  とおく．間引き率を  $2M$  から  $M$  に取り替える時，補題より冗長型完全再構成 ECMFB となる．更にこのとき， $H_m^{(2)}(z)$  と  $G_m^{(2)}(z)$  に含まれる  $z^{-M}$  の項は完全再構成を崩さずに取り除くことが可能となる．即ち， $M + 1$  分割  $M$  間引き完全再構成 ECMFB のすべてのサブバンドフィルタは次のように表される．

$$\begin{cases} H_0^{(1)}(z) := \frac{1}{\sqrt{2}}U_0(z) \\ H_m^{(1)}(z) := \frac{1}{2}(U_m(z) + U_{-m}(z)) \\ H_M^{(1)}(z) := \frac{1}{\sqrt{2}}U_M(z) \\ H_m^{(2)}(z) := -\frac{j}{2}(U_m(z) - U_{-m}(z)) \end{cases} \quad \begin{cases} G_k^{(1)}(z) := z^{-N}\tilde{H}_m(z) \\ G_k^{(2)}(z) := z^{-N}\tilde{H}'_m(z) \end{cases} \quad (6.15)$$

証明． $M + 1$  分割  $2M$  間引き (最大間引き) ECMFB の間引きを  $2M$  から  $M$  に変えた  $M + 1$  分

割  $M$  間引き ECMFB を考える．サブバンドフィルタを  $\{H_m^{(1)}(z), H_m^{(2)}(z), G_m^{(1)}(z), G_m^{(2)}(z)\}$  とすると

$$\begin{cases} H_0^{(1)}(z) := \frac{1}{\sqrt{2}}U_0(z) \\ H_m^{(1)}(z) := \frac{1}{2}(U_m(z) + U_{-m}(z)) \\ H_M^{(1)}(z) := \frac{1}{\sqrt{2}}U_M(z) \\ H_m^{(2)}(z) := -\frac{j}{2}z^{-M}(U_m(z) - U_{-m}(z)) \end{cases} \quad \begin{cases} G_m^{(1)}(z) := z^{-(N+M)}\tilde{H}_m^{(1)}(z) \\ G_m^{(2)}(z) := z^{-(N+M)}\tilde{H}_m^{(2)}(z) \end{cases} \quad (6.16)$$

と表せる． $X(z)$  と  $Y(z)$  を冗長 ECMFB の入力と出力とすると  $Y(z)$  は

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{\ell=0}^{M-1} \frac{1}{M} \left( \sum_{m=0}^M H_m^{(1)}(zW_M^\ell)G_m^{(1)}(z) + \sum_{m=1}^{M-1} H_m^{(2)}(zW_M^\ell)G_m^{(2)}(z) \right) X(zW_M^\ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^{M-1} Y_\ell(z)X(zW_M^\ell). \end{aligned} \quad (6.17)$$

のように書き表すことができる．式 (6.16) を式 (6.17) に代入し， $(W_M^\ell)^M = 1$  の関係を使うと， $Y_0(z)$  と  $Y_1(z)$  は

$$\begin{aligned} Y_0(z) &= \frac{2z^{-(L+M)}}{M} \sum_{m=0}^{2M-1} U_m(z)\tilde{U}_m(z) \\ Y_\ell(z) &= \frac{2z^{-(L+M)}}{M} \sum_{m=0}^{2M-1} U_m(zW_M^\ell)\tilde{U}_m(z) \quad (\ell \neq 0) \end{aligned} \quad (6.18)$$

と書ける． $\{H_m^{(1)}(z), H_m^{(2)}(z), G_m^{(1)}(z), G_m^{(2)}(z)\}$  は交換条件から完全再構成フィルタバンクを与えるから， $Y_0(z) = z^{-p}$  ( $\exists p \in \mathbb{Z}$ )， $Y_\ell(z) = 0$  ( $\ell \neq 0$ ) となる．

次に， $\{H_m^{(1)}(z), H_m^{(2)}(z), G_m^{(1)}(z), G_m^{(2)}(z)\}$  を  $z^{-M}$  を  $\{H_m^{(2)}(z), G_m^{(1)}(z), G_m^{(2)}(z)\}$  から取り除いたフィルタ群とする：

$$\begin{cases} H_0^{(1)}(z) := \frac{1}{\sqrt{2}}U_0(z) \\ H_m^{(1)}(z) := \frac{1}{2}(U_k(z) + U_{-k}(z)) \\ H_M^{(1)}(z) := \frac{1}{\sqrt{2}}U_M(z) \\ H_m^{(2)}(z) := -\frac{j}{2}(U_k(z) - U_{-k}(z)) \end{cases} \quad \begin{cases} G_m^{(1)}(z) := z^{-N}\tilde{H}_m^{(1)}(z) \\ G_m^{(2)}(z) := z^{-N}\tilde{H}_m^{(2)}(z) \end{cases}, \quad (6.19)$$

このとき，このシステムが完全再構成を満たすことを示せばよい． $Y'(z)$  を  $\{H_m^{(1)}(z), H_m^{(2)}(z), G_m^{(1)}(z), G_m^{(2)}(z)\}$  によって復元された信号とすると，前述と同様に：

$$\begin{aligned} Y'(z) &= \sum_{\ell=0}^{M-1} \frac{1}{M} \left( \sum_{m=0}^M H_m^{(1)}(zW_M^\ell)G_m^{(1)}(z) + \sum_{m=1}^{M-1} H_m^{(2)}(zW_M^\ell)G_m^{(2)}(z) \right) X(zW_M^\ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^{M-1} Y'_\ell(z)X(zW_M^\ell). \end{aligned} \quad (6.20)$$

と書ける．式 (6.19) を代入し， $Y'_0(z) = z^{-M}Y_\ell(z) = z^{-p}$ ， $Y'_\ell(z) = Y_\ell(z) = 0$  ( $\forall \ell$ ) と導かれる．即ち  $\{H_m^{(1)}(z), H_m^{(2)}(z), G_m^{(1)}(z), G_m^{(2)}(z)\}$  は遅延要素  $z^{-M}$  を取り除いて完全再構成を満たすことが示された．  $\square$

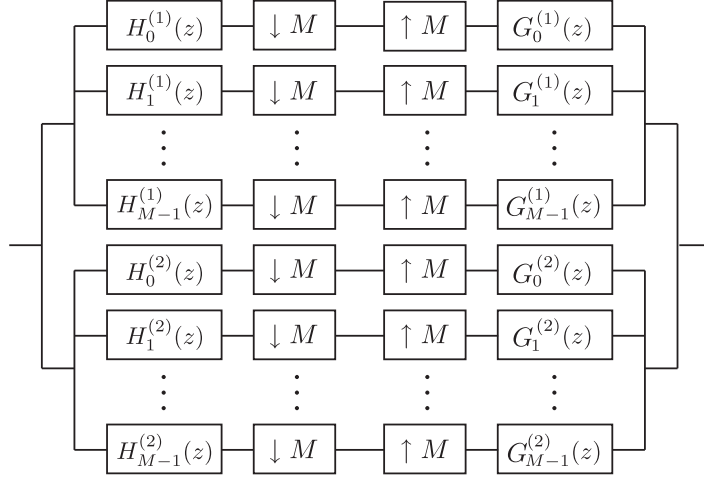


図 6.8 OCSMF のシステム構造

$\{H_m^{(1)}(z), H_m^{(2)}(z)\}$  を, 式 (6.19) のように,

$$\begin{cases} H_0^{(1)}(z) := \frac{1}{\sqrt{2}}U_0(z) \\ H_m^{(1)}(z) := \frac{1}{2}(U_k(z) + U_{-k}(z)) \\ H_M^{(1)}(z) := \frac{1}{\sqrt{2}}U_M(z) \\ H_m^{(2)}(z) := -\frac{j}{2}(U_k(z) - U_{-k}(z)) \end{cases} \quad (6.21)$$

と置く. 対応するフィルタ係数  $\{h_m^{(1)}(n), h_m^{(2)}(n)\}$  を時間領域において表現すると,

$$\begin{cases} h_0^{(1)}(n) := \frac{1}{\sqrt{2}}p(n) \\ h_m^{(1)}(n) := \sqrt{2}p(n) \cos\left(\frac{\pi}{M}mn\right) \\ h_M^{(1)}(n) := \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^n p(n) \\ h_m^{(2)}(n) := \sqrt{2}p(n) \sin\left(\frac{\pi}{M}mn\right) \end{cases} \quad (6.22)$$

となり, プロトタイプフィルタ  $p(n)$  と  $\cos$  項の積, またはプロトタイプフィルタ  $p(n)$  と  $\sin$  項の積によって, すべてのサブバンドフィルタが設計できることが分かる. 本論文では, このフィルタバンクのクラスを偶数型コサイン・サイン変調フィルタバンク (Even-type Cosine-Sine Modulated Filter Bank : ECSMF) と呼ぶ.

### 6.3.2 奇数型コサイン・サイン変調フィルタバンク

前節では偶数型のコサイン・サイン変調フィルタバンクを構成した. 同様に奇数型変調方式に基づく奇数型コサイン・サイン変調フィルタバンク (Odd-type CSMFB : OCSMF) を構成することができる.

式 (6.7) の  $\cos$  を  $\sin$  としたものを並列に配したフィルタバンクを図 6.8 に示す.

$$\begin{cases} h_m^{(1)}(n) := 2p(n) \cos\left((2m+1)\frac{\pi}{2M}\left(n - \frac{N-1}{2}\right) + \theta_m\right) \\ h_m^{(2)}(n) := 2p(n) \sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2M}\left(n - \frac{N-1}{2}\right) + \theta_m\right) \\ g_m^{(1)}(n) := 2p(n) \cos\left((2m+1)\frac{\pi}{2M}\left(n - \frac{N-1}{2}\right) - \theta_m\right) \\ g_m^{(2)}(n) := 2p(n) \sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2M}\left(n - \frac{N-1}{2}\right) - \theta_m\right) \end{cases} \quad (6.23)$$

ただし  $m = 0, \dots, M-1$ ,  $\theta_m = (-1)^m \frac{\pi}{4}$ ,  $p(n)$  はプロトタイプフィルタである. 同様に,  $z$  領域では

$$\begin{cases} H_m^{(1)}(z) := c_m U_m(z) + \overline{c_m} V_m(z) \\ H_m^{(2)}(z) := -j(c_m U_m(z) - \overline{c_m} V_m(z)) \end{cases}$$

$$U_m(z) = P\left(zW_{2M}^{m+\frac{1}{2}}\right), \quad V_m(z) = P\left(zW_{2M}^{-(m+\frac{1}{2})}\right)$$

$$G_m^{(1)}(z) = z^{N-1}H_m^{(1)}(z), \quad G_m^{(2)}(z) = z^{N-1}H_m^{(2)}(z). \quad (6.24)$$

と書ける. ここで  $c_m = e^{j\theta_m} W_{2M}^{(m+\frac{1}{2})\frac{N-1}{2}}$ . ここで  $\mathbf{E}^{(1)}(z)$  と  $\mathbf{E}^{(2)}(z)$  を第 1 フィルタバンクと第 2 フィルタバンクのポリフェーズ行列とすると, 式 (6.24) より,  $\mathbf{E}^{(2)}(z) = \Lambda \tilde{\mathbf{E}}^{(1)}(z)$  を満たす ( $\Lambda := \text{diag}((-1)^m)$  ( $0 \leq m \leq M-1$ )). よって第 1 フィルタバンクが完全再構成  $\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}(z)\mathbf{E}^{(1)}(z) = \mathbf{I}$  を満たしているとき, 第 2 フィルタバンクも自動的に完全再構成を満たす.

### 6.3.3 コサイン・サイン変調フィルタバンクのシフト不変性

本章では提案法として導かれた 2 つのクラス OCSMF と ECSMF のシフト不変性について議論する. 一般にシフト不変性とは入力  $X(z)$  がシフトしたサンプル数だけ出力もシフトするシステムの性質をいう.  $z$  領域では

$$Y_r(z) = z^{-r}Y(z), \quad (6.25)$$

と定式化される. ただし  $r \in \mathbb{Z}$  はシフト量,  $Y_r(z)$  は  $r$  サンプルシフトされた入力に対する出力を示す.

$M$  分割 DTCWT においてはシフト不変性が以下の意味で成り立つ [108]. 図 6.9 のように, 原信号を  $r$  サンプルシフトさせた信号  $X_r(z)$  を  $M$  分割 DTCWT に入力し, 指定されたレベル数分の変換を行う (ただし, 図 6.9 では 2 レベルの変換を行っている). 更に, 第 1 フィルタバンク及び第 2 フィルタバンクの,  $J$  レベルにおける  $m$  番目のサブバンドを通過した信号を  $S_{m,r}^{(1)}(z)$ ,  $S_{m,r}^{(2)}(z)$  とし, 2 つの信号の和をとる ( $S_{m,r}^{(1)}(z) + S_{m,r}^{(2)}(z)$ ). この時,  $M$  分割 DTCWT は,  $S_{m,0}^{(1)}(z) + S_{m,0}^{(2)}(z)$  と  $S_{m,r}^{(1)}(z) + S_{m,r}^{(2)}(z)$  に関して,

$$S_{m,r}^{(1)}(z) + S_{m,r}^{(2)}(z) = z^{-r}(S_{m,0}^{(1)}(z) + S_{m,0}^{(2)}(z)) \quad (6.26)$$

が成立する. また図 6.9 に示されている  $J$  レベル  $m$  番目の帯域のみに着目し, 2.2.2 節で述べたフィルタとダウンサンプリングまたはアップサンプリングの等価交換を行うと, 図 6.10 のように表すことができる. ここで  $H_m^{(1,J)}(z)$ ,  $H_m^{(2,J)}(z)$ ,  $G_m^{(1,J)}(z)$  そして  $G_m^{(2,J)}(z)$  は  $J$  分割レベルの  $m$  番目の帯域に対応するフィルタであると仮定すると, 次のように表される [5]:

$$\begin{aligned} H_m^{(1,J)}(z) &= \left( \prod_{n=0}^{J-2} H_0^{(1)}(z^{M^n}) \right) H_m^{(1)}(z^{M^{J-1}}) \\ H_m^{(2,J)}(z) &= H_0^{(2,J-1)}(z) H_m^{(2)}(z^{M^{J-1}}) \\ G_m^{(1,J)}(z) &= \left( \prod_{n=0}^{J-2} G_0^{(1)}(z^{M^n}) \right) G_m^{(1)}(z^{M^{J-1}}) \\ G_m^{(2,J)}(z) &= G_0^{(2,J-1)}(z) G_m^{(2)}(z^{M^{J-1}}). \end{aligned} \quad (6.27)$$

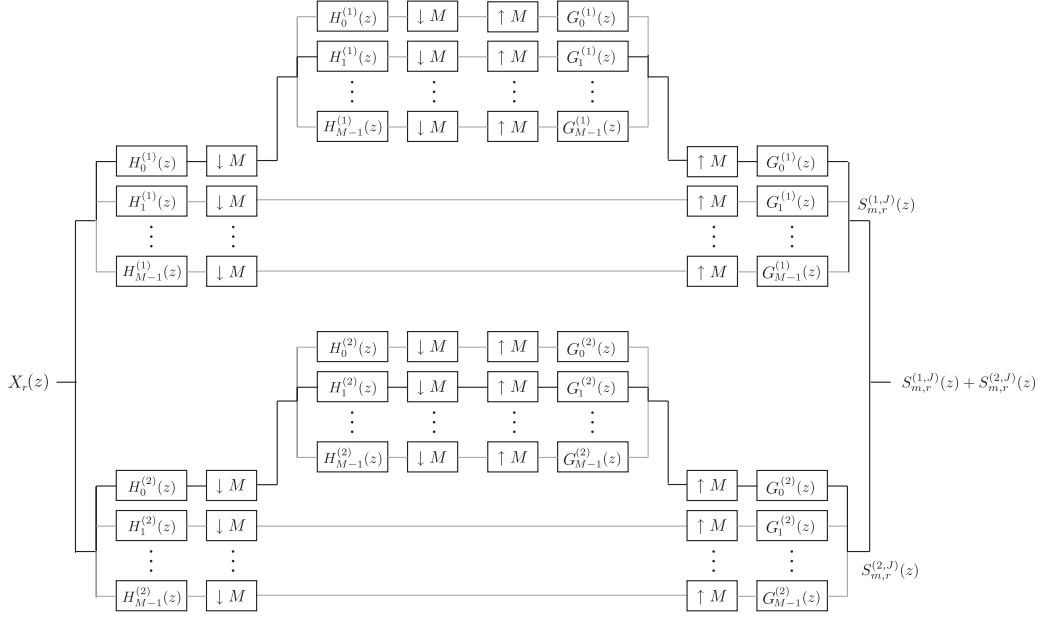


図 6.9 シフト不変性に関する信号の入出力図． $X_r(z)$  を  $r$  サンプルシフトされた入力信号 ( $r = 0$  は原信号を表すとする．) とする． $X_r(z)$  を入力する時，任意の分割レベル  $J$  における，任意の帯域  $m \in [0, \dots, M-1]$  (図において，濃色の実線で示されている帯域) において，第 1 フィルタバンクからの出力  $S_{m,r}^{(1,J)}(z)$  及び第 2 フィルタバンクからの出力  $S_{m,r}^{(2,J)}(z)$  の和で生成された  $S_{m,r}^{(1,J)}(z) + S_{m,r}^{(2,J)}(z)$  はシフト不変となる．(ただし図では  $J = 2, m = 1$  の場合が示されている．)

$S_m^{(1,J)}$  と  $S_m^{(2,J)}$  を第 1 フィルタバンク及び第 2 フィルタバンクにおける  $J$  レベル  $m$  番目のサブバンド信号とすると

$$S_m^{(1,J)}(z) = \frac{1}{M^J} \sum_{\ell=0}^{M^J-1} P_{m,\ell}^{(J)}(z) X(zW_{M^J}^\ell) \quad (6.28)$$

$$S_m^{(2,J)}(z) = \frac{1}{M^J} \sum_{\ell=0}^{M^J-1} Q_{m,\ell}^{(J)}(z) X(zW_{M^J}^\ell), \quad (6.29)$$

と書き表せる．ここで  $P_{m,\ell}^{(J)}(z) = H_m^{(1,J)}(zW_{M^J}^\ell)G_m^{(1,J)}(z)$ ， $Q_{m,\ell}^{(J)}(z) = H_m^{(2,J)}(zW_{M^J}^\ell)G_m^{(2,J)}(z)$  である．この表現を用いると， $M$  分割 DTCWT のシフト不変性のための条件は

$$H_m^{(1,J)}(zW_{M^J}^\ell)G_m^{(2,J)}(z) + H_m^{(2,J)}(zW_{M^J}^\ell)G_m^{(1,J)}(z) \approx 0 \quad (6.30)$$

の形に書き表すことができる [108]．

以下では，ECSMF 及び OCSMF に関して， $M$  分割 DTCWT と同様にしてシフト不変性が成立することを示す．

#### 偶数型

ECSMF のシフト不変性に関しては次の定理が成立する．

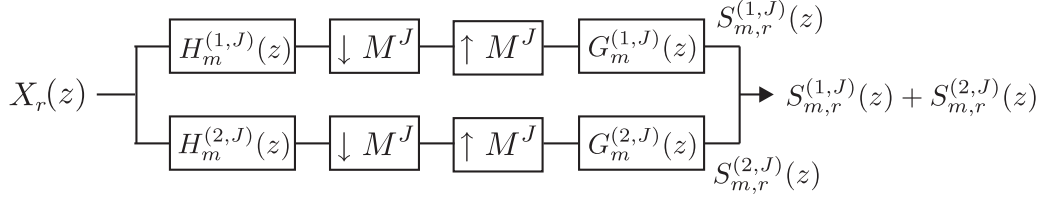


図 6.10 図 6.9 の分割レベル  $J$ ・帯域  $m \in (0, \dots, M-1)$  におけるサブバンドフィルタ・ダウンサンプリング・アップサンプリングを等価変換したシステム

定理 7. ECSMFB のプロトタイプフィルタの周波数応答が  $P(e^{j\omega}) \subset [-\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{M}]$  と制限されているならば, シフト不変性が成り立つ.

証明. まず,  $m = 1, \dots, M-1$  のサブバンドに関して考える. この場合のシフト不変性は次式で定式化される.

$$S_{m,r}^{(1,J)}(z) + S_{m,r}^{(2,J)}(z) = z^{-r}(S_{m,0}^{(1,J)}(z) + S_{m,0}^{(2,J)}(z)), \quad (6.31)$$

ここで  $\forall r \in \mathbb{Z}$ ,  $S_{m,r}^{(1,J)}(z)$  及び  $S_{m,r}^{(2,J)}(z)$  は  $r$  サンプルシフトした入力に対する第一システム・第二システムの  $m$  番目のサブバンド信号である. ある  $\ell$  で  $W_{M^J}^\ell \neq 1$  となるから  $S_{m,r}^{(1,J)}(z) + S_{m,r}^{(2,J)}(z)$  がシフト不変性を持つならば, 以下の式が成り立つことが必要十分である.

$$H_m^{(1,J)}(zW_{M^J}^\ell)G_m^{(2,J)}(z) + H_m^{(2,J)}(zW_{M^J}^\ell)G_m^{(1,J)}(z) \approx 0 \quad (6.32)$$

$U_m^{(J)}(z)$  と  $U_{-m}^{(J)}(z)$  を

$$\begin{aligned} U_m^{(J)}(z) &:= H_0^{(1,J-1)}(z)U_m(z^{M^{J-1}}) \\ U_{-m}^{(J)}(z) &:= H_0^{(1,J-1)}(z)U_{-m}(z^{M^{J-1}}) \end{aligned} \quad (6.33)$$

のようにおくと式 (6.27) は以下となる.

$$\begin{aligned} H_m^{(1,J)}(z) &= U_m^{(J)}(z) + U_{-m}^{(J)}(z), \\ H_m^{(2,J)}(z) &= j(U_m^{(J)}(z) - U_{-m}^{(J)}(z)). \end{aligned} \quad (6.34)$$

式 (6.34) を式 (6.32) に代入すれば, シフト不変性に対する必要十分条件は

$$U_m^{(J)}(zW_{M^J}^\ell)\tilde{U}_m^{(J)}(z) + U_{-m}^{(J)}(zW_{M^J}^\ell)\tilde{U}_{-m}^{(J)}(z) \approx 0. \quad (6.35)$$

となる. プロトタイプフィルタの周波数応答に関する仮定 ( $\text{supp}[P(e^{j\omega})] \subset [-\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{M}]$ ) より,  $U_m^{(J)}(zW_{M^J}^\ell)$  と  $\tilde{U}_m^{(J)}(z)$  の台は

$$\begin{aligned} \text{supp}\left[U_m^{(J)}(e^{j\omega}W_{M^J}^\ell)\right] &\subset \left[\frac{\pi}{M^J}(m-1+2\ell), \frac{\pi}{M^J}(m+1+2\ell)\right], \\ \text{supp}\left[\tilde{U}_m^{(J)}(e^{j\omega})\right] &\subset \left[\frac{\pi}{M^J}(m-1), \frac{\pi}{M^J}(m+1)\right]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

となる. よって式 (6.36) より, 式 (6.35) の左辺第 1 項 " $U_m^{(J)}(zW_{M^J}^\ell)\tilde{U}_m^{(J)}(z)$ " は  $1 \leq m \leq M^J-1$  の時に 0 となる. 同様に (6.35) の左辺第 2 項も  $1 \leq \ell \leq M^J-1$  の時に 0 となる. したがって, (6.32) が示された.

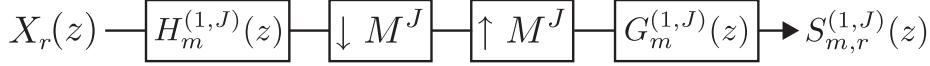


図 6.11 分割レベル  $J$  番目における帯域  $m = 0$  or  $M$  番目の入力出力の関係図．ただし， $X_r(z)$  は  $r$  サンプルシフトされた入力信号 ( $r = 0$  は原信号を表すとす．)， $S_{m,r}^{(1,J)}(z)$  は入力信号  $X_r(z)$  に対する出力信号．

$m = 0, M$  の場合， $H_0(z)$  と  $H_M(z)$  は  $m = 1, \dots, M-1$  の場合のように，対となるフィルタを持たない．よってこの場合のシフト不変性は，図 6.11 のようにサブバンド信号  $S_m^{(1,J)}(z)$  のみで成立する．この場合のシフト不変性の条件 (6.32) は次式の通りになる．

$$H_m^{(1,J)}(zW_{M^J}^\ell)G_m^{(1,J)}(z) \approx 0. \quad (6.37)$$

同様の議論で， $H_m^{(1,J)}(zW_{M^J}^\ell)G_m^{(1,J)}(z) \approx 0$  ( $1 \leq \ell \leq M^J - 1$ ) が示される．よって ECSMF 是シフト不変性を有することが証明された．  $\square$

### 奇数型

次に OCSMF についても議論する．この場合もやはり

$$S_{m,r}^{(1,J)}(z) + S_{m,r}^{(2,J)}(z) = z^{-r}(S_{m,0}^{(1,J)}(z) + S_{m,0}^{(2,J)}(z)), \quad (6.38)$$

が成り立つことがシフト不変性のための必要十分条件である．ただし  $\forall r \in \mathbb{Z}$  はシフト量， $S_{m,r}^{(1,J)}(z)$  と  $S_{m,r}^{(2,J)}(z)$  は  $r$  サンプルシフトされた入力信号に対する，第 1 フィルタバンク，第 2 フィルタバンクの  $J$  レベル・帯域  $m$  番目のサブバンド信号を示す (図 6.10)．ある  $\ell$  に対して  $W_{M^J}^\ell \neq 1$  であるから， $S_m^{(1,J)}(z) + S_m^{(2,J)}(z)$  がシフト不変となるための必要十分条件は

$$H_m^{(1,J)}(zW_{M^J}^\ell)G_m^{(1,J)}(z) + H_m^{(2,J)}(zW_{M^J}^\ell)G_m^{(2,J)}(z) \approx 0 \quad (6.39)$$

である．式 (6.24) から，シフト不変性のための必要十分条件 (6.39) は以下のように変形することができる．

$$U_m(zW_{M^J}^\ell)\tilde{U}_m(z) + V_m(zW_{M^J}^\ell)\tilde{V}_m(z) \approx 0. \quad (6.40)$$

プロトタイプフィルタの周波数応答に関する仮定  $\text{supp}[P(\omega)] \subset [-\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{M}]$  より， $U_m(zW_{M^J}^\ell)$  と  $\tilde{U}_m(z)$  の台は，

$$\begin{aligned} \text{supp}[U_m(e^{j\omega}W_{M^J}^\ell)] &\subset \left[ \frac{\pi}{M^J} \left( m - \frac{1}{2} + 2\ell \right), \frac{\pi}{M^J} \left( m + \frac{3}{2} + 2\ell \right) \right], \\ \text{supp}[\tilde{U}_m(e^{j\omega})] &\subset \left[ \frac{\pi}{M^J} \left( m - \frac{1}{2} \right), \frac{\pi}{M^J} \left( m + \frac{3}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.41)$$

となる．式 (6.41) より，式 (6.40) の左辺第 1 項 “ $U_m(zW_{M^J}^\ell)\tilde{U}_m(z)$ ” は  $1 \leq m \leq M^J - 1$  の時 0 となる．同様に，式 (6.40) の左辺第 2 項 “ $V_m(zW_{M^J}^\ell)\tilde{V}_m(z)$ ” も  $1 \leq \ell \leq M^J - 1$  の時 0 となる．ゆえに式 (6.39) が成り立つことが証明された．

以上より以下の定理が証明された．

**定理 8.** OCSMF のプロトタイプフィルタの周波数応答  $P(e^{j\omega})$  が  $[-\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{M}]$  に制限されるときシフト不変性を満たす．



### 6.3.4 コサイン・サイン変調フィルタバンクの方向分解能

本節では提案法として導かれた 2 つのクラス OCSMF と ECSMF の方向分解能について議論する．

#### 偶数型

始めに ECSMF の方向分解能について議論する． $2M$  分割  $M$  間引き ECSMF を考える． $m \in \{1 \dots M-1\}$  に対して、 $H_m^{(1)}(e^{j\omega})$  と  $H_m^{(2)}(e^{j\omega})$  を式 (6.15) のように定義する．このとき  $U_m(e^{j\omega})$  及び  $U_{-m}(e^{j\omega})$  は次式で表される．

$$\begin{aligned} U_m(e^{j\omega}) &= 2(H_m^{(1)}(e^{j\omega}) + jH_m^{(2)}(e^{j\omega})), \\ U_{-m}(e^{j\omega}) &= 2(H_m^{(1)}(e^{j\omega}) - jH_m^{(2)}(e^{j\omega})). \end{aligned} \quad (6.42)$$

$U_m(e^{j\omega})$  と  $U_{-m}(e^{j\omega})$  は共に正または負の領域にのみ周波数応答を持つフィルタとなる．

ここで入力  $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})Y_{\pm p, \pm q}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$  を  $(\pm p, \pm q)$  番目のサブバンド信号とする．更に  $U_{\pm p, \pm q}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) := U_{\pm p}(e^{j\omega_1})U_{\pm q}(e^{j\omega_2})$  を  $(\pm p, \pm q)$  番目のサブバンドに対応するフィルタとする．ただし、 $p, q = 1, \dots, M-1$ ．このとき  $Y_{p,q}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$  は以下のように表すことができる．

$$\begin{aligned} & Y_{p,q}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) \\ &= U_p(e^{j\omega_1})U_q(e^{j\omega_2})X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) \\ &= 4(H_{p,q}^R(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) + jH_{p,q}^I(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}))X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}), \\ & H_{p,q}^R(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = H_p^{(1)}(e^{j\omega_1})H_q^{(1)}(e^{j\omega_2}) - H_p^{(2)}(e^{j\omega_1})H_q^{(2)}(e^{j\omega_2}), \\ & H_{p,q}^I(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = H_p^{(1)}(e^{j\omega_1})H_q^{(2)}(e^{j\omega_2}) + H_p^{(2)}(e^{j\omega_1})H_q^{(1)}(e^{j\omega_2}). \end{aligned} \quad (6.43)$$

$Y_{p,-q}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$  も同様に表すことができる． $Y_{p,q}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$  と  $Y_{p,-q}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$  は唯一つの象限にのみ周波数応答を持つ信号となる．実際に信号  $y_{p,q}(n_1, n_2)$  と  $y_{p,-q}(n_1, n_2)$  は図 6.12(a) が示す変換によって取得される．この信号の実部をとれば (図 6.12(b): 左)、その周波数応答は原点对称となる (図 6.12(b): 右)．これは DTCWT と同様に水平・鉛直方向以外の斜め成分を抽出できるということを意味し ECSMF が高い方向分解能を持つことが分かる．

ただし  $H_0(z)$  と  $H_M(z)$  は対となるフィルタを持たないので  $M+1$  分割 ECSMF は  $0^\circ$ 、 $90^\circ$  及び  $2(M-1)^2$  の方向成分を取得できることになる．

#### 奇数型

次に OCSMF の場合を考える．同様に  $M$  分割 OCSMF が与えられたとする． $m \in \{0 \dots M-1\}$  に対して  $H_m^{(1)}(e^{j\omega})$  と  $H_m^{(2)}(e^{j\omega})$  を式 (6.24) のように定義する．このとき  $U_m(e^{j\omega})$  と  $V_m(e^{j\omega})$  は

$$\begin{aligned} U_m(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2}(H_m^{(1)}(e^{j\omega}) + jH_m^{(2)}(e^{j\omega})), \\ V_m(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2}(H_m^{(1)}(e^{j\omega}) - jH_m^{(2)}(e^{j\omega})). \end{aligned} \quad (6.44)$$

と書ける． $U_m(e^{j\omega})$  と  $V_m(e^{j\omega})$  は先ほどと同様、正または負の領域にのみ周波数応答を持つフィルタである．

再び,  $Y_{\pm p, \pm q}(e^{j\omega}) := Y_{\pm p, \pm q}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$  を入力  $X(e^{j\omega})$  に対する  $(\pm p, \pm q)$  番目のサブバンド信号とし,  $U_{\pm p, \pm q}(e^{j\omega}) := U_{\pm p}(e^{j\omega_1})U_{\pm q}(e^{j\omega_2})$  を  $(\pm p, \pm q)$  番目のサブバンドに対応するフィルタとする. ただし,  $p, q = 0, \dots, M-1$  である. このとき  $Y_{p,q}(e^{j\omega})$  は

$$\begin{aligned} Y_{p,q}(e^{j\omega}) &= U_p(e^{j\omega_1})U_q(e^{j\omega_2})X(e^{j\omega}) \\ &= 4(H_{p,q}^R(e^{j\omega}) + jH_{p,q}^I(e^{j\omega}))X(e^{j\omega}), \\ H_{p,q}^R(e^{j\omega}) &= H_p^{(1)}(e^{j\omega_1})H_q^{(1)}(e^{j\omega_2}) - H_p^{(2)}(e^{j\omega_1})H_q^{(2)}(e^{j\omega_2}), \\ H_{p,q}^I(e^{j\omega}) &= H_p^{(1)}(e^{j\omega_1})H_q^{(2)}(e^{j\omega_2}) + H_p^{(2)}(e^{j\omega_1})H_q^{(1)}(e^{j\omega_2}). \end{aligned} \quad (6.45)$$

と表される.  $Y_{p,-q}(e^{j\omega})$  も同様に表される.  $Y_{p,q}(e^{j\omega})$  と  $Y_{p,-q}(e^{j\omega})$  はやはり唯一つの象限に周波数応答を持つ. サブバンド信号  $y_{p,q}(n_1, n_2)$  と  $y_{p,-q}(n_1, n_2)$  は図 6.13 のように取得される. 実部を取ることで (図 6.13: 左), 周波数応答は原点对称となり (Fig. 6.13: 右) やはり OCSMF も高い方向分解能を持つことが分かる.

## 6.4 シミュレーション

### 6.4.1 フィルタバンクの設計

#### 偶数型コサイン・サイン変調フィルタバンクの設計

偶数型コサイン・サイン変調フィルタバンクのプロトタイプフィルタの完全再構成条件は式 (6.13) である. 本シミュレーションでは, 式 (6.13) を満たす係数の中で, 阻止域減推量を評価関数とし, Matlab<sup>®</sup>, optimization toolbox の関数 fminunc による非線形最適化を行った.

#### 奇数型コサイン・サイン変調フィルタバンクの設計

奇数型コサイン・サイン変調フィルタバンクのプロトタイプフィルタの完全再構成条件は式 (6.10) である. 本シミュレーションでは, 式 (6.10) のパラメータ  $\{\theta_{j,m}\}$  を, 符号化利得を評価関数として, Matlab<sup>®</sup>, optimization toolbox の関数 fminunc による非線形最適化を行った.

### 6.4.2 シフト不変性の近似精度の評価

#### 偶数型

本節では ECSMF のシフト不変性の精度について評価する. 本シミュレーションでは 4 分割 ECSMF を設計した. 比較として, 4 分割 DTCWT 及び 4 分割 DWT (最大間引き) を用いた. ECSMF の間引き率を  $P_1 = 3$ , 4 分割 DTCWT と 4 分割 DWT の間引き率を  $P_2 = 4, P_3 = 4$  とそれぞれ設定した. 入力信号としては単位インパルスを用いた. 単位インパルス及びシフトされた単位インパルスに対して 3 種類の変換を施し, 出力信号の相関係数を算出することでシフト不変性を評価する.  $r$  サンプルシフトされた入力信号に対して, 出力された  $m$  番目の第 1 フィルタバンク及び第 2 フィルタバンクのサブバンド信号を  $s_{m,r}^{(1)}$  と  $s_{m,r}^{(2)}$  ( $0 \leq m \leq 3$ ) とする. 4 分割 DWT の相関係数を  $\Gamma_1(m, r)$  (DWT), 4 分割 DTCWT の相関係数を  $\Gamma_2(m, r)$  とすると, それぞれ以下

のようになる:

$$\begin{aligned}\Gamma_1(m, r) &= \left| \left\langle \frac{s_{m,0}^{(1)}(\cdot - r)}{\|s_{m,r}^{(1)}\|}, \frac{s_{m,r}^{(1)}}{\|s_{m,r}^{(1)}\|} \right\rangle \right| \\ \Gamma_2(m, r) &= \left| \left\langle \frac{s_{m,0}^{(1)}(\cdot - r) + s_{m,0}^{(2)}(\cdot - r)}{\|s_{m,0}^{(1)} + s_{m,0}^{(2)}\|}, \frac{s_{m,r}^{(1)} + s_{m,r}^{(2)}}{\|s_{m,r}^{(1)} + s_{m,r}^{(2)}\|} \right\rangle \right|\end{aligned}\quad (6.46)$$

ただし,  $\langle f, g \rangle := \sum_n f(n)\overline{g(n)}$ ,  $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$  である. 更に, ECSMFB の相関係数  $\Gamma_3(m, r)$  を

$$\Gamma_3(m, r) = \begin{cases} \Gamma_1(m, r) & (m = 0, 3) \\ \Gamma_2(m, r) & (m = 1, 2) \end{cases}\quad (6.47)$$

と定義する. 図 6.14 (a)–(f) は DWT・DTCWT・ECSMFB のそれぞれに対して入力された原入力信号と原入力信号を 2 サンプルシフトさせたものに対する出力信号を图示している. 図 6.15 (a)–(f) は  $m = 1$  における出力信号を示している. 従来のウェーブレット変換と異なり, 精度の高いシフト不変性が得られていることが確認できる. 表 6.3 は各相関係数の平均値  $\Gamma_{AC}(i, m) = \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^{P_n-1} \Gamma_C(m, r)$  ( $i, n = 1, 2, 3$ ) を表したものである. ECMFB は DTCWT と同様に近似的シフト不変性が成り立っていることが確認できる.

また 8 分割及び 10 分割 ECSMFB のシフト不変性に関して, 相関係数の結果を表 6.2 にまとめた. 表より ECSMFB が任意の帯域分割数で近似的シフト不変性を満たしていることが確認できる.

#### 奇数型

本節では OCSMFB について評価する. 比較変換は前項と同じである. 入力についても同様で, 単位インパルスを用いた.

$s_{m,r}^{(1)}(n)$  と  $s_{m,r}^{(2)}(n)$  ( $0 \leq m \leq 3$ ) を  $r$  サンプルシフトされた入力に対する第 1 フィルタバンク, 第 2 フィルタバンクの  $m$  番目のサブバンド信号とする. ここで DWT と DTCWT については前項で用いた  $\Gamma_1(m, r)$  と  $\Gamma_2(m, r)$  を使う. OCSMFB に関しては  $\Gamma_3(m, r)$  として  $\Gamma_2(m, r)$  と同様の式を使う. 表 6.3 は相関係数の平均  $\Gamma_{AC}(i, m) = \frac{1}{4} \sum_{r=0}^3 \Gamma_i(m, r)$  ( $i = 1, 2$ ) を表したものである. 前章までの理論で示されたように OCSMFB は ECSMFB や DTCWT と同様に近似的シフト不変性を満たしているのが確認できる.

#### 6.4.3 方向分解能の評価

本シミュレーションでは OCSMFB 及び ECSMFB が離散ウェーブレット変換 (DWT) よりも高い方向分解能を有することを示す.

##### 偶数型コサイン・サイン変調フィルタバンクの方向分解能

分割 3 レベルにおける ECSMFB から得られる 2 次元のウェーブレット関数を図 6.18 に示す. ECSMFB の 2 次元ウェーブレット関数は鉛直・水平とその他の角度を合計して 20 種類の方向性

表 6.1 平均相関係数結果

DWT(フィルタ長: 12)				
サブバンド	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
平均相関係数 $\Gamma_{AC}(1, m)$	0.8337	0.6452	0.6444	0.8267
DTCWT (フィルタ長: 11)				
サブバンド	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
平均相関係数 $\Gamma_{AC}(2, m)$	0.9760	0.9673	0.9672	0.9746
ECSMFB (Order: 3 (2*1+1), フィルタ長: 10)				
サブバンド	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
平均相関係数 $\Gamma_{AC}(3, m)$	0.9908	0.9929	0.9929	0.9908
DWT(フィルタ長: 16)				
サブバンド	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
平均相関係数 $\Gamma_{AC}(1, m)$	0.8714	0.5941	0.5911	0.8735
DTCWT (フィルタ長: 17)				
サブバンド	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
平均相関係数 $\Gamma_{AC}(2, m)$	0.9899	0.9894	0.9872	0.9905
ECSMFB (Order: 5 (2*1+1), フィルタ長: 16)				
サブバンド	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
平均相関係数 $\Gamma_{AC}(3, m)$	0.9975	0.9987	0.9987	0.9975
DWT(フィルタ長: 24)				
サブバンド	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
平均相関係数 $\Gamma_{AC}(1, m)$	0.9120	0.6362	0.6353	0.9125
DTCWT (filter length: 23)				
サブバンド	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
平均相関係数 $\Gamma_{AC}(2, m)$	0.9943	0.9931	0.9933	0.9943
ECSMFB (Order: 7 (2*1+1), フィルタ長: 22)				
サブバンド	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
平均相関係数 $\Gamma_{AC}(3, m)$	0.9978	0.9985	0.9985	0.9978

が実現できている．よって鉛直・水平方向の2種類のエッジ，及び $\pm 45^\circ$ が混在した高周波成分しか表現ができないDWTに比べて高い方向分解能が得られることが分かる．

奇数型コサイン・サイン変調フィルタバンクの方向分解能

OCSMFB についても方向分解能を調べる．図 6.18 に示されているのが4分割 OCSMFB である．ECSMFB と同様，DWT に比べて高い方向分解能が実現されている．

表 6.2 平均相関係数結果

8 分割 ECSMFB (Order: 3 (2*1+1), フィルタ長: 13)						
サブバンド	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	
平均相関係数 $\Gamma_{AC}(3, m)$	0.9780	0.9753	0.9782	0.9753	0.9780	
10 分割 ECSMFB (Order: 3 (2*1+1), フィルタ長: 16)						
サブバンド	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
平均相関係数 $\Gamma_{AC}(3, m)$	0.9873	0.9912	0.9902	0.9902	0.9912	0.9886

表 6.3 平均相関係数結果

DWT(フィルタ長: 8)				
サブバンド	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
平均相関係数 $\Gamma_{AC}(1, m)$	0.7966	0.5259	0.5261	0.7936
DTCWT (フィルタ長: 10)				
サブバンド	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
平均相関係数 $\Gamma_{AC}(2, m)$	0.9442	0.9185	0.9150	0.9483
OCSMFB (フィルタ長: 8)				
サブバンド	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
平均相関係数 $\Gamma_{AC}(2, m)$	0.9955	0.9811	0.9811	0.9955
DWT (フィルタ長: 16)				
サブバンド	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
平均相関係数 $\Gamma_{AC}(1, m)$	0.8714	0.5911	0.5941	0.8735
DTCWT(filter length: 16)				
サブバンド	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
平均相関係数 $\Gamma_{AC}(2, m)$	0.9629	0.9439	0.9343	0.9608
OCSMFB (filter length: 16)				
サブバンド	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
平均相関係数 $\Gamma_{AC}(2, m)$	0.9984	0.9987	0.9987	0.9984

#### 6.4.4 符号化利得

次節以降は OCSMFB を例に非線形近似及び画像ノイズ除去に応用し、従来法 DTCWP に基づく DTCWT と実用上の性能比較をする。まず本節では信号変換効率の基準となる符号化利得を OCSMFB と DTCWT でそれぞれ算出したものを表 6.4 に示す。OCSMFB は DTCWT に対し高い符号化利得を示している。この理由としては、前述のように DTCWP に基づく DTCWT は本質的に 2 分割程度の周波数特性しか有していないが、それに対し OCSMFB は多分割のフィルタバンクを直接設計しているので、分割数に相応した符号化利得が実現できていると考えられる。

表 6.4 設計フィルタの符号化利得

4 分割 DTCWT / 4 分割 CSMFB				
DTCWT	$L = 10$	$L = 16$	$L = 22$	$L = 28$
Coding Gain	7.542	7.844	8.019	8.130
OCSMFB	$L = 8$	$L = 16$	$L = 24$	$L = 32$
Coding Gain	8.118	8.406	8.504	8.526
8 分割, DTCWT / 8 分割 CSMFB				
DTCWT	$L = 22$	$L = 36$	$L = 50$	$L = 64$
Coding Gain	8.379	8.746	8.962	9.100
OCSMFB	$L = 16$	$L = 32$	$L = 48$	$L = 64$
Coding Gain	9.328	9.499	9.561	9.562

### 6.4.5 非線形近似

本章では OCSMFB と DTCWT を非線形近似に適用し性能を比較する。8 分割 OCSMFB と 8 分割 DTCWT を用いる。フィルタ長はそれぞれ 32 と 36 である。テスト画像としては *Lena*, *Barbara* を用いる。それぞれの分割レベルは 2 レベルとする。図 6.19 及び図 6.20 は *Barbara* と *Lena* の変換係数の保持数を 1000 から 140000 まで変えて非線形近似した結果である。この結果から、与えられた係数選択数の制限に対して、OCSMFB は DTCWT よりもより高い画質で復元できていることが確認できる。この理由は DTCWT に比べ OCSMFB が高い符号化利得を有していることにあるといえる。また復元誤差の優位性は画質にも反映されており CSMFB が DTCWT に比べ優れた周波数分解能、方向分解能、及びシフト不変性を持っていることが分かる（図 6.21 及び図 6.22）

### 6.4.6 画像ノイズ除去

本節では、OCSMFB の画像ノイズ除去における性能を評価する。テスト画像には *Barbara*, *Lena*, *Boat* を使用し、ガウシアンノイズを分散  $\sigma^2$  ( $\sigma = 10, 20, 30$ ) で付加したものを用意する。まずノイズ画像に 2 レベルの 8 分割 OCSMFB 及び 8 分割 DTCWT をそれぞれ施す。また比較として 9/7 タップ DWT、及び 2 分割 DTCWT についてもシミュレーションを行う。それぞれ 6 レベル分の変換を行い、各変換で得られた変換係数に対して Universal threshold  $\sigma\sqrt{2\log N}$  の閾値処理を行う [14]。

ノイズ除去の結果として PSNR を算出したものを表 6.5 にまとめる。すべての場合において OCSMFB は 9/7 タップ DWT 及び DTCWT よりも高い画質を実現できていることが数値的に確認できる。また、*Barbara* と *Lena* の  $\sigma = 20$  における結果画像を図 6.23 及び図 6.24 に示す。どちらの図においても、原画像と DWT, DTCWT, OCSMFB によるノイズ除去画像を (a), (b), (c) 及び (d) にそれぞれ示した。図 6.23 及び図 6.24 の両方において、8 分割 CSMFB, 8 分割 DTCWT, 2 分割 DTCWT は DWT よりも高い方向分解能・シフト不変性を有していることが

表 6.5 ノイズ除去結果 (PSNR)

ノイズの分散	$\sigma = 10$			$\sigma = 20$			$\sigma = 30$		
	Barbara	Lena	Boat	Barbara	Lena	Boat	Barbara	Lena	Boat
原画像									
ノイズ画像	28.13	28.13	28.13	22.11	22.11	22.11	18.59	18.59	18.59
9/7 タップ DWT	29.92	31.98	30.18	25.69	28.41	26.70	23.53	26.27	24.75
2 分割 DTCWT $L = 14$	30.44	32.60	30.47	26.20	29.35	27.15	24.19	27.52	25.42
8 分割 DTCWT $L = 36$	30.96	32.40	30.38	27.20	29.10	27.09	25.16	27.15	25.34
8 分割 OCSMFB $L = 32$	<b>32.17</b>	<b>32.96</b>	<b>30.66</b>	<b>28.52</b>	<b>29.74</b>	<b>27.38</b>	<b>26.43</b>	<b>27.69</b>	<b>25.66</b>

ら，DWT よりもノイズを除去しながら詳細なテクスチャを保持しているのが分かる．一方 DWT は方向分解能・シフト不変性が低いことから，ノイズ除去結果画像のテクスチャの損傷や，ノイズが取りきれないといったことが確認できる．また高い符号化利得を有し，方向分解能の高い 8 分割 OCSMFB は 8 分割 DTCWT 及び 2 分割 DTCWT よりも高性能に復元できていることが示されており，OCSMFB が実応用において十分に高い性能を有していると言える．

## 6.5 本章の結論

本章ではコサイン変調フィルタバンクの拡張としてコサイン・サイン変調フィルタバンクを提案し，一般的な  $M$  分割 DTCWT の設計法を示した．理論及びシミュレーションから，提案コサイン・サイン変調フィルタバンクは高い方向分解能及びシフト不変性を有しており，画像ノイズ除去では，従来法の  $M$  分割 DTCWT よりも優れた性能を示した．本結果によって，現在まで半サンプル遅延という困難な条件を考えなければならなかった DTCWT に変わり，プロトタイプフィルタ 1 つを変調するだけで設計可能なコサイン・サイン変調フィルタバンクに基づく DTCWT が十分に利用できると思われる．

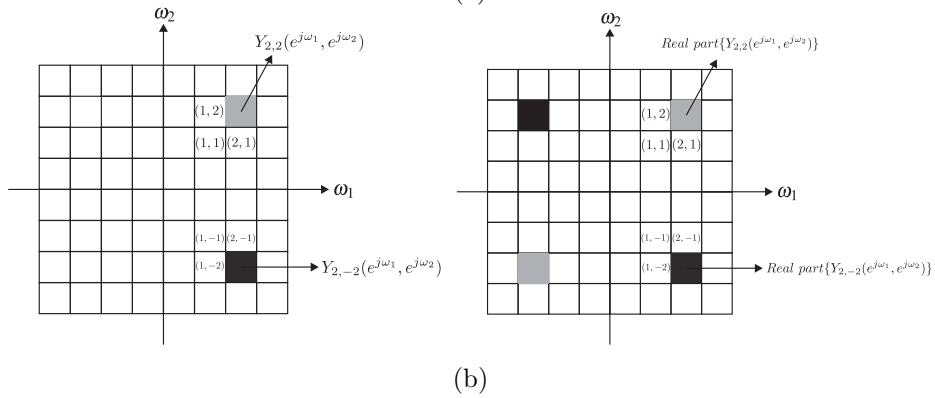
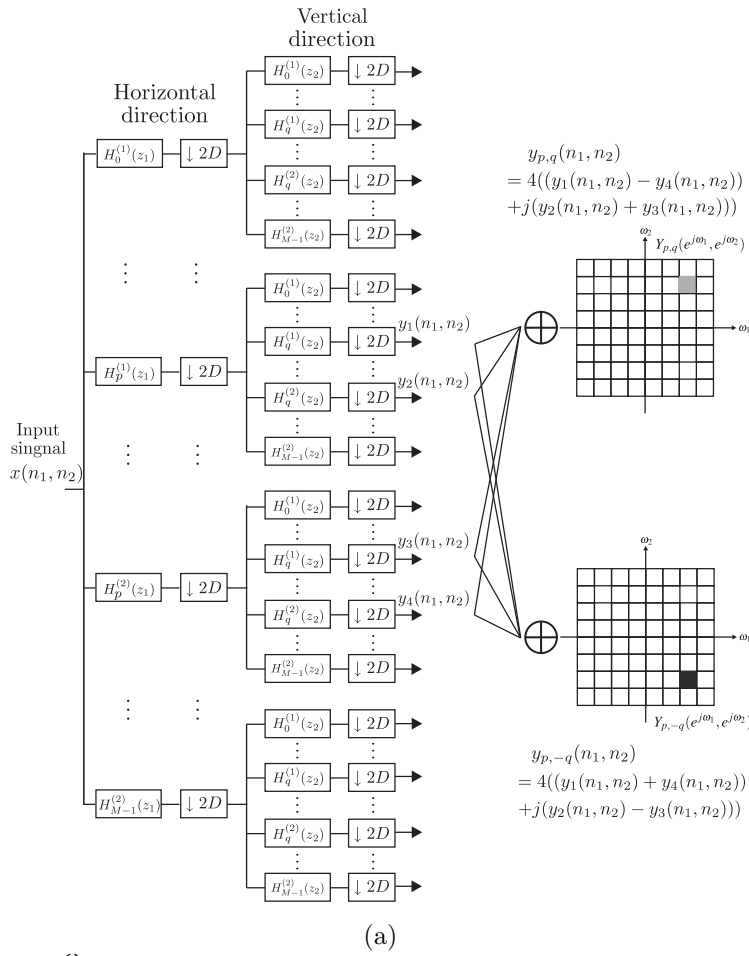


図 6.12 方向成分抽出のための 2 次元変換 (ECSMFB) . (a) サブバンド信号  $Y_{p,q}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$  及び  $Y_{p,-q}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$  の取得方法 (b) 複素数信号  $Y_{p,q}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$  ,  $Y_{p,-q}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$  (左) とそれらの実部 (右) ( $M = 3$ )



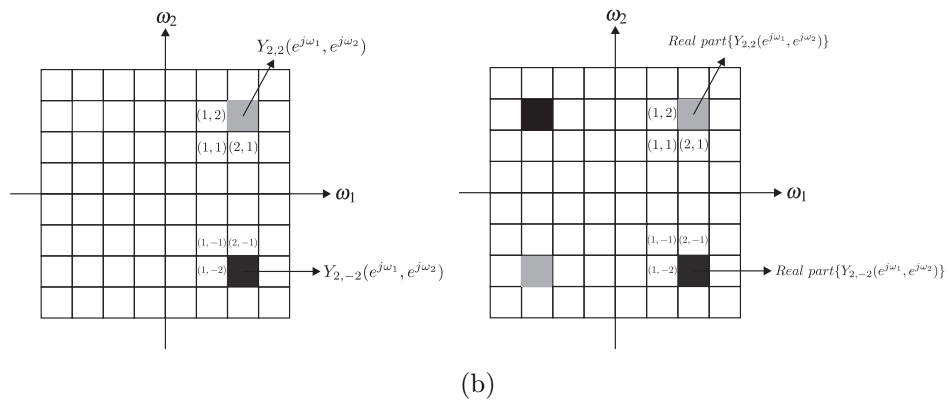
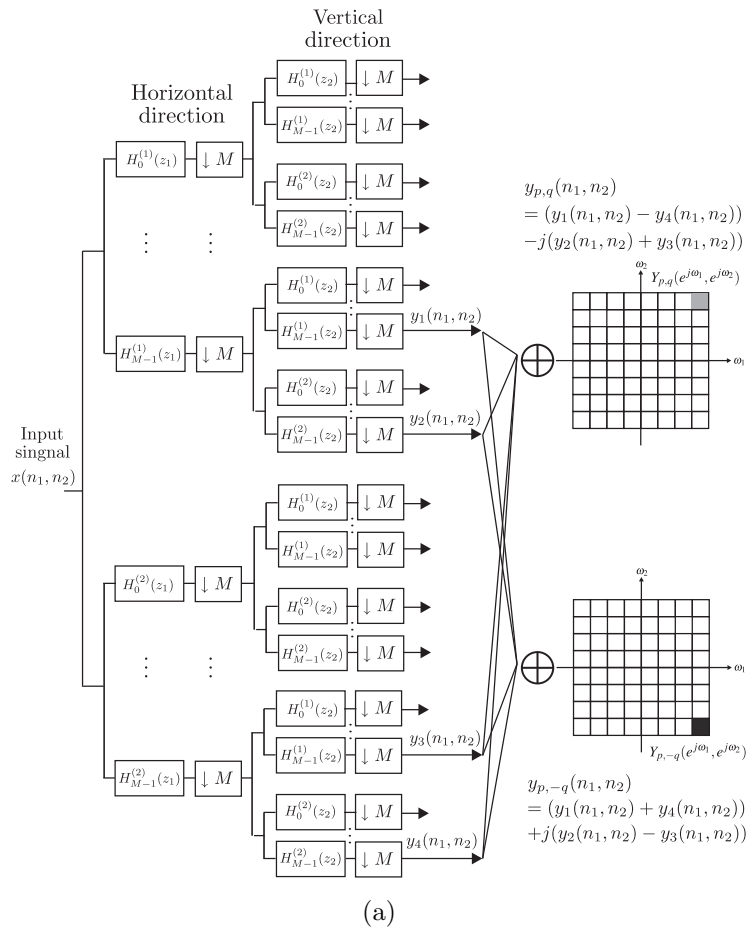


図 6.13 方向成分抽出のための 2 次元変換 (OCSMF) . (a) サブバンド信号  $Y_{p,q}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$  及び  $Y_{p,-q}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$  の取得方法 (b) 複素数信号  $Y_{p,q}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ ,  $Y_{p,-q}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$  (左) とそれらの実部 (右) ( $M = 3$ )

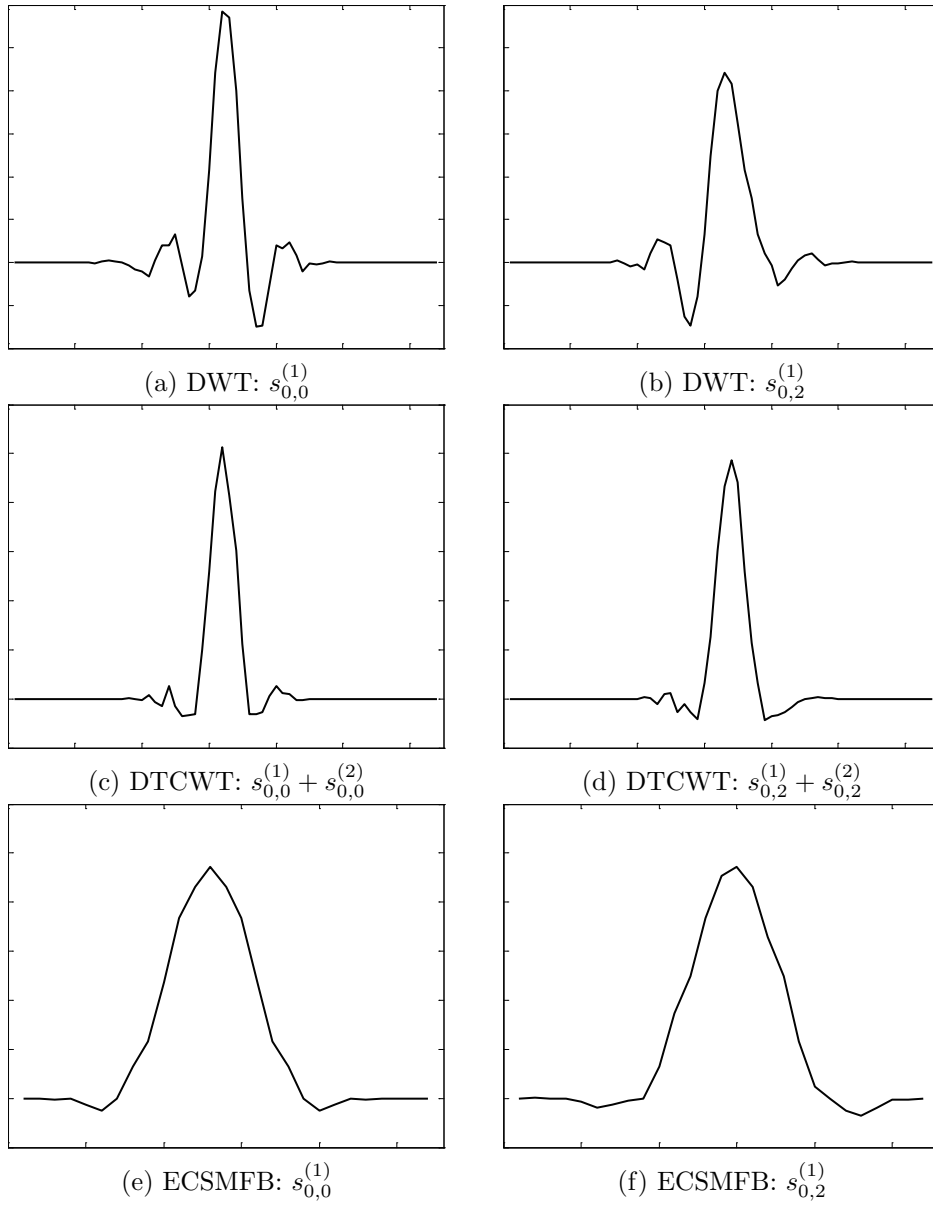


図 6.14 出力サブバンド信号 ( $m = 0, r = 0, 2$ ) (相関係数の結果  $\Gamma_1(0, 2) = 0.8208$  (DWT),  $\Gamma_2(0, 2) = 0.9928$  (DTCWT),  $\Gamma_3(0, 2) = 0.9956$  (ECSMFB))

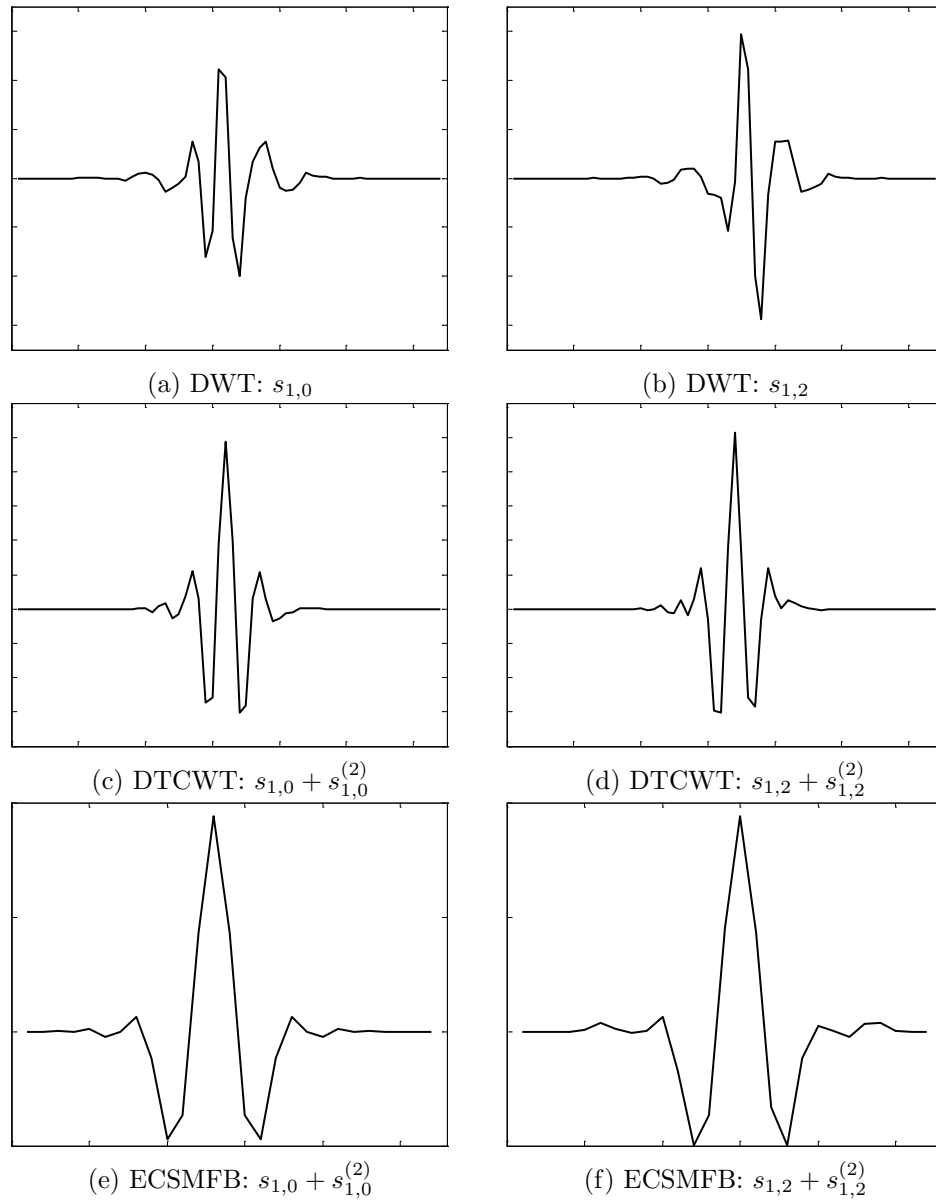


図 6.15 出力サブバンド信号 ( $m = 1, r = 0, 2$ ) (相関係数:  $\Gamma_1(1, 2) = 0.8208$  (DWT),  $\Gamma_2(1, 2) = 0.9928$  (DTCWT),  $\Gamma_3(1, 2) = 0.9971$  (ECSMFB))

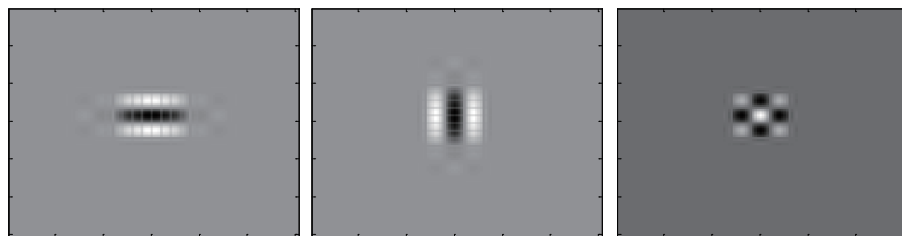


図 6.16 DWT の 2 次元ウェーブレット関数

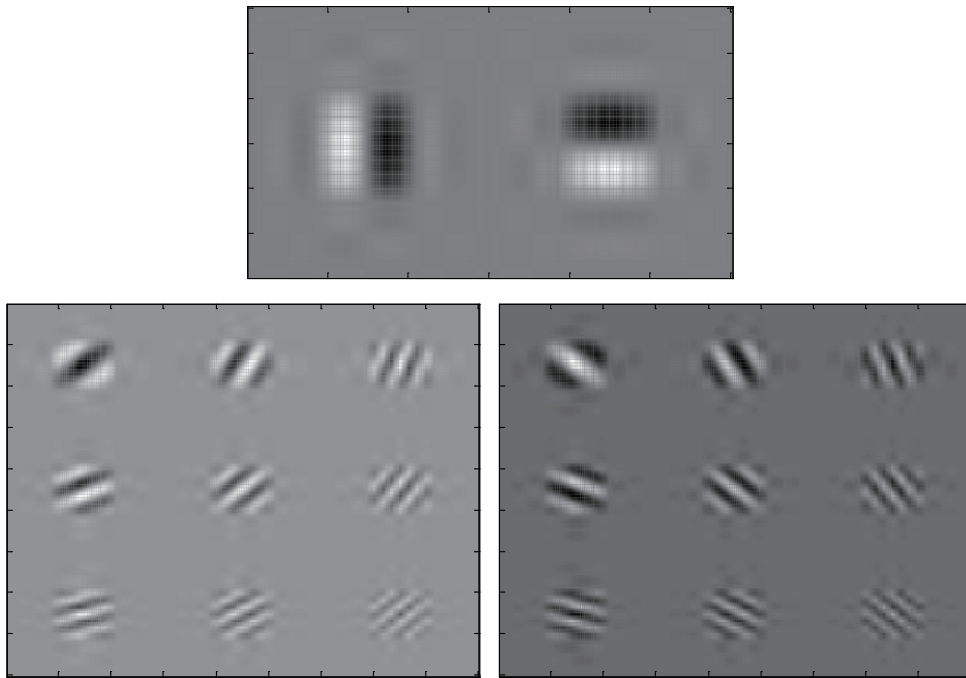


図 6.17 ECSMFB の 2 次元ウェーブレット関数

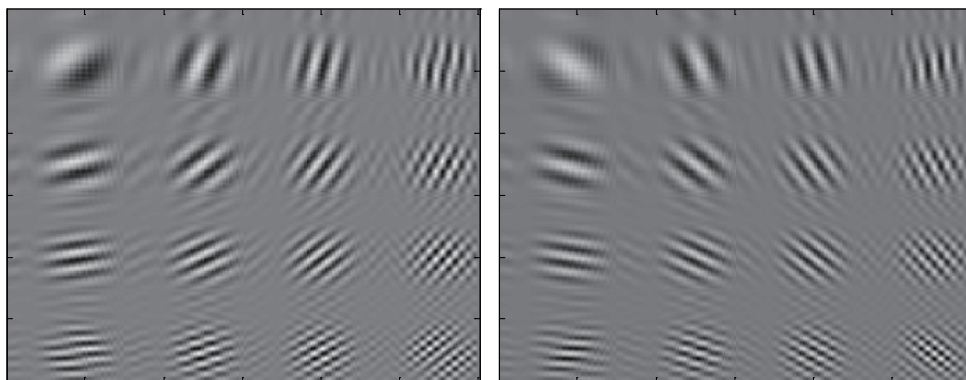


図 6.18 OCSMFB の 2 次元ウェーブレット関数

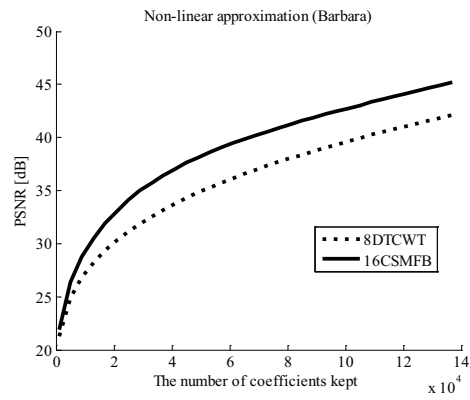


図 6.19 非線形近似結果 *Barbara* (DTCWT: 8 分割, フィルタ長:  $L = 36$ , OCSMFB: 8 分割, フィルタ長:  $L = 32$ )

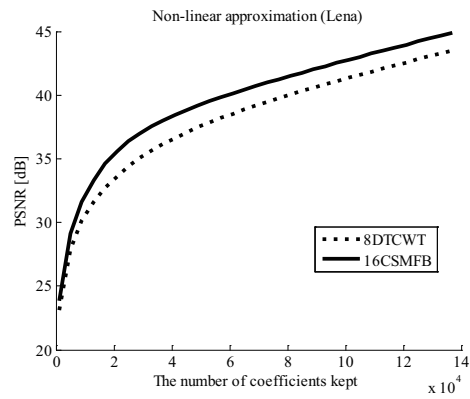
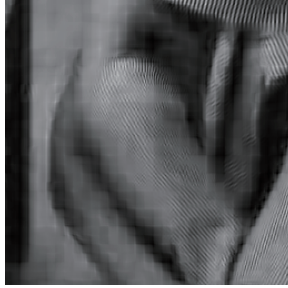


図 6.20 非線形近似結果 *Lena* (DTCWT: 8 分割, フィルタ長:  $L = 36$ , OCSMFB: 8 分割, フィルタ長:  $L = 32$ )



(a)



(b)



(c)

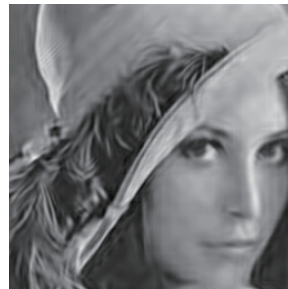
図 6.21 非線形近似結果 *Barbara* (変換係数の保持数=6000). (a): 原画像, (b): DTCWT (8 分割, フィルタ長:  $L = 36$ ), (c): OCSMFB (8 分割, フィルタ長:  $L = 32$ )



(a)



(b)



(c)

図 6.22 非線形近似結果 *Lena* (変換係数の保持数=6000). (a): Original image, (b): 原画像 (8 分割, フィルタ長:  $L = 36$ ), (c): OCSMFB (8 分割, フィルタ長:  $L = 32$ )



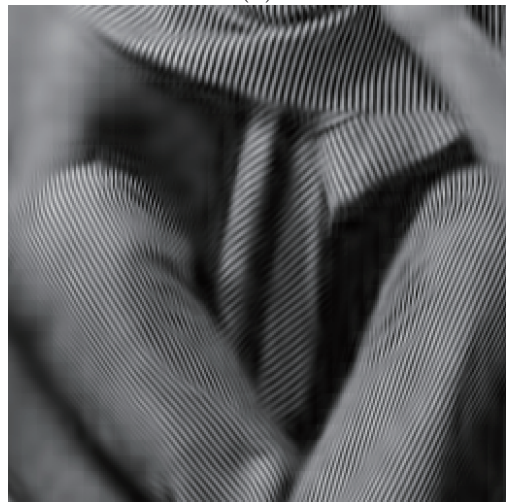
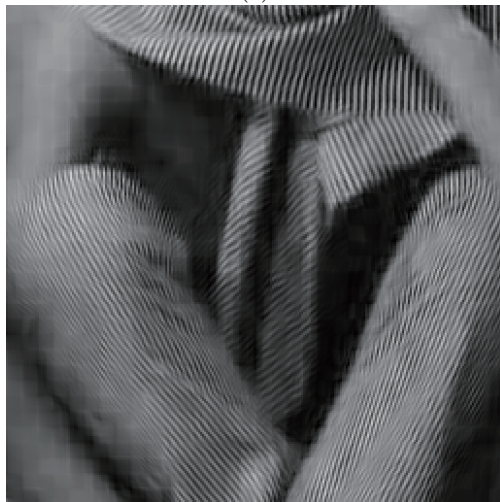
(a)

(b)



(c)

(d)



(e)

(f)

図 6.23 ノイズ除去結果画像 (*Barbara*) ( $\sigma = 20$ ). (a): 原画像, (b): ノイズ付加画像 (c): DWT, (d): 2分割 DTCWT (e): 8分割 DTCWT, (f): 8分割 OCSMFB



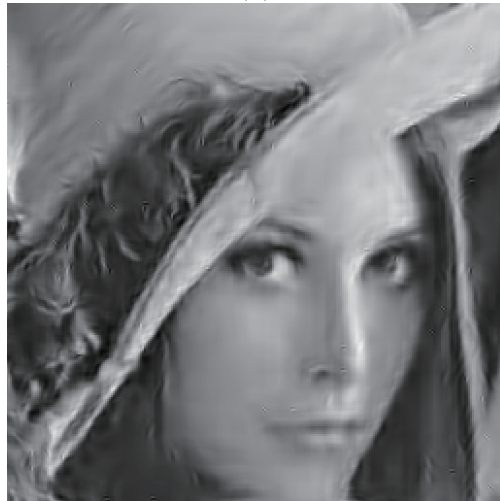
(a)



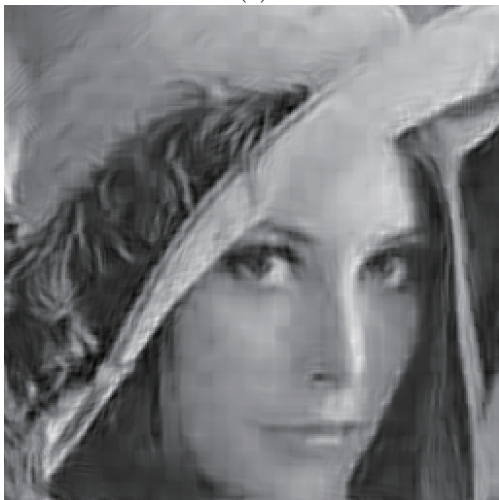
(b)



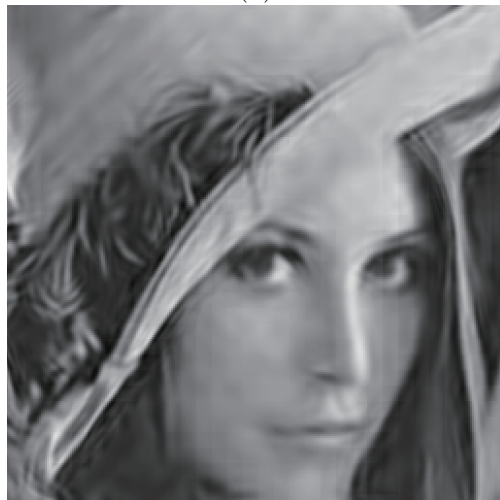
(c)



(d)



(e)



(f)

図 6.24 ノイズ除去結果画像 (*Lena*) ( $\sigma = 20$ ). (a): 原画像, (b): ノイズ付加画像 (c): DWT, (d): 2分割 DTCWT (e): 8分割 DTCWT, (f): 8分割 OCSMFB



# 第 7 章

## ボトムアップ方式に基づく 最大間引き Contourlet 変換の設計と 画像圧縮符号化への適用

### 7.1 本章の概要

本章では、高い方向分解能を持つ非冗長型 2 次元実フィルタバンクである“最大間引き Contourlet 変換”(CRISP-CT: CRItically-SamPled Contourlet Transform) の新しい設計法としてボトムアップ方式を提案し、画像圧縮符号化へ適用する。

従来、画像圧縮符号化に用いられている 2 次元ウェーブレット/フィルタバンク (WT/FB) は 1 次元フィルタバンクの水平、垂直方向フィルタリング処理によって構成される“可分型”2 次元変換である。可分型 2 次元変換では水平や鉛直方向のエッジ成分は効率よく抽出することができるが、その他の方向のエッジ成分までもが、水平・垂直方向に分解されてしまう。その結果低ビットレートの画像圧縮では詳細なテクスチャが著しく損傷し、画質が低下する問題がある。よって、方向分解能の高い変換を用いて画像圧縮することができれば、様々な方向のエッジ成分の情報を効率よく抽出し、低ビットレートの画像圧縮においてもテクスチャの画質を保存できると考えられる。

現在では画像圧縮符号化のための方向分解能を考慮したフィルタバンクの設計が盛んに研究されている。既に述べたように、第 5 章及び第 6 章のような複素 WT を用いることで、高い方向分解能を持つ変換が実現できるが、出力信号は複素数となり、情報量が増加する冗長変換となってしまう。一方、2 次元実フィルタバンクを用いることによって、高い方向分解能を持つ非冗長変換の実現が可能となることが知られている。

高い方向分解能を持つ非冗長 2 次元フィルタバンクの従来法としては、まず Directional Filter Bank (DFB) [31] が提案されている。しかし DFB では、画像の大まかな構造を表す低周波成分のエネルギーを効率良く集中させることができないため、画像圧縮する際、著しく全体の画質が劣化するという欠点がある。この問題を解決するために、CRISP-CT が提案された [76]。CRISP-CT では高い方向分解能を持ち、かつ低周波成分のエネルギーを効率良く集中させることができる。しかし CRISP-CT を構成するいくつかの 2 次元フィルタの中に、通過帯域形状が複雑なため、再現できないものが存在するという問題がある。

本章では上記の問題を解決するために、ボトムアップ方式と呼ぶ新しい設計アプローチを導入し、実現可能な CRISP-CT を提案する。従来の CRISP-CT の設計法はトップダウン方式に基づく手法であると言える。即ち、所望の周波数帯域分割形状を実現するために、2 分割フィルタバン

クをツリー構造状に接続することによって直接実現する方式である．これに対しボトムアップ方式とは、まず所望の周波数帯域分割形状よりも更に細かい分割形状になるツリー構造を設計する．その後いくつかの分割されたサブバンドを合成することによって、所望分割形状を得るという方式である．この提案手法によって、実現可能なフィルタバンクのみを用いて、CRISP-CTを設計することが可能となる．

本章は以下のように構成される．まず本章の基本事項と7.2.1節と7.2.2節において、2次元フィルタバンクの設計を議論するために必要な前提事項2次元マルチレートシステムと2分割2次元フィルタバンクの設計法を説明する．7.3節において、方向分解能の高い非冗長変換の従来法である、DFB及びCRISP-CTを説明し、それらの問題点を挙げる．7.4節において、ボトムアップ設計方式に基づくCRISP-CTを提案し、7.5節にて画像圧縮符号化に応用する．最後に7.6節にて本章を結ぶ．

## 7.2 準備

### 7.2.1 2次元マルチレートシステム

前章までは1次元のフィルタバンクについて述べてきたが、本章では2次元フィルタバンクを取り扱うので、2次元マルチレートシステムについて説明する．

#### サンプリング行列

1次元のマルチレートシステムでは、サンプリングレートは間引き率  $M$  (スカラー) によって決定されていた．2次元の場合、ダウンサンプリングが空間的に行われるため、サンプリング格子を導入する必要がある．サンプリング格子を表現するために  $2 \times 2$  の整数行列  $\mathbf{D}$  を導入し、この  $\mathbf{D}$  をサンプリング行列と呼ぶことにする．

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

信号の間引き率は  $D = |\det \mathbf{D}|$  で与えられる．

#### 2次元デシメーション

1次元信号  $x(n)$  の  $M$  によるデシメーションは  $x(Mn)$  と定義された．2次元の場合も同様な形で書くことができ、サンプリング行列  $\mathbf{D}$  による2次元信号  $x(n)$  のデシメーションは

$$y(\mathbf{n}) = x(\mathbf{D}\mathbf{n}), \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2) \quad (7.2)$$

と定義される．図7.1にサンプリング行列

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

のデシメーションを示す．(以下、例題はこのサンプリング行列を用いる) この図のようにデシメーション信号は、ベクトル  $\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ ,  $\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$  で張られる平行四辺形の格子状の点を並び替えたものに相当する．

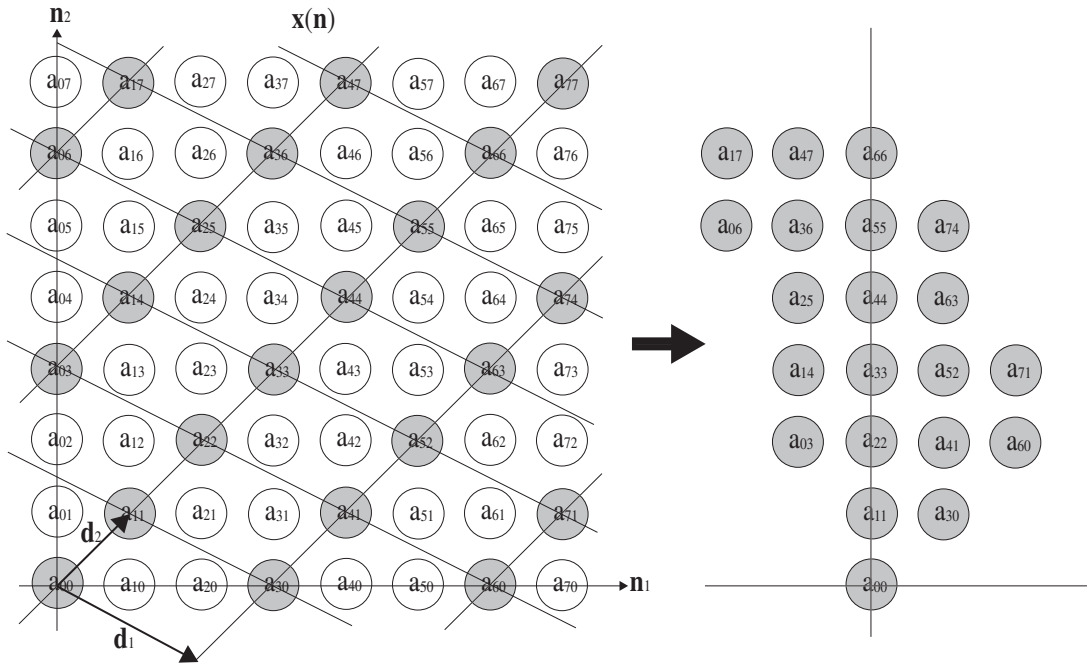


図 7.1 2次元デシメーション

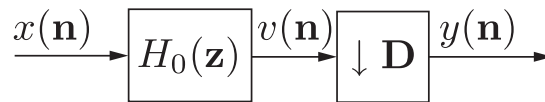


図 7.2 2次元デシメーションシステム

周波数領域においては，

$$Y(\omega) = \frac{1}{|\det \mathbf{D}|} \sum_{i=0}^{|\det \mathbf{D}|-1} X(\mathbf{D}^{-\mathbf{T}}(\omega - 2\pi \mathbf{k}_i)) \quad (7.4)$$

と表される．ただし， $\mathbf{k}_i \in \{\mathbf{D}^T \mathbf{t} \in \mathbb{N}^2 : \mathbf{t} \in [0, 1)^2\} (= \aleph(\mathbf{D}^T))$  であり， $\mathbf{k}_i$  はシフトベクトルと呼ばれる．このように，デシメーション信号は  $i = 0$  の基本帯域とこれがシフトした高調波帯域，すなわちエイリアシング項の和で表される．1次元の場合と同様，デシメーションによりエイリアシングが生じないようにするためにデシメーションフィルタ  $H_0(z)$  によって入力信号を帯域制限する必要がある．図 7.2, 図 7.3 にデシメーションの様子とその周波数領域での動きを示す．

## 2次元インターポレーション

1次元信号  $x(n)$  のインターポレーションは

$$y(n) = \begin{cases} x(n/M) & n \text{ multiple of } M, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.5)$$

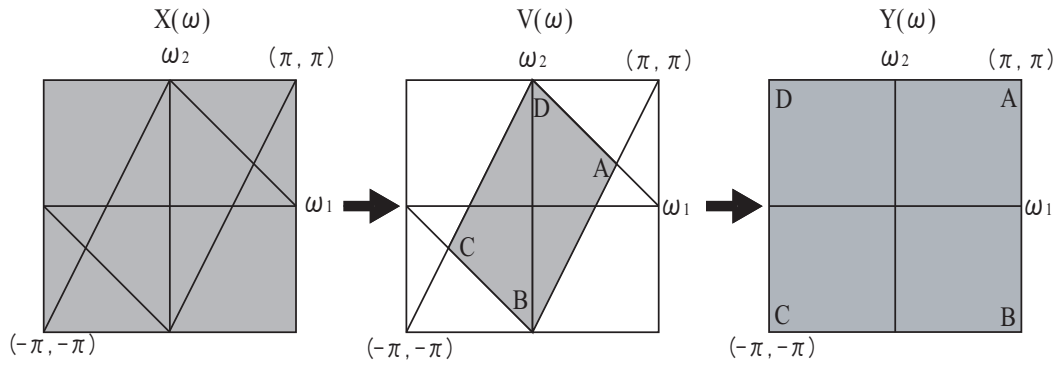


図 7.3 2次元周波数領域におけるデシメーション

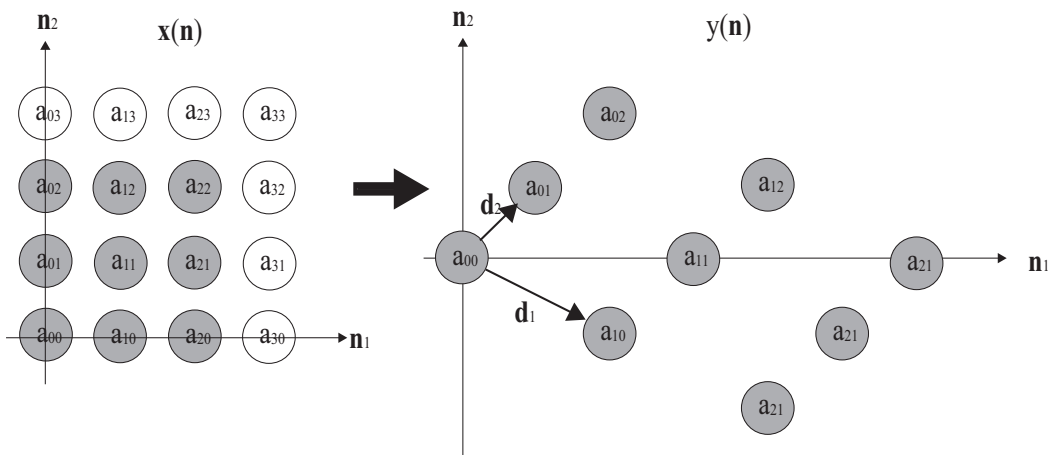


図 7.4 2次元インターポレーション

と定義された。デシメーションの場合と同様に、2次元インターポレーションも同じような形で定義され、2次元信号  $x(\mathbf{n})$  の  $\mathbf{D}$  によるインターポレーションは

$$y(\mathbf{n}) = \begin{cases} x(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{n}) & \mathbf{D}^{-1}\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.6)$$

で表され、図 7.4 のようになる。ここで、上式  $z$  変換は

$$Y(\mathbf{z}) = X(\mathbf{z}^{\mathbf{D}}) \quad (7.7)$$

となる。更に、周波数領域においては

$$Y(\boldsymbol{\omega}) = X(\mathbf{D}^T \boldsymbol{\omega}) \quad (7.8)$$

となり、入力信号の2次元周波数平面が  $\frac{1}{D}$  に圧縮され、

$$\boldsymbol{\omega} = \pi \mathbf{D}^{-T} \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \in [-1, 1] \quad (7.9)$$

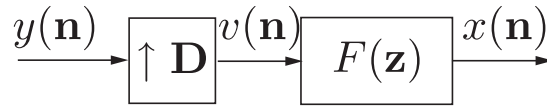


図 7.5 2次元インターポレーションシステム

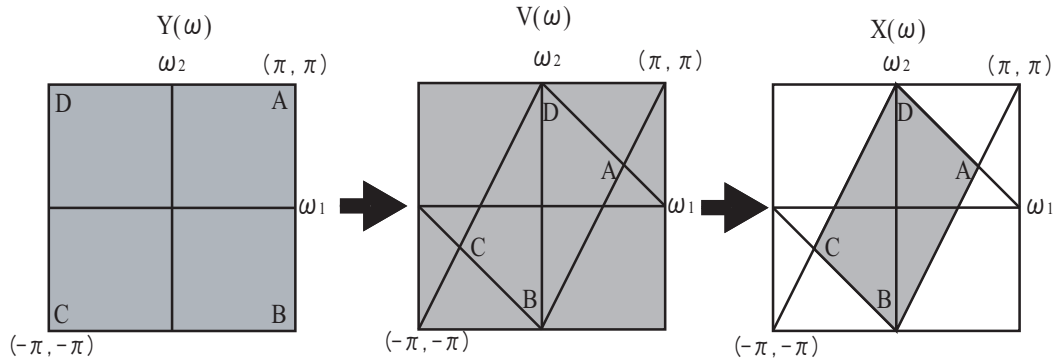


図 7.6 2次元周波数領域におけるインターポレーション

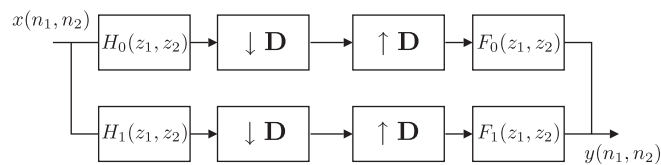


図 7.7 2分割2次元マルチレートフィルタバンク

の平行四辺形領域に変形される．1次元同様，イメージング成分が生じるため，インターポレーションフィルタを通してこれを除去する必要がある．図 7.5, 図 7.6 にインターポレーション  $F(z)$  の様子とその周波数領域での動きを示す．

### 7.2.2 2次元フィルタバンク

本章では2次元完全再構成フィルタバンクの設計法について説明する．2分割2次元フィルタバンクを図 7.7 に示す．ただし  $H_0(z_1, z_2)$ ,  $H_1(z_1, z_2)$  分割フィルタ,  $F_0(z_1, z_2)$ ,  $F_1(z_1, z_2)$  を合成フィルタとする．1次元の場合, 1次元周波数帯域を2等分割する  $H_0(\omega)$  及び  $H_1(\omega)$  による帯域分割特性は図 7.8 の形状に限定される．しかし2次元の場合,  $H_0(\omega)$  及び  $H_1(\omega)$  の周波数特性は, 図 7.9(a) の矩形フィルタ以外にも, 図 7.9(b) のファンフィルタ, 図 7.9(c) の Quadrant フィルタ, 図 7.9(d) の Parallelogram フィルタなど, 多くのパターンが考えられる．本章では2分割ファンフィルタバンクを例に完全再構成条件と設計法を示す．D としてキンカンクスサンプリン

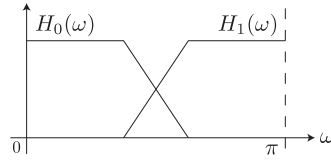


図 7.8 2 分割 1 次元マルチレートフィルタバンクの帯域分割形状

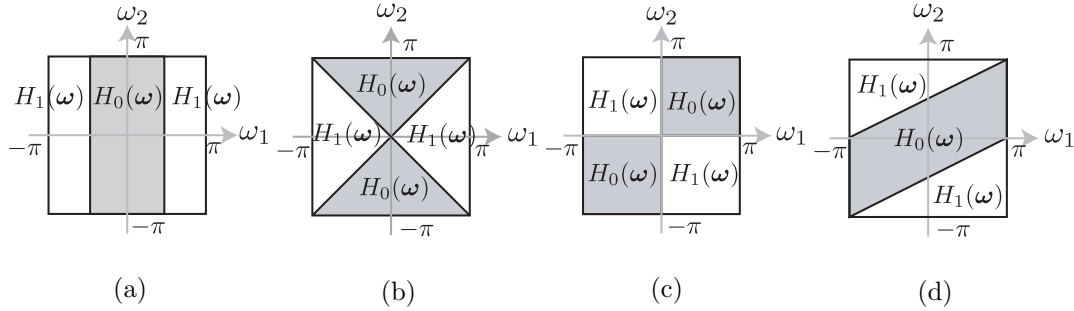


図 7.9 2 分割 2 次元フィルタバンクの帯域分割形状 . (a) 矩形フィルタバンク (b) ファンフィルタバンク (c) Quadrant フィルタバンク (d) Parallelogram フィルタバンク

ゲ  $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  を考えると, フィルタバンクにおける入力/出力信号の関係は

$$Y(z_1, z_2) = \frac{1}{2} [H_0(z_1, z_2)F_0(z_1, z_2) + H_1(z_1, z_2)F_1(z_1, z_2)] X(z_1, z_2) + \frac{1}{2} [H_0(-z_1, -z_2)F_0(z_1, z_2) + H_1(-z_1, -z_2)F_1(z_1, z_2)] X(-z_1, -z_2) \quad (7.10)$$

と表すことができる.  $X(-z_1, -z_2)$  が含まれている上式右辺の第 2 項はエイリアシング項である. ここで,

$$H_1(z_1, z_2) = z_1^{-K_1} z_2^{-K_2} F_0(-z_1, -z_2) \quad (7.11)$$

$$F_1(z_1, z_2) = z_1^{-K_1} z_2^{-K_2} H_0(-z_1, -z_2) \quad (7.12)$$

(ただし  $K_1 + K_2$  は奇数) とおけば, エイリアシング項は 0 になる. したがって

$$Y(z_1, z_2) = T(z_1, z_2)X(z_1, z_2) \\ T(z_1, z_2) := \frac{1}{2} [H_0(z_1, z_2)F_0(z_1, z_2) + H_0(-z_1, -z_2)F_0(-z_1, -z_2)] \\ = \frac{1}{2} [D(z_1, z_2) + D(-z_1, -z_2)] \quad (7.13)$$

と表すことができ, 結局 2 次元フィルタの完全再構成条件は

$$D(z_1, z_2) + D(-z_1, -z_2) = 2 \quad (7.14)$$

と表される. (ここで  $D(z_1, z_2)$  は  $D(z_1, z_2) = H_0(z_1, z_2)F_0(z_1, z_2)$  である.) したがって式(7.14)を満たすような  $H_0(z_1, z_2)$  及び  $F_0(z_1, z_2)$  を設計すれば完全再構成フィルタバンクが設計できることになる.

更に式 (7.14) を解析する .  $D(z_1, z_2) = \sum_{n_1, n_2} d(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}$  とし , ある 1 変数多項式  $D_T(Z) = \sum d_t(n) Z^{-n}$  とある 2 変数多項式

$$Z = M(z_1, z_2) \equiv \sum_{k_1} \sum_{k_2} m(k_1, k_2) z_1^{k_1} z_2^{k_2} \quad (7.15)$$

が存在して ,  $D(z_1, z_2) = D_T(Z)$  を満たす場合を考える . そのとき ,

$$D(z_1, z_2) = H_0(z_1, z_2) F_0(z_1, z_2) \iff D_T(Z) = H_T(Z) F_T(Z) \quad (7.16)$$

と表され , 結果的に式 (7.14) は ,

$$D_T(Z) + D_T(-Z) = 2 \quad (7.17)$$

の  $Z$  に関する 1 変数多項式に関する条件に変形され , 2 分割 1 次元フィルタバンクの完全再構成条件 (2.2 節 , 式 (2.49)) に帰着されることになる . つまり 2 分割 2 次元フィルタバンクは ,

1. 2 分割 1 次元完全再構成フィルタバンクを与える  $H_T(Z)$  と  $F_T(Z)$  を決定 .
2.  $Z = M(z_1, z_2)$  (式 (7.15)) を所望の帯域分割形状が得られるよう決定 .
3.  $H_0(z_1, z_2) = H_T(M(z_1, z_2))$  ,  $F_0(z_1, z_2) = F_T(M(z_1, z_2))$  ,  $H_1(z_1, z_2) = z_1^{-K_1} z_2^{-K_2} F_0(-z_1, -z_2)$  ,  
 $F_1(z_1, z_2) = z_1^{-K_1} z_2^{-K_2} H_0(-z_1, -z_2)$

の手順で設計することが可能となる . ファンフィルタの場合  $m(k_1, k_2)$  は

$$m(k_1, k_2) = m_1(k_1 + k_2) m_1(k_1 - k_2) \quad (7.18)$$

となり ,  $m_1$  はラグランジュハーフバンドフィルタ [109] のフィルタ係数  $l_K(n)$  を使って

$$\begin{aligned} m_1(\pm(2n-1)) &= 2l_K(2n-1) \\ n &= 1, \dots, K \end{aligned} \quad (7.19)$$

と表される . フィルタ係数  $l_K$  は以下の通りである .

$$l_K(2n-1) = \frac{(-1)^{n+K-1}}{(K-n)!(K-1+n)!(2n-1)} \prod_{i=1}^{2K} \left( K + \frac{1}{2} - i \right) \quad (7.20)$$

以上の条件を

$$\begin{aligned} H_T(Z) &= K_1(Z+1)(Z+c) \\ F_T(Z) &= K_2(Z+1)(Z^2+bZ+a) \end{aligned} \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_1} &= 2(1+c) & \frac{1}{K_2} &= 2(1+b+a) \\ a &= 2c + \frac{2}{2+c} & b &= -(2+c) & c &: \text{arbitrarily} \end{aligned} \quad (7.22)$$

に組み込むことで , 分割フィルタ  $H_T(Z)$  と合成フィルタ  $F_T(Z)$  が設計できる . 例として ,  $K=3, c=-3$  に設定すると  $H_0(z_1, z_2) = H_T(Z)$  (フィルタサイズ :  $21 \times 21$ ) ,  $F_0(z_1, z_2) = F_T(Z)$  (フィルタサイズ :  $31 \times 31$ ) として図 7.10 のような周波数応答を持つファンフィルタが設計できる .

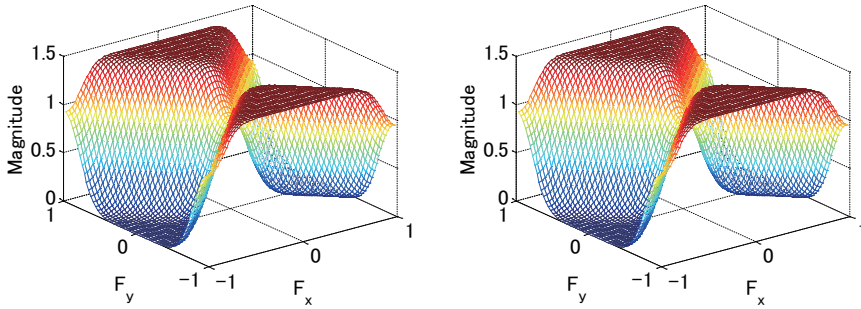


図 7.10 設計されたファンフィルタの周波数応答 (左:  $H_0(z_1, z_2)$ , 右:  $F_0(z_1, z_2)$ )

Quadrant フィルタバンク, Parallelogram フィルタバンクについてもフィルタバンクの帯域分割形状に対応するサンプリング行列  $\mathbf{D}$  とインパルス応答の条件  $m(k_1, k_2)$  を変えるだけで容易に設計することができる. Quadrant フィルタバンクの場合

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, m(k_1, k_2) = m_1(k_1)m_1(k_2) \cos[(k_1 + k_2)\pi/2] \quad (7.23)$$

であり, Parallelogram フィルタバンクの場合

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, m(k_1, k_2) = m_1(k_1)m_1(k_1 + 2k_2) \quad (7.24)$$

となる.

### 7.3 従来の 2 次元フィルタバンク

本章では, 方向分解能の高い非冗長 2 次元フィルタバンクとして現在までに提案されている, Directional Filter Bank と CRISP-CT について述べ, それらの画像圧縮符号化に対する問題点を挙げる.

#### 7.3.1 Directional Filter Bank

Directional Filter Bank(DFB) [31–33] はファンフィルタバンクと Parallelogram フィルタバンクのツリー構造 (図 7.11) によって実現され, 図 7.12 に示すように放射状型の 2 次元周波数平面分割形状 (8 分割) が得られる. このときそれぞれのサンプリングフィルタは

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

で与えられ, 各フィルタは前章の方法で設計できる. 各サブバンド (図 7.12 の 1~8) によって画像の方向成分が検出できる. しかし以下に述べるように, DFB は画像圧縮符号化に適していない.

一般的に画像は低周波成分にエネルギーが集中している. 図 7.13 の帯域分割形状を持つ離散ウェーブレット変換 (DWT) は, 信号の低周波成分と高周波成分を分離して出力できるので, 自然画像のエネルギーを集中させることができる.

一方 DFB の帯域分割形状は各サブバンドで低周波成分から高周波成分までのすべてを含んでいるためエネルギーが分散してしまうと考えられる. 実際にテスト画像 *Yogi* に 1 レベルの DWT と



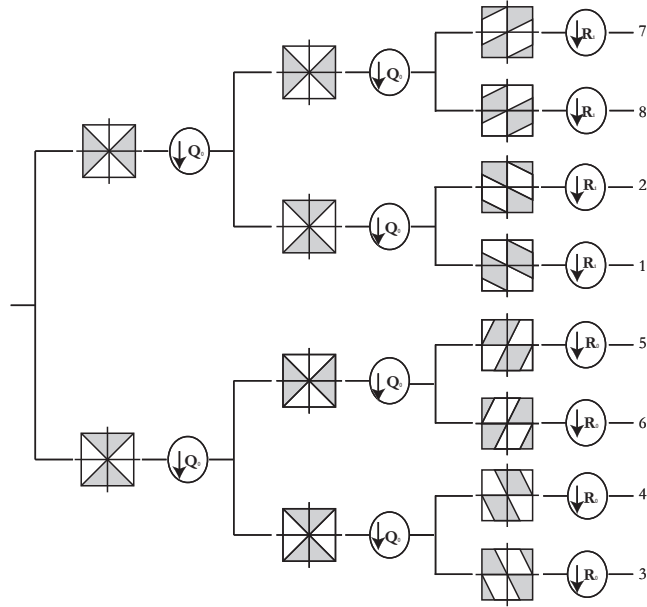


図 7.11 8 分割 DFB のツリー構造

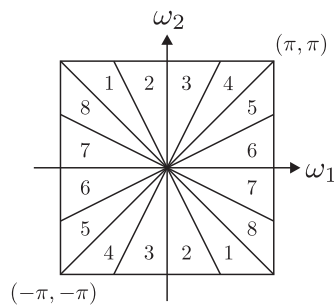


図 7.12 8 分割 DFB の周波数帯域分割形状

8 分割の DFB を用いて変換したときの出力画像をそれぞれ図 7.14(a) と図 7.14(b) に示す。図が示すように、DFB の出力画像のエネルギーは DWT に比べ分散していることが分かる。画像圧縮符号化ではエネルギーの低い（原画像において重要でない）係数を削除することにより、情報量を低減することが基本となるが、DFB はエネルギーが分散しているため、エネルギーの大きな（原画像において重要な）係数までもが削除されてしまう。

実際に、DWT と DFB によって得られた出力信号に EZW-IP 符号化を用いて 1[bpp] のビットレートで画像圧縮符号化を行った結果画像を図 7.15 に示す。図 7.15 を見てわかるように、DWT に比べ、DFB では変換によって画像のエネルギー集中が実現されないため、圧縮の際、復元画像の滑らかな領域で著しく画質が損失している。この問題を解決するためには、低周波領域と高周波領域を分割し、高周波領域に関しては放射状に分割するような帯域分割形状（図 7.16）を持つ変換を設計する必要がある。

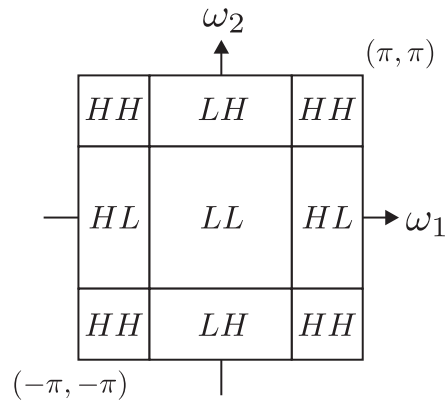
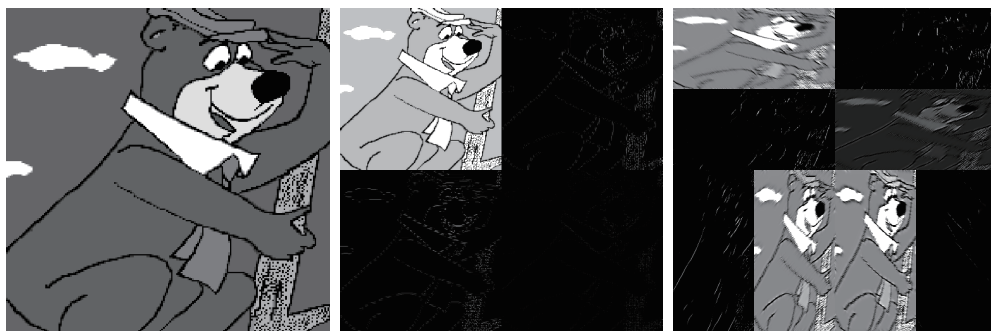


図 7.13 DWT による周波数帯域分割形状



(a) 原画像 (Yogi) (b) 出力画像 (DWT) (c) 出力画像 (DFB)

図 7.14 DWT(a) と 8 分割 DFB(b) の出力画像 (Yogi)

### 7.3.2 最大間引き Contourlet 変換

本項では、文献 [76] で提案されている最大間引き Contourlet 変換 (CRISP-CT) を説明する。CRISP-CT は、DFB (Directional Filter Bank) (図 7.17(左上)), SCBFB (Sheared-CheckerBoard Filter Bank) (図 7.17(右上)), PARFB (PARAllelogram Filter Bank) (図 7.17(左下)), SPRFB (Sheared-PaRAllelogram) (図 7.17(右下)) のツリー構造 (図 7.18) によって構成される。結果として CRISP-CT は図 7.19 のような帯域分割を構成する。この帯域分割形状は DFB の帯域分割形状 (図 7.12) での問題を解決することができる。つまり低周波成分と高周波成分を分割して出力することが可能となり、自然画像において多く含まれる低周波成分のエネルギーを効率よく集中させることができる。

よって画像圧縮符号化に適したフィルタバンクであると期待できるが、この手法には 2 次元フィルタの実現に関して問題点がある。より具体的には、CRISP-CT を構成する 4 種類の 2 次元フィルタバンクのうち、DFB, PARFB に関しては前章で述べた方法によって設計することができるが、SCBFB 及び SPRFB は実現不可能であるということである。

SCBFB と SPRFB において、式 (7.15) の  $m(n_1, n_2)$  に対応する係数  $m_{SCB}(n_1, n_2)$ ,

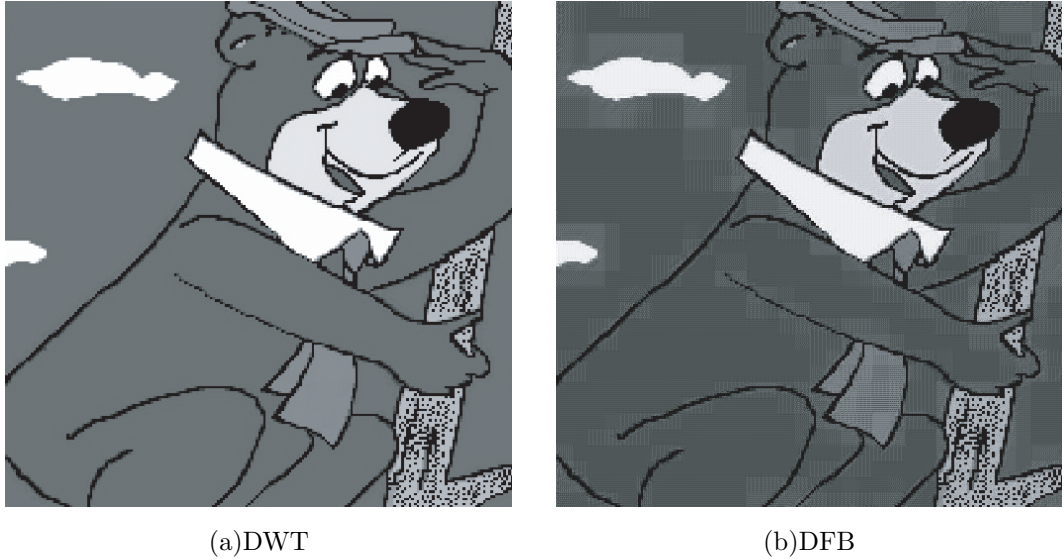


図 7.15 DWT と DFB の画像圧縮符号化性能の比較 (1 bit/pixel)

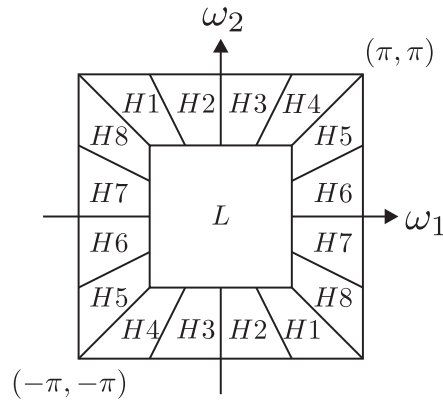


図 7.16 理想的な帯域分割形状。(L: 低周波成分, H1~H8 高周波成分)

$m_{SPR}(n_1, n_2)$  は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 m_{SCB}(n_1, n_2) &= m_1\left(\frac{n_2}{2}\right) \left( \frac{2}{3}(-1)^{n_1} m_1\left(\frac{n_1}{3}\right) \cos\left(\left(\frac{n_1}{3} + \frac{n_2}{2}\right)\pi\right) + \frac{1}{3} m_1\left(\frac{n_1}{3} - \frac{n_2}{3}\right) \right) \\
 m_{SPR}(n_1, n_2) &= m_1\left(\frac{n_1}{2}\right) m_1\left(n_2 - \frac{n_1}{6}\right) \tag{7.26}
 \end{aligned}$$

ただし、 $m_1(n_1, n_2)$  は式 (7.19) である。SPR フィルタの設計例を図 7.20 に示す。図 7.20 が示すように、フィルタ長  $13 \times 13$ ,  $61 \times 61$ , のどちらの場合においても、所望の周波数特性が得られていないことが分かる。この原因としては、2次元フィルタを生成する式 (7.19) における  $m_1(n_1, n_2)$  は自然数で定義されているのに対し、SPR フィルタの  $m_{SPR}(n_1, n_2)$  (式 (7.26)) に含まれる  $m_1\left(\frac{n_1}{2}\right)$  では有理数を必要とするので、設計ができないと考えられる。SCB フィルタに関しても同様である。

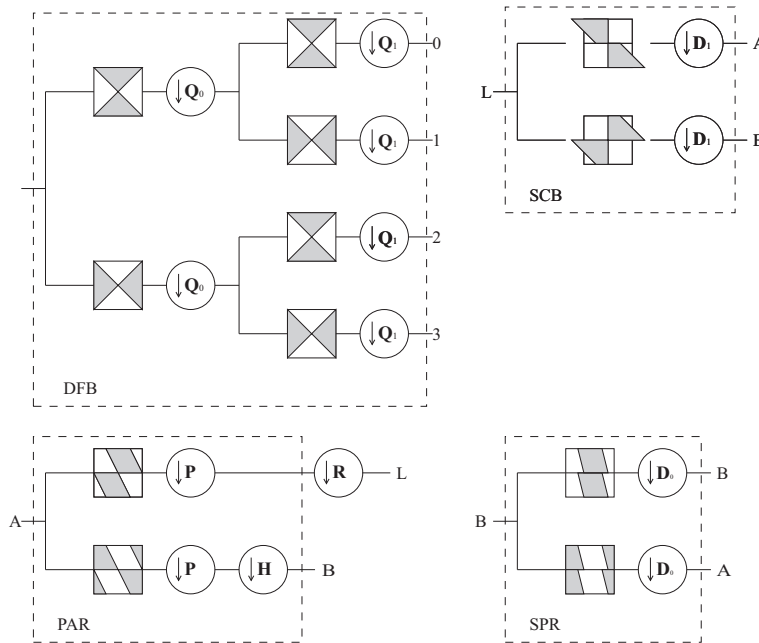


図 7.17 CRISP-CT に用いられる 2 次元フィルタバンク ((左上) : DFB , (右上) : SCBFB , (左下) : PARFB , (右下) : SPRFB)

## 7.4 提案法：ボトムアップ方式に基づく最大間引き Contourlet 変換の設計

前節までに述べたように，画像圧縮符号化に有効と考えられる図 7.16 のような帯域分割形状を持つ最大間引き 2 次元フィルタバンクは提案されていない．従来法に挙げた CRISP-CT のように，類似の帯域分割形状を持つ 2 次元フィルタバンクが理論的に実現できたとしても，設計不可能な通過帯域形状を持つ 2 次元フィルタを必要とするという問題が生じる．これには従来設計法における以下のような問題が原因と考えられる．

従来設計法はトップダウン方式，つまり図 7.16 のような帯域分割形状を持つフィルタバンクを実現するために，いくつかの種類 of 2 分割 2 次元フィルタバンクを組み合わせる方法である．しかし不適切な 2 次元フィルタと 2 次元間引き処理の組み合わせによって除去不可能なエイリアシングが発生し，完全再構成条件が満たされなくなってしまう (7.2.1 節)．結果，組み合わせに用いることができる 2 次元フィルタバンクは非常に複雑な通過帯域形状を持つフィルタを含むことになる．

これに対して，本研究ではボトムアップ方式と呼ぶ設計手法を導入し，実現可能な 2 分割 2 次元フィルタバンクを組み合わせることで図 7.16 の帯域分割形状を持つ CRISP-CT を提案する．本章で提案する CRISP-CT の周波数帯域分割形状を図 7.21(a) に示す．従来法ではこの帯域分割形状をフィルタの設計の問題で実現できなかったが，本提案ボトムアップ方式では図 7.21(b) に示す形状まで一度細かく分割し，後にサブバンドを統合して図 7.21(a) の分割形状を得る．以下分割ステップ・合成ステップに分けて提案設計法を説明する．

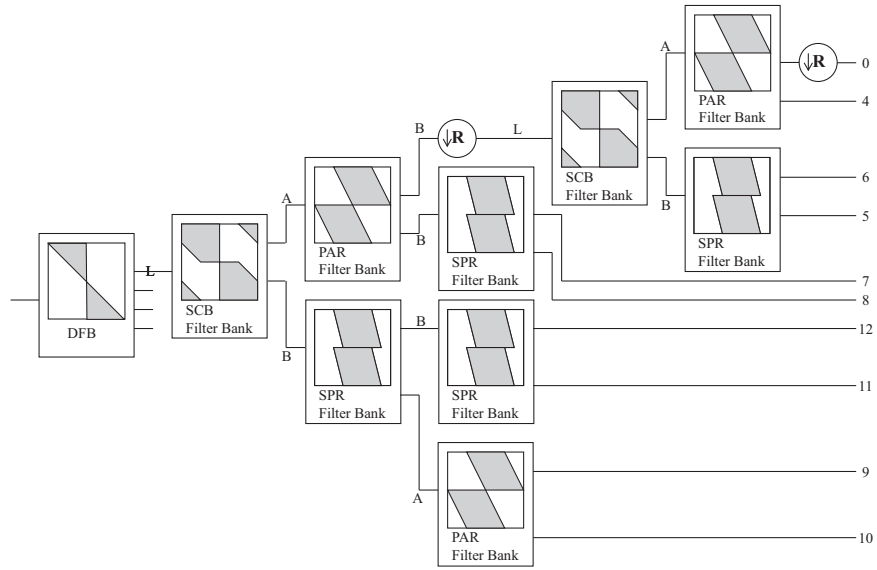


図 7.18 CRISP-CT のツリー構造

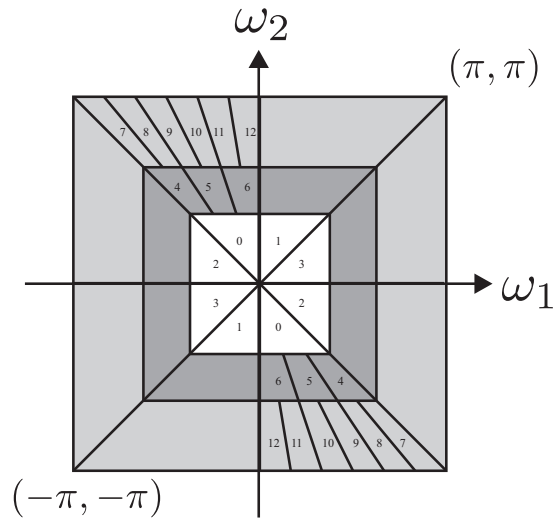


図 7.19 CRISP-CT の周波数帯域分割形状

#### 7.4.1 分割ステップ

本節では分割ステップを示す．分割ステップに用いる 2 次元フィルタバンクは，DWT と Quadrant フィルタバンク及び Parallelogram フィルタバンクによって構成される．分割するための流れを図 7.22 に示す．図 7.22 のようにまず原画像に DWT を施し周波数帯域を 4 分割にする．その 4 分割された  $LL$ ， $LH$ ， $HL$ ， $HH$  成分のうち， $LH$  及び  $HL$  成分には Tree A(図 7.23) を， $HH$  成分には Tree B(図 7.24) を接続する．ただし，Tree A 及び Tree B には Quadrant フィル

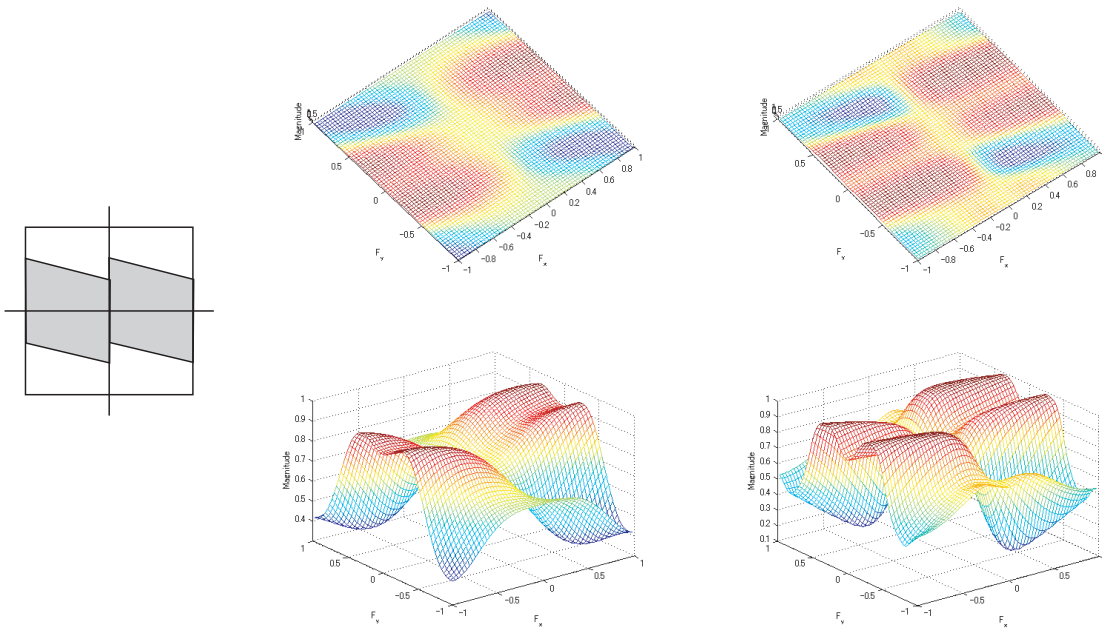


図 7.20 SPR フィルタ (フィルタ長 : 右 13 × 13 左 61 × 61)

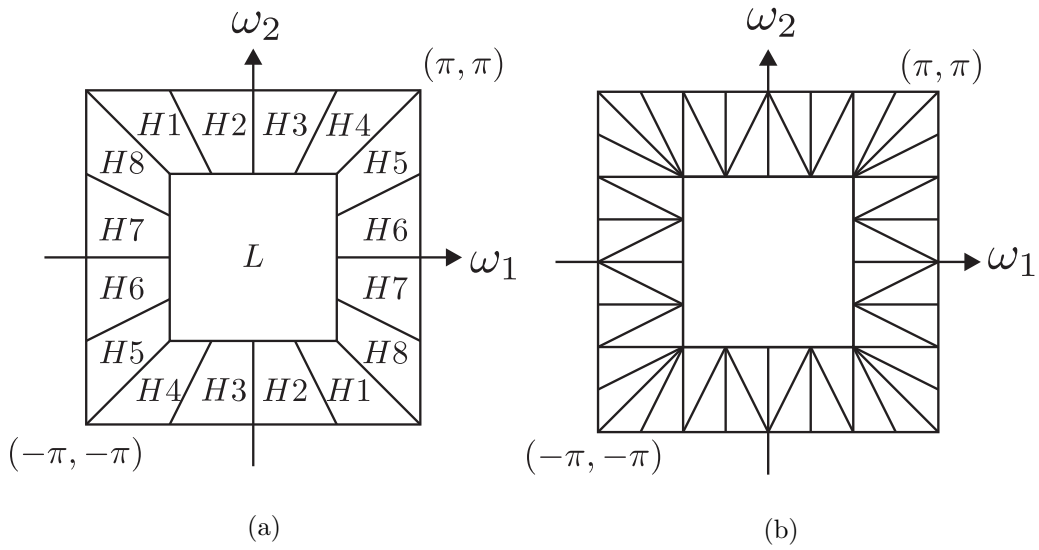


図 7.21 提案する帯域分割形状 . (a) : 合成後 , (b) : 合成前 .

と Parallelogram フィルタを用い , サンプリング行列  $\mathbf{Q}_0$  ,  $\mathbf{R}_0$  ,  $\mathbf{R}_1$  は

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

とする . これらのツリー構造によって 1 レベルの分割ステップが完了し , 図 7.21(b) に示す帯域分割形状が得られる . 2 レベル目以降の分割処理は 1 レベル目において出力された  $LL$  成分に対して , 同様の処理 (DWT  $LH \cdot HL$  成分に Tree A ,  $HH$  成分に Tree B) を行う .

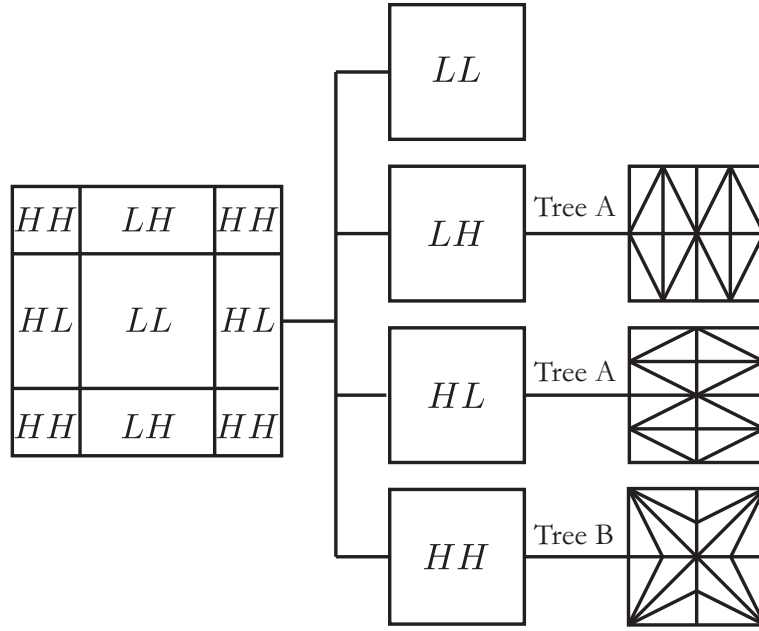


図 7.22 分割ステップの流れ．DWT の処理後， $LH$  及び  $HL$  成分には Tree A を， $HH$  成分には Tree B を接続する．

#### 7.4.2 合成ステップ

次に合成ステップについて詳細を述べる．分割ステップにおいて得られた所望の帯域分割形状よりも小さいサイズのサブバンド（図 7.25）を合成するために，トランスマルチプレкса（図 7.26）を用いる．図 7.25 に示された提案周波数帯域分割形状の  $H1 \sim H8$  のサブバンド信号は，トランスマルチプレксаの図 7.25 の  $y_1(n_1, n_2)$ ， $y_2(n_1, n_2)$ ， $y_3(n_1, n_2)$  として以下の組み合わせの細分サブバンド信号  $LH1 \sim LH8$ ， $HL1 \sim HL8$ ， $HH1 \sim HH8$ （図 7.25 左）を入力し，サブバンドフィルタ  $F_0(z)$ ， $F_1(z)$ ， $F_2(z)$  によって合成することによって得られる．

$$\begin{aligned}
 x &\leftarrow y_1 + y_2 + y_3 & x &\leftarrow y_1 + y_2 + y_3 \\
 H1 &\leftarrow HH1 + HH2 + LH1 & H5 &\leftarrow HH5 + HH6 + HL8 \\
 H2 &\leftarrow LH2 + LH3 + LH4 & H6 &\leftarrow HL5 + HL6 + HL7 \\
 H3 &\leftarrow LH5 + LH6 + LH7 & H7 &\leftarrow HL2 + HL3 + HL4 \\
 H4 &\leftarrow LH8 + HH7 + HH8 & H8 &\leftarrow HH3 + HH4 + HL1
 \end{aligned} \tag{7.28}$$

サブバンドフィルタ  $F_0(z)$ ， $F_1(z)$ ， $F_2(z)$  は一般的なフィルタバンクの合成フィルタに相当する．本研究では， $F_0(z)$ ， $F_1(z)$ ， $F_2(z)$  をパラユニタリフィルタバンクとして設計する．まず回転行列 [5] に基づくラティス構造によって分割側 FB のポリフェーズ行列  $\mathbf{E}(z)$  を以下のように設計する．

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{V}_{N-1} \mathbf{\Lambda}(z) \mathbf{V}_{N-1} \cdots \mathbf{\Lambda}(z) \mathbf{V}_0 \tag{7.29}$$

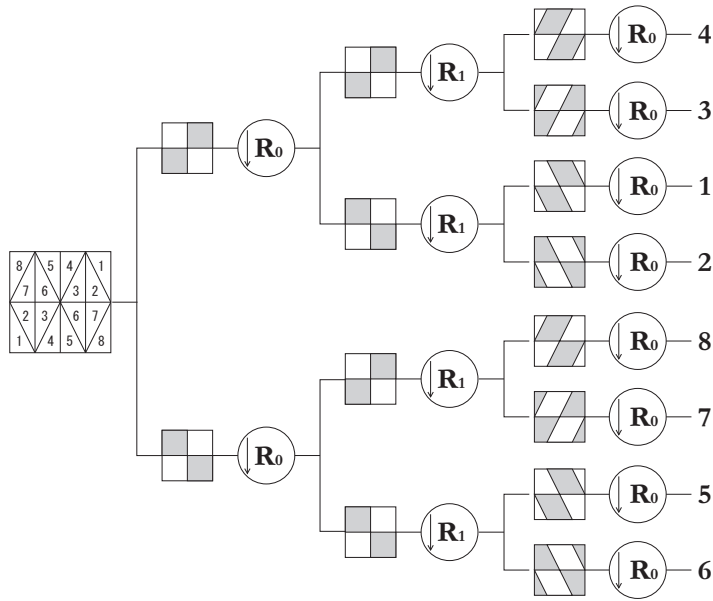


図 7.23 DWT の出力  $LH$ ,  $HL$  成分に接続する Tree A

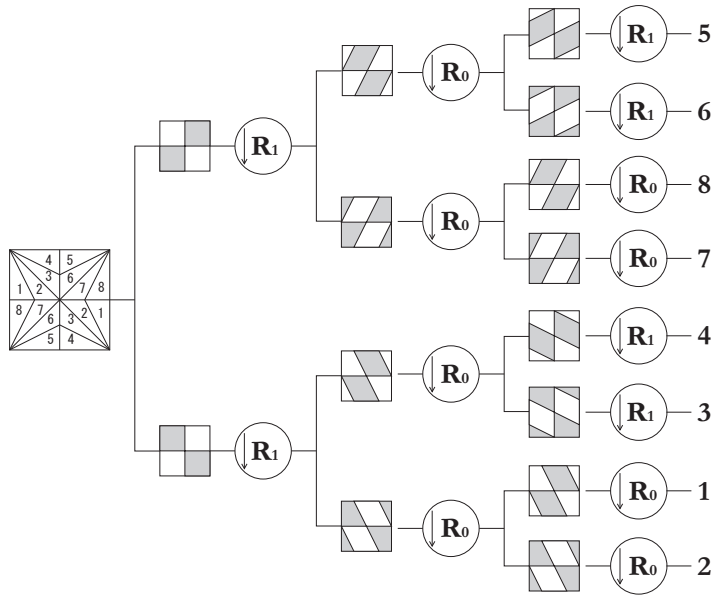


図 7.24 DWT の出力  $HH$  成分に接続する Tree B

ただし,  $\mathbf{V}_k$  ( $0 \leq k \leq N-1$ ) は  $3 \times 3$  の直交行列で,  $\Lambda(z)$  は遅延行列  $\Lambda(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$  とする. そして  $\tilde{\mathbf{E}}(z) := \mathbf{E}^H(z^{-1})$  を合成フィルタバンクに用いて得られる  $F_0(z)$ ,  $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$  を使用する.



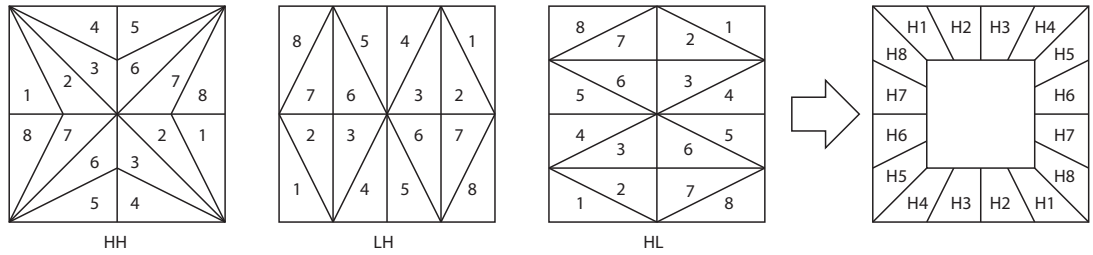


図 7.25 提案帯域分割形状取得のための合成処理

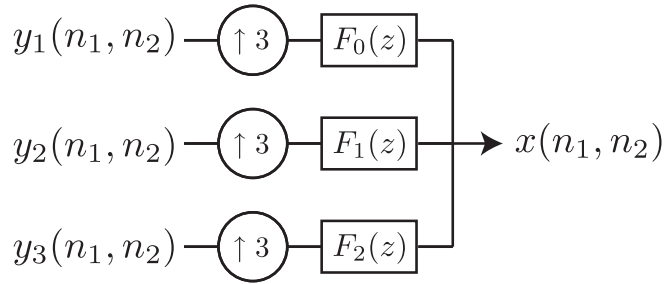


図 7.26 トランスマルチプレクサ

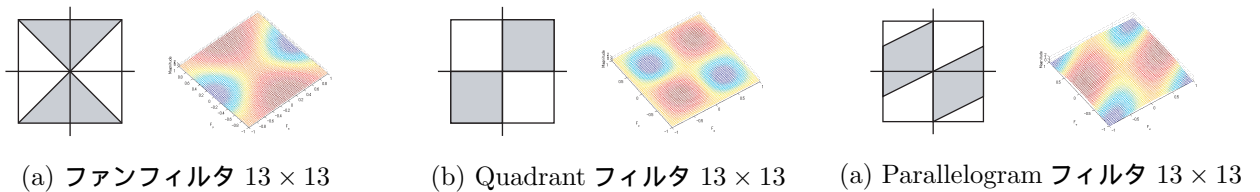


図 7.27 使用するフィルタ

## 7.5 シミュレーション

本シミュレーションでは提案されたボトムアップ方式によって設計した CRISP-CT を用いて画像圧縮符号化に応用する。

### 7.5.1 フィルタバンクの設計

分割ステップに用いるフィルタバンクとしては、DWT、ファンフィルタバンク、Quadrant フィルタバンク、Parallelogram フィルタバンクである。DWT には 9/7 タップフィルタを用いる (2.6 節, 表 2.1)。ファンフィルタバンク、Quadrant フィルタバンク、Parallelogram フィルタバンクに関しては、7.2.2 節の手法で設計する。設計パラメータは、 $K = 2$ ,  $c = -3$ , フィルタ長を  $13 \times 13$  として設計した。それぞれのフィルタの周波数応答を図 7.27 に示す。分割ステップにおける、DWT、Tree A、Tree B のツリー構造で得られる周波数応答を図 7.28 ( $HH$  成分), 図 7.29 ( $HL, LH$  成分) に示す。図 7.28 及び図 7.29 より、分割ステップにおいて実現すべき周波数帯

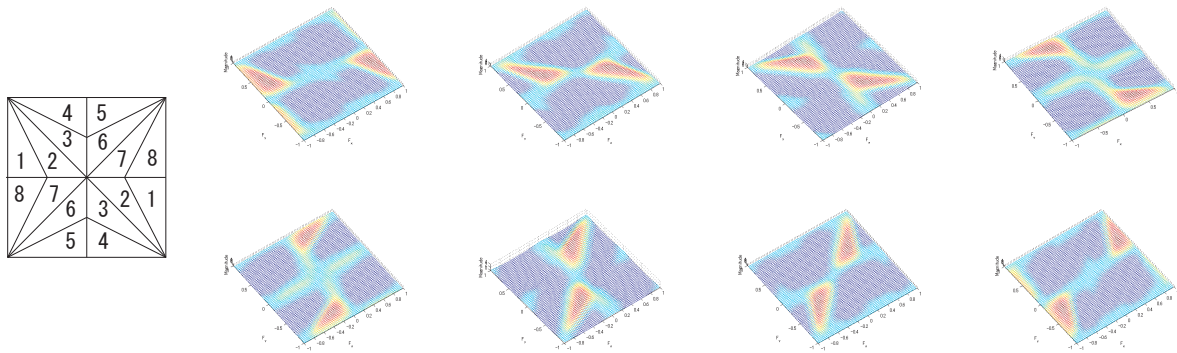


図 7.28  $HH$  成分の周波数応答

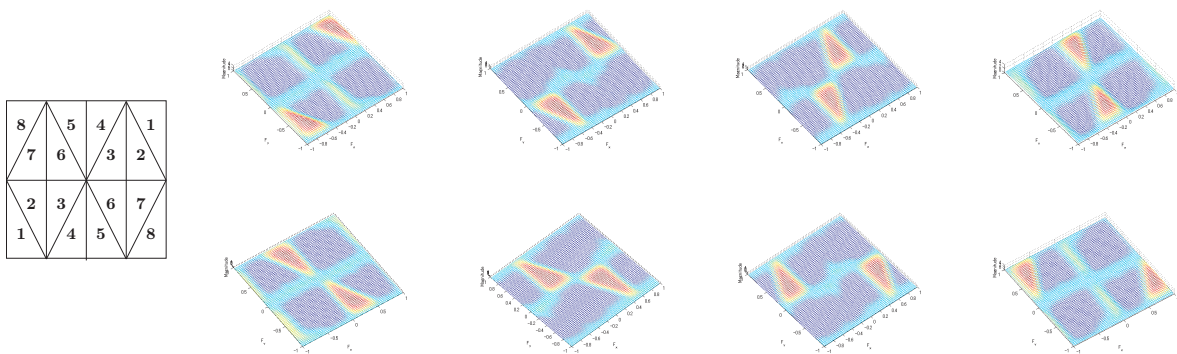


図 7.29  $HL/LH$  成分の周波数応答

域分割形状 (図 7.21(b)) は実際に実現されていることが分かる。

また合成ステップで使ったパラユニタリフィルタバンクの周波数応答を図 7.30 に示す。

### 7.5.2 提案 CRISP-CT の方向分解能について

提案 CRISP-CT を用いて図 7.31 に示された 16 方向のエッジ成分を持つテスト画像を変換し、角度を区別してエッジ成分が抽出できているかを検証する。図 7.32 を見てわかるように、各サブバンド信号は対応する角度のエッジ成分に強いエネルギーを示しており、方向検出が実現できていることが分かる。

### 7.5.3 画像圧縮符号化

本節では、提案する CRISP-CT を画像圧縮符号化の変換部分に適用する。実際には CRISP-CT で 2 レベルの分割を行い、その後 9/7 タップ DWT で 4 レベルの分割を行う。比較手法としては 9/7 タップ DWT で 6 レベルの分割を行う。圧縮性能の評価関数としては、原画像と復元画像の誤差を、PSNR(式 (4.34)) を用いて比較した。原画像としては *Zone plate*, *Barbara*, *Bike*, *Man* を用い、符号化法として EZW-IP 符号化法を用いた。使用したビットレートは 0.5[bpp], 0.25[bpp],

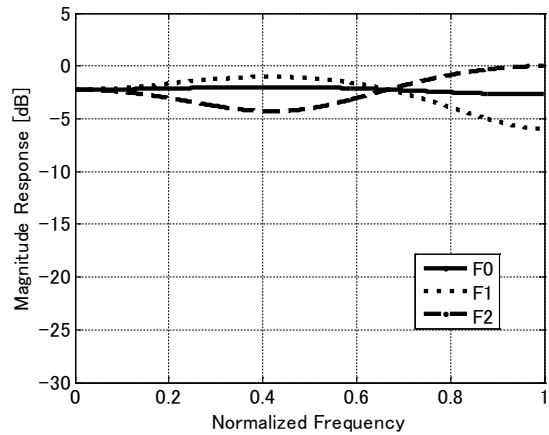


図 7.30 合成に使用したフィルタバンク ( $F_0(z)$ ,  $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$ ) の周波数応答 .

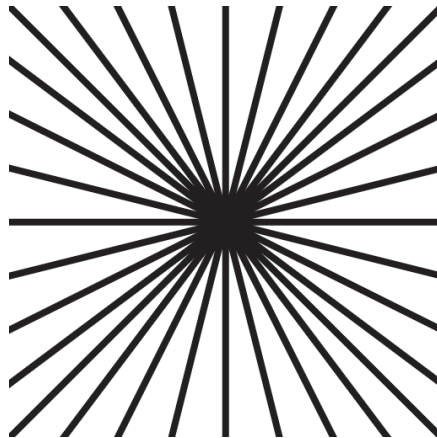


図 7.31 16 方向のエッジ成分を持つテスト画像

0.125[bpp] である .

圧縮符号化の数値結果 (PSNR) を表 7.1 に示した . 数値的な結果 (表 7.1) を見てわかるように , DWT が苦手とする低ビットレートにおいて , 方向分解能の優れた提案 CRISP-CT が DWT を上回る結果が得られた . また図 7.33 , 図 7.34 , 図 7.35 はそれぞれ , *Zone plate* , *Barbara* 及び *Bike* の圧縮符号化を行った結果画像である .

図 7.33 , 図 7.34 , 図 7.35 に示されているように , 提案法は従来法に比べて , 斜めのエッジなどがより鮮明に表現できていることが分かる . この理由は従来法と提案法の方向分解能の差によると思われる . 9/7 タップ DWT では方向分解能が低いことから , 様々な方向のエッジ成分は鉛直・水平成分に分解されて出力される . このため高圧縮率の場合 , 分解されたエッジ情報が大幅に変化し , 詳細なテクスチャの画質が著しく低下する . しかし提案法では , 高周波成分に対して処理を施し , エッジやテクスチャの方向成分を精度良く抽出できているため , 高圧縮率においてもエッジ情報が保持され結果としてテクスチャがはっきりと復元できると考えられる .

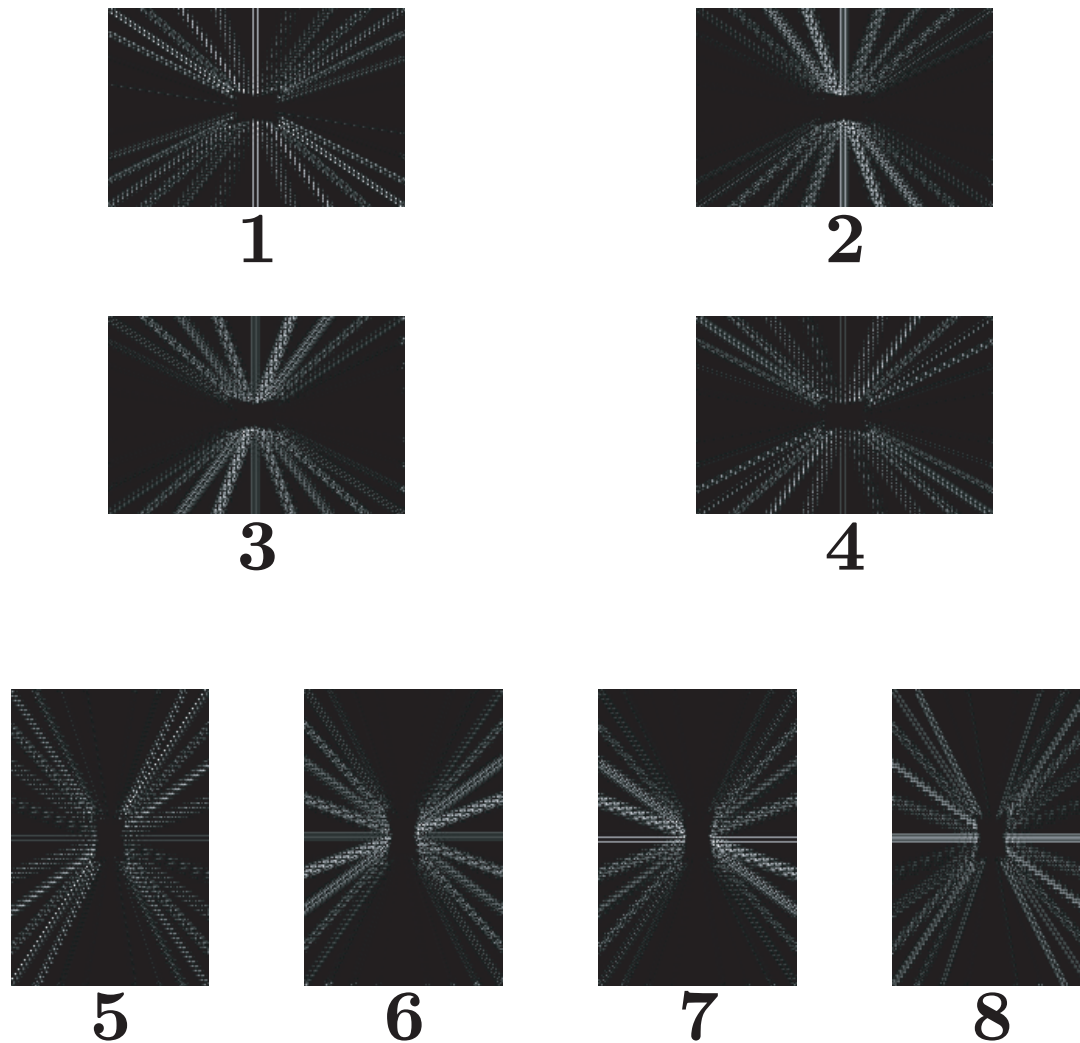


図 7.32 図 7.31 の変換後の高周波成分の出力

## 7.6 本章の結論

本章では、ボトムアップ方式の設計法に基づく最大間引き Contourlet 変換を提案した。従来の最大間引き Contourlet 変換の設計法では、いくつかの 2 分割 2 次元フィルタバンクに基づくツリー構造によって、所望の周波数帯域分割形状を直接実現するトップダウン方式を用いていた。提案法では、2 分割 2 次元フィルタバンクのツリー構造は用いるものの、一度細かく分解した後に合成することで、所望の分割形状を実現するというボトムアップ方式を用いた。その結果、容易に実現可能である Quadrant フィルタと Parallelogram フィルタのみを組み合わせ全体フィルタバンクを設計することが可能となった。

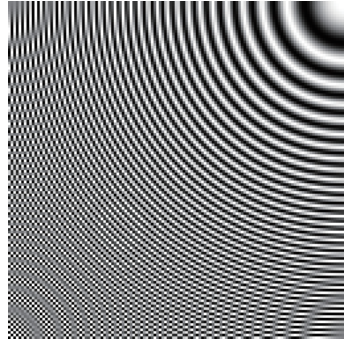
更に提案法の最大間引き Contourlet を画像圧縮符号化に適用した。1 次元の  $9/7$  タップ離散ウェーブレット変換と比較し、高周波成分が多い画像に対しては、高圧縮率でも高周波成分の情報

表 7.1 符号化結果 1

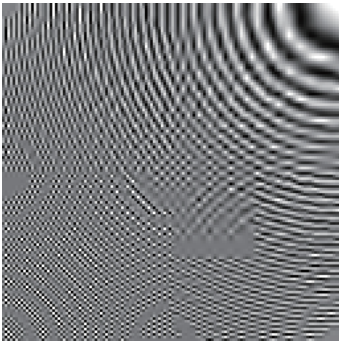
Bit rate 0.5		
原画像	9/7 タップ DWT	提案 CRISP-CT
<i>Zone plate</i>	13.900	15.351
<i>Barbara</i>	30.362	30.475
<i>Bike</i>	24.255	24.975
<i>Man</i>	30.720	31.131
Bit rate 0.25		
Image	9/7 タップ DWT	提案 CRISP-CT
<i>Zone plate</i>	10.962	13.084
<i>Barbara</i>	27.056	27.283
<i>Bike</i>	21.621	21.884
<i>Man</i>	28.163	28.252
Bit rate 0.125		
Image	9/7 タップ DWT	提案 CRISP-CT
<i>Zone plate</i>	10.125	11.036
<i>Barbara</i>	24.644	24.916
<i>Bike</i>	19.757	19.847
<i>Man</i>	26.543	26.566

単位: dB

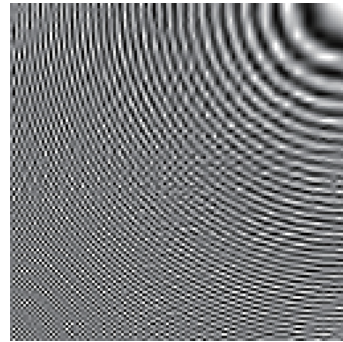
が保持されるために、多方向のエッジ成分をより鮮明に表現することができ、提案法の有効性が確認された。



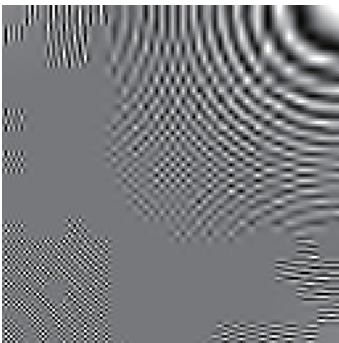
(a) original image



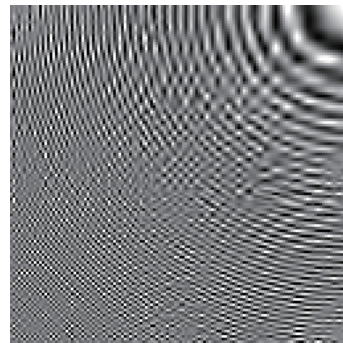
(b) 13.900 dB



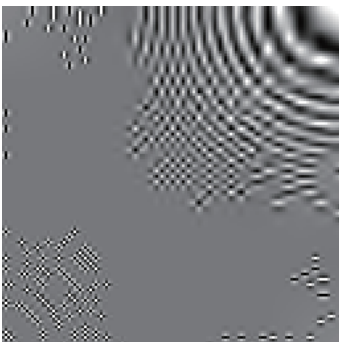
(c) 15.351 dB



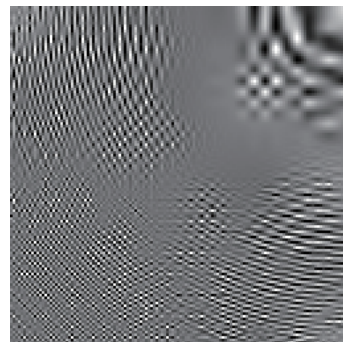
(d) 10.962 dB



(e) 13.084 dB



(f) 10.125 dB



(g) 11.036 dB

図 7.33 Zone plate 結果画像 : (a) 原画像 , (b) , (d) , (f) 9/7DWT を用いた結果画像 (c) , (e) , (g) 提案 CRISP-CT を用いた結果画像 . ( (b) , (c) : 0.5 bpp (d) , (e) : 0.25 bpp (f) , (g) : 0.125 bpp )



(a) original image



(b) 30.362 dB



(c) 30.475 dB



(d) 27.056 dB



(e) 27.283 dB

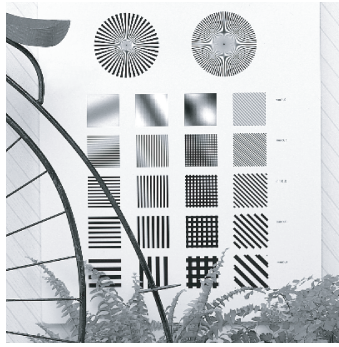


(f) 24.644 dB

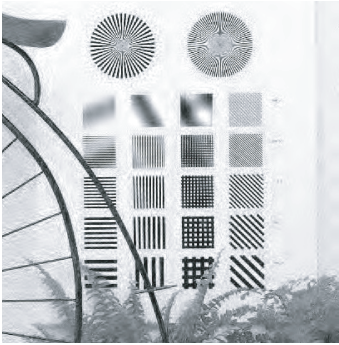


(g) 24.916 dB

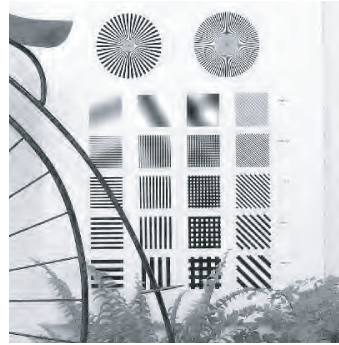
図 7.34 *Barbara* 結果画像 : (a) 原画像 , (b) , (d) , (f) 9/7DWT を用いた結果画像 (c) , (e) , (g) 提案 CRISP-CT を用いた結果画像 . ( (b) , (c) : 0.5 bpp (d) , (e) : 0.25 bpp (f) , (g) : 0.125 bpp )



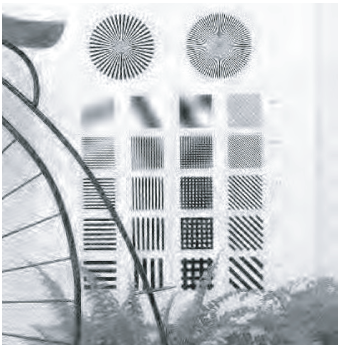
(a) original image



(b) 24.255 dB



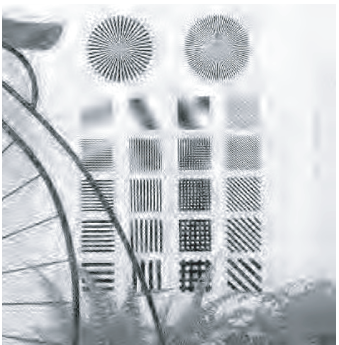
(c) 24.975 dB



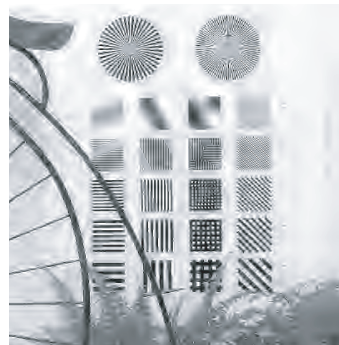
(d) 21.621 dB



(e) 21.884 dB



(f) 19.757 dB



(g) 19.847 dB

図 7.35 *Bike* 結果画像 : (a) 原画像 , (b) , (d) , (f) 9/7DWT を用いた結果画像 . (c) , (e) , (g) 提案 CRISP-CT を用いた結果画像 . ((b) , (c) : 0.5 bpp (d) , (e) : 0.25 bpp (f) , (g) : 0.125 bpp)



## 第 8 章

### 結論

本論文では、1次元実ウェーブレット変換/フィルタバンク (WT/FB) を複素及び2次元へ拡張した WT/FB の高次元化の実現法を提案し、実用例として、画像圧縮符号化と画像ノイズ除去に応用した。

本論文で取り上げた、WT/FB の高次元化を用いることによる利点は、以下の3点に集約される。

1. 構造の多様性 (1次元複素 WT/FB : 第4章)
2. 高方向分解能及びシフト不変性 (1次元複素 WT/FB : 第5章, 第6章)
3. 高方向分解能 (2次元実 WT/FB : 第7章)

第4章では、新しい複素フィルタバンクのクラスである“2分割複素線形位相擬直交フィルタバンク”を提案した。従来の2分割実/複素フィルタバンクでは、パラユニタリ性と線形位相性を満たすフィルタバンクはハーフフィルタバンクのみに限られ、良好な周波数特性を持つ線形位相パラユニタリフィルタバンクが設計できないという問題があった。この問題に対し、本研究では実数から複素数への係数の拡張として、擬似的な直交性“擬直交性”を導入した2分割複素擬直交フィルタバンクを提案した。提案したフィルタバンクは正確なパラユニタリ性を満たさないが、合成フィルタが分割フィルタの時間反転で設計できるというパラユニタリ性の利点を持つ。更に任意長のフィルタバンクにエルミート対称性を課すことができる。よって良好な周波数特性と線形位相性を同時に満たす2分割複素線形位相擬直交フィルタバンクが実現できた。これらの利点を保障するフィルタバンクは従来の実係数・複素係数いずれのフィルタバンクを用いても実現できないクラスである。また本研究では、提案された2分割複素線形位相擬直交フィルタバンクを画像圧縮符号化へ応用した。この際、複素フィルタバンクを用いて整数信号である画像を変換する場合、出力された複素数信号は2倍の情報量を持つため、画像圧縮符号化において致命的な問題となる。この問題を解決するために、本研究では入力画像を変形し、複素数画像にすることによって、情報量を倍増させることなく複素フィルタバンクが適用できるアルゴリズムを提案した。実際に提案アルゴリズムに基づき、2分割複素線形位相擬直交フィルタバンクを画像圧縮符号化に適用し、JPEG2000で用いられている離散ウェーブレット変換を上回る符号化性能を示した。

第5章、第6章では、近似的シフト不変性及び高い方向分解能を満たす Dual-tree 複素ウェーブレット変換の設計法を示した。Dual-tree 複素ウェーブレット変換は2つのフィルタバンクを並列に有しており、フィルタバンク間に半サンプル遅延の条件が必要となる。この条件を満たしながら、良好な周波数選択性を持つフィルタバンクを設計することは困難な問題となる。本研究ではまず、第5章において、2分割 Dual-tree 複素ウェーブレット変換の設計法として、最小二乗法に基づく最適化手法を提案した。従来法よりも設計の自由度が高いことから、阻止域減衰量・方向

分解能・シフト不変近似精度において、より性能の高い Dual-tree 複素ウェーブレット変換を設計することが可能となった。更に第 6 章では、一般の  $M$  分割 Dual-tree 複素ウェーブレット変換の設計法として、コサイン・サイン変調フィルタバンクを用いた手法を提案した。従来の  $M$  分割 Dual-tree 複素ウェーブレット変換は 2 分割 Dual-tree 複素ウェーブレット変換をツリー状に接続して設計する手法であるため、設計の自由度は本質的に 2 分割 Dual-tree 複素ウェーブレット変換の自由度に制限されてしまう。また帯域分割数は  $2^r$  に限られる。これに対し、提案したコサイン・サイン変調フィルタバンクは Dual-tree 複素ウェーブレット変換と同様のシフト不変性と高い方向分解能を有することに加えて、任意分割数を設計できることや、良好な周波数特性を実現できる利点を持つ。更にすべてのサブバンドフィルタをプロトタイプの変調のみによって簡単に設計できる。実際の応用例として、画像ノイズ除去にコサイン・サイン変調フィルタバンクを適用し、離散ウェーブレット変換及び従来の  $M$  分割 Dual-tree 複素ウェーブレット変換よりも優れた効果を発揮することを示した。

第 7 章では非冗長で、かつ高い方向分解能を有する 2 次元実フィルタバンク“最大間引き Contourlet 変換”のボトムアップ設計法を提案し、画像圧縮符号化への応用を示した。複素フィルタバンクを用いた場合でも方向分解能の高い変換が実現できるが、変換の際に 2 倍のサンプル数が出力される。この冗長性は、画像のノイズ除去などでは許されるが、画像圧縮符号化では致命的な問題となる。一方最大間引き Contourlet 変換の場合、良好な方向分解能を持つ非冗長型変換が実現できるので、画像圧縮符号化に問題なく適用できる。その結果、方向分解能の低い離散ウェーブレット変換が苦手とする、低ビットレートでの画像圧縮における画質の改善が期待できる。しかし、従来提案されている最大間引き Contourlet 変換の設計法は、その構造の中に実現不可能なフィルタを含む問題があった。本研究では最大間引き Contourlet 変換の新しい設計手法としてボトムアップ方式を提案し、実現可能なフィルタバンクのみを用いて最大間引き Contourlet 変換が設計できることを示した。提案フィルタバンクはエッジの方向検出性能に優れているため、低ビットレートで画像圧縮符号化した際、離散ウェーブレット変換に比べて詳細なテクスチャをより鮮明に保存できることが示された。

本研究では、1 次元実 WT/FB を複素及び 2 次元に高次元化し、その利点を最大限引き出すための有効かつ実用的な設計法を提案し、画像圧縮符号化や画像ノイズ除去などの実用例において有効性を示したところに価値があると言える。しかし、WT/FB の高次元化に関する研究すべてが本論文で完結した訳ではない。1 次元複素 WT/FB・2 次元実 WT/FB の分野は未だ発展途上にあり、未だ明らかにされていない利点や有効な設計法が存在することは十分に考えられる。また 1 次元四元数 WT/FB や 3 次元実 WT/FB など、更に次元の高い変換も考えることができ、これらに関しては、性質・利点、有効な設計方法論の殆どが明らかになっていない。本研究における 1 次元複素・2 次元実 WT/FB の成果が WT/FB の高次元化の分野を拓き、更に発展していくことを願い、本論文を結ぶ。

## 参考文献

- [1] J. Fourier, *The Analytical Theory of Heat*. Cambridge University Press, 1878.
- [2] G. Strang and T. Q. Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley MA, 1996.
- [3] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, 1992.
- [4] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*. New York: Academic, 2nd ed., 1998.
- [5] P. P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993.
- [6] M. Vetterli and J. Kovacevic, *Wavelets and subband coding*. NJ: Prentice-Hall, 1995.
- [7] K. R. Rao and P. Yip, *Discrete cosine transform: algorithms, advantages, applications*. CA: Academic Press, 1990.
- [8] E. S. Malvar and D. H. Staelin, “The LOT: Transform coding without blocking effects,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 37, pp. 553–559, Apr. 1989.
- [9] R. L. de Queiroz, T. Q. Nguyen, and K. R. Rao, “The GenLOT: Generalized linear-phase lapped orthogonal transform,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 44, pp. 497–507, Mar. 1996.
- [10] W. B. Pennebaker, *JPEG: Still Image Data Compression Standard*. NY: Van Nostand Reinhold, 1993.
- [11] B. E. Usevitch, “A tutorial on modern lossy wavelet image compression: foundations of JPEG2000,” *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 18, no. 5, pp. 22–35, 2001.
- [12] T. P. A. Spanias and V. Atti, *Audio Signal Processing and Coding*. Wiley, 2007.
- [13] I. Richardson, *H. 264 and MPEG-4 Video Compression: Video Coding for Next Generation Multimedia*. John Wiley and Sons, 2003.
- [14] D. L. Donoho, “De-noising by soft-thresholding,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 41, pp. 613–621, May 1995.
- [15] D. L. Donoho and I. Johnstone, “Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage,” *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 90, no. 432, pp. 1200–1224, 1995.
- [16] R. Coifman and D. Donoho, “Translation-invariant de-noising,” *Wavelets and Statistics*, vol. 103, pp. 125–150, 1995.
- [17] S. Chang, B. Yu, and M. Vetterli, “Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression,” *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 9, pp. 1532–1546, Sept. 2000.
- [18] H. feng Cui and X. Zheng, “A wavelet-based image enhancement algorithm for real time multi-resolution texture mapping,” *Springer*, pp. 13–21, 2007.

- [19] R. Wilson, A. D. Calway, and E. R. S. Pearson, "A generalized wavelet transform for Fourier analysis: The multiresolution Fourier transform and its application to image and audio signal analysis," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 38, no. 2, pp. 674–690, 1992.
- [20] A. Laine and J. Fan, "Texture classification by wavelet signature," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 15, pp. 1186–1191, Nov. 1993.
- [21] K. Huang and S. Aviyente, "Wavelet feature selection for image classification," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 17, pp. 1709–1720, Sept. 2008.
- [22] G. Fan and X. Xia, "Wavelet-based texture analysis and synthesis using hidden markov models," *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundam. Theory Appl.*, vol. 50, pp. 106–120, Jan. 2003.
- [23] P. Bao and X. Ma, "Image adaptive watermarking using wavelet domain singular value decomposition," *IEEE Trans. Circ. and Syst. for Video Tech.*, vol. 15, pp. 96–102, Jan. 2005.
- [24] X. Xia, C. G. Bonceletand, and G. R. Arce, "A multiresolution watermark for digital images," in *Proc. Int. Conf. Image Process.*, vol. 1, pp. 548–551, Oct. 1997.
- [25] V. Chakravarthy, A. S. Nunez, J. P. Stephens, A. K. Shaw, and M. A. Temple, "TDCS, OFDM, and MC-CDMA: a brief tutorial," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 43, no. 9, pp. S11–S16, 2005.
- [26] E. P. Simoncelli, W. T. Freeman, E. H. Adelson, and D. J. Heeger, "Shiftable multi-scale transforms," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 38, pp. 587–607, Mar. 1992.
- [27] I. W. Selesnick, R. G. Baraniuk, and N. G. Kingsbury, "The dual-tree complex wavelet transform," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 22, pp. 123–151, Nov. 2005.
- [28] T. D. Tran and T. Q. Nguyen, "On  $M$ -channel linear-phase fir filter banks and application in image compression," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 45, pp. 2175–2187, Sept. 1997.
- [29] T. D. Tran, M. Ikehara, and T. Q. Nguyen, "Linear phase paraunitary filter bank with filters of differnt lengths and its application in image compression," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 47, pp. 2730–2744, Oct. 1999.
- [30] X. Gao, T. Q. Nguyen, and G. Strang, "On factorization of  $M$ -channel paraunitary filterbanks," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, pp. 1433–1446, July 2001.
- [31] R. H. Bamberger and M. J. T. Smith, "A filter bank for the directional decomposition of image: theory and design," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 40, pp. 882–893, Apr. 1992.
- [32] S. Park, M. J. T. Smith, and R. M. Mersereaud, "Improved structures of maximally decimated directional filter banks for spatial image analysis," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 13, pp. 1424–1431, Nov. 2004.
- [33] G. Shi, L. Liang, and X. Xie, "Design of directional filter banks with arbitrary number of subbands," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, pp. 4936–4941, Dec. 2009.
- [34] J. M. Shapiro, "Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, pp. 3445–3462, Dec. 1993.

- [35] Z. Liu and L. J. Karam, "An efficient embedded zerotree wavelet image codec based on intraband partitioning," in *Proc. Int Conf. Image Process.*, vol. 3, pp. 162–165, Sept. 2000.
- [36] A. Said and W. A. Pearlman, "A new fast and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees," *IEEE Trans. Circ. and Syst. for Video Technol.*, vol. 6, pp. 243–250, Dec. 1996.
- [37] A. Islam and W. A. Pearlman, "An embedded and efficient low-complexity hierarchical image coder," in *Proc. Int Conf. SPIE on Visual Commun. Image Process.*, vol. 3653, pp. 294–305, Sept. 1999.
- [38] D. Taubman, "High performance scalable image compression with EBCOT," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 9, pp. 1158–1170, Jul. 2000.
- [39] M. W. J. Portilla, V. Strela and E. P. Simoncelli, "Image denoising using a scale mixture of gaussians in the wavelet domain," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 12, pp. 1338–1351, Nov. 2003.
- [40] B. Zhang, J. M. Fadili, and J.-L. Starck, "Wavelets, ridgelets, and curvelets for poisson noise removal," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 17, pp. 1093–1108, July 2008.
- [41] S. Burley and M. Darnell, "Robust impulse noise suppression using adaptive wavelet denoising," in *Acoustics, Speech, and Signal Process.*, vol. 5, pp. 3417–3420, IEEE, Apr. 1997.
- [42] X.-P. Zhang, M. D. Desai, and Y.-N. Peng, "Orthogonal complex filter banks and wavelets: some properties and design," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 47, pp. 1039–1048, Apr. 1999.
- [43] W. Lawton, "Applications of complex valued wavelet transforms to subband decomposition," *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 41, pp. 3566–3568, Dec. 1993.
- [44] X. Q. Gao, T. Q. Nguyen, and G. Strang, "A study of two-channel complex-valued filterbanks and wavelets with orthogonality and symmetry properties," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, pp. 824–833, Apr. 2002.
- [45] X. Q. Gao, T. Q. Nguyen, and G. Strang, "Theory and lattice structure of complex paraunitary filterbanks with filter of (Hermitian-)symmetry/ antisymmetry properties," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, pp. 1028–1043, May 2001.
- [46] P. Dutilleul, "An implementation of the "algorithm a trous" to compute the wavelet transform," in *Wavelets: Time-Frequency Methods and Phase-Space*, New York: Springer, 1989.
- [47] M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, and P. Tchamitchian, "A real-time algorithm for signal analysis with the help of the wavelet transform," in *Wavelets: Time-Frequency Methods and Phase-Space*, New York: Springer-Verlag, pp. 286–297, 1989.
- [48] J.-L. Starck, M. Elad, and D. L. Donoho, "Redundant multiscale transforms and their application for morphological component analysis," *Adv. Imag. Electron Phys.*, vol. 132, 2004.
- [49] J.-L. Starck, J. Fadili, and F. Murtagh, "The undecimated wavelet decomposition and

- its reconstruction,” *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 16, pp. 297–309, Feb. 2007.
- [50] I. W. Selesnick, “The double density DWT,” *From Theory to Practice, Boston, MA: Kluwer*, 2001.
- [51] I. W. Selesnick, “Smooth wavelet tight frames with zero moments,” *Appl. and Comput. Harmon. Anal.*, vol. 10, pp. 163–181, Mar. 2001.
- [52] F. C. A. Fernandes, R. L. C. van Spaendonck, and C. S. Burrus, “A new framework for complex wavelet transforms,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 83, pp. 1689–1706, July 2003.
- [53] F. C. A. Fernandes, I. W. Selesnick, R. L. C. van Spaendonck, and C. S. Burrus, “Complex wavelet transforms with allpass filters,” *Signal Process.*, vol. 83, no. 8, pp. 1689–1706, 2003.
- [54] F. C. A. Fernandes, R. L. C. van Spaendonck, and C. S. Burrus, “Multidimensional, mapping-based complex wavelet transforms,” *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 14, pp. 110–124, Jan. 2005.
- [55] Z. Zhong, H. Fujiwara, H. Toda, and H. Kawabata, “A new complex wavelet transform by using RI-spline wavelet,” in *Acoustics, Speech, and Signal Process.*, 2004.
- [56] C. Chaux, L. Duval, and J.-C. Pesquet, “Image analysis using a dual-tree  $M$ -band wavelet transform,” *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 15, pp. 2397–2412, Aug. 2006.
- [57] C. Chaux, L. Duval, and J.-C. Pesquet, “Hilbert pairs of  $M$ -band orthonormal wavelet bases,” in *Proc. Eur. Signal Image Process. Conf.*, pp. 1187–1190, 2004.
- [58] C. Chaux, J.-C. Pesquet, and L. Duval, “2d dual-tree complex biorthogonal  $M$ -bandwavelet transform,” in *Proc. IEEE Int Conf. Acoustics, Speech and Signal Process.*, 2007.
- [59] R. A. Gonipath, “The phaselet transform—an integral redundancy nearly shift-invariant wavelet transform,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 51, pp. 1792–1805, July 2003.
- [60] R. A. Gonipath, “Phaselets of framelets,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, pp. 1794–1806, May 2005.
- [61] M. Miller and N. Kingsbury, “Image denoising using derotated complex wavelet coefficients,” *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 17, pp. 1500–1511, Sept. 2008.
- [62] M. A. Miller and N. G. Kingsbury, “Image modeling using interscale phase properties of complex wavelet coefficients,” *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 17, pp. 1491–1499, Sept. 2008.
- [63] N. G. Kingsbury, “Image processing with complex wavelets,” *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, vol. 357, pp. 2543–2560, Sept. 1999.
- [64] J. Yang, Y. Wang, W. Xu, and Q. Dai, “Image coding using dual-tree discrete wavelet transform,” *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 17, pp. 1555–1569, Sept. 2008.
- [65] J. Magarey and N. Kingsbury, “Motion estimation using a complex-valued wavelet transform,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 46, p. 1069, Apr. 1998.
- [66] C.-C. Liu and D.-Q. Dai, “Face recognition using dual-tree complex wavelet features,” *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 18, pp. 2593–2599, Nov. 2009.

- [67] G. Karlsson and M. Vetterli, "Theory of two-dimensional multirate filter banks," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 38, pp. 925–937, June 1990.
- [68] T. Chen and P. P. Vaidyanathan, "Multidimensional multirate filters and filter banks derived from one dimensional filters," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, May 1993.
- [69] T. Chen and P. P. Vaidyanathan, "The role of integer matrices in multidimensional multirate systems," *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. SP-41, Mar. 1993.
- [70] M. Z. Mulk, K. Obata, and K. Hirano, "Design of digital fan filters," *IEEE Trans. Acoust. Speech, and Signal Process.*, vol. ASSP-31, pp. 1427–1434, Dec. 1983.
- [71] S. Muramatsu, A. Yamada, and H. Kiya, "A design method of multidimensional linear-phase paraunitary filter banks with a lattice structure," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 47, pp. 690–700, Mar. 1999.
- [72] M. N. Do and M. Vetterli, "The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 14, pp. 2091–2106, Dec. 2005.
- [73] R. Eslami and H. Radha, "Translation-invariant contourlet transform and its application to image denoising," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 15, pp. 3362–3374, Nov. 2006.
- [74] K.-O. Cheng, N.-F. Law, and W.-C. Siu, "A novel fast and reduced redundancy structure for multiscale directional filter banks," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 16, pp. 2058–2068, Aug. 2007.
- [75] P. J. Burt and E. H. Adelson, "The laplacian pyramid as a compact image code," *IEEE Trans. Commu.*, vol. Com-31, pp. 532–540, Apr. 1993.
- [76] Y. Lu and M. N. Do, "CRISP-contourlets: a critically sampled directional multiresolution image representation," in *Proc. of SPIE Conference on Wavelet Applications in Signal and Image Processing*, Aug. 2003.
- [77] S. Durand, "Orthonormal bases of non-separable wavelets with sharp directions," in *IEEE Int. Conf. Image Process.*, vol. 1, pp. 449–452, Sept. 2005.
- [78] T. T. Nguyen and S. Oraintara, "Multiresolution direction filterbanks: theory, design, and applications," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, pp. 3895–3905, Oct. 2005.
- [79] T. T. Nguyen and S. Oraintara, "A class of multiresolution directional filter banks," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 55, pp. 949–961, Mar. 2007.
- [80] R. Eslami and H. Radha, "A new family of nonredundant transform using hybrid wavelets and directional filter banks," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 16, pp. 1152–1167, Apr. 2007.
- [81] I. W. Selesnick, "Hilbert transform pairs of wavelet bases," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 8, pp. 170–173, June 2001.
- [82] D. B. H. Tay, "Hilbert pair of orthogonal wavelet bases: Revisiting the condition," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, pp. 1716–1721, Apr. 2008.
- [83] H. Ozkaramanli and R. Yu, "On the phase condition and its solution for hilbert transform pairs of wavelet bases," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 51, pp. 3293–3294, Dec. 2003.
- [84] R. Yu and H. Ozkaramanli, "Hilbert transform pairs of orthogonal wavelet bases: Nec-

- essary and sufficient conditions,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, pp. 4723–4725, Dec. 2005.
- [85] D. B. H. Tay, N. G. Kingsbury, and M. Palaniswami, “Orthonormal Hilbert-pair of wavelets with (almost) maximum vanishing moments,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 13, pp. 533–536, Sept. 2006.
- [86] N. G. Kingsbury, “The dual-tree complex wavelet transform: A new technique for shift invariance and directional filters,” in *Proc. 8th IEEE DSP Workshop*, no. 86, Aug. 1998.
- [87] N. G. Kingsbury, “A dual-tree complex wavelet transform with improved orthogonality and symmetry properties,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing*, vol. 2, pp. 375–378, Sept. 2000.
- [88] I. W. Selesnick, “The design of approximate Hilbert transform pairs of wavelet bases,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 8, pp. 170–173, Jun. 2001.
- [89] J. Wang and J. Q. Zhang, “A globally optimal bilinear programming approach to the design of approximate hilbert pairs of orthonormal wavelet bases,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, pp. 233–241, Jan. 2010.
- [90] K. N. Chaudhury and M. Unser, “Construction of Hilbert transform pairs of wavelet bases and gabor-like transform,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, pp. 3411–3425, Sept. 2009.
- [91] K. Kawada, X. Zhang, T. Yoshikawa, Y. Takei, and Y. Sugita, “Design of hilbert transform pairs of wavelet bases using iir filters,” in *Proc. IEICE technical report Nonlinear problems*, vol. 105, pp. 61–66, Sept. 2005.
- [92] I. Bayram and I. W. Selesnick, “On the dual-tree complex wavelet packet and  $M$ -band transform,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, pp. 2298–2310, Jun. 2008.
- [93] I. Bayram and I. W. Selesnick, “A simple construction for the  $M$ -band dual-tree complex wavelet transform,” in *Proc. 12th IEEE DSP Workshop*, pp. 596–601, 2006.
- [94] T. Weickert, C. Benjaminsen, and U. Kiencke, “Analytic wavelet packets-combining the dual-tree approach with wavelet packets for signal analysis and filtering,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, pp. 493–502, Feb. 2009.
- [95] R. D. Koipillai and P. P. Vaidyanathan, “Cosine-modulated fir filter banks satisfying perfect reconstruction,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 40, pp. 770–783, Apr. 1992.
- [96] T. Q. Nguyen and R. D. Koipillai, “The theory and design of arbitrary length cosine-modulated filter banks and wavelets, satisfying perfect reconstruction,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 44, pp. 473–483, Mar. 1996.
- [97] Y.-P. Lin and P. P. Vaidyanathan, “Linear phase cosine modulated maximally decimated filter banks with perfect reconstruction,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, pp. 2525–2539, Nov. 1995.
- [98] H. Bölcskei and F. Hlawatsch, “Oversampled cosine modulated filter banks with perfect reconstruction,” *IEEE Trans. Circuits and Syst. II*, vol. 45, pp. 1057–1071, Aug. 1998.
- [99] A. L. da Cunha, J. Zhou, and M. N. Do, “The nonsubsampling contourlet transform: Theory, design, and applications,” *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 15, pp. 3089–3101,



Oct. 2006.

- [100] W. T. Freeman and E. H. Adelson, "The design and use of steerable filters," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 13, pp. 891–906, Sept. 1991.
- [101] T. Nagai, C. W. Kok, M. Ikehara, and T. Q. Nguyen, "Design and lattice structure of fir paraunitary filter banks with linear phase," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E30-A, pp. 712–721, Apr. 1997.
- [102] M. Ikehara, T. Nagai, and T. Q. Nguyen, "Time-domain design and lattice structure of fir paraunitary filter banks with linear phase," *Elsevier Signal Process.*, vol. 80, pp. 333–342, Feb. 2000.
- [103] R. A. Gonipath and C. S. Burrus, "On cosine-modulated wavelet orthonormal bases," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 4, pp. 162–176, Feb. 1995.
- [104] S. C. Chan, Y. Luo, and K. L. Ho, " $M$ -channel compactly supported biorthogonal cosine-modulated wavelet bases," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 46, pp. 1142–1151, Apr. 1998.
- [105] X.-Q. Gao, Z.-Y. He, and X.-G. Xia, "The theory and implementation of arbitrary-length linear-phase cosine-modulated filter bank," *Signal Process.*, vol. 80, pp. 889–896, 2000.
- [106] K. M. A. Hameed and E. Elias, " $M$ -channel cosine modulated filter banks with linear phase analysis and synthesis filters," *Signal Process.*, vol. 86, pp. 3842–3848, 2006.
- [107] B. Yang and Z. Jing, "A simple method to build oversampled filter banks and tight frames," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 16, pp. 2682–2687, Nov. 2007.
- [108] N. G. Kingsbury, "Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals," *Appl. and Comput. Harmon. Anal.*, vol. 10, pp. 234–253, May 2001.
- [109] R. Ansari, C. Guillemot, and J. F. Kaiser, "Wavelet construction using lagrange halfband filters," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 38, pp. 1116–1118, Sept. 1991.

## 謝辞

本論文は、著者が慶應義塾大学大学院理工学研究科博士課程在学中に、同大学理工学部 池原 雅章 教授の指導の下に行ったものである。この間、委細に亘り御指導、御助言賜りました 池原 雅章 教授に謹んで感謝の意を表します。また、同大学理工学部 浜田 望 教授、岡田 英史 教授、田中 敏幸 教授には、本論文を審査していただくと共に、多くの貴重なご指摘、ご意見を賜りました。深く御礼申し上げます。また、本研究を進める上で多くの有益な御助言を下さいました、宇都宮大学 工学部情報工学科 田中 雄一 助教、信州大学 工学部情報工学科 白井 啓一郎 助教に御礼申し上げます。そして公私にわたる様々なご指導をいただきました池原研究室の諸氏に深く感謝申し上げます。

また本研究は、グローバル COE プログラム “アクセス空間支援基盤技術の高度国際連携” のプロジェクト下で行われたものである。拠点リーダーの 大西 公平 教授、グループリーダーの 斎藤 英雄 教授を初めとする事業推進担当者の皆様、本プログラム リサーチ・アシスタントの皆様に、心より御礼申し上げます。