

主 論 文 要 旨

報告番号	㊦ 乙 第	号	氏 名	三宅 健
主 論 文 題 目： On Extreme Points of the Tracial State Space of Noncommutative Spaces (非可換空間のトレース状態空間の端点について)				
(内容の要旨) 本学位論文は θ 変形と呼ばれる座標環(多項式関数代数)の変形手法によって得られる幾つかの非可換空間(非可換代数)のトレース状態空間の端点の研究成果についてまとめたものである。状態、及び、状態空間の研究は量子力学にその起源を持ち、以後、関数解析学、特に作用素環論における重要な研究分野の一つとして現在に至っている。状態は代数的な見地からはある単位元を有する $*$ -代数 A 上の正規化された正值線形汎関数 φ として定義される。この際、 $*$ -代数 A は確率論における確率変数の為す代数に対応し、組 (A, φ) は代数的確率空間と呼ばれる。状態の中で $\varphi(ab) = \varphi(ba), \forall a, b \in A$ なる性質を満たすものをトレース状態という。この時、 $*$ -代数 A 上のトレース状態全体は凸集合を為すことが知られている。このことはトレース状態空間の凸集合としての端点が特定されることによってトレース状態空間の構造が決定されることを意味する。通常、この種の研究は C^* 代数やフォン・ノイマン代数を用いた作用素環論の見地から行われる。本論文ではその観点は採らず、純代数的に幾つかの非可換空間のトレース状態空間の端点を取り扱う。非可換空間のトレース状態空間の端点を調べるこの研究上の動機は、可換代数のトレース状態空間と複素パラメーターによって変形された非可換代数のトレース状態空間を比較照合することによって非可換代数の特質を調べることである。以下、各章の概略を述べていく。 本論文の第1章では、これらの研究成果を叙述するうえで必要になる基本概念について述べる。まず $*$ -代数とその上で定義される状態の定義を与え、それらの基本的な性質について述べる。更にトレース状態とその集合のなすトレース状態空間とその端点を定義する。また $*$ -代数とその上の状態について成り立つ Jensen 型の不等式について述べる。 本論文の第2章では、偶数次元非可換平面の非自明なトレース状態の構成について述べる。まず θ 変形の基本的な例である偶数次元非可換平面を紹介する。 θ 変形とは量子群や量子包絡代数に用いられる代数の変形パラメーターが通常 $q \in \mathbb{C} - \{0\}$ で与えられるのに対し、 θ 変形はその変形パラメーターとして歪対称行列の要素が用いられる変形手法である。次に $*$ -代数の単項式に正則(regular)という概念を導入したうえで、非可換平面上の自明に与えられるトレース状態空間の端点を紹介し、この定義の一般化として非自明なトレース状態を構成する。更にこれらのトレース状態が、変形パラメーターがある条件を満たす場合にトレース状態空間の端点になることを示す。 本論文の第3章では、偶数次元非可換平面におけるトレース状態の構成法を3次元非可換球面の場合に応用しトレース状態空間の端点の決定について述べる。具体的には3次元非可換球面上のトレース状態を詳しく精査し、最終的に3次元非可換球面のトレース状態空間の端点が区間(0,1)と2組の円周によってパラメーター付けされることを示す。				

SUMMARY OF Ph.D. DISSERTATION

School Science and Technology	Student Identification Number	SURNAME, First name MIYAKE, Ken
Title On Extreme Points of the Tracial State Space of Noncommutative Spaces		
Abstract <p> This thesis compiles research results on extreme points of the tracial state space of several noncommutative spaces (noncommutative algebras) obtained by using θ-deformations for coordinate algebras (polynomial function algebras). Research of states and state spaces have an origin in quantum mechanics, and afterward have continued up to now as one of important research areas in functional analysis, particularly theory of operator algebras. A state is defined as a normalized positive linear functional φ on a unital $*$-algebra A from an algebraic viewpoint. In this case, a $*$-algebra A corresponds to an algebra of random variables in probability theory, and a pair (A, φ) is called an algebraic probability space. A state is called a tracial state if φ satisfies a property that $\varphi(ab) = \varphi(ba), \forall a, b \in A$. At this time, It is known that the set of tracial states on a $*$-algebra A forms a convex set. This means that the structure of the tracial state space is determined by the specification of the extreme points of the tracial state space as a convex set. Ordinarily, this kind of research uses techniques from operator algebra theory as in used by C^*-algebra or Von Neumann algebra theory. We avoid this approach in this thesis, and we take up extreme points of the tracial state space of several noncommutative spaces purely algebraically. The motivation for studying extreme points of the tracial state space of noncommutative algebras is to study characteristics of noncommutative algebras by comparing the tracial state space of commutative algebras to the tracial state space of noncommutative algebras deformed by complex parameters. Hereinafter, we describe the outline of each chapter. </p> <p> In chapter 1 of the thesis, we describe fundamental notions which are needed for describing research results. First, we define a $*$-algebra and a state on it and describe its fundamental properties. In addition, we define a tracial state and extreme points of the tracial state space formed by the set of tracial states. And we describe a Jensen-type inequality for states on $*$-algebras. </p> <p> In chapter 2 of the thesis, we describe a construction of nontrivial tracial states of even-dimensional noncommutative planes. First, we introduce even-dimensional noncommutative planes as examples of θ-deformations. θ-deformation is a deformation method which uses elements of a skew symmetric matrix as deformation parameters, in contrast to the deformation parameter $q \in C - \{0\}$ ordinarily used for quantum groups or quantum enveloping algebras. Next, we introduce a trivial extreme point of the tracial state space of the noncommutative plane after defining the notion of regular monomials of $*$-algebras, and we construct nontrivial tracial states for this generalized definition. Moreover, we prove that these tracial states are extreme points of the tracial state space under the condition that the deformation parameters are irrational numbers which satisfy a certain condition. </p> <p> In chapter 3 of the thesis, we apply the construction method of tracial states of even-dimensional noncommutative planes to noncommutative 3-spheres and describe the determination of the extreme points of the tracial state space of noncommutative 3-spheres. To be more precise, we carefully analyze tracial states of noncommutative 3-spheres, and we find that the extreme points of the tracial state space of the noncommutative 3-sphere are given by three families of states, one parameterized by the interval (0,1), and the other two by the circle. </p>		