A Thesis for the Degree of Ph.D. in Science

Stochastic Integral Characterizations of Some Multivariate Infinitely Divisible Distributions and Related Stochastic Processes

August 2011

Graduate School of Science and Technology
Keio University

Yohei Ueda

主　論　文　要　旨

報告番号	㊙甲　乙　第　　　　号	氏　名	上田　陽平

主 論 文 題 目 ：

Stochastic Integral Characterizations of Some Multivariate Infinitely Divisible Distributions and Related Stochastic Processes
（多次元無限分解可能分布の確率積分による特徴付けとそれに関連する確率過程）

（内容の要旨）

無限分解可能分布は、無限小条件を満たす二重確率変数列の部分和の極限分布や、加法過程の周辺分布として知られている。このため、$\mathbb{R}^d$上の無限分解可能分布のクラス$I(\mathbb{R}^d)$は、確率分布のクラスのうちで最も重要なものの一つである。近年、$I(\mathbb{R}^d)$のサブクラスの分類が発展してきた。その中でも、自己分解可能分布のクラス$L(\mathbb{R}^d)$は特に重要であり、様々な特徴付けを持っている。例えば、$L(\mathbb{R}^d)$は確率積分によって特徴付けられる。すなわち、ある確率積分写像の値域として表される。ここで、確率積分写像とは、ある無限分解可能分布に、それを分布として持つレヴィ過程による確率積分の分布を対応させる写像である。また、自己分解可能分布は、レヴィ過程によってドライブされるランジュバン方程式の解であるオルンシュタイン・ウーレンベック型過程の極限分布でもある。

本論文では、次の三つの問題を扱う。一つ目の問題は、$L(\mathbb{R}^d)$を一般化したクラスを、$L(\mathbb{R}^d)$の場合と類似の方法で特徴付けることである。ここで、$L(\mathbb{R}^d)$を一般化したクラスとは、スパン$b > 1$を持つ半自己分解可能分布のクラス$L(b, \mathbb{R}^d)$と、$\alpha(\in \mathbb{R})$-自己分解可能分布のクラス$L^{\langle\alpha\rangle}(\mathbb{R}^d)$であり、これらの確率積分表現や、これらに関連するオルンシュタイン・ウーレンベック型過程を調べる。また、α-自己分解可能分布については、$\alpha \leq -2$に対して2次元の場合の具体例も与えた。それは、2次元ガンマ分布である。

二つ目の問題は、$L^{\langle\alpha\rangle}(\mathbb{R}^d)$の入れ子のサブクラス列に関することである。このサブクラス列は、極限定理および確率積分写像によって定義され、その極限は、安定分布のクラスの畳み込みと弱収束に関する閉包のサブクラスになることが示される。また、応用として、確率積分写像の合成を利用して、別の入れ子のクラス列の極限も求めた。

三つ目の問題は、ガンマ分布を幾つかの形の確率積分の分布として表すことである。そのために、ウプシロン変換と呼ばれるレヴィ測度の変換を用いる。さらに、この変換の概念を用いることにより、$I(\mathbb{R})$のサブクラスの確率積分による特徴付けに関して、新しい方法を発見した。確率積分写像による従来の方法が、被積分関数を固定して、ドライブするレヴィ過程を動かすものであったのに対し、この新しい方法は、ドライブするレヴィ過程を固定して、被積分関数を動かすものである。

-

SUMMARY OF Ph.D. DISSERTATION

School Fundamental Science and Technology	Student Identification Number	SURNAME, First name UEDA, Yohei

Title

Stochastic Integral Characterizations of Some Multivariate Infinitely Divisible Distributions and Related Stochastic Processes

Abstract

Infinitely divisible distributions are known as the limiting distributions of partial sums of some infinitesimal double sequences of random variables or as the marginal laws of additive processes. Therefore the class of those distributions on $\mathbb{R}^d$, denoted by $I(\mathbb{R}^d)$, is one of the most important classes of probability distributions. Recently, the classification of its subclasses has been developed. Among these, the class $L(\mathbb{R}^d)$ of selfdecomposable distributions is especially important and has many characterizations. For example, it has a stochastic integral characterization, namely, it is expressible as the range of some stochastic integral mapping of infinitely divisible distributions. Also, selfdecomposable distributions are the limiting distributions of Ornstein-Uhlenbeck type processes which are solutions of Langevin equations driven by Lévy processes.

In this thesis, the following three topics are studied. The first topic is to characterize generalizations of the class $L(\mathbb{R}^d)$ in similar ways to those which characterize $L(\mathbb{R}^d)$. The generalizations are the class $L(b, \mathbb{R}^d)$ of semi-selfdecomposable distributions with span $b > 1$ and the class $L^{\langle\alpha\rangle}(\mathbb{R}^d)$ of α-selfdecomposable distributions with $\alpha \in \mathbb{R}$. About the latter distributions, we also give a concrete example on $\mathbb{R}^2$, which is a bivariate gamma distribution.

The second topic is to study the nested subclasses of $L^{\langle\alpha\rangle}(\mathbb{R}^d)$. They are defined by limit theorems and by stochastic integral mappings. The limits of these nested classes are shown to be subclasses of the closure of the class of stable distributions under convolution and weak convergence. As an application, we find the limits of other nested classes using the compositions of stochastic integral mappings.

The third topic is to give several forms of stochastic integral representations of gamma random variables. We also find a new way of stochastic integral characterizations of subclasses of $I(\mathbb{R})$, which is by fixing a driving Lévy process and by taking some possible integrands, while the well-known way of stochastic integral characterizations by stochastic integral mappings is by fixing an integrand and by taking some possible driving Lévy processes.