

A Thesis for the Degree of Ph.D. in Science

**On the Fitting ideals of the ideal  
class groups of CM-fields**

November 2011

Graduate School of Science and Technology  
Keio University

Takashi Miura

# 主 論 文 要 旨

報告番号	㊦ 乙 第	号	氏 名	三浦 崇
主 論 文 題 目： On the Fitting ideals of the ideal class groups of CM-fields (CM 体のイデアル類群の Fitting イデアルについて)				
<p>(内容の要旨)</p> <p>イデアル類群は整数論の様々な問題に関係する重要な研究対象である。本研究ではガロア群の作用も込めた CM 体のイデアル類群の様子について研究した。古典的結果としては、部分ゼータ関数の特殊値から定義される Stickelberger 元がイデアル類群を消すという Stickelberger の定理(1890)が有名である。岩澤主予想は円分 <math>Z_p</math>-拡大のイデアル類群の特性多項式と Stickelberger 元の逆極限によって構成される <math>p</math>-進 <math>L</math> 関数が等しいことを主張する深い定理であり、最終的に Mazur と Wiles によって解決された(1984)。Mazur と Wiles は岩澤主予想を解決した論文において岩澤主予想より強い主張として、アーベル体のイデアル類群の Fitting イデアルは何であるか、という問題を提起している。</p> <p>栗原氏はこの問題に対し新しい型の Stickelberger イデアルを定義し、それがイデアル類群の Fitting イデアルに等しいと予想した(2003)。この博士論文ではこの予想を完全に証明した。この結果は、Mazur と Wiles の問題に解答を与えると同時に、Stickelberger の定理や岩澤主予想を含み、さらにそれらの精密化を与えるものである。本研究ではさらに、一般の総実代数体上のアーベル拡大 <math>L/k</math> についても研究を行い、特別な条件のもとで栗原氏の予想を拡張した。すなわち、ガロア群の <math>p</math>-Sylow 部分群が円分体のガロア群の構造に近いという条件と、1 の <math>p</math> 乗根が <math>L</math> に属さないという条件のもとイデアル類群の Fitting イデアルを決定した。また、これら二つの条件を外す研究も行った。そこでは、ガロア群が <math>p</math> 次巡回拡大の場合や、基礎体 <math>k</math> の類数と単数基準に関するある仮定のもとで、上で述べた条件を取り除くことができた。これらの結果から特別な条件のもとでは Stickelberger 元はイデアル類群の Fitting イデアルに属する(この性質を(SB)とよぶ)ということが分かる。</p> <p>しかしながら、Greither と栗原氏は、一般の総実代数体上のアーベル拡大 <math>L/k</math> においては(SB)が破綻しうることを証明し、その明示的十分条件及び具体的計算例を与えている。一方で Greither は、同変玉河数予想と <math>L</math> に 1 の <math>p</math> 乗根が属さないという仮定のもと、イデアル類群の Pontrjagin 双対の Fitting イデアルに Stickelberger 元が属する(この性質を(DSB)とよぶ)という結果を得ている。このことから(DSB)の方が(SB)より成立しやすい性質であると思われていた。そこで、実際に(DSB)は一般に成立するであろうかという問題に人々の関心が集まっていた。</p> <p>本論文では、このような背景を踏まえ、一般に(DSB)が成り立つかどうかという問題についても研究を行った。そして(DSB)が破綻するような明示的十分条件を与え、また具体的計算例も与えた。この具体的計算例ではガロア作用を明示的に書き下すことで、直接の計算からも(DSB)が不成立であることを確かめた。さらに(SB)と(DSB)が同時に破綻するような明示的十分条件及び具体的計算例も与えた。</p>				

## SUMMARY OF Ph.D. DISSERTATION

School Fundamental Science and Technology	Student Identification Number 80945246	SURNAME, First name MIURA, Takashi
<p>Title</p> <p>On the Fitting ideals of the ideal class groups of CM-fields</p>		
<p>Abstract</p> <p>In number theory, it is important to study ideal class groups. In this thesis, we study the Galois action on the class groups of CM-fields. Stickelberger's theorem (1890) is an important classical result about the Galois action on the class groups of abelian number fields. This theorem states that the Stickelberger element, which is defined by the special values of partial zeta functions, annihilates the class group of an abelian number field. The Iwasawa main conjecture states that the characteristic polynomial of the Iwasawa module of the cyclotomic <math>Z_p</math>-extension of an abelian number field coincides with the <math>p</math>-adic <math>L</math> function, which is constructed from the inverse limit of the Stickelberger elements. This conjecture was proved by Mazur and Wiles (1984), and in their paper they asked as an open question what the Fitting ideal of the class group of an abelian number field is.</p> <p>Concerning this problem, Kurihara defined a new Stickelberger ideal and conjectured that this new Stickelberger ideal equals to the Fitting ideal of the class group (2003). In this thesis, we prove this conjecture completely. This result answers the question of Mazur and Wiles, and gives a refinement of Stickelberger's theorem and of the Iwasawa main conjecture. Moreover, we study abelian CM-extensions over a general totally real number field and determine the Fitting ideal of the class group of the CM-field under certain conditions. More precisely, our assumption is that the structure of the Galois group of the CM-extension is similar to that of a cyclotomic field, and that the CM-field does not contain a primitive <math>p</math>-th root of unity. We also study the case the Galois group is cyclic of order <math>p</math>, and the case the CM-field contains a primitive <math>p</math>-th root of unity under certain conditions on the class number and the regulator of the base field. For each of these cases, we determine the Fitting ideal of the class group of the CM-field. In these cases, the Stickelberger element is contained in the Fitting ideal of the class group (we call this property (SB)).</p> <p>Greither and Kurihara proved that (SB) does not hold in general and gave explicit conditions and numerical examples for which (SB) does not hold. Greither proved that if the Equivariant Tamagawa Number Conjecture holds true and the CM-field does not contain a primitive <math>p</math>-th root of unity, then the Fitting ideal of the Pontrjagin dual of the class group contains the Stickelberger element (we call this property (DSB)). Then it has been a problem whether (DSB) holds true in general.</p> <p>In this thesis, we give explicit conditions for which (DSB) does not hold. We also give a numerical example for which we verify by direct computation that (DSB) does not hold. We also give explicit conditions and numerical examples for which neither (SB) nor (DSB) holds.</p>		