A Thesis for the Degree of Ph.D. in Science

Trees and Factors with Bounded Total Excess

February 2012

Graduate School of Science and Technology
Keio University

Yukichika Ohnishi

主　論　文　要　旨

報告番号	甲　乙　第　　　　　号	氏　名	大西 幸周

主 論 文 題 目：

Trees and Factors with Bounded Total Excess

（超過数を制限した木および因子）

（内容の要旨）

グラフ理論において，ハミルトン閉路は最もよく研究されてきた対象のひとつである．グラフがハミルトン閉路を含むための十分条件は数多く知られているが，その中に Chvátal(1973) が提唱したタフネスという概念に関するものがある．グラフ $G-S$ の連結成分数を $\omega(G-S)$ で表すとき，$\omega(G-S) \geq 2$ を満たす任意の集合 $S \subset V(G)$ について，$t \cdot \omega(G-S) \leq |S|$ が成り立つならば，G は t-tough であると定義する．ハミルトン閉路を含むグラフが 1-tough であることは簡単に示せるが，Chvátal は逆に，任意の t_0-tough グラフがハミルトン閉路を持つといえるある定数 t_0 が存在すると予想した．この予想の真偽は未だ示されていない．

$k \geq 3$ のとき，グラフが k-tree を含むためのタフネスに関する十分条件は知られている．ここで云う k-tree とは，最大次数が高々k の全域木のことである．グラフが k-tree を含むことは，ハミルトン性のある意味での緩和である．Win は 1989 年に，$V(G)$ の任意の部分集合 S について $\omega(G-S) \leq (k-2)|S|+2$ を満たす連結グラフ G が k-tree を含むことを示した．

本論文では，グラフが種々の全域連結部分グラフを含むためのタフネスに基づいた条件について考え，より詳細な構造に関する研究を行う．このために，超過数という概念を導入する．

第 2 章では，全域木の超過数について議論する．連結グラフの全域木 T において，頂点 v の k-超過を $\max\{0, \deg_T(v)-k\}$ と定義する．総 k-超過 は全頂点における k-超過の総和である．この章では，先に述べた Win の定理の一般化として，総 k-超過を制限した全域木がグラフに含まれるための十分条件を与える．

第 3 章では，再び全域木の超過数について議論する．ここでは特に，t を固定し t-tough グラフを考える．第 2 章の結果を用いると，任意の整数 $k \geq 3$ について，k, t 及び $|V(G)|$ に依存した上界で総 k-超過を制限した全域木を得ることができる．本章ではそれら複数の全域木の関係について議論し，その結果として，すべての k の値に対して総 k-超過 を抑えたある全域木の存在を示す．

第 4 章では，全域連結部分グラフを得るためのさらに一般的な問題について議論する．最初に G の全域非連結部分グラフ F と，どの $v \in V(G)$ についても $\varphi(v) \geq \deg_F(v)$ であるような整数値関数 φ が与えられているとする．この章では，F に辺を加えて作る，総 'φ-超過' を定数で抑えた全域連結部分グラフが存在するための十分条件を与える．

第 5 章では，全域閉歩道の議論を行う．k-walk とは全ての頂点を高々k 回訪れる全域閉歩道である．全域閉歩道の総 k-超過も全域木のそれと同じように定義できる．第 2 章で得られた結果を用いると，$k \geq 3$ のとき，グラフが総 k-超過を制限した全域閉歩道を含むためのタフネス的条件が直ちに得られる．この章では総 2-超過を制限した全域閉歩道についても結果を与える．

SUMMARY OF Ph.D. DISSERTATION

School	Student Identification Number	SURNAME, First name
Fundamental Science and Technology	80545043	OHNISHI, Yukichika

Title

Trees and Factors with Bounded Total Excess

Abstract

A hamiltonian cycle is one of the most well-studied subjects in graph theory. A lot of sufficient conditions have been considered for a graph to contain a hamiltonian cycle. Among them, Chvátal(1973) introduced the notion of toughness. A graph G is said to be t-tough, if $t \cdot \omega(G-S) \leq |S|$ for every subset $S \subset V(G)$ with $\omega(G-S) \geq 2$, where $\omega(G-S)$ denotes the number of components in the graph $G-S$. It is an easy observation that every graph containing a hamiltonian cycle is 1-tough. Chvátal conjectured that there exists a constant t_0 such that every t_0-tough graph contains a hamiltonian cycle. This conjecture is still open.

For $k \geq 3$, there is a sufficient condition concerning the toughness for a graph to have a k-tree. A k-tree in a graph is a spanning tree with maximum degree at most k. The property of containing a k-tree is a relaxation of the hamiltonian property. Win proved in 1989 that if a connected graph G satisfies $\omega(G-S) \leq (k-2)|S|+2$, for every subset S of $V(G)$, then G contains a k-tree.

In this thesis, we obtain more sophisticated results on spanning connected subgraphs in terms of toughness-like conditions. For this purpose, we introduce the notion of total excess.

In Chapter 2, we consider the total excess of spanning trees. For a spanning tree T of a connected graph, the k-excess of a vertex v is defined to be $\max\{0, \deg_T(v) - k\}$. The total k-excess is the amount of the k-excesses of all vertices. This chapter gives a sufficient condition for a graph to have a spanning tree with bounded total k-excess, which is a generalization of Win's theorem.

In Chapter 3, we discuss total excess of spanning trees again. Especially, we consider a t-tough graph for a fixed t. By using the result in Chapter 2, for each integer $k \geq 3$, we obtain a spanning tree with certain total k-excess upper bound depending on k, t and $|V(G)|$. We discuss the relation between these spanning trees. As a consequence, we prove the existence of 'a universal tree' in a sense.

In Chapter 4, we discuss a more general problem obtaining a spanning connected subgraph. Suppose that we are given a spanning disconnected subgraph F of G, and an integer-valued function φ with $\varphi(v) \geq \deg_F(v)$ for each $v \in V(G)$. We give a sufficient condition to be able to obtain a spanning connected subgraph by adding edges to F such that the total 'φ-excess' is bounded by a prescribed constant.

In Chapter 5, we deal with spanning walks. A k-walk in a graph is a spanning closed walk visiting each vertex at most k times. We can define the total k-excess of a spanning walk similarly. By using the result in Chapter 2, for $k \geq 3$, we immediately obtain a toughness condition for a graph to contain a spanning walk with bounded total k-excess. In this chapter, we also discuss on a spanning walk with bounded total 2-excess.