学位論文　博士(理学)

流体力学における変分原理の改良

2012年度

慶應義塾大学大学院理工学研究科

深川　宏樹

主　論　文　要　旨

報告番号	甲　乙　第　　　　　号	氏　名	深川　宏樹

主 論 文 題 目：

流体力学における変分原理の改良

実現される運動は作用積分を最小にする．これは変分原理と呼ばれ，物理学全般における指導原理の一つとして考えられている．この原理を用いれば，複雑な拘束条件があっても系の動力学の定式化を行うことができる．様々な完全流体の変分原理が古くから提案されている．また，オンサーガーの変分原理が散逸系であるソフトマターの動力学の定式化に便利であることが知られている．しかしながら，これらの変分原理はいくつかの未解決問題がある．本論文では，これらの問題を解決する普遍的枠組みを与え，付随するハミルトン形式を整備する．本論文の主要な結果は以下の３つである．

１．完全流体の変分原理

流体の速度場を記述する方法にはラグランジュ描像とオイラー描像の２つがある．ラグランジュ描像では，流体粒子ごとの物理量の時間発展を見る．一方，オイラー描像では，空間に固定された点での物理量の変化を見る．完全流体の運動方程式は，質点の運動と同様にしてラグランジュ描像の変分原理から導くことができることが知られている．一方，オイラー描像の変分原理では，一様エントロピー下で渦度のある速度場を導くためにはクレプシュポテンシャルと呼ばれる補助場が必要である．しかしながら，その物理的な意味は不明瞭であった．第３章では，クレプシュポテンシャルが流跡線の初期位置と終端位置を固定するために必要であることを示す．なお，質量保存則と断熱条件はホロノミックな拘束条件である．したがって，未定乗数法で用いて，作用積分の中に組み込むことができる．

２．散逸系の変分原理

散逸系では，エントロピーは流跡線に沿って生成される．これはエントロピーに関して非ホロノミックな拘束条件を与え，上で用いた方法が使えない．しかしながら，この非ホロノミックな拘束条件の下で作用積分を最小にすることは，これが微分形式で書けることから可能である．我々の定式化は運動量のつりあいの式全体を導くことができる．一方，オンサーガーの変分原理で導出できるのはそのうちの線形項だけである．第４章で，この定式化を粘性流体，粘弾性流体および高分子溶液に適用する．付録 C では，拡散による散逸がある二成分流体の変分原理について議論する．

３．ハミルトン形式

制御理論では，最適化された入力はコスト汎関数を最小にし，共役な関数の組としてハミルトン方程式を導く．第５章で，これを流体に適用する．速度場は入力とみなせ，状態変数はラグランジュ描像であれば流体粒子の位置となり，オイラー描像であればクレプシュポテンシャルになる．完全流体に対しては，これは正準なハミルトン形式になり，散逸系においては，これに散逸力が加わったものになる．また，付随する対称性と保存則についても議論する．

第１章では，研究背景，研究目的および本論文の構成を述べる．
第２章では，変分原理についての先行研究の紹介し，拘束条件の取り扱い方法を説明をする．
第３章から第５章では，上記の主要結果３つを記述する．
第６章では，まとめと展望を述べる．
付録ＡとＢでは，テンソル計算と物質時間微分について説明する．
付録ＣとＤでは，拡散による散逸がある二成分流体と相対論的完全流体の変分原理について述べる．

SUMMARY OF Ph.D. DISSERTATION

School Keio University	Student Identification Number 80845190	SURNAME, First name FUKAGAWA hiroki

Improvements in the Variational Principle for Fluid Dynamics

The realized motion of a system minimizes the action. This is called the variational principle and considered as a guiding principle in various fields of the physics. Using this principle, we can formulate the dynamics of a system even if it has complicated constraints. Various variational principles for the perfect fluid have been proposed for a long time, while Onsager's variational principle has been useful in formulating the dissipative dynamics in the soft matter physics. However, they have several open problems. This dissertation proposes a general framework to solve them, and provides the associated Hamiltonian formulation as follows.

1. The variational principle for the perfect fluid

There are two ways to describe the dynamics of fluid. The first way is the Lagrangian description, where we track path line. The second way is the Eulerian description, where we observe the time evolution at spatially fixed points. It is known that the equation of motion for the perfect fluid can be derived in terms of the variational principle in the Lagrangian description, as in the mechanics of mass particles. On the other hand, the variational principle in the Eulerian description requires some auxiliary fields, called Clebsch potentials, to derive rotational velocity field on the isentropic condition. However the physical meaning of the potentials has been obscure. We show that Clebsch potentials are required to fix the endpoints of each path line in Chapter 3. Here, the mass conservation law and adiabatic condition are holonomic constraints. Thus we can incorporate them into the action by means of the method of undetermined multiplier.

2. The variational for a dissipative system

In a dissipative fluid, entropy is produced along the path line. It gives a non-holonomic constraint, to which the above method cannot be applicable. However, we can minimize the action under the non-holonomic constraint because it is expressed in terms of differential forms. Our formulation yields the whole equation of momentum balance for a viscous fluid, although Onsager's variational principle yields only its linear part. We show that our formulation can be also applied to viscoelastic fluid and polymer solution in Chapter 4, and also discuss the case that dissipation is caused by diffusion in Appendix C.

3. Hamiltonian formulations

In the control theory, the optimized input minimizes the cost functional, and derives the Hamilton's equations as a pair of conjugate equations. In Chapter 5, we apply this theory to fluid dynamics, where the input is the velocity field. The state variables in the Lagrangian and Eulerian descriptions are respectively given by the position of fluid particles and Clebsch potentials. The resultant Hamiltonian equation for perfect fluid is canonical. In a viscous fluid, dissipative force is added to the equation. The associated symmetries are related to the conservation laws.

Chapter 1 describes the motivation and backgrounds, and presents the composition of this dissertation.
Chapter 2 introduces the previous researches, and explains the theory of constraints.
Chapters 3, 4, and 5 show the three main results mentioned above.
Chapter 6 summarizes this dissertation and presents future research.
Appendices A and B explain tensor calculus and material derivatives, respectively.
Appendices C and D discuss the variational principle for the two-component fluid with dissipative diffusion and the relativistic perfect fluid, respectively.