

学位論文 博士(理学)

流体力学における変分原理の改良

2012年度

慶應義塾大学大学院理工学研究科

深川 宏樹

# 主 論 文 要 旨

報告番号	甲 乙 第	号	氏 名	深川 宏樹
主 論 文 題 目 :				
流体力学における変分原理の改良				
<p>実現される運動は作用積分を最小にする。これは変分原理と呼ばれ、物理学全般における指導原理の一つとして考えられている。この原理を用いれば、複雑な拘束条件があっても系の動力学の定式化を行うことができる。様々な完全流体の変分原理が古くから提案されている。また、オンサーガーの変分原理が散逸系であるソフトマターの動力学の定式化に便利であることが知られている。しかしながら、これらの変分原理はいくつかの未解決問題がある。本論文では、これらの問題を解決する普遍的枠組みを与え、付随するハミルトン形式を整備する。本論文の主要な結果は以下の3つである。</p> <p>1. 完全流体の変分原理 流体の速度場を記述する方法にはラグランジュ描像とオイラー描像の2つがある。ラグランジュ描像では、流体粒子ごとの物理量の時間発展を見る。一方、オイラー描像では、空間に固定された点での物理量の変化を見る。完全流体の運動方程式は、質点の運動と同様にしてラグランジュ描像の変分原理から導くことができることが知られている。一方、オイラー描像の変分原理では、一様エントロピー下で渦度のある速度場を導くためにはクレプシュポテンシャルと呼ばれる補助場が必要である。しかしながら、その物理的な意味は不明瞭であった。第3章では、クレプシュポテンシャルが流跡線の初期位置と終端位置を固定するために必要であることを示す。なお、質量保存則と断熱条件はホロノミックな拘束条件である。したがって、未定乗数法で用いて、作用積分の中に組み込むことができる。</p> <p>2. 散逸系の変分原理 散逸系では、エントロピーは流跡線に沿って生成される。これはエントロピーに関して非ホロノミックな拘束条件を与え、上で用いた方法が使えない。しかしながら、この非ホロノミックな拘束条件の下で作用積分を最小にすることは、これが微分形式で書けることから可能である。我々の定式化は運動量のつりあいの式全体を導くことができる。一方、オンサーガーの変分原理で導出できるのはそのうちの線形項だけである。第4章で、この定式化を粘性流体、粘弾性流体および高分子溶液に適用する。付録Cでは、拡散による散逸がある二成分流体の変分原理について議論する。</p> <p>3. ハミルトン形式 制御理論では、最適化された入力コスト汎関数を最小にし、共役な関数の組としてハミルトン方程式を導く。第5章で、これを流体に適用する。速度場は入力とみなせ、状態変数はラグランジュ描像であれば流体粒子の位置となり、オイラー描像であればクレプシュポテンシャルになる。完全流体に対しては、これは正準なハミルトン形式になり、散逸系においては、これに散逸力が加わったものになる。また、付随する対称性と保存則についても議論する。</p> <p>第1章では、研究背景、研究目的および本論文の構成を述べる。 第2章では、変分原理についての先行研究の紹介し、拘束条件の取り扱い方法を説明をする。 第3章から第5章では、上記の主要結果3つを記述する。 第6章では、まとめと展望を述べる。 付録AとBでは、テンソル計算と物質時間微分について説明する。 付録CとDでは、拡散による散逸がある二成分流体と相対論的完全流体の変分原理について述べる。</p>				

# SUMMARY OF Ph.D. DISSERTATION

School Keio University	Student Identification Number 80845190	SURNAME, First name FUKAGAWA hiroki
---------------------------	-------------------------------------------	----------------------------------------

## Improvements in the Variational Principle for Fluid Dynamics

The realized motion of a system minimizes the action. This is called the variational principle and considered as a guiding principle in various fields of the physics. Using this principle, we can formulate the dynamics of a system even if it has complicated constraints. Various variational principles for the perfect fluid have been proposed for a long time, while Onsager's variational principle has been useful in formulating the dissipative dynamics in the soft matter physics. However, they have several open problems. This dissertation proposes a general framework to solve them, and provides the associated Hamiltonian formulation as follows.

### 1. The variational principle for the perfect fluid

There are two ways to describe the dynamics of fluid. The first way is the Lagrangian description, where we track path line. The second way is the Eulerian description, where we observe the time evolution at spatially fixed points. It is known that the equation of motion for the perfect fluid can be derived in terms of the variational principle in the Lagrangian description, as in the mechanics of mass particles. On the other hand, the variational principle in the Eulerian description requires some auxiliary fields, called Clebsch potentials, to derive rotational velocity field on the isentropic condition. However the physical meaning of the potentials has been obscure. We show that Clebsch potentials are required to fix the endpoints of each path line in Chapter 3. Here, the mass conservation law and adiabatic condition are holonomic constraints. Thus we can incorporate them into the action by means of the method of undetermined multiplier.

### 2. The variational for a dissipative system

In a dissipative fluid, entropy is produced along the path line. It gives a non-holonomic constraint, to which the above method cannot be applicable. However, we can minimize the action under the non-holonomic constraint because it is expressed in terms of differential forms. Our formulation yields the whole equation of momentum balance for a viscous fluid, although Onsager's variational principle yields only its linear part. We show that our formulation can be also applied to viscoelastic fluid and polymer solution in Chapter 4, and also discuss the case that dissipation is caused by diffusion in Appendix C.

### 3. Hamiltonian formulations

In the control theory, the optimized input minimizes the cost functional, and derives the Hamilton's equations as a pair of conjugate equations. In Chapter 5, we apply this theory to fluid dynamics, where the input is the velocity field. The state variables in the Lagrangian and Eulerian descriptions are respectively given by the position of fluid particles and Clebsch potentials. The resultant Hamiltonian equation for perfect fluid is canonical. In a viscous fluid, dissipative force is added to the equation. The associated symmetries are related to the conservation laws.

Chapter 1 describes the motivation and backgrounds, and presents the composition of this dissertation.

Chapter 2 introduces the previous researches, and explains the theory of constraints.

Chapters 3, 4, and 5 show the three main results mentioned above.

Chapter 6 summarizes this dissertation and presents future research.

Appendices A and B explain tensor calculus and material derivatives, respectively.

Appendices C and D discuss the variational principle for the two-component fluid with dissipative diffusion and the relativistic perfect fluid, respectively.

# 目次

<b>第1章 序章</b>	<b>3</b>
1.1 はじめに	3
1.2 研究背景	3
1.2.1 流体の運動と変分原理	3
1.2.2 完全流体の変分原理	5
1.2.3 散逸のある系の変分原理	5
1.2.4 ハミルトン形式	6
1.3 研究目的	7
1.4 本論文の構成	7
<b>第2章 変分原理</b>	<b>8</b>
2.1 エネルギー保存則とラグランジアン	8
2.2 最小作用の原理	9
2.3 多変数の変分原理	10
2.4 拘束条件	12
2.4.1 ホロノミックな拘束	12
2.4.2 非ホロノミックな拘束条件	14
2.4.3 制御変数による拘束	15
<b>第3章 完全流体の変分原理</b>	<b>18</b>
3.1 拘束条件	18
3.2 ラグランジュ座標での変分原理	19
3.3 オイラー座標での変分原理の問題点	21
3.4 クレプシュポテンシャル	22
3.5 流跡線の時間両端を固定する条件	23
3.6 積分型拘束条件	24
3.7 積分定数	26
<b>第4章 散逸系の変分原理</b>	<b>27</b>
4.1 減衰調和振動子	27
4.2 粘性流体	30
4.3 線形現象論	32

4.4	粘弾性流体	33
4.5	高分子溶液	35
4.6	変分原理と非平衡熱力学	37
<b>第5章</b>	<b>ハミルトン形式</b>	<b>38</b>
5.1	制御理論の観点からのハミルトン形式	38
5.2	対称性	41
5.3	流体の対称性	43
5.4	時間空間対称性	44
<b>第6章</b>	<b>まとめと展望</b>	<b>46</b>
<b>付録A</b>	<b>テンソル</b>	<b>48</b>
A.1	共変テンソルと反変テンソル	48
A.2	体積要素	49
A.3	速度場	50
A.4	渦度	50
<b>付録B</b>	<b>物質時間微分</b>	<b>51</b>
B.1	スカラー関数の物質時間微分	51
B.2	反変ベクトル場の物質時間微分	52
B.3	微分形式の物質時間微分	53
B.4	歪みテンソルの物質時間微分	56
B.5	ベクトル解析	59
<b>付録C</b>	<b>拡散による散逸がある二成分溶液</b>	<b>60</b>
<b>付録D</b>	<b>相対論的完全流体</b>	<b>63</b>

# 第1章 序章

## 1.1 はじめに

変分原理によると、実現される運動はある作用積分の値を極小にする。変分原理は「最小作用の原理」とも呼ばれている。現在、変分原理は古典力学系のみならず、電磁気学や素粒子物理学といった場の理論にも使われている。変分原理を用いれば系をひとつの作用積分によって記述できる。変分原理の利点としては、次の3点があげられる。

1. 作用積分の極小値を求めることが座標系に依存しないことから座標変換をしやすい。
2. 未定定数法などを用いれば、拘束条件を考慮しやすい。
3. 対称性と保存則の関係が明らかになる。

複雑な系の場合、その運動法則が何であるかを知るのが難しいときがある。このとき、2と3が系の運動法則を導出するための手がかりになることがある。本論文では流体の変分原理を整備する。なお、変分原理で運動法則を導出する際に実際に必要なのは停留値を与える条件である。極小値であれば停留値であるが、その逆は必ずしも成り立たない。しかしながら、多くの場合は作用積分の停留値を与える解は極小値を与えている。

## 1.2 研究背景

流体の変分原理について、過去の研究の紹介とその問題点について述べる。

### 1.2.1 流体の運動と変分原理

流体の運動を解析するには、運動を記述するための座標系を定める必要がある。流体粒子の移動経路を継続追跡して描かれる曲線を「流跡線」と呼ぶ。流体の運動の記述方法には、流跡線に沿った物理量の時間変化を記述するラグランジュ描像と、ある固定された点の時間変化を記述するオイラー描像がある。

ラグランジュ描像では流体粒子に付随した物理量の変化を見る。流体粒子の初期位置を  $\mathbf{a}$  とし、時刻  $\tau$  での位置を  $\mathbf{X}(\tau, \mathbf{a})$  とする。定義より初期時刻  $t_{\text{init}}$  で  $\mathbf{a} = \mathbf{X}(t_{\text{init}}, \mathbf{a})$  となる。このとき  $(\tau, \mathbf{a})$

をラグランジアン座標と呼ぶ。流体粒子は流れの中で膨張または収縮する。膨張率は体積要素と呼ばれ、ヤコビアンで与えられる。

$$J(\tau, \mathbf{a}) \equiv \frac{\partial(X_1, X_2, X_3)}{\partial(a_1, a_2, a_3)} \quad (1.1)$$

ここで  $X_i$  と  $a_i$  は、それぞれ  $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{a}$  の成分である。また  $\mathbf{a} = \mathbf{X}(t_{\text{init}}, \mathbf{a})$  より  $J(t_{\text{init}}, \mathbf{a}) = 1$  である。ラグランジュ座標  $(\tau, \mathbf{a})$  から、オイラー座標を得ることができる。

$$(t, \mathbf{x}) = (\tau, \mathbf{X}(\tau, \mathbf{a})) \quad (1.2)$$

ここでは時間の変数にラグランジアン座標では  $\tau$  を用い、オイラー座標では  $t$  を用いることにする。非相対論では  $t = \tau$  である。流体では  $J(\tau, \mathbf{a}) = 0$  となる特異点はないとし、オイラー座標からラグランジュ座標を得ることも常に可能であるとする。

$$(\tau, \mathbf{a}) = (t, \mathbf{A}(t, \mathbf{x})) \quad (1.3)$$

ここで  $\mathbf{A}$  はオイラー座標からラグランジュ座標を与える関数である。

流体の運動を解析するには変数の数と同じ数だけの微分方程式が必要である。例えば、ニュートン流体であれば、変数は速度場  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 、質量密度  $\rho$ 、圧力  $P$  となり、方程式は、ナビエーストークス方程式、質量保存則、状態方程式となる。状態方程式には、圧力が質量密度のみに依存とするバロトロピック性の仮定がよく使われる。他の方法として、圧力  $P$  の代わりに比エントロピー密度  $s$  を変数として使い、単位質量あたりの内部エネルギー  $\epsilon$  を質量密度  $\rho$  と比エントロピー  $s$  の関数として与え、散逸に関する方程式を与えても良い。圧力  $P$  は質量密度  $\rho$  と比エントロピー  $s$  の関数になり、質量密度  $\rho$  と比エントロピー  $s$  の方程式が与えられているので方程式系が閉じる。流体の運動は速度場が求まれば他の物理量の変化が求まるので、流体の運動の解析には速度場の従う方程式を知ることが重要となる。変分原理を用いれば、流体の運動は「実現される速度場は拘束条件の下で作用積分を極小にするように定まる」と記述でき、これから速度場の従う方程式を得ることが期待できる。しかしながら、流体の変分原理にはいくつか問題点が知られており、変分原理を流体に適用するには、これらの問題について議論する必要がある。続く三小節で流体運動に対する変分原理に関する問題点を述べる。

### 1.2.2 完全流体の変分原理

一成分系の流体の運動は速度場  $\mathbf{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ , 質量密度  $\rho$ , 比エントロピー  $s$  の時間変化によって記述される. 流体では局所平衡が成立し, 単位質量あたりの内部エネルギー密度  $\epsilon$  は  $\rho$  と  $s$  との関数となる. ラグランジアン密度を運動エネルギーと内部エネルギーの差で与える.

$$\mathcal{L}(\rho, \mathbf{v}, s) \equiv \rho \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \epsilon(\rho, s) \right\} \quad (1.4)$$

流体では質量保存則が成立し, 完全流体場合は更に断熱条件が成立する. したがって, 質量密度  $\rho$  と比エントロピー  $s$  の時間発展は速度場  $\mathbf{v}$  に依存する. 変分原理において, 質量保存則と断熱条件は拘束条件とみなせる. また, ラグランジュ座標では, 速度場と流体粒子の位置  $\mathbf{X}$  には,

$$\partial_\tau \mathbf{X} - \mathbf{v} = 0 \quad (1.5)$$

の関係があるので, これもまた拘束条件としてみなす. 作用積分を (1.4) の時間空間積分で与え, これらの拘束条件の下で作用積分の極小値を与える条件から流体の運動が求まる. 詳細は 3.2 節で説明する. このようにラグランジュ座標では, 完全流体の運動を変分原理によって導出することができる [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

一方, オイラー座標では, 作用積分が  $\mathbf{v}$ ,  $\rho$ ,  $s$  に対して極小値をとる条件から流体の運動方程式を求める. しかしながら, この計算で得られる速度場は, エントロピーが一様であるときには渦度がないものになる. そこで, この難点をさけるために, クレプシュポテンシャル [11, 12] と呼ばれる補助場を導入し, その保存則を拘束条件としたときに, 作用積分が極小値をとることが行われてきた [2, 3, 4]. しかしながら, この補助場が何を意味するのかが明確ではなく, 近年に至るまでその物理的な意味が議論されてきた [7, 8, 9]. なお, これらの詳細は 3.3 節と 3.4 節で改めて説明する.

### 1.2.3 散逸のある系の変分原理

散逸のある流体では断熱条件は成立しておらず, 比エントロピーの時間発展は移流や熱流, 散逸などによって決まる. 最初に散逸のある系の簡単な例として, 一次元の減衰調和振動子の運動について考える. 減衰振動子の位置を  $X$  とし, 速度を  $\dot{X}$  とする. 振動子に働く摩擦力を  $-\gamma \dot{X}$  とする. ここで  $\gamma$  は摩擦係数であり正である. 摩擦による散逸がない場合, 振動子の運動方程式は

$$m\ddot{X} + kX = 0 \quad (1.6)$$

となる. ここで  $\ddot{X}$  は加速度を表す. 減衰調和振動子の運動方程式は (1.6) の右辺に摩擦力  $-\gamma \dot{X}$  を付け加えたものになる.

$$m\ddot{X} + kX = -\gamma \dot{X} \quad (1.7)$$



(1.7)の左辺は散逸のない部分を表し、これは変分原理から導ける。摩擦による単位時間あたりの散逸を散逸関数  $\Theta(\dot{X})$  で書くことにする。減衰調和振動子の場合は散逸関数は  $\Theta(\dot{X}) \equiv \gamma \dot{X}^2(t)$  となる。ここで  $\gamma$  は摩擦係数である。摩擦力は散逸関数  $\Theta(\dot{X})$  の  $1/2$  を  $\dot{X}$  について微分して得られる。

$$-\gamma \dot{X} = -\frac{\partial}{\partial \dot{X}} \left( \frac{1}{2} \Theta(\dot{X}) \right) \quad (1.8)$$

これはレイリーの方法と呼ばれる [13, 14]。しかしながら、(1.8) が成立するのは (1.7) の右辺にある摩擦力が線形であるときだけである [15, 16]。また、レイリーの方法は (1.7) の右辺と左辺を別々に導出する方法であり、(1.7) 全体を一つの作用積分から変分原理を用いて導出する方法ではない。限られた場合にはレイリーの方法を拡張して一つの作用積分から散逸系の運動方程式を導出することができる [16, 17]。これはオンサーガーの変分原理と呼ばれる。空气中を落下して空気抵抗による摩擦力と重力がつりあって終端速度にある物体はこの例に当てはまる。空气中を落下する物体の運動方程式は  $m\ddot{X} + mg + \gamma\dot{X} = 0$  となる。ここで  $m$ ,  $g$ ,  $X$  はそれぞれ質量、重力加速度、地表からの高さである。終端速度では加速度  $\ddot{X}$  がゼロになるので運動方程式は

$$mg + \gamma\dot{X} = 0 \quad (1.9)$$

となる。これをオンサーガーの変分原理を使って求める。作用積分を

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left( mg\dot{X} + \frac{1}{2}\gamma\dot{X}^2 \right) \quad (1.10)$$

で与える。速度  $\dot{X}$  に関する停留値条件を求めると (1.9) を得る。このように慣性項  $m\ddot{X}$  が無視でき、ポテンシャルエネルギーが位置変数  $X$  について線形である場合はオンサーガーの変分原理が使える、散逸のある系で線形現象論を考慮した巨視的な方程式を得ることができる [18, 19]。

高分子溶液といった複雑な内部構造を持った複雑流体では速度場に関する巨視的な方程式を矛盾なく導くことが難しい。これを見通しよく導出する方法として、レイリーの方法やオンサーガーの変分原理が用いられてきた [20, 21, 22, 23, 24]。しかしながら、レイリーの方法は厳密には変分原理ではなく、オンサーガーの変分原理は慣性項を導出できない [25]。

## 1.2.4 ハミルトン形式

流体の変分原理に関連して様々なハミルトン形式が提案されてきた。例えば、等エントロピー下で非圧縮完全流体のハミルトン形式 [26]、これに圧縮を考慮した場合として非常に複雑なポアソン括弧 [27]、さらには渦度を考慮してクレプシュポテンシャルを用いたハミルトン形式 [28, 29, 30] などがある。これら完全流体のハミルトン形式 [26, 27, 28, 29, 30] はすべて非正準なハミルトン形式になる。Yoshida(2008,2009)[8] が指摘するように、非正準なハミルトン形式では完全流体の運動はヘリシティのようなカシミア不変量による拘束を受ける。ヘリシティがバロトロピックかつ等エントロピー下での完全流体でしか保存しないことを考慮すると、非正準なハミルトン形式は完全流体の運動を一般的には記述しない。また、著者の知る限り散逸のある流体のハミルトン形式についての議論はない。

## 1.3 研究目的

上に述べたように，流体の運動に対する変分原理には

1. オイラー描像による完全流体の記述で導入されるクレプシュポテンシャルの意味付け
2. 散逸項を含む運動方程式の一つの変分原理による導出
3. ハミルトン形式の整備

といった課題がある．これらの課題をそれぞれ第3, 4及び5章で解決する．

## 1.4 本論文の構成

第1章では研究背景および目的を記した．第2章では調和振動子の例にして変分原理の導入を行う．第3章では完全流体の変分原理について議論する．第4章では散逸のある系の変分原理について議論する．第5章ではハミルトン形式を導出し，対称性と保存則の関係について議論する．第6章ではまとめを述べる．付録では，テンソル，物質時間微分，拡散による散逸がある二成分溶液の変分原理，相対論的完全流体の変分原理について議論する．

## 第2章 変分原理

調和振動子の例を用いて拘束条件の下での変分原理について説明をする。

### 2.1 エネルギー保存則とラグランジアン

変分原理の導入として、一次元の調和振動子の運動を考える。振動子の質量を  $m(> 0)$  とし、つりあいの位置からの変位を  $X$  とし、バネ定数を  $k(> 0)$  とする。調和振動子の運動方程式は (1.6) となる。(1.6) に速度  $\dot{X}$  を掛けると次の恒等式を得る。

$$(m\ddot{X} + kX) \dot{X} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}kX^2 \right) \quad (2.1)$$

(2.1) の右辺の

$$E_{\text{total}}(X, \dot{X}) \equiv \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}kX^2 \quad (2.2)$$

をエネルギー関数と呼ぶ。これより  $X$  が (1.6) を満たすときは、エネルギー関数は定数になる。つまりエネルギー保存則が成立する。調和振動子の例では、運動方程式とエネルギー関数との関係が (2.1) で表されたが、これは次のように一般化することができる。時間に陽に依存しない関数を  $L(X, \dot{X})$  とおく。この全微分は

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial X} \frac{dX}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \frac{d\dot{X}}{dt} \\ &= \frac{\partial L}{\partial X} \dot{X} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) \dot{X} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \dot{X} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

となり、次の恒等式を得る。

$$\left( \frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) \dot{X} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \dot{X} - L \right) = 0 \quad (2.4)$$

ここで (2.1) と (2.4) を比較すると、右辺第一項の括弧内は運動方程式とみなせ、右辺第二項の括弧内はエネルギーとみなすことができる。そこで、エネルギー  $E_{\text{total}}(X, \dot{X})$  が与えられたときに、関数  $L(X, \dot{X})$  を

$$E_{\text{total}}(X, \dot{X}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \dot{X} - L \quad (2.5)$$

を満たすように定める。したがって、 $X$ が”オイラーラグランジュ方程式”

$$\frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = 0 \quad (2.6)$$

を満たすときは、恒等式(2.4)よりエネルギー関数  $E_{\text{total}}(X, \dot{X})$  が保存される。

$$\frac{d}{dt} E_{\text{total}}(X, \dot{X}) = 0 \quad (2.7)$$

## 2.2 最小作用の原理

2.1節では、エネルギー  $E_{\text{total}}$  からラグランジアン  $L$  を構成し、オイラーラグランジュ方程式(2.6)が満たされるときには、エネルギー  $E_{\text{total}}$  が保存されることを確かめた。しかしながら、恒等式(2.4)が示すのは、エネルギー保存則(2.7)が成立するときに、

$$\left( \frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) \dot{X} = 0 \quad (2.8)$$

となることであり、オイラーラグランジュ方程式(2.6)となることではない。(2.8)は運動していない解  $\dot{X} = 0$  を含む。1.1節で述べた「実現される運動は、作用積分の値を極小にするものである」という変分原理を要請すれば、 $\dot{X} = 0$  といった解をさけることができ、オイラーラグランジュ方程式(2.6)を得ることができる。したがって、変分原理により、エネルギー保存則(2.7)から(2.5)を満たすように構成されたラグランジアンを用いて実現される運動を一意に求めることができる。

調和振動子の例でこれを確かめる。ラグランジアン  $L$  を運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差で与える。

$$L(X, \dot{X}) \equiv \frac{1}{2} m \dot{X}^2 - \frac{1}{2} k X^2 \quad (2.9)$$

初期時刻と終端時刻をそれぞれ  $t_{\text{init}}$  と  $t_{\text{fin}}$  として、作用積分は(2.9)の時間積分で与えられる。

$$I[X] = \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt L(X, \dot{X}) \quad (2.10)$$

変分原理では、振動子の位置  $X$  と時間  $t$  からなる時空上でのいろいろな軌道  $X(t) + \delta X(t)$  を考え、(2.10)の極小値を与えるものを実際の運動の軌道とする。ここで  $\delta$  は変分を表す。なお、軌道の出発点  $X(t_{\text{init}})$  と終点  $X(t_{\text{fin}})$  は固定されていることに注意する。

$$\delta X(t_{\text{init}}) = \delta X(t_{\text{fin}}) = 0 \quad (2.11)$$

境界条件(2.11)を満たす任意の変位  $\delta X(t)$  に対して、

$$I[X + \delta X] = I[X] + \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left\{ \left( \frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) \delta X + o[\delta X^2] \right\} \quad (2.12)$$

が成立する．ここで  $o[\delta X^2]$  は  $\delta X$  について二次以上の項を表す．(2.12) より，作用積分 (2.10) が極値をもつときは

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left( \frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) \delta X = 0 \quad (2.13)$$

が成立する．これは  $I[X + \delta X] \geq I[X]$  が成立するための必要条件となる．変位  $\delta X$  は任意なので (2.13) からオイラーラグランジュ方程式 (2.6) を得る．調和振動子の場合には，オイラーラグランジュ方程式 (2.6) は (2.9) より (1.6) となる．

なお，オイラーラグランジュ方程式 (2.6) を満たすラグランジアンは一意に定まらない．これを証明する． $L(X, \dot{X})$  を軌道  $X(t)$  について (2.13) を満たすラグランジアンとし，新たなラグランジアンを  $L'(X, \dot{X}) \equiv L(X, \dot{X}) + dM(X)/dt$  とする．この時， $\delta \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt L(X, \dot{X}) = 0$  が成立し，

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt L' &= \delta \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \frac{dM}{dt} \\ &= \delta M(X(t_{\text{fin}})) - \delta M(X(t_{\text{init}})) \end{aligned} \quad (2.14)$$

となる．時間両端では (2.11) より  $\delta M(X(t_{\text{fin}})) = \delta M(X(t_{\text{init}})) = 0$  となり，(2.14) はゼロになる．これより， $L(X, \dot{X})$  に  $dM/dt$  を付け加えても，オイラーラグランジュ方程式の解には影響しないことが分かる．したがって，ラグランジアンとしては (2.5) を満たす数式的に一番単純な物の一つ選べば，解を求めるには十分である．

調和振動子では，全エネルギーは運動エネルギー  $m\dot{X}^2/2$  とポテンシャルエネルギー  $kX^2/2$  の和となり，エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}kX^2 = \text{一定値} \quad (2.15)$$

となる．このとき，調和振動子のラグランジアンを (2.9) で与えると，これは確かに (2.5) を満たし，オイラーラグランジュ方程式 (2.6) は (1.6) となることが分かる．ラグランジアンは一意でなく，例えば，(2.9) に  $\dot{X}X$  の項を付け加えても同じ結論を得る．しかしながら，項を増やすことの利点はなく，ラグランジアンとしてはやはり (2.9) を用いるのが簡便である．

## 2.3 多変数の変分原理

これまでに議論した変分原理を多次元に拡張する．例として，二次元平面内の調和振動子を考える．質点の位置  $\mathbf{X}$  のデカルト座標成分を  $(X_1, X_2)$  と書くと，運動エネルギーとポテンシャルエネルギーはそれぞれ  $m(\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2)/2$  と  $k(X_1^2 + X_2^2)/2$  になり，ラグランジアンは

$$\frac{1}{2}m(\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2) - \frac{1}{2}k(X_1^2 + X_2^2) \quad (2.16)$$

となる．このラグランジアンを (2.9) と同様に  $L$  と書く．作用積分は

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt L(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \quad (2.17)$$

となる．この作用積分も (2.11) と同様に  $I$  と書く．以下に混乱のない限り，変数や式が異なっても，ラグランジアンや作用積分をそれぞれ  $L$  と  $I$  で書くことにする．境界条件

$$\delta \mathbf{X}(t_{\text{init}}) = \delta \mathbf{X}(t_{\text{fin}}) = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

の下で軌道  $(X_1(t), X_2(t))$  が作用積分 (2.17) の極小値を与えるとき

$$\delta I = \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \sum_{i=1,2} \left( \frac{\partial L}{\partial X_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i} \right) \delta X_i = 0 \quad (2.19)$$

が成り立つ．変位  $\delta X_1(t)$  と  $\delta X_2(t)$  は任意で独立なので， $i = 1, 2$  として

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i} = 0 \quad (2.20)$$

が得られ，運動方程式は

$$m\ddot{X}_i + kX_i = 0 \quad (2.21)$$

となる．ここで注意すべきことは位置を表す座標として  $X_i$  のみならず，一般化座標  $q_j = q_j(X_i)$  においても，オイラーラグランジュ方程式の形は

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (2.22)$$

となり (2.20) と変わらない．なぜなら，作用積分の値は変数の表し方に依存しなく，ある軌道が作用積分の極小値を与えるときは，作用積分の変分  $\delta I$  がゼロになる性質は変数のとり方に依存しないからである．一方，運動方程式 (2.21) の方は座標系に依存する．ここで  $q_j$  は  $X_i$  の関数であり， $\dot{X}_i$  の関数でないことに注意する．もし， $q_j = q_j(X_i, \dot{X}_i)$  ならば (2.22) は成立しない． $X_i$  と  $\dot{X}_i$  が混ざるより一般的な変換については，5.2 節で考える．

例えば，極座標系として，動径  $r = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$  と偏角  $\theta = \tan^{-1}(X_2/X_1)$  を使うと，ラグランジアンは

$$\frac{1}{2}m \left\{ \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \right\} - \frac{1}{2}kr^2 \quad (2.23)$$

となる．この変分問題を解くと

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left\{ r^2 + \frac{(mr^2\dot{\theta})^2}{2mr^2} \right\}, \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0. \quad (2.24)$$

を得る．運動方程式 (2.21) と (2.24) を比較すると分かるように，直交座標系と極座標系では運動方程式の形は異なる．しかしながら，オイラーラグランジュ方程式としては同じ形をしている．

## 2.4 拘束条件

本節では拘束条件がある場合の変分原理について議論する。

### 2.4.1 ホロノミックな拘束

例として、二次元平面内を動くの調和振動子を考える。ラグランジアンと作用積分はそれぞれ (2.16) と (2.17) となる。ここで  $X_1$  と  $X_2$  は振動子の位置を表す。拘束条件を

$$U(X_1, X_2) = 0 \quad (2.25)$$

で与える。(2.25) より、局所的には  $X_1$  の値は  $X_2$  の値から定まり、逆も然りである。このような拘束条件をホロノミックな拘束条件と呼ぶ。(2.25) より  $\delta X_1$  と  $\delta X_2$  は独立ではなく

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} \delta X_1 + \frac{\partial U}{\partial X_2} \delta X_2 = 0 \quad (2.26)$$

の関係がある。(2.26) に  $\Lambda$  をかけても一般性を失わない。

$$\Lambda \frac{\partial U}{\partial X_1} \delta X_1 + \Lambda \frac{\partial U}{\partial X_2} \delta X_2 = 0 \quad (2.27)$$

そこで  $\Lambda$  を次を満たすように定める。

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1} - \Lambda \frac{\partial U}{\partial X_1} = 0 \quad (2.28)$$

(2.28) を (2.27) に代入すると

$$\left( \frac{\partial L}{\partial X_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1} \right) \delta X_1 + \Lambda \frac{\partial U}{\partial X_2} \delta X_2 = 0 \quad (2.29)$$

となり、(2.29) を (2.19) に代入すると

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left( \frac{\partial L}{\partial X_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_2} - \Lambda \frac{\partial U}{\partial X_2} \right) \delta X_2 = 0 \quad (2.30)$$

を得る。変位  $\delta X_2$  は任意より、

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_2} - \Lambda \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0 \quad (2.31)$$

となり、拘束条件 (2.25) のもとで作用積分の (2.17) の停留値を満たす軌道  $(X_1(t), X_2(t))$  は、(2.25), (2.28), (2.31) を満たす。これは、独立変数として  $X_1, X_2, \Lambda$  をとり、作用積分を

$$\tilde{I}[X_1, X_2, \Lambda] \equiv I[X_1, X_2] - \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \Lambda U(X_1, X_2) \quad (2.32)$$

で与えた時の停留値条件を求めたときに得られる解と同じである．このようにしてホロノミックな拘束条件の下での停留値条件を求める方法をラグランジュ未定乗数法，または未定乗数法と呼ぶ．

ホロノミックな拘束条件のもとでの運動の例として，軌道が円周上に固定された調和振動子を運動を考えよう．拘束条件は，

$$X_1^2 + X_2^2 = r^2 \quad (2.33)$$

となる．ここで  $r$  は半径を表し定数である．作用積分は

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left\{ \frac{1}{2} m (\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2) - \frac{1}{2} k (X_1^2 + X_2^2) + \Lambda (X_1^2 + X_2^2 - r^2) \right\} \quad (2.34)$$

となる．(2.34) の停留値条件を求めると (2.33) と

$$m \ddot{X}_i - (k + \Lambda) X_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.35)$$

を得る．解は  $\omega$  を任意の定数として次で与えられる．

$$X_1 = r \cos \omega t \quad (2.36)$$

$$X_2 = r \sin \omega t \quad (2.37)$$

$$\Lambda = -m\omega^2 - k \quad (2.38)$$

調和振動子の例にみるように，物理系の運動を知るには，注目した物理量とその時間発展方程式が必要である．運動を記述するのに必要最小限の物理量の数を自由度と呼ぶ．軌道が円周上に固定された調和振動子の位置を表すのに最初二つの座標  $(X_1, X_2)$  を用いたが，振動子は常に円周上 (2.33) にあり，振動子の位置を知るには局所的には  $X_1$  か  $X_2$  のどちらかが分かれば十分である．これにみるように，状態を表す変数間にホロノミックな拘束条件が存在するときは，ある時刻の物理量の一つが同時刻の他の物理量から決まるので，自由度が一つ少なくなる．

次に拘束条件が

$$U'(X_1, \dot{X}_1, X_2, \dot{X}_2) = 0 \quad (2.39)$$

で与えられた場合について考える．(2.39) より，任意の時間間隔  $[t_{\text{init}}, t_{\text{fin}}]$  で  $\delta \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt U' = 0$  が成立し，

$$\sum_{i=1,2} \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left( \frac{\partial U'}{\partial X_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U'}{\partial \dot{X}_i} \right) \delta X_i + \left[ \frac{\partial U'}{\partial \dot{X}_i} \delta X_i \right]_{t=t_{\text{init}}}^{t=t_{\text{fin}}} = 0 \quad (2.40)$$

を得る．(2.39) は (2.25) の形に書き換え可能であるとき，(2.39) は可積分であるという．もし，(2.39) が可積分であるのならば， $X_1$  と  $X_2$  の値の関係はそれぞれの同時刻の値にだけに限られるので， $\delta X_1(t_{\text{init}}) = \delta X_1(t_{\text{fin}}) = 0$  を満たす任意の  $X_1(t)$  に対して， $X_2$  の軌道が必ず  $\delta X_2(t_{\text{init}}) = \delta X_2(t_{\text{fin}}) = 0$  を満たし，(2.40) の左辺第二項はゼロになり，

$$\sum_{i=1,2} \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left( \frac{\partial U'}{\partial X_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U'}{\partial \dot{X}_i} \right) \delta X_i = 0 \quad (2.41)$$



を得る。したがって、(2.41)は(2.26)の代わりに用いることができるので、未定乗数法を拘束条件(2.39)に対して用いることができる。(2.39)が可積分である例として、

$$U' \equiv \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial X_1} \dot{X}_1 + \frac{\partial U}{\partial X_2} \dot{X}_2 \quad (2.42)$$

の時を考える。(2.42)については未定乗数法を使うことができる。つまり、(2.28)、(2.31)、(2.42)を得るのに(2.32)の代わりに

$$I[X_1, X_2, \lambda] = \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left( L + \lambda \frac{dU}{dt} \right) \quad (2.43)$$

を用いることができる。(2.43)をの右辺第二項を部分積分して、(2.32)と比較すると、 $d\lambda/dt = \Lambda$ の関係があることが分かる。 $\lambda$ の値は積分定数の分だけ不定性があるが、この不定性は(2.26)と書けたホロノミックな拘束条件を(2.42)の形で取り込んだことに由来する。一方、(2.39)が可積分でないときは、非ホロノミックな拘束条件と呼ばれる。これは次節にて議論する。

## 2.4.2 非ホロノミックな拘束条件

変数  $X_1$  と  $X_2$  に関する拘束条件が(2.25)の形で与えることができないとき、この拘束条件を非ホロノミックな拘束条件と呼ぶ。一輪車の運動は非ホロノミックな拘束条件を課せられる例である。一輪車を  $X_1 X_2$  平面上に垂直に立てる。一輪車の位置を  $(X_1, X_2)$  とし、車輪の向きを  $X_1$  軸からの角度を  $\theta$  とする。一輪車が滑らないと仮定すると、角度  $\theta$  と一輪車の速度  $(\dot{X}_1, \dot{X}_2)$  には

$$\tan \theta = \frac{\dot{X}_2}{\dot{X}_1} \quad (2.44)$$

の関係がある。(2.44)は

$$\dot{X}_1 \sin \theta - \dot{X}_2 \cos \theta = 0 \quad (2.45)$$

と書き換えられる。(2.45)がホロノミックな拘束条件であれば、

$$U(X_1, X_2, \theta) = 0 \quad (2.46)$$

の形で与えることができ、一つの変数は他の二変数から決まることになる。しかしながら、これは不可能である。なぜなら、一輪車のある時刻  $t$  での  $\theta$  の値は  $X_1$  と  $X_2$  の時間微分に依存し、決して、同時刻の  $X_1$  と  $X_2$  の値から定まらないからである。

数学的には背理法を用いて(2.45)が決して(2.46)の形にならないことを示せる。(2.46)を時間微分すると、

$$\dot{X}_1 \frac{\partial U}{\partial X_1} + \dot{X}_2 \frac{\partial U}{\partial X_2} + \dot{\theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \quad (2.47)$$

となる．これを (2.46) と比較すると， $\partial U/\partial X_1 = \sin \theta$ ， $\partial U/\partial X_2 = -\cos \theta$ ， $\partial U/\partial \theta = 0$  を得る．したがって，

$$\cos \theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial U}{\partial X_1} = \frac{\partial}{\partial X_1} \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \quad (2.48)$$

$$-\sin \theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial U}{\partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_2} \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \quad (2.49)$$

となるが，これは矛盾である [33]．別な非ホロノミックな拘束条件の例では，散逸系のエントロピーに関する拘束条件がある．散逸系ではエントロピーは系に履歴に依存し，決して同時刻の他の物理量からは定まらない．

一輪車の車輪の角度や散逸系でのエントロピーの例のように，非ホロノミックな拘束条件は系の状態を知るのに必要な物理量の数を減らさない．つまり，非ホロノミックな拘束条件は物理変数間に拘束条件を与えるけれど，自由度は減らないことが分かる．

2.4.1 節でみたように，未定乗数法を用いてホロノミックな拘束条件は作用積分のなかに取り込むことができる．また，(2.40) でみたように拘束条件に物理量の時間微分が含まれるときは時間両端での変数を固定する条件が必要であった．これは拘束条件がホロノミックであることと同義である．一方，変数  $X_1$  と  $X_2$  の間に非ホロノミックな拘束条件が課せられた場合は  $\delta X_1(t_{\text{init}}) = \delta X_1(t_{\text{fin}}) = 0$  を満たす任意の  $X_1(t)$  に対して， $\delta X_2(t_{\text{init}}) = \delta X_2(t_{\text{fin}}) = 0$  が満たされるとは必ずしも言えない．したがって，非ホロノミックな拘束条件を未定乗数法を用いて作用積分のなかには繰り返すことができない [33, 34]．非ホロノミックな拘束条件が与えられた時の変分原理については，散逸系の変分原理の話に関連するので 4.1 節で議論する．

### 2.4.3 制御変数による拘束

簡単のため，再び一次元の拘束条件のない場合の変分原理について議論する．変分原理によると，実現される軌道は作用積分

$$I[q] \equiv \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt L(q, \dot{q}) \quad (2.50)$$

を極小にする．今，新たな変数  $u$  を導入し，

$$\frac{dq}{dt} = F(q, u) \quad (2.51)$$

の関係があるとする．変数  $q$  の軌道は変数  $u$  によって決まるので， $u$  を入力と呼ぶことにする．境界条件

$$\delta q(t_{\text{init}}) = \delta q(t_{\text{fin}}) = 0 \quad (2.52)$$

を満たす任意の軌道に対して，(2.51) を満たす  $u$  が常に存在するとする．ラグランジアン  $L$  が  $q$  と  $\dot{q}$  の関数で与えられたとすると，(2.51) を用いて， $L(q, \dot{q}) = L(q, F(q, u))$  となる．そこで，ラ

ラグランジアンを  $q$  と  $u$  の関数として  $L(q, u)$  と書く．拘束条件 (2.51) と境界条件 (2.52) との下で作用積分

$$I[q, u] \equiv \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt L(q, u) \quad (2.53)$$

の停留値条件を考える．これは，拘束条件 (2.51) が  $dq/dt = u$  とすれば，境界条件 (2.52) の下で作用積分 (2.50) の停留値条件を求めるのと同様である．また，(2.51) は  $q$  と  $u$  の関係が  $dq/dt = u$  に限らないことから，その拡張としてみなせる．

作用積分 (2.53) の変分を計算すると

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u \right) = 0 \quad (2.54)$$

となる． $p$  を任意の変数としたときに，(2.51) から

$$\begin{aligned} \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \delta \{p(\dot{q} - F)\} &= \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left\{ p \left( -\frac{\partial F}{\partial q} \delta q + \delta \dot{q} - \frac{\partial F}{\partial u} \delta u \right) + (\dot{q} - F) \delta p \right\} \\ &= \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left\{ -\left( p \frac{\partial F}{\partial q} + \frac{dp}{dt} \right) \delta q - \left( p \frac{\partial F}{\partial u} \right) \delta u \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

をえる．一行目右辺の第二項は (2.51) よりゼロとなる．二行目では境界条件 (2.52) を用いて部分積分を行った．ここで  $p$  を

$$\frac{\partial L}{\partial u} - p \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \quad (2.56)$$

満たすものとする．(2.55) と (2.56) より，(2.54) は

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \left( p \frac{\partial F}{\partial q} + \frac{dp}{dt} \right) = 0 \quad (2.57)$$

と書ける．したがって，軌道は (2.51)，(2.56)，(2.57) より求まる．これは

$$\tilde{I}[q, u, p] \equiv I[q, u] + \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt p(\dot{q} - F) \quad (2.58)$$

の停留値条件を求めたときと同様の解になる．

2.2 節で議論した調和振動子をこの形式で議論する．位置の時間微分  $\dot{X}$  と振動子の速度  $v$  には，

$$\dot{X} - v = 0 \quad (2.59)$$

の関係があり，速度場  $v$  は調和振動子の位置  $X$  を定める入力としてみなせる．(2.59) の下で，

$$I[X, v] \equiv \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left( \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} k X^2 \right) \quad (2.60)$$

の停留値条件を求める。未定乗数法を用いると、解くべき作用積分は

$$I[X, v, p] \equiv \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left\{ \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kq^2 + p(\dot{X} - v) \right\} \quad (2.61)$$

となる。この停留値条件を求めると (2.59) と

$$mv - p = 0 \quad (2.62)$$

$$\dot{p} = -kX \quad (2.63)$$

を得る。この連立方程式を解くと、振動子の運動方程式 (1.6) を得る。つまり、一次元の調和振動子の運動を求める変分原理は、入力  $v$  によって支配された変数  $X$  がある時に、境界条件 (2.52) の下で作用積分 (2.60) を最小にする入力  $v$  を求める最適制御の問題に読みかえることができる。

2.4.2 節で議論したように、非ホロノミックな拘束条件では自由度は減らないが、ホロノミックな拘束条件と同様に運動に制限を与えている。例えば、非ホロノミックな拘束条件 (2.45) より、時刻  $t$  での  $\theta$  の値を  $\dot{X}_1$  と  $\dot{X}_2$  の値から定まる。したがって、 $\dot{X}_1$  と  $\dot{X}_2$  の値を与える制御変数  $(u, v)$  とすれば、 $X_1$  と  $X_2$  の値はもちろんのこと、 $\theta$  の値も定まる。このように非ホロノミックな拘束条件は系の時間発展を定める制御変数の数を減らす。つまり、系の自由度はホロノミックな拘束条件の数だけ減り、系の時間発展を記述するのに必要な制御変数の数はそれから非ホロノミックな拘束条件の数を引いたものになる。流体においても、変数間の拘束条件がホロノミックや非ホロノミックに与えられたりする。これによって、系の自由度と系の運動を決める変数が何であるかが分かる。このことについては必要に応じて議論していく。

## 第3章 完全流体の変分原理

完全流体の運動方程式を変分原理を用いて導出する方法について議論する。

### 3.1 拘束条件

流体の運動を記述するには、速度場の従う時間発展方程式を知ることが肝要である。速度場が求まれば、質量保存則により質量密度の時間発展が分かる。また、流体では小領域で熱力学的に平衡状態にある局所平衡が成立し、比エントロピーの時間発展は完全流体であれば断熱条件によって求まる。

ラグランジュ描像では、(1.5)より速度場の時間発展が定まると初期時刻に位置  $\mathbf{a}$  にあった流体粒子の位置  $\mathbf{X}$  が定まる。また、質量保存則は次で与えられる。

$$\rho J - \rho_{\text{init}} = 0 \quad (3.1)$$

ここで  $\rho_{\text{init}}$  は質量密度  $\rho$  の初期値であり、 $J$  は膨張率を表すヤコビアン (1.1) である。(3.1)より質量密度  $\rho(t, \mathbf{a})$  はその間の流体粒子の位置  $\mathbf{X}$  のみで定まる。完全流体では、更に断熱条件が成立する。

$$s - s_{\text{init}} = 0 \quad (3.2)$$

ここで  $s_{\text{init}}$  は比エントロピー  $s$  の初期値である。(3.2)より  $s(t, \mathbf{a})$  は定数であることが分かる。(3.1)と(3.2)より、初期時刻の質量密度  $\rho_{\text{init}}$  と比エントロピー  $s_{\text{init}}$  が与えられたときに流体粒子の位置  $\mathbf{X}$  が求まれば、質量密度  $\rho$  と比エントロピー  $s$  が定まる。

2.4.1節では拘束条件の中で変数間の関係が履歴依存しないものをホロノミックな拘束条件と呼んだ。これは拘束条件が変数の時間微分を含まない積分形の関数 (2.25) で与えられることを意味する。したがって、(3.1)と(3.2)も同様にホロノミックな拘束条件である。

次に、内部エネルギーは質量密度と比エントロピーの関数となることを示す。 $\epsilon$  を単位質量あたりの内部エネルギーとする。単位体積あたりの内部エネルギーは  $\rho\epsilon J$  で与えられ、これはエントロピー  $\rho s J$  と体積要素  $J$  の関数となる。したがって、熱力学第一法則は

$$\delta(\rho\epsilon J) = T\delta(\rho s J) - P\delta J \quad (3.3)$$

となる。ここで  $T$  は温度であり  $P$  は圧力である。流体中では質量保存則 (3.1) より  $\delta(\rho J) = J\delta\rho +$

$\rho \delta J = 0$  となる。したがって、 $\delta J = -\rho^{-1} J \delta \rho = \rho J \delta \rho^{-1}$  が成り立ち、(3.3)は

$$\begin{aligned}\delta \epsilon &= -P \delta \rho^{-1} + T \delta s \\ &= P \rho^2 \delta \rho + T \delta s\end{aligned}\tag{3.4}$$

となる [1]。 (3.4) より次を得る。

$$P \equiv - \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho^{-1}} \right)_s = \rho^2 \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_s\tag{3.5}$$

$$T \equiv \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial s} \right)_\rho\tag{3.6}$$

ここで下添え字  $_s$  と  $_\rho$  はそれぞれの偏微分で固定される変数を示す。エンタルピー  $h$  を

$$h \equiv \epsilon + \frac{P}{\rho}\tag{3.7}$$

で定義する。 (3.4) と (3.7) より

$$\delta h = \frac{\delta P}{\rho} + T \delta s\tag{3.8}$$

を得る。

## 3.2 ラグランジュ座標での変分原理

完全流体では質量保存則 (3.1) と断熱条件 (3.2) が成立し、速度場  $\mathbf{v}$  と流体粒子の位置  $\mathbf{X}$  には (1.5) の関係がある。また、完全流体ではエネルギー保存則が成立する。

$$\int_V d^3\mathbf{x} \left\{ \rho \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \epsilon(\rho, s) \right) \right\} = \text{一定値}\tag{3.9}$$

本節では拘束条件 (1.5), (3.1), (3.2) の下で、(3.9) を満たす完全流体の速度場  $\mathbf{v}$  を変分原理を用いて求める。ラグランジアン密度を運動エネルギー密度  $\rho \mathbf{v}^2 / 2$  と内部エネルギー密度  $\rho \epsilon(\rho, s)$  の差、つまり (1.4) で与える。ラグランジアンをこのようにして与えれば良い理由については、この節の最後で議論する。作用積分  $I$  は

$$I[\rho, s, \mathbf{v}] \equiv \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \int_V d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\rho, s, \mathbf{v})\tag{3.10}$$

となる。ここで  $t_{\text{init}}$  と  $t_{\text{fin}}$  はそれぞれ初期時刻と終端時刻であり、 $V$  は完全流体が占める空間である。流跡線の時間両端は固定されているとする。

$$\delta X_i(t_{\text{init}}, \mathbf{a}) = \delta X_i(t_{\text{fin}}, \mathbf{a}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)\tag{3.11}$$

速度場  $\mathbf{v}$  は (1.5) より流体粒子の位置  $\mathbf{X}$  を定める入力とみなせる．これ以降，ローマ字の添字は特記以外は 1, 2, 3 を意味し，繰り返される添字は足し合わせるとする．質量保存則 (3.1) と断熱条件 (3.2) は 3.1 節で述べたようにホロノミックな拘束条件となる．したがって，これらの拘束条件 (1.5), (3.1), (3.2) は未定乗数法を使って，次のように作用積分のなかに繰り込むことができる．

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} d\tau \int_V d^3\mathbf{a} \{J\mathcal{L}(\rho, s, \mathbf{v}) + \boldsymbol{\gamma} \cdot (\partial_\tau \mathbf{X} - \mathbf{v}) + K(\rho J - \rho_{\text{init}}) + \Lambda \rho J(s - s_{\text{init}})\} \quad (3.12)$$

ここで  $K$  と  $\Lambda$  は未定乗数である．(3.12) の停留値条件を  $K, \Lambda, \rho, s, X_i$  について解くと，(3.1) の (3.2) と次を得る．

$$K = -\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + h \quad (3.13)$$

$$\Lambda = T \quad (3.14)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \rho J \mathbf{v} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \gamma_i = -\frac{\partial}{\partial a_j} \left\{ \rho \left( \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \epsilon + K \right) \tilde{j}_{ij} \right\} \quad (3.16)$$

ここで  $\tilde{j}_{ij}$  は  $J$  の  $(i, j)$ -余因子である．

$$\tilde{j}_{ij} \equiv \frac{\partial J}{\partial(\partial X_i / \partial a_j)} \quad (3.17)$$

また， $\tilde{j}_{ij}$  について次が成立する．

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \tilde{j}_{ij} = 0 \quad (3.18)$$

(3.13) と (3.14) より未定乗数  $K$  と  $\Lambda$  は物理量に関係している．(3.16) の変分を計算する際に部分積分を行うが，このときに表面積分は (3.11) よりゼロになる．(3.13)–(3.16) と (3.18) より，ラグランジアン座標におけるオイラー方程式を得る．

$$\rho J \frac{\partial^2 X_i}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial P}{\partial a_j} \tilde{j}_{ij} \quad (3.19)$$

これは次節で議論するオイラー座標でのオイラー方程式 (3.30) と同じものである．(3.19) に  $J^{-1}(t, \mathbf{x})$  を掛けて， $\partial^2 X_i / \partial \tau^2$  と  $J^{-1}(\partial J / \partial(\partial X_i / \partial a_j))$  をそれぞれ  $(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla)v_i$  と  $\partial a_j / \partial x_i$  で置き換えるとこれは示せる [1]．(3.11) は流跡線の時間両端を固定する条件を表す．(3.19) は  $\tau$  に関して二次の微分方程式である．その解は 2 つの積分定数を持ち，その値は端点固定の条件から決まる．

以上の議論により，ラグランジアンを (1.4) で与え，拘束条件 (1.5), (3.1), (3.2) の下での変分問題を解くことによって，オイラー方程式 (3.19) を得た．この導出したオイラー方程式 (3.19) と拘束条件 (1.5), (3.1), (3.2) を用いて，再び，エネルギー保存則 (3.9) を得ることができる．したがって，ラグランジアンを (1.4) で与えることは，エネルギー保存則 (3.9) と矛盾しないことが分かる．

### 3.3 オイラー座標での変分原理の問題点

オイラー座標では質量密度  $\rho$ , 比エントロピー  $s$ , 速度場  $\mathbf{v}$  を場所  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  と時刻  $t$  の関数となる。また, 境界面  $\partial V$  での流体の流出入はないとする。

$$n_i v_i(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial V \quad (3.20)$$

ここで  $\mathbf{n}$  は  $\partial V$  の外向きの法線ベクトルである。質量保存則と断熱条件は (3.1) と (3.2) に代わりそれぞれ

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.21)$$

と

$$D_t s = 0 \quad (3.22)$$

となる。ここで  $D_t \equiv \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$  はラグランジュ微分である。初期時刻  $t_{\text{init}}$  と終端時刻  $t_{\text{fin}}$  で質量密度とエントロピーを固定する。

$$\delta \rho(t, \mathbf{x}_{\text{init}}) = \delta \rho(t, \mathbf{x}_{\text{fin}}) = 0 \quad (3.23)$$

$$\delta s(t, \mathbf{x}_{\text{init}}) = \delta s(t, \mathbf{x}_{\text{fin}}) = 0 \quad (3.24)$$

これらの条件 (3.20)–(3.24) の下での作用 (3.10) の停留値条件を未定乗数法を用いて求める。  $\kappa$  と  $\lambda$  を未定乗数とすると作用は次で与えられる。

$$I_E[\rho, s, \mathbf{v}, \kappa, \lambda] \equiv \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \int_V d^3 \mathbf{x} \left\{ \mathcal{L}(\rho, s, \mathbf{v}) - \kappa \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) - \lambda \rho \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) \right\} \quad (3.25)$$

$\kappa, \lambda, \mathbf{v}, \rho, s$  について (3.25) の停留値条件を求めると, (3.21) と (3.22) と次を得る。

$$\mathbf{v} = -\nabla \kappa + \lambda \nabla s \quad (3.26)$$

$$D_t \kappa = -\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + h \quad (3.27)$$

$$D_t \lambda = T \quad (3.28)$$

(3.26) の両辺に  $\partial_t + \nabla(\mathbf{v} \cdot) - \mathbf{v} \times \nabla \times$  を作用させ, (3.21) と (3.22) を用いると

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) = -\nabla D_t \kappa + (D_t \lambda) \nabla s \quad (3.29)$$

を得る。ここで  $D_t$  と  $\nabla(\mathbf{v} \cdot) - \mathbf{v} \times \nabla \times$  はそれぞれスカラー量と共変ベクトル (微分一形式) に関するリー微分である [41]。リー微分の詳細は付録 B で説明する。(3.27) と (3.28) を (3.29) に代入すると, オイラー方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\frac{\nabla P}{\rho} \quad (3.30)$$

(3.26) の回転より, 渦度は

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \lambda \times \nabla s \quad (3.31)$$

となる。しかしながら, 一様エントロピー流では  $\nabla s = \mathbf{0}$  なので,  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  となり, つまり渦度は必ずゼロとなる。一様エントロピーでも渦度があることが考えられるので, この方法では何か欠点がある。これが第 1 章で述べたオイラー座標での変分法の問題点である。



### 3.4 クレプシュポテンシャル

ここで、オイラー座標の変分原理で渦度のある速度場を導出する方法についての先行研究の説明をする．等エントロピーでも渦度を導く変分原理として，作用積分 (3.25) に補助スカラー場  $\beta$  と  $A$  に関する項をつけ加えることが提案された [2] ．

$$I_E[\rho, s, \mathbf{v}, \kappa, \lambda] - \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt dx^3 \beta D_t A \quad (3.32)$$

$\mathbf{v}$  に関する停留値条件を求めると

$$\mathbf{v} = -\nabla\kappa + \lambda\nabla s + \frac{\beta}{\rho}\nabla A \quad (3.33)$$

が得られる．等エントロピー下では，速度場は

$$\mathbf{v} = -\nabla\kappa + \frac{\beta}{\rho}\nabla A \quad (3.34)$$

となる．渦度は

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla\frac{\beta}{\rho} \times \nabla A \quad (3.35)$$

となる．補助場  $\beta$  と  $A$  はクレプシュポテンシャルと呼ばれる [11, 12]．これは，Clebsch(1859)[11] が渦度が (3.35) で与えられた時に，完全流体の速度場が (3.34) になることを示したことから，そう呼ばれている．速度場  $\mathbf{v}$  が (3.34) で与えられたときは  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = 0$  となる．しかしながら，一般には， $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \neq 0$  なので (3.34) は任意の速度場を表さない．

Lin(1963)[3] はクレプシュポテンシャルが流体粒子の初期位置に関係ある変数と考え，その数を増やし，次の速度場の方程式を導いた．

$$\mathbf{v} = -\nabla\kappa + \lambda\nabla s + \sum_{i=1}^3 \frac{\beta_i}{\rho} \nabla A_i \quad (3.36)$$

Selinger & Whitham(1968)[4] は，Lin(1963)[3] の定式化には数学的には不十分なところがあることを指摘し，(3.36) を冗長であると考えた [4]．Schutz(1970,1971)[5] はクレプシュポテンシャルを用いた定式化を相対論に拡張したが，クレプシュポテンシャルが必要であることに不満を持っていた．このような議論があるにもかかわらず，これらのオイラー座標の変分原理 [2, 3, 5] は，電磁場，プラズマ，弾性体，相対論的な流体描像を用いた中性子星の解析 [4, 31, 32] などに使われてきた．また，クレプシュポテンシャルはラグランジアン座標と関係あることが示唆されてきた [1, 3, 4, 7, 8, 28, 30]．しかしながらその理由は十分に説明されてこなかった．

### 3.5 流跡線の時間両端を固定する条件

本節は Fukagawa & Fujitani(2010)[9] で発表した内容である．ある流体粒子の経路に注目すると流跡線を得ることができる．3.3 節での変分法では，初期時刻である流体粒子に注目したときに，その流体粒子が終端時刻でどここの場所に移るかを指定できなかつた．なお，この条件はラグランジュ座標での変分原理では (3.11) によって課せられている．同じようにオイラー座標での変分原理にも課せられるべきである．時間を含めた 4 次元空間上に三つの補助場  $A_i(t, \mathbf{x})$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を与え， $A_i$  が一定となる超平面の交線が流跡線に一致するようにする．

$$D_t A_i = \partial_t A_i + \mathbf{v} \cdot \nabla A_i = 0 \quad (3.37)$$

スカラー場である  $A_1, A_2, A_3$  はオイラー座標からラグランジュ座標を与えているとみなせる．境界条件を

$$\delta A_i(t_{\text{init}}, \mathbf{x}) = \delta A_i(t_{\text{fin}}, \mathbf{x}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.38)$$

とすると，これは流跡線の初期位置と終端位置を固定する条件を表す．よって，未定乗数として  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  を導入して，作用積分

$$I_E[\rho, s, \mathbf{v}, \kappa, \lambda] - \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \int_V dx^3 \beta_i (\partial_t A_i + \mathbf{v} \cdot \nabla A_i) \quad (3.39)$$

の停留値条件を境界条件 (3.38) の下で求めれば，時間両端で流跡線が固定された条件下で (3.25) を極小にする速度場を得たことになる． $A_i$  の変分を計算すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta_i + \nabla(\mathbf{v} \beta_i) = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\beta_i}{\rho} \right) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{\beta_i}{\rho} \right) = 0 \quad (3.40)$$

を得る．ここで (3.21) を用いた．境界条件として (3.23) と (3.24) を用いて，同様に  $\mathbf{v}$  の変分を計算すると

$$\mathbf{v} = -\nabla \kappa + \lambda \nabla s + \frac{\beta_i}{\rho} \nabla A_i \quad (3.41)$$

を得る． $\kappa, \lambda, \rho, s$  の停留値条件より (3.21), (3.22), (3.27), (3.28) を得る．3.3 節と同様にして，(3.41) の両辺に  $\partial_t + \nabla(\mathbf{v} \cdot) - \mathbf{v} \times \nabla \times$  を作用させ，(3.21) と (3.22) を用いるとオイラー方程式 (3.30) を得る．(3.41) の回転より，渦度は

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \lambda \times \nabla s + \nabla \left( \frac{\beta_i}{\rho} \right) \times \nabla A_i \quad (3.42)$$

となり，一様エントロピー ( $\nabla s = \mathbf{0}$ ) の条件下でも  $\nabla(\beta_i/\rho) \times \nabla A_i$  の項があるために渦度はゼロとは限らない．終端時間での流跡線を固定しなかつた場合，つまり (3.38) を課さなかつた場合は  $\beta_i(t_{\text{fin}}, \mathbf{x}) = 0$  となり，これと (3.40) から  $\beta_i(t, \mathbf{x}) = 0$  を得る．その結果，一様エントロピー下 ( $\nabla s = \mathbf{0}$ ) での渦度 (3.42) は (3.31) と同様にゼロになる．

### 3.6 積分型拘束条件

本節は 3.5 節の内容 [9] を踏まえて, Fukagawa & Fujitani(2012)[10] で発表した内容である. 拘束条件 (3.21) と (3.22) を別な表記で与えることもできる. 補助場  $A_1, A_2, A_3$  が与えられたときに (1.3) を用いれば, (3.21) と (3.22) はそれぞれホロノミックな拘束条件として

$$\rho - \rho_{\text{init}}(\mathbf{A}(t, \mathbf{x}))J^{-1} = 0 \quad (3.43)$$

と

$$s - s_{\text{init}}(\mathbf{A}(t, \mathbf{x})) = 0 \quad (3.44)$$

書ける. ここで  $J^{-1}$  は

$$J^{-1}(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{\partial(A_1, A_2, A_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \quad (3.45)$$

である.  $\tilde{j}_{ij}^{-1}$  を  $J^{-1}$  の  $(i, j)$ -余因子とすると, (3.17) と (3.18) と同様に

$$\tilde{j}_{ij}^{-1} \equiv \frac{\partial J^{-1}}{\partial(\partial A_i / \partial x_j)} \quad (3.46)$$

と

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{j}_{ij}^{-1} = 0 \quad (3.47)$$

が成立する. なお, (3.43) と (3.44) はそれぞれ (3.37) と (3.47) に注意して時間微分すると (3.21) と (3.22) となる. したがって, (3.39) は

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \int_V d^3\mathbf{x} \{ \mathcal{L}(\rho, s, \mathbf{v}) + \beta_i(\partial_t A_i + \mathbf{v} \cdot \nabla A_i) + K(\rho - \rho_{\text{init}}J^{-1}) + \Lambda(s - s_{\text{init}}) \} \quad (3.48)$$

と書きなおすこともできる. (3.48) の変数は  $\rho, s, \mathbf{v}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}, K, \Lambda$  であり,  $\boldsymbol{\beta}, K, \Lambda$  は未定乗数である. (3.48) の停留値条件を求めると, (3.13), (3.14), (3.37), (3.43), (3.44) と次の

$$\mathbf{v} + \frac{\beta_i}{\rho} \nabla A_i = \mathbf{0} \quad (3.49)$$

と

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta_i + \nabla(\mathbf{v}\beta_i) = -KJ^{-1} \frac{\partial \rho_{\text{init}}}{\partial A_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ K \rho_{\text{init}} \frac{\partial J^{-1}}{\partial(\partial A_i / \partial x_j)} \right\} - \Lambda \frac{\partial s_{\text{init}}}{\partial A_i} \quad (3.50)$$

を得る. 未定乗数法では  $\rho$  と  $s$  は独立変数として扱うが,  $\rho_{\text{init}}$  と  $s_{\text{init}}$  は  $\mathbf{A}$  の関数として扱われていることに注意する. (3.50) の左辺の第一項と第二項は (3.47) より

$$-KJ^{-1} \frac{\partial \rho_{\text{init}}}{\partial A_i} + \frac{\partial J^{-1}}{\partial(\partial A_i / \partial x_j)} \frac{\partial}{\partial x_j} (K \rho_{\text{init}}) = \rho \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \quad (3.51)$$

となる．これと (3.44) より (3.50) の左辺は

$$\left( \rho \frac{\partial K}{\partial x_j} - \rho T \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \quad (3.52)$$

と書け，更に (3.13) と (3.14) より (3.50) は次のように書き換えられる．

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta_i + \nabla(\mathbf{v}\beta_i) = \left( -\rho \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \quad (3.53)$$

(3.49) に  $\partial_t + \nabla(\mathbf{v}\cdot) - \mathbf{v} \times \nabla \times$  を作用させると

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) = -D_t \left( \frac{\beta_i}{\rho} \right) \nabla A_i - \left( \frac{\beta_i}{\rho} \right) \nabla D_t A_i \quad (3.54)$$

を得る．(3.54) の右辺の第二項は (3.37) より消える．(3.53) を (3.54) の第一項に代入するとオイラー方程式 (3.30) を得る．

オイラー座標での変分原理ではクレプシュポテンシャルと呼ばれる補助場が用いられてきたが，補助場がいくつ必要であるかとか，なぜ補助場が変分原理で必要であるかとかについては，過去から現在に至るまで様々な議論がなされてきた [1, 3, 4, 7, 8, 28, 30]．

3.5 節と 3.6 節とで示したことは，オイラー座標での変分原理ではクレプシュポテンシャルが流跡線を時間両端で固定する条件を与えることである [9]．そもそも，変分原理は軌道の時間両端が固定された時に，その間の時間発展を求める方法である．これを考慮すると，変分原理を流体に適用するためには初期時刻に位置  $\mathbf{A}$  にあった流体粒子が終端時刻にどこにあるかを指定する必要がある．オイラー座標では， $\mathbf{A}$  を  $(t, \mathbf{x})$  の関数として，現在を基準として初期時刻にあった流体粒子の場所を指定している．一方，ラグランジュ座標では，初期時刻での位置  $\mathbf{a}$  を基準として流体粒子の位置の変化  $\mathbf{X}$  を  $(\tau, \mathbf{a})$  の関数としてみている．どちらの座標系でも変分原理では流跡線の時間両端を固定することが重要である．

質量保存則に (3.1) のかわりに (3.21) を用いると，時間両端での質量密度を固定する必要がある．質量密度  $\rho$  と初期時刻の位置  $\mathbf{A}$  には (3.1) の関係があり，質量密度  $\rho$  は  $A_1, A_2, A_3$  の関数となる．また，(3.45) はゼロにならないとしたので，逆に  $A_3$  の値を  $\rho$ ， $A_1, A_2$  から求めることができる．したがって，流跡線の端点を固定するには， $\rho, A_1, A_2$  の初期時刻と終端時刻での値を固定すれば十分である事が分かる．時間両端で  $A_1, A_2, A_3$  を固定して，更に質量密度  $\rho$  を固定すると過剰な拘束条件を課すことになり，時間終端での質量密度を (3.1) を満たすように定めないと解は存在しなくなる．したがって，質量保存則に (3.21) を用いるときは，補助場  $\mathbf{A}$  の数を三つから二つに減らさなければならない [9]．

## 3.7 積分定数

3.3節での変分法は流跡線の時間両端が固定されていないものであった。クレプシュポテンシャルの時間両端に(3.38)を課すことにより流跡線の初期位置と終端位置を固定することができる。一般に、拘束条件が少なければ少ないほど作用積分の極小値はより小さくなる。したがって、自由端の方が固定端の時よりも作用積分の極小値は小さい。つまり、渦度の無い速度場(3.26)は流跡線が自由端であるときの作用(3.10)の極小値を与える解と理解できる。

ラグランジュ描像では流体粒子の位置 $\mathbf{X}(\tau, \mathbf{a})$ の変化によって流体の運動を記述する。このときに重要なのは、初期位置 $\mathbf{X}(t_{\text{init}}, \mathbf{a})$ からの時間変化である。通常、ラグランジュ描像では $\mathbf{X}(t_{\text{init}}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}$ とするが、 $\mathbf{X}(t_{\text{init}}, \mathbf{a})$ は本来積分定数の分だけ不定性がある。同様に、オイラー描像におけるクレプシュポテンシャル $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ の値は流跡線の初期位置を定めるために使われており、 $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ には積分定数の分だけの不定性がある。クレプシュポテンシャルをラグランジュ座標だとみなせば、 $\mathbf{A}(t_{\text{init}}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ が成立する。これらの積分定数の不定性は、作用積分とそれによって導出される流体の運動が位置に陽に依存しないことを意味する。

また、(3.39)と(3.48)とは実質的に同じ解を与える。(3.39)は質量保存則と断熱条件の拘束条件に微分形である(3.21)と(3.22)を用いており、(3.48)は積分形である(3.1)と(3.2)を用いている。(3.39)と(3.48)の両者の未定定数には、(3.27)と(3.13)を見比べると $D_t K = \kappa$ が得られ、(3.28)と(3.14)を見比べると $D_t \Lambda = \lambda$ が得られる。これより未定乗数の $\kappa$ と $\lambda$ が積分定数の分だけの不定性があることが分かる。これは(2.42)のところで議論したように、 $\kappa$ と $\lambda$ の不定性はホロノミックな拘束条件を微分形で与えたために生じたものである。

ここでは完全流体は容器に閉じ込められたものとしたが、この条件を外して代わりに質量密度が十分遠方でゼロとなると仮定してもよい。また、ここで議論したことは相対論的な拡張が容易に可能である[9]。これについては付録Dで述べる。

## 第4章 散逸系の変分原理

完全流体の変分原理ではエントロピーは保存量であったので、比エントロピー  $s$  に関する式は (3.2) と (3.44) となり、ホロミックな拘束条件として与えることができた。しかしながら、散逸のある系ではエントロピー保存量ではなく履歴に依存する。したがって、散逸のある系ではエントロピーに関する条件は非ホロミックな拘束条件となる。

散逸系の変分原理の簡単な例として減衰振動子について説明し、その次に粘性流体の変分原理について議論する。本章は Fukagawa & Fujitani(2012)[10] で発表した内容に基づく。

### 4.1 減衰調和振動子

2.1 節と同様に質量  $m$  の振動子がばね定数  $k$  のバネに繋がれているとする。時刻  $t$  での振動子の位置を  $X(t)$  とし、速度を  $dX(t)/dt$  とする。散逸のない調和振動子では一度振動したら永久に運動を続けるが、現実的には摩擦抵抗  $f$  が振動子に働き、振動子のエネルギーは散逸し熱になり、減衰振動になる。調和振動子が熱浴中にあれば、振動子が散逸したエネルギーは熱浴のエネルギー  $E_{\text{bath}}$  に加わる。したがって、これと振動子の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの総和は定数となる。

$$E_{\text{total}} \equiv \frac{1}{2}m \left( \frac{dX}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}kX^2 + E_{\text{bath}} = \text{一定値} \quad (4.1)$$

ラグランジアンを (2.5) を満たすように定める。

$$L \equiv \frac{1}{2}m \left( \frac{dX}{dt} \right)^2 - \left( \frac{1}{2}kX^2 + E_{\text{bath}} \right) \quad (4.2)$$

次に作用積分を (4.2) の時間積分で与える。

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left\{ \frac{1}{2}m \left( \frac{dX}{dt} \right)^2 - \left( \frac{1}{2}kX^2 + E_{\text{bath}} \right) \right\} \quad (4.3)$$

(4.3) の変分を計算すると

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left\{ \left( -m \frac{d^2X}{dt^2} - kX \right) \delta X - \delta E_{\text{bath}} \right\} = 0 \quad (4.4)$$

となる。初期時刻  $t_{\text{init}}$  から終端時刻  $t_{\text{fin}}$  の間に振動子が熱浴に散逸したエネルギー  $\Delta E_{\text{bath}}$  は

$$\Delta E_{\text{bath}} \equiv \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left( -f \frac{dX}{dt} \right) \quad (4.5)$$

となり、 $X$  の履歴に依存している。したがって、 $\delta X$  と  $\delta E_{\text{bath}}$  は独立ではない。また、 $E_{\text{bath}}$  は  $X$  の履歴に依存していることから  $E_{\text{bath}}$  と  $X$  の関係はホロノミックな拘束条件で与えることができない。(4.5) より、

$$\frac{dE_{\text{bath}}}{dt} + f \frac{dX}{dt} = 0 \quad (4.6)$$

を得る。実現される軌道が (4.6) を満たすことから、次の非ホロノミックな拘束条件を得る。

$$\delta E_{\text{bath}} + f \delta X = 0 \quad (4.7)$$

(4.7) を (4.4) 代入すると運動方程式が得られる。

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -kX + f \quad (4.8)$$

(2.4), (4.1), (4.2), (4.8) より

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{total}}}{dt} &= \left( \frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) \frac{dX}{dt} - \frac{dE_{\text{bath}}}{dt} \\ &= -f \frac{dX}{dt} - \frac{dE_{\text{bath}}}{dt} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

を得る。したがって、(4.8) はエネルギー保存則 (4.1) が満たされるときに、確かに (4.6) を満たす。つまり、非ホロノミックな拘束条件 (4.7) の下で作用積分 (4.3) を極小にする軌道は (4.6) を満たすことが分かる。散逸は常に正であるので、(4.6) の左辺第二項は負でなくてはならない。摩擦力  $f$  が  $dX/dt$  に比例するときは、 $\zeta$  を摩擦係数として

$$f = -\zeta \frac{dX}{dt} \quad (4.10)$$

となる。これは粘弾性流体におけるバネとダッシュポットを並列に並べたケルビンフォークトモデルとみなすことができる。一方、バネとダッシュポットを直列に並べたモデルはマクスウェルモデルと呼ばれ、これについては4.4節で議論する。

熱浴のエントロピーを  $S$  とすると、熱浴のエネルギー  $E_{\text{bath}}$  はエントロピー  $S$  の関数であり、次が成立する。

$$\frac{dE_{\text{bath}}}{dt} = T \frac{dS}{dt} \quad (4.11)$$

$$\delta E_{\text{bath}} = T \delta S \quad (4.12)$$

ここで  $T$  は  $T \equiv dE_{\text{bath}}/dS$  で定義される熱浴の温度である。

一般に、散逸は物理量の経路に依存するが、変数の決め方、つまり一般座標  $q$  のとり方には依存しない。したがって (4.5) の右辺は線積分となり、一般座標  $q$  を用いた場合は

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left( -f' \frac{dq}{dt} \right) \quad (4.13)$$

と書ける。なお、 $q = q(X)$  となるとき、

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dX} \frac{dX}{dt} \quad (4.14)$$

の関係があるので、(4.5) の右辺と (4.13) を見比べれば、 $f = f' dq/dX$  となることが分かる。ここで改めて  $f'$  を  $f$  と定めて (4.11) を用いれば (4.6) は

$$T \frac{dS}{dt} + f \frac{dq}{dt} = 0 \quad (4.15)$$

となり、(4.12) を用いれば、(4.7) は

$$T\delta S + f\delta q = 0 \quad (4.16)$$

となる。

本節で示した方法は、次のように一般化することができる。非ホロミックな拘束条件

$$f_1 \delta q_1 + f_2 \delta q_2 = 0 \quad (4.17)$$

が与えられたとき、2.4.1 節と同様の手続きより、 $\Lambda$  を変数、 $i = 1, 2$  として

$$\left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = -\Lambda f_i \quad (4.18)$$

を得る。この式の両辺に  $\dot{q}_i$  を掛けてその和を足し、恒等式 (2.4) 及びラグランジアンが (2.5) を満たすように定められたことを考慮する。

$$\frac{d}{dt} E_{\text{total}} = -\Lambda f_i \dot{q}_i \quad (4.19)$$

を得る。ここで全エネルギーは保存するので  $dE_{\text{total}}/dt = 0$  となり、(4.19) の左辺はゼロになり、得られる軌道は確かに

$$f_1 \dot{q}_1 + f_2 \dot{q}_2 = 0 \quad (4.20)$$

を満たす。したがって、変分原理から導出した軌道が (4.20) を満たすためには拘束条件 (4.17) を課せばよいことが分かる [34].



## 4.2 粘性流体

粘性流体の運動を変分原理によって求める．運動している流体は系全体としては熱力学的な平衡状態にないが局所平衡状態にあり，比エントロピー  $s$  に対して次の時間発展方程式を満たす．

$$\rho T D_t s - \Theta + \nabla \cdot \mathbf{J}_q = 0 \quad (4.21)$$

ここで  $\Theta$  は単位体積あたりの発熱量を表す散逸関数であり， $\mathbf{J}_q$  は単位面あたりに流れ込む熱流である．単純のため，外部への熱流はないとする．(3.20) の代わりに境界面  $\partial V$  では流れがないとする．

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial V \quad (4.22)$$

したがって，境界面では摩擦による散逸はない．単位体積あたりに発生する熱量は

$$\Theta \equiv \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (4.23)$$

となる．ここで  $\sigma_{ij}$  は粘性応力テンソルである．(4.21) の空間積分を計算すると，部分積分により第二項は

$$\int_V d^3 \mathbf{x} \Theta = \int_V d^3 \mathbf{x} \left( -\frac{\partial \sigma_{ij} v_j}{\partial x_i} \right) + \int_{\partial V} d\hat{x}_i (\sigma_{ij} v_j) \quad (4.24)$$

となる．ここで  $\int_{\partial V} d\hat{x}_i$  は表面積分を表す．(4.22) より (4.24) の左辺第二項が消える．系全体を断熱壁で覆った場合では境界での熱流はゼロになるのでガウスの発散定理により (4.21) の第三項は消え，

$$\int_V d^3 \mathbf{x} \{ \rho T (\partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \} = 0 \quad (4.25)$$

を得る．ここで  $\mathbf{f} \equiv \nabla \cdot \sigma^T$  は散逸力であり， $T$  は転置を表す．ラグランジュ座標では

$$\int_V d^3 \mathbf{a} \left\{ J \left( \rho T \frac{\partial s}{\partial \tau} + \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \right) \right\} = 0 \quad (4.26)$$

と書ける．(4.16) と同様にして，非ホロノミックな拘束条件を得る．

$$\int_V d^3 \mathbf{a} \{ J (\rho T \delta s + \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{X}) \} = 0 \quad (4.27)$$

粘性流体ではこの拘束を断熱条件 (3.2) に変えて使う．完全流体の作用積分 (3.12) から断熱条件の項を抜くと，粘性流体の作用積分を得る．

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} d\tau \int_V d^3 \mathbf{a} \{ J \mathcal{L}(\rho, s, \mathbf{v}) + \boldsymbol{\gamma} \cdot (\partial_\tau \mathbf{X} - \mathbf{v}) + K(\rho J - \rho_{\text{init}}) \} \quad (4.28)$$

(4.28) の変数は  $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $K$ ,  $\rho$ ,  $s$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{X}$  となる．(4.3) から (4.8) を導出したように，非ホロノミックな拘束条件 (4.27) の下での作用 (4.28) の停留値条件を求めると (1.5), (3.1), (3.13), (3.15) と

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial a_j} \left\{ \rho \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \epsilon + K \right) \right\} \frac{\partial J}{\partial (\partial X_i / \partial a_j)} + J f_i \quad (4.29)$$

を得る. (3.13) と (3.15) を (4.29) に代入すると, 速度場は次の方程式を満たすことが分かる.

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + f_i \quad (4.30)$$

次にオイラー座標の場合について説明する. (3.37) より

$$v_j = -\frac{\partial x_j}{\partial A_i} \frac{\partial A_i}{\partial t} \quad (4.31)$$

を得る. これは  $\mathbf{x}(\mathbf{A}(t, \mathbf{x}), t) = \mathbf{x}$  の時間微分からも導出可能である. (4.31) を (4.25) に代入し, 時間微分  $\partial/\partial t$  を変分  $\delta$  にすることで非ホロノミックな拘束条件を得る.

$$\int_V d^3\mathbf{x} \rho T \delta s - \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \left( \rho T \frac{\partial s}{\partial x_j} + f_j \right) \cdot \delta A_i = 0 \quad (4.32)$$

粘性流体の作用積分を完全流体の作用積分 (3.48) から断熱条件の項を除いたもので与える.

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \int_V d^3\mathbf{x} \{ \mathcal{L}(\rho, s, \mathbf{v}) + \beta_i (\partial_t A_i + \mathbf{v} \cdot \nabla A_i) + K(\rho - \rho_{\text{init}} J^{-1}) \} \quad (4.33)$$

(4.33) の変数は  $\rho, \mathbf{v}, \mathbf{A}, s, \beta, K$  であり, この作用積分の停留値条件を非ホロノミックな拘束条件 (4.32) の下で解くと, (3.1), (3.13), (3.38), (3.49) と

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \beta_i + \nabla(\mathbf{v} \beta_i) &= \left( \rho \frac{\partial K}{\partial x_j} - \rho T \frac{\partial s}{\partial x_j} - f_j \right) \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \\ &= \left( -\frac{1}{2} \rho \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_j} - f_j \right) \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \end{aligned} \quad (4.34)$$

を得る. (3.38), (3.49), (4.34) から

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \right\} = -\nabla P + \mathbf{f} \quad (4.35)$$

を得る. 議論を簡便にするため境界面で流体が外部にする仕事はないものとしたが, 仕事があるとしても上記の結論は変わらない. 流体が外部にする仕事  $W$  は

$$W \equiv \int_{\partial V} d\hat{x}_i (T_{ij} v_j) = \int_V d^3x \partial_i (T_{ij} v_j) \quad (4.36)$$

となる. ここで  $T_{ij} \equiv p\delta_{ij} - \sigma_{ij}$  はストレステンソルを表す. (4.36) より,

$$\delta W = \int_V d^3x \partial_i \left( T_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial A_k} \delta A_k \right) \quad (4.37)$$

を得る. 外部にする仕事も考慮して変分問題を解くと (4.24) の表面積分の項と打ち消しあう. したがって, 変分原理によって導出される (4.35) は変更を受けない.

本節ではラグランジアン (1.4) と拘束条件である (3.1) と (4.21) から、変分原理を用いて (4.30) または (4.35) を得た。散逸のある流体の比エントロピー  $s$  に関する拘束条件 (4.21) は、非ホロノミックな拘束条件となっている。したがって、自由度は比エントロピー  $s$  と流体粒子の位置  $\mathbf{X}$  を合わせた 4 となる。また、散逸と非散逸ともに流体の運動は速度場  $\mathbf{v}$  によって決まるので、制御変数の数は 3 である。

変分原理によって導出した (4.30) または (4.35) では  $\mathbf{f} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T$  の具体的な形を与えていない。したがって、(4.30) または (4.35) は運動量のつりあいを表し、これらを運動量のつりあいの式と呼ぶことにする。流体では散逸が粘性によって起こるという散逸の基本的な性質が同じであっても、粘性応力テンソル  $\boldsymbol{\sigma}$  は流体を構成する物質により異なる。変分原理は散逸の仕組みが与えられたときに、その運動を導出するための一般的な枠組みを与えるものであり、流体の運動を記述する運動方程式を得るためには、散逸関数に含まれる粘性応力テンソル  $\boldsymbol{\sigma}$  をモデルや物質によって具体的に定める必要がある。

### 4.3 線形現象論

線形現象論を用いると以下のように粘性応力テンソル  $\boldsymbol{\sigma}$  がより具体的に定まる [43]。流体が運動しているとき散逸関数  $\Theta$  は  $\partial v_j / \partial x_i$  の関数である。また、エントロピー増大法則により系全体で散逸関数  $\Theta$  の値は常に正である。したがって、散逸関数  $\Theta$  は低次では  $\partial v_j / \partial x_i$  の二次の関数になり、粘性応力テンソル  $\sigma_{ij}$  は変形速度テンソル  $\partial v_j / \partial x_i$  の一次の関数となる。流体が等方的であるとき、粘性応力テンソル  $\sigma_{ij}$  は

$$\sigma_{ij} \equiv \zeta \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \quad (4.38)$$

となる。ここで  $\zeta$  と  $\eta$  はそれぞれ体積粘性率とずり粘性率であり、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。(4.38) のように  $\partial v_j / \partial x_i$  と粘性応力テンソル  $\sigma_{ij}$  の関係を与える方程式を構成方程式という。構成方程式が (4.38) で与えられた流体をニュートン流体と呼び、このとき、摩擦力  $\mathbf{f} \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T$  は

$$\mathbf{f} = \left( \frac{\eta}{3} + \zeta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \eta \Delta \mathbf{v} \quad (4.39)$$

となる [18, 19]。また、粘性応力テンソル  $\sigma_{ij}$  が対称テンソルであるとき、散逸関数 (4.23) は

$$\Theta \equiv \sigma_{ij} e_{ij} \quad (4.40)$$

と書ける。ここで  $e_{ij}$  は変形速度テンソルである。

$$e_{ij} \equiv (\partial_j v_i + \partial_i v_j) / 2 \quad (4.41)$$

## 4.4 粘弾性流体

粘弾性流体の変分原理について議論する．粘弾性の運動方程式を導出する試みとしては，レイリーの方法を使ったものがある [24]．1.2.3 節で述べたようにレイリーの方法では慣性項と散逸項を別々に扱うので，弾性と散逸の関係を記述することが難しい．一方，4.2 節での変分原理を粘弾性流体に適用すれば，このような分離は起こらず，弾性と散逸の関係も変分原理を使って導出できる． $E_{ij}$  を弾性部分の変形テンソル， $\check{\sigma}_{ij}$  を粘性部分の応力テンソルとする．なお， $\check{\sigma}_{ij}$  は対称テンソルであるとする．単位質量あたりの内部エネルギー  $\epsilon_e$  は  $\rho$ ， $s$ ， $E_{ij}$  の関数である．これより次を得る．

$$d\epsilon_e = -Pd\rho^{-1} + Tds + \rho^{-1}\kappa_{ij}dE_{ij} \quad (4.42)$$

ここで  $\kappa_{ij}$  は弾性係数である．粘性部分の変形速度テンソルを次で定義する．

$$\check{e}_{ij} \equiv e_{ij} - (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla)E_{ij} \quad (4.43)$$

散逸関数 (4.40) の右辺を  $\check{\sigma}_{ij}\check{e}_{ij}$  に変えると (4.21) より次を得る．

$$\int_{\mathbf{V}} d^3\mathbf{x} \{ \rho T (\partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s) + (\partial_k \check{\sigma}_{jk} + \check{\sigma}_{kl} \partial_j E_{kl}) v_j + \check{\sigma}_{ij} \partial_t E_{ij} \} = 0 \quad (4.44)$$

4.2 節と同じように計算すると，次の非ホロノミックな拘束条件を得る．

$$\int_{\mathbf{V}} d^3\mathbf{x} \left\{ \rho T \delta s - \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \left( \rho T \frac{\partial s}{\partial x_j} + \frac{\partial \check{\sigma}_{jk}}{\partial x_k} + \check{\sigma}_{kl} \frac{\partial E_{kl}}{\partial x_j} \right) \cdot \delta A_i + \check{\sigma}_{ij} \delta E_{ij} \right\} = 0 \quad (4.45)$$

ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_e(\rho, \mathbf{v}, s, E_{ij}) \equiv \rho \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \epsilon_e(\rho, s, E_{ij}) \right\} \quad (4.46)$$

となり，(4.33) の  $\mathcal{L}$  を  $\mathcal{L}_e$  に変えると，粘弾性流体の作用を得る． $\delta A_i$  についての変分を計算すると (3.50) を得たのと同様に (4.45) を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta_i = -\nabla \cdot (\beta_i \mathbf{v}) + \left( \rho \frac{\partial K}{\partial x_j} - \rho T \frac{\partial s}{\partial x_j} - \frac{\partial \check{\sigma}_{jk}}{\partial x_k} - \check{\sigma}_{kl} \frac{\partial E_{kl}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \quad (4.47)$$

を得る．ここでエンタルピーが (3.7) で与えられ，(4.42) より

$$\nabla h = \frac{\nabla P}{\rho} + T \nabla s + \rho^{-1} \kappa_{ij} \nabla E_{ij} \quad (4.48)$$

となる．(3.13) と (4.48) より (4.47) は

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta_i = -\nabla \cdot (\beta_i \mathbf{v}) + \left( -\frac{1}{2} \rho \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_j} - \frac{\partial \check{\sigma}_{jk}}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \quad (4.49)$$

となる．後は4.2節と同様に計算すると，運動量のつりあいの式として(4.35)の  $\mathbf{f} \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T$  を  $\nabla \cdot \check{\boldsymbol{\sigma}}^T$  で置き換えたものを得る．また， $\delta E_{ij}$  の変分を計算すると粘性部分の応力テンソル  $\check{\sigma}_{ij}$  と弾性係数  $\kappa_{ij}$  が等しいことが分かる．

$$\check{\sigma}_{ij} = \kappa_{ij} \quad (4.50)$$

線形現象論の範囲では  $\check{\sigma}_{ij}$  は  $\check{e}_{ij}$  に， $\kappa_{ij}$  は  $E_{ij}$  に線形である．このとき，(4.50)より弾性部分の変形テンソル  $E_{ij}$  が粘性部分の変形速度テンソル  $\check{e}_{ij} \equiv e_{ij} - (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla)E_{ij}$  と線形の関係にあることが分かる．これはマクスウェルモデルの粘弾性流体になる[36, 37]．このように線形現象論を用いて  $\check{\sigma}_{ij}$  と  $\kappa_{ij}$  が具体的に定まれば，(4.50)より弾性部分の変形テンソル  $E_{ij}$  の運動方程式が具体的に定まる．

(4.43)の右辺第二項は弾性部分の変形テンソル  $E_{ij}$  がどのように流跡線に沿って変化するかを表している．このような時間変化を考える場合は，物理量が共変か反変か，または混合テンソルなのかを考慮しなくてはならない．変形速度テンソルが混合テンソルで与えられる場合は(4.42)の最終項は  $\rho^{-1} \kappa_i^j dE_j^i$  と書くべきである．もし，(4.43)内の  $\check{e}_{ij}$ ， $e_{ij}$ ， $E_{ij}$  がそれぞれ混合テンソル  $\check{e}_j^i$ ， $e_j^i$ ， $E_j^i$  であるのならば，これらに二階の反変対称テンソルである計量テンソル  $g^{ij}$  を掛けることにより，反変テンソルである  $E^{ij}$  を得ることができる．反変テンソルである  $E^{ij}$  の物質時間微分は upper convected time derivative で書かれる．それゆえに，ここで考えたモデルは線形現象内での upper convected Maxwell type と同じである[21]．なお，歪みテンソルの物質時間微分については，付録B.4で説明する．本節ではオイラー座標で議論をしたが，ラグランジアン座標でも4.2節にあるようにすれば同様に計算できる．

## 4.5 高分子溶液

高分子溶液の変分原理について議論する．高分子溶液の運動方程式を変分原理から導出する方法としては，オンサーガーの変分原理を使ったものがある [17, 20, 21, 23]．しかしながら，オンサーガーの変分原理では慣性項の導出はできない．本節では4.2節での変分原理が高分子溶液にも適用できることを示し，慣性項のある高分子溶液の運動方程式が導けることを示す．なお，単純のため，高分子の持つ弾性と流体全体としての摩擦は無視した．また，相互拡散についての考察は本節とは別に付録Cにて議論する．

溶質  $a$  と溶媒  $b$  の質量密度をそれぞれ  $\rho_a$  と  $\rho_b$  とする．質量密度の合計を  $\rho \equiv \rho_a + \rho_b$  とし，溶質  $a$  の質量分率を  $\psi \equiv \rho_a/\rho$  とする．化学ポテンシャルを単質量あたりのギブスエネルギーと定め， $\mu$  を成分  $b$  の化学ポテンシャルから成分  $a$  の化学ポテンシャルを引いたものだと定義する．単位質量あたりの内部エネルギーは  $\rho_a, \rho_b, s$  の関数  $\epsilon(\rho_a, \rho_b, s)$  である．したがって，次を得る．

$$d\epsilon = \frac{P}{\rho^2} d\rho + \mu d\psi + T ds \quad (4.51)$$

これは

$$d\rho = d\rho_a + d\rho_b \quad (4.52)$$

と

$$d\psi = \frac{1-\psi}{\rho} d\rho_a - \frac{\psi}{\rho} d\rho_b \quad (4.53)$$

を使って， $d\rho_a, d\rho_b, ds$  をつかって書き換えることができる．成分  $a$  と  $b$  の速度場をそれぞれ  $\mathbf{v}_a$  と  $\mathbf{v}_b$  とし，ラグランジュ座標をそれぞれ  $\mathbf{A}_a$  と  $\mathbf{A}_b$  とし，(3.45) と (4.31) に対応して，

$$J_c^{-1} = \frac{\partial(A_{c1}, A_{c2}, A_{c3})}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \quad (4.54)$$

と

$$v_{cj} = -\frac{\partial x_{cj}}{\partial A_{ci}} \frac{\partial A_{ci}}{\partial t} \quad (4.55)$$

を得る．ここで  $c$  は  $a$  または  $b$  である．質量平均速度場は  $\mathbf{v} \equiv \psi \mathbf{v}_a + (1-\psi) \mathbf{v}_b$  となり，ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_{ps}(\rho_a, \rho_b, s, \mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b) \equiv \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 - \rho \epsilon(\rho_a, \rho_b, s) \quad (4.56)$$

とる．単純のため，高分子の弾性を無視する．もちろん，前節のようにすれば考慮することは可能である．散逸に関する式は

$$\rho T (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) s + \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b) + \nabla \cdot \mathbf{J}_q = 0 \quad (4.57)$$

となる．ここで  $\boldsymbol{\xi}$  は成分  $a$  と  $b$  の間の摩擦力である．なお，ここでは相互拡散 [21] を無視しており，これについては付録Cにて議論する．(4.45) を導いた時と同様の方法を使って，

$$\int_V d^3\mathbf{x} \rho T \delta s = \sum_{c=a,b} \int_V d^3\mathbf{x} \frac{\partial x_{cj}}{\partial A_{ci}} \left( \rho_c T \frac{\partial s}{\partial x_j} + \xi_{cj} \right) \delta A_{ci} \quad (4.58)$$

を得る．ここで  $c$  は  $a$  または  $b$  であり， $\boldsymbol{\xi}_a$  と  $\boldsymbol{\xi}_b$  は  $\boldsymbol{\xi}_a = -\boldsymbol{\xi}_b = \boldsymbol{\xi}$  をみたすように定めた．4.2 節と同様にして，作用積分を次で与える．

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \int_V d^3\boldsymbol{x} \left[ \mathcal{L}_{ps} + \sum_{c=a,b} \{ \beta_{ci} (\partial_t A_{ci} + \boldsymbol{v}_c \cdot \nabla A_{ci} + K_c (\rho_c - \rho_{c \text{ init}} J_c^{-1})) \} \right] \quad (4.59)$$

(4.59) の変数は  $\rho_c$ ,  $s$ ,  $\boldsymbol{v}_c$ ,  $\boldsymbol{A}_c$ ,  $\beta_c$ ,  $K_c$  であり， $\rho_{c \text{ init}}$  は初期時刻でのそれぞれの成分の質量密度である．非ホロミックな拘束条件 (4.58) を課して，停留値条件を求めると

$$\rho_c \boldsymbol{v} + \beta_{ci} \nabla A_{ci} = \mathbf{0} \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta_{ci} = -\nabla \cdot (\beta_{ci} \boldsymbol{v}_c) + \left( \rho_c \frac{\partial K_c}{\partial x_j} - \rho_c T \frac{\partial s}{\partial x_j} - \xi_{cj} \right) \frac{\partial x_{cj}}{\partial A_{ci}} \quad (4.61)$$

$$K_c = \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{v}_c \cdot \boldsymbol{v} \right) + \epsilon + \frac{P}{\rho} + \mu_c \left( 1 - \frac{\rho_c}{\rho} \right) \quad (4.62)$$

ここで  $\mu_a$  と  $\mu_b$  は  $\mu_a = -\mu_b = \mu$  をみたす．4.2 節と同様に計算して，それぞれの成分の運動量のつりあいの式を得る．

$$\rho_c \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{v} + \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{v}_c \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) \right\} = -\frac{\rho_c}{\rho} \nabla P + \frac{\rho_a \rho_b}{\rho} \nabla \mu_c + \boldsymbol{\xi}_c \quad (4.63)$$

それぞれ  $a$  成分と  $b$  の成分の運動のつりあいの式 (4.63) を合計すると (3.30) を得る．これは全体の運動のつりあいの式になっている．なお，圧力  $P$  は (4.51) より，(3.5) で与えられる．ただし偏微分の際に，さらに  $\psi$  も固定することになる．オイラー座標での計算を示したが，4.2 節のようにラグランジュ座標で行うこともできる．本節では，混合によるエントロピーの増加を考慮しなかったが，これを考慮した二成分溶液の変分原理については，付録 C で議論する．

## 4.6 変分原理と非平衡熱力学

非平衡系を扱う枠組みとしては非平衡熱力学がある．流体にこれを適用すると，エネルギー保存則 (3.9)，質量保存 (3.21) 及び運動量のつりあいの式 (4.35) から，熱力学第一法則 (3.3) を用いてエントロピー生成に関する式 (4.21) を得る．つまり，非平衡熱力学では，予めエネルギー保存則 (3.9) と運動量のつりあいの式 (4.35) が分かっている必要があり，更に散逸に関して等方性と線形性を仮定することにより運動方程式を導出する [38]．

本章で述べた変分原理では，完全流体の時と同じラグランジアン密度から出発し，質量保存等のホロノミックな拘束条件と散逸のしかたを規定する非ホロノミックな拘束条件を決め，運動量のつりあいの式を導きだす．これに，例えば線形の構成方程式を補完すれば，速度場の時間発展方程式がとじた形で得られる．

高分子溶液や液晶といったソフトマター分野で議論される複雑な内部構造をもった流体では，速度場の時間発展を矛盾なく記述することが難しいことがある．その場合でも上記の拘束条件は得ることは比較的容易であることがしばしばであり，いろいろ限界はあるものの，従来の変分原理を用いて，見通しよく時間発展方程式を導けることが知られている．本章で整備した変分原理を使えば，そのような限界を超えてさらに見通しよく時間発展方程式を導ける．



## 第5章 ハミルトン形式

流体のハミルトン形式について議論する．最初に5.1節で制御理論の観点からハミルトン形式を導出し，流体にこれを適用する．次に5.2節で対称性と保存則の関係について議論する．

### 5.1 制御理論の観点からのハミルトン形式

システムの状態を変数  $q$  で表し，初期時刻と終端時刻での状態を指定する．この初期時刻と終端時刻での条件 (2.52) は，制御理論では横断条件と呼ばれている．状態  $q$  は入力  $u$  で制御され，その時間発展が (2.51) に従うとする．評価関数  $L$  を状態  $q$ ，入力  $u$ ，変数  $S$  の関数であるとする．変数  $S$  は散逸系ではエントロピーを表す．評価を次で定義する．

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt L(q, u, S) \quad (5.1)$$

拘束条件を (2.51) と (4.16) とする．ここで  $T$  を  $T \equiv -\partial L / \partial S$  とする．これらの拘束条件の下で評価 (5.1) を最小にする最適制御  $u^*$  を求める．(2.51) に関して未定乗数法を用いる．未定乗数を  $p$  とすれば， $q$ ， $u$ ， $S$ ， $p$  の汎関数として次を得る．

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left\{ L(q, u, S) + p \left( \frac{dq}{dt} - F(q, u) \right) \right\} \quad (5.2)$$

制御理論においては，未定乗数項  $p$  は余状態と呼ばれている． $q, p, S$  が与えられたもとの (5.2) を極小にする入力を  $u^\sharp(q, p, S)$  とする． $\tilde{H} \equiv -L(q, u, S) + pF(q, u)$  とすると  $u = u^\sharp(q, p, S)$  で  $\partial \tilde{H} / \partial u = 0$  となる．ハミルトニアンを

$$H(q, p, S) \equiv \tilde{H}(q, u^\sharp(q, p, S), p, S) \quad (5.3)$$

で定める． $u^\sharp(q, p, S)$  を (5.2) に代入すると  $q$ ， $p$ ， $S$  の汎関数として次を得る．

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left\{ -H(q, p, S) + p \frac{dq}{dt} \right\} \quad (5.4)$$

多くの場合では  $\partial^2 L / (\partial S \partial u) = 0$  とでき， $u^\sharp$  は  $q$  と  $p$  の関数となる．この時，

$$\frac{\partial H}{\partial S} = -\frac{\partial L}{\partial S} = T \quad (5.5)$$

が成り立つ。(2.52), (4.16), (5.5) の下で (5.4) の停留値を与える条件から, 修正されたハミルトン方程式として, (4.15),

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (5.6)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} + f \quad (5.7)$$

を得る。(5.6) と (5.7) を満たす  $q, p, S$  を  $u^\sharp(q, p, S)$  代入すれば最適入力  $u^*$  を得ることができる。(5.6) と (5.7) より  $dH/dt = 0$  を得る。これは散逸系では, エネルギー保存則を意味する。また, 散逸がない系では  $f = 0$  より, (5.6) と (5.7) は正準方程式になる。

次に 4.2 節で議論した粘性流体に, このハミルトン形式を適用する。オイラー座標では, 状態, 余状態, エントロピー, 入力はそれぞれ  $A, \beta, s, \mathbf{v}$  となる。(2.51) に対応して, 状態方程式は (3.37) で与えられる。 $\tilde{H}$  に対応する関数は

$$\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{A}, \mathbf{v}, \beta, s) \equiv -\rho \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \epsilon(\rho, s) \right\} + \beta_i \mathbf{v} \cdot \nabla A_i \quad (5.8)$$

となる。ここでは, 未定乗数  $K$  を導入する代わりに,  $\rho$  を (3.43) より  $\mathbf{A}$  と  $\partial_j A_i$  の関数とみなしている。 $\mathbf{v}^\sharp(\mathbf{A}, \beta, s)$  を  $u^\sharp$  に対応する入力とすると, ハミルトニアンは, 運動エネルギー密度と内部エネルギー密度の和として与えられる。

$$\mathcal{H}(\mathbf{A}, \beta, s) \equiv \rho \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{v}^{\sharp 2} + \epsilon(\rho, s) \right\} \quad (5.9)$$

ここで  $\mathbf{v}^\sharp$  は (3.49) を満たす。流体では場を扱うので, ハミルトン方程式を導出する際には, 例えば (5.6) の  $\partial/\partial q$  を

$$\frac{\delta}{\delta A_i} \equiv \frac{\partial}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial (\partial_j A_i)} \quad (5.10)$$

に変える必要がある。例えば, 粘性流体の修正されたハミルトン方程式は (4.21) と

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \beta_i} \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta A_i} + f_i \quad (5.12)$$

になる。ここで (5.11) と (5.12) は  $\mathbf{v}$  を  $\mathbf{v}^\sharp$  に変えてそれぞれ (3.37) と (4.34) で与えられる。ラグランジュ座標では  $\mathbf{v}^\sharp$  は (3.15) を満たし, (5.11) と (5.12) はそれぞれ (1.5) と (3.16) の  $\mathbf{v}$  を  $\mathbf{v}^\sharp$  に変えて得られる。また, 完全流体の場合は  $\mathbf{f} = 0$  となり, 比エントロピー  $s$  は  $A$  の関数になる。したがって, 完全流体の運動方程式は (3.37) と (3.50) になる。なお,  $\mathbf{v}$  は (3.49) を満たすものとする。このとき, 完全流体の運動方程式は

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \beta_i} \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta A_i} \quad (5.14)$$

の (5.13) 形で書け, 文献 [6, 8] で提案されたものと同様なハミルトンの正準方程式となる [9]. なお, 運動方程式が (5.13) と (5.14) の形で書けるとき, 運動方程式を正準なハミルトン形式と呼ぶ. 本研究では速度場を制御とみなすことで速度場に対して共役な量を定める必要がなくなった. 完全流体の場合については, それは正準方程式になった. 速度場に対して共役な量を形式的に導出した場合, (5.13) と (5.14) の形にならず, 正準方程式を得ることができない [26, 27, 28, 29, 30]. 完全流体運動方程式が正準方程式にならないような定式化はヘリシティ保存則などのカシミア不変量による余分な保存則が課せられることが指摘されている [8]. 完全流体でヘリシティが保存されるのは, 圧力が密度のみの関数であるバロトロピック流体やエントロピーが一様である等エントロピー流体に限られる. このように完全流体においては, 余分な拘束条件を課して正準方程式を得られない定式化は, その分記述できる流体の運動は限られたものにする.

境界に摩擦があるときは, ハミルトニアンに境界面で流体がした仕事  $W$  を加えたものをハミルトニアンとして再定義する.

$$H \equiv W + \int_V d^3\mathbf{x} \mathcal{H} \quad (5.15)$$

(4.36) で論じた理由から, 再び修正されたハミルトン方程式として, (4.21), (5.11), (5.12) を得る. 本節で示したハミルトン形式は, ポントリャーギンの最適制御理論 [39, 40] をエントロピーを含むように拡張したものである. この観点に立つと速度場は系への入力とみなすことができ, 実現される速度場は拘束条件の下で評価関数を極小にする「最適入力」とみなせる.

## 5.2 対称性

5.1節でのハミルトン形式におけるネーターの定理について議論する．ある系が修正したハミルトン方程式 (4.15), (5.6), (5.7) で記述されるとする．ここで変数の組  $(q, p, S)$  を  $(q_0, p_0, S_0)$  と書き，ハミルトニアン  $H(q, p, S)$  を  $H_0(q_0, p_0, S_0)$  と書くことにする．変数の組を  $(q_0, p_0, S_0)$  を別の変数の組  $(q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha)$  に変換することを考える．実現される軌道  $(q_0(t), p_0(t), S_0(t))$  からこの変換によって得られる軌道を  $(q_\alpha(t), p_\alpha(t), S_\alpha(t))$  とする．新しいハミルトニアンを  $H_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha)$  と書くことにする．変数変換  $(q_0, p_0, S_0) \rightarrow (q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha)$  が正準変換であるとは，変数の組  $(q_0, p_0, S_0)$  に対しても修正したハミルトン方程式 (4.15), (5.6), (5.7) が成立することである．系に対称性があるとは，正準変換をしたときに  $H_\alpha(q, p, S) = H_0(q, p, S)$  が成立することであると定める．変数変換  $(q_0, p_0, S_0) \rightarrow (q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha)$  により (5.4) をある関数  $\bar{G}$  を用いて

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left\{ -H_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha) + p_\alpha \frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{d\bar{G}}{dt} \right\} \quad (5.16)$$

の形に変形することができれば

$$\delta \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \{ p_\alpha \dot{q}_\alpha - H_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha) \} = 0 \quad (5.17)$$

より， $(q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha)$  が修正したハミルトン方程式 (4.15), (5.6), (5.7) を満たすことが分かる．逆に変数変換  $(q_0, p_0, S_0) \rightarrow (q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha)$  が正準変換であるのならば，(5.4) は (5.16) の形にできる．

これを背理法で示す．正準変換によって (5.4) が (5.16) 以外の形で書けたとする．

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left\{ -H_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha) + p_\alpha \frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{d\bar{G}}{dt} - M \right\} \quad (5.18)$$

ここで  $M$  は非可積分の関数であり， $d\bar{G}/dt$  の中に繰り込むことができないとする．(5.18) より

$$\delta \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \{ p_\alpha \dot{q}_\alpha - H_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha) \} = \delta \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt M \neq 0 \quad (5.19)$$

となり (5.17) が成立しない．したがって， $(q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha)$  は修正したハミルトン方程式 (4.15), (5.6), (5.7) を満たさない．これは変数変換  $(q_0, p_0, S_0) \rightarrow (q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha)$  が正準変換であることと矛盾する．

(5.4) と (5.16) は比例していれば良く，必ずしも等しい必要はないが，(5.4) と (5.16) は等しいとしても一般性を失うことはない．もとの (5.4) を定数倍し，これを改めて (5.4) とすれば，(5.4) と (5.16) は等しくなる．

次に連続な変数  $\alpha$  によって定まる正準変換  $(q_0, p_0, S_0) \rightarrow (q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha)$  が与えられた場合について考える． $\bar{G}$  を  $q_0 p_\alpha + \alpha G$  と置く．ここで  $G(q_0, p_\alpha, S_0, t)$  は母関数と呼ばれる．上記の議論より

$$\begin{aligned} & \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \{ p_0 \dot{q}_0 - H_0(q_0, p_0, S_0) \} \\ &= \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left\{ p_\alpha \dot{q}_\alpha - H_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha) + \frac{d}{dt} (q_0 p_\alpha + \alpha G) \right\} \end{aligned} \quad (5.20)$$

を得る. 連続な変数  $\alpha$  が十分小さい時は (4.15) と (2.52) を使うと (5.20) より

$$\delta q \equiv q_\alpha - q_0 = \alpha \frac{\partial G}{\partial p_0} \quad (5.21)$$

$$\delta p \equiv p_\alpha - p_0 = \alpha \left( -\frac{\partial G}{\partial q_0} + \frac{f}{T} \frac{\partial G}{\partial S_0} \right) \quad (5.22)$$

$$H_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha) - H_0(q_0, p_0, S_0) = \alpha \frac{\partial G}{\partial t} \quad (5.23)$$

を得る. ここで,  $\delta S \equiv S_\alpha - S_0$  は (4.16) から定まるとし,  $G$  は  $G(q_0, p_0, S_0, t)$  を表す. (5.5), (5.6), (5.7) から

$$\begin{aligned} H_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha) &= H_\alpha(q_0, p_0, S_0) + \frac{\partial H}{\partial q} \delta q + \frac{\partial H}{\partial p} \delta p + \frac{\partial H}{\partial S} \delta S \\ &= H_\alpha(q_0, p_0, S_0) + \left( -\frac{dp}{dt} + f \right) \delta q + \frac{dq}{dt} \delta p + T \delta S \end{aligned} \quad (5.24)$$

を得る. ここで (4.16) より,

$$H_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha) = H_\alpha(q_0, p_0, S_0) - \frac{dp}{dt} \delta q + \frac{dq}{dt} \delta p \quad (5.25)$$

となり, (5.21) と (5.22) を用いると

$$H_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, S_\alpha) = H_\alpha(q_0, p_0, S_0) - \alpha \left( \frac{dp}{dt} \frac{\partial G}{\partial p} + \frac{dq}{dt} \frac{\partial G}{\partial q} + \frac{dS}{dt} \frac{\partial G}{\partial S} \right) \quad (5.26)$$

を得る. (5.26) を (5.23) に代入すると

$$H_\alpha(q_0, p_0, S_0) - H_0(q_0, p_0, S_0) = \alpha \frac{dG}{dt} \quad (5.27)$$

となる. したがって, 母関数  $G$  によって生成される正準変換の下で  $H$  が不変, すなわち  $H_\alpha = H_0$  であるならば, 母関数  $G$  が保存量となることが分かる. つまり, 系に対称性があるならば, それぞれの対称性に応じた保存則が存在する. 逆に保存則があれば, 正準変換を (5.21) と (5.22) で定めることにより,  $H_\alpha = H_0$  を得る. つまり対称性が存在する. (4.15), (5.6), (5.7) から  $H$  自身は無限小時間並進の母関数になる.

### 5.3 流体の対称性

流体の対称性について議論する．5.1節で議論したように，流体のハミルトニアン密度は(5.9)より $\mathcal{H}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}, s)$ で与えられる．変数 $\mathbf{A}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $s$ はそれぞれ状態，余状態，比エントロピーであり，それぞれ $(t, \mathbf{x})$ の関数である．系全体のハミルトニアンは(5.15)となる．(5.27)と同様にして， $\mathcal{G}(\mathbf{A}, \partial_i A_j, \boldsymbol{\beta}, s, t')$ を母関数とする．ここで $t' = t$ とする． $\mathcal{G}$ の時間微分は

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = \frac{\partial A_i}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial A_i} + \frac{\partial \nabla A_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nabla A_i} + \frac{\partial \beta_i}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \beta_i} + \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t'} \quad (5.28)$$

となる．ここで $\partial \mathcal{G} / \partial t'$ の偏微分の際には $\mathbf{A}, \partial_i A_j, \boldsymbol{\beta}, s$ が固定されていることに注意する．(5.28)の右辺の第一項と第二項は

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial A_i} + \frac{\partial \nabla A_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nabla A_i} &= \frac{\partial A_i}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial A_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nabla A_i} \right) + \nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathcal{G}} \\ &= \frac{\partial A_i}{\partial t} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta A_i} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathcal{G}} \end{aligned} \quad (5.29)$$

と変形することができる．ここで $\mathbf{J}_{\mathcal{G}}$ は次で定義した．

$$(J_{\mathcal{G}})_i \equiv \frac{\partial A_j}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial (\partial_i A_j)} \quad (5.30)$$

したがって，(5.28)は

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = \frac{\partial A_i}{\partial t} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta A_i} + \frac{\partial \beta_i}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \beta_i} + \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t'} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathcal{G}} \quad (5.31)$$

となる．(5.22)，(5.21)，(5.23)を得たのと同様にして次を得る．

$$\delta A_i = \alpha \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \beta_i} \quad (5.32)$$

$$\delta \beta_i = \alpha \left( -\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta A_i} + \frac{f_i}{T} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s} \right) \quad (5.33)$$

$$\mathcal{H}_\alpha(\mathbf{A}_\alpha, \boldsymbol{\beta}_\alpha, s_\alpha) - \mathcal{H}_0(\mathbf{A}_0, \boldsymbol{\beta}_0, s_0) = \alpha \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (J_{\mathcal{G}})_i + T_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial A_k} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \beta_k} \right) \right\} \quad (5.34)$$

ここで $\delta s = s_\alpha - s_0$ は(4.32)をみたし， $\delta W$ が(4.37)を満たすことを考慮した．(5.27)を得たのと同様にして

$$\int_V d^3 \mathbf{x} \{ \mathcal{H}_\alpha(\mathbf{A}_0, \boldsymbol{\beta}_0, s_0) - \mathcal{H}_0(\mathbf{A}_0, \boldsymbol{\beta}_0, s_0) \} = \int_V d^3 \mathbf{x} \left[ \alpha \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (J_{\mathcal{G}})_i + T_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial A_k} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \beta_k} \right) \right\} \right] \quad (5.35)$$

を得る．したがって，ハミルトニアン密度 $\mathcal{H}$ が $\mathcal{G}$ による正準変換に対して不変であるのならば次の保存則が成立する．

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (J_{\mathcal{G}})_i + T_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial A_k} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \beta_k} \right) = 0 \quad (5.36)$$

逆に保存則があればハミルトニアンを不変にする正準変換が存在する．

## 5.4 時間空間対称性

流体の運動は時間や位置に陽に依存しない。したがって、時間並進対称性、空間並進対称性、空間回転対称性が成立する。

最初に時間並進対称性について議論する。流体は断熱壁に囲まれ外界と熱のやり取りはないものとする。このとき系全体のハミルトニアンは (5.15) で与えられる、これは時間に陽によらない。したがって、系全体のハミルトニアンは時間並進対称性を持つ。このとき、時間並進対称性の母関数  $\mathcal{G}$  はハミルトニアン密度  $\mathcal{H}$  そのものになることを示す。  $\mathcal{H}$  は (5.9) で与えられ、(5.32) と (5.33) はそれぞれ (3.37) と (4.34) なる。次に (5.34) の右辺がゼロになることを示す。(5.30) より

$$\begin{aligned} (J_{\mathcal{H}})_i &\equiv \frac{\partial A_j}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i A_j)} \\ &= -v_k \frac{\partial A_j}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i A_j)} \end{aligned} \quad (5.37)$$

を得る。ハミルトニアン  $\mathcal{H}$  は内部エネルギー密度と運動エネルギー密度の和である。内部エネルギー密度  $\rho\epsilon$  は  $\rho$  と  $s$  の関数であり、

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial(\partial_i A_j)} &= \frac{\partial\rho}{\partial(\partial_i A_j)} \frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial\rho} \\ &= \rho_{\text{init}} \tilde{J}_{ij}^{-1} \left( \epsilon + \frac{P}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (5.38)$$

となる。ここで (3.43) と (3.46) を用いた。一方、運動エネルギー密度  $\rho\mathbf{v}^{\#2}/2$  の速度場  $\mathbf{v}^{\#}$  が (3.49) を満たすことから

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(\partial_i A_j)} \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^{\#2} \right) &= \frac{\partial}{\partial(\partial_i A_j)} \left\{ \frac{(\rho \mathbf{v}^{\#})^2}{2\rho} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{v}^{\#2} \frac{\partial\rho}{\partial(\partial_i A_j)} - v_l^{\#} \frac{\partial(\beta_k \partial_l A_k)}{\partial(\partial_i A_j)} \end{aligned} \quad (5.39)$$

となる。(5.39) の左辺第一項は (3.43) と (3.46) を考慮すると

$$-\frac{1}{2} \mathbf{v}^{\#2} \frac{\partial\rho}{\partial(\partial_i A_j)} = -\frac{1}{2} \mathbf{v}^{\#} \rho_{\text{init}} \tilde{J}_{ij}^{-1} \quad (5.40)$$

となり、(5.39) の左辺第二項は

$$-v_l^{\#} \frac{\partial(\beta_k \partial_l A_k)}{\partial(\partial_i A_j)} = -v_l^{\#} \delta_{il} \delta_{jk} \beta_k = -v_i^{\#} \beta_j \quad (5.41)$$

となる。したがって、(5.39) は

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_i A_j)} \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^{\#2} \right) = -\frac{1}{2} \mathbf{v}^{\#} \rho_{\text{init}} \tilde{J}_{ij}^{-1} - v_i^{\#} \beta_j \quad (5.42)$$

となり, (5.37), (5.38), (5.42) より

$$\mathbf{J}_{\mathcal{H}} = -\rho \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^{\#2} + \epsilon + \frac{P}{\rho} \right) \cdot \mathbf{v}^{\#} \quad (5.43)$$

を得る. 一方, ハミルトニアンについて

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta_k} = \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left\{ \frac{(\rho \mathbf{v}^{\#})^2}{2\rho} \right\} = v_l^{\#} \frac{\partial A_k}{\partial x_l}$$

が成立し,

$$T_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial A_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta_k} = T_{ij} \delta_{jl} v_l = T_{ij} v_j \quad (5.44)$$

となる. (5.43) と (5.44) を (5.36) に代入すればエネルギー保存則が得られる.

$$\int d\mathbf{x}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left( \epsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v}^{\#2} \right) \right\} + \nabla \cdot \left\{ \rho \left( \epsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v}^{\#2} \right) \mathbf{v}^{\#} + T \cdot \mathbf{v}^{\#} \right\} \right] = 0 \quad (5.45)$$

ここで  $T_{ij} \equiv p\delta_{ij} - \sigma_{ij}$  はストレステンソルである.

次に空間並進対称性について議論する. (4.35) を (5.28) の形に書き換えると

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i^{\#}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i^{\#} v_j^{\#} + T_{ij}) = 0 \quad (5.46)$$

となる. したがって, 運動量  $\rho \mathbf{v}^{\#} = -\beta_i \nabla A_i$  は保存量となる. また,  $\mathcal{G} = -\beta_i \partial_j A_i$  とすれば, (5.32) と (5.33) より

$$\delta A_i = -\alpha \nabla A_i \quad (5.47)$$

$$\delta \beta_i \equiv -\alpha \nabla \beta_i \quad (5.48)$$

が得られ, 運動量が空間並進対称性の母関数であることがわかり, (5.36) は (5.46) となる. 最後に空間回転対称性について議論する. (5.46) より角運動量  $\mathbf{l} \equiv \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v}^{\#} = -\mathbf{x} \times \beta_i \nabla A_i$  の時間発展は

$$\frac{\partial l_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( l_i v_l^{\#} - \epsilon_{ijk} x_j T_{kl} \right) - \epsilon_{ijk} T_{kj} = 0 \quad (5.49)$$

となる. ここで  $\epsilon_{ijk}$  はそれぞれの添字に対して反対称なレビ・チビタ記号である. 粘性テンソルが対称テンソル  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  であるとき, ストレステンソル  $T_{ij} = T_{ji}$  は対称テンソルになり, 角運動量  $\mathbf{l}$  は保存量となる. また, (5.32) と (5.33) より

$$\delta A_i = -\alpha (\mathbf{x} \times \nabla A_i) \quad (5.50)$$

$$\delta \beta_i \equiv -\alpha (\mathbf{x} \times \nabla \beta_i) \quad (5.51)$$

が角運動量  $\mathbf{l}$  は空間回転対称性の母関数であることが分かる.



## 第6章 まとめと展望

本論文では1.3節に掲げた三つの課題を解決した。以下に要点をくりかえす。1.2.2節で述べたようにオイラー座標での完全流体の変分原理はうまく定式化されていなかった。任意の速度場を表すためには、クレプシュポテンシャルと呼ばれる補助場が必要であったが、その物理的な意味が明瞭でなかった。第3章では完全流体の変分原理を議論した。変分原理によると、初期状態と終状態が与えられたときに、その間の状態推移は作用積分を極小にするように定まる。ラグランジュ描像の変分原理は流跡線の時間両端を固定した下での極小値を与える必要条件を与える。本論文では、オイラー描像の変分原理で同様に流跡線の時間両端を固定するためには、クレプシュポテンシャルが必要であることを示した [9]。

1.2.3節で述べたように、散逸のある系の変分原理としてレイリーの方法やオンサーガーの変分原理が使われている。しかしながら、これらの方法は導出できる運動方程式に制限がある。レイリーの方法では散逸関数が二次形式で与えられている必要があり、オンサーガーの変分原理は慣性項の導出ができないという問題がある。第4章では、これらを解決する方法として、エントロピーに関する条件が非ホロノミックな拘束条件であることに注目し、非ホロノミックな拘束条件の下での停留値条件を解くことを提案した。例えば、実現される軌道が(4.21)を満たす場合は拘束条件として(4.32)を課し、この拘束条件の下で作用積分(4.33)が極小になる条件を求めれば、運動量保存の式として(4.35)を得ることができる。これにより、非散逸系の変分原理の自然な拡張として散逸系の変分原理を得ることができた。この変分原理は様々な流体に対して適用可能と考えられる。本論文では、ニュートン流体と粘弾性流体と高分子溶液の運動について議論した [10]。なお、混合によるエントロピー増加が無視できない場合は付録Cで議論している。

1.2.4節で述べたように、従来の完全流体のハミルトン形式は非常複雑であったり、流体の運動を一般的に記述しないなどの問題があった。また、散逸のある流体のハミルトン形式の議論は著者の知る限りなかった。流体の運動を解析には速度場を求めることが重要であり、速度場が分かれば流跡線を求めることができ、これが分かれば、拘束条件により質量密度とエントロピーなどの他の物理量の時間発展が分かる。つまり、速度場は状態の時間発展を定める入力とみなせる。第5章では、制御理論の観点から速度場を入力とみなすことで、完全流体に対する正準なハミルトン形式を導き、散逸流体に対してもハミルトン形式を導いた。この時、ハミルトニアンは運動エネルギーと内部エネルギーの和(5.9)となり、ハミルトン方程式は流体粒子の位置に関するものになる。オイラー座標であれば、(3.37)と(4.34)となり、ラグランジュ座標であれば、(1.5)と(3.16)となる。また、5.2節では、対称性と保存則の関係を議論した [10]。

このように本論文では、完全流体の変分原理と同じ枠組みで、拘束条件を変えることで、ニュートン流体、粘弾性流体、高分子溶液といった散逸流体の変分原理を議論できることを示した。ソ

フトマター分野で議論される複雑な内部構造をもった流体では，速度場の時間発展を矛盾なく記述することが難しいことがある．その場合でも，散逸のしかたや拘束条件から従来の変分原理を用いて，見通しよく時間発展方程式を導けることが知られている．ここで，整備した変分原理を使えば，さらに見通しよく，さらに広い範囲の複雑流体の運動に対して，線形の範囲を超えて速度場の時間発展方程式を導けることが今後期待される．

# 付録A テンソル

本論文ではラグランジュ描像とオイラー描像の変分原理について議論した。物理現象は本来座標系によらない。テンソルを用いると、座標系に依存しない形式で理論を記述することができる。

## A.1 共変テンソルと反変テンソル

空間の座標を座標系  $(x_1, x_2, x_3)$  で与える。近接する二点  $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$  と  $\mathbf{x} + d\mathbf{x} \equiv (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$  の距離について考えよう。ベクトル  $d\mathbf{x} \equiv (dx_1, dx_2, dx_3)$  は二点間の差異を表す。座標系  $(x_1, x_2, x_3)$  から座標系  $(y_1, y_2, y_3)$  への変換を考える。  $y_i = y_i(\mathbf{x})$  としたときに、  $dy_i$  の変換規則は

$$dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j \quad (\text{A.1})$$

となる。このような変換規則に従うベクトルを反変ベクトルと呼ぶ。次に近接する二点間の距離を考える。距離は計量テンソル  $g_{ij}$  を用いて表すことができる。

$$ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j \quad (\text{A.2})$$

二点間の距離はスカラー量であり座標系に依存しない。座標系  $(y_1, y_2, y_3)$  での計量テンソルの成分を  $\bar{g}_{kl}$  とすると

$$ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j = \bar{g}_{kl} dy_k dy_l \quad (\text{A.3})$$

の関係が成り立つことが分かる。したがって、計量テンソルの成分の変換規則は

$$\bar{g}_{kl} = \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial x_j}{\partial y_l} g_{ij} \quad (\text{A.4})$$

となる。(A.4)のように座標変換規則が(A.1)と反対なものを共変テンソルと呼ぶ。また、(A.2)の値は  $dx_i$  と  $dx_j$  の順番を交換しても変わらないので、計量テンソルは対称テンソル  $g_{ij} = g_{ji}$  であることが分かる。次に共変の計量テンソル  $g_{ij}$  の逆行列を  $g^{jk}$  を考える。

$$g_{ij} g^{jk} = 1 \quad (\text{A.5})$$

(A.4) と (A.5) より  $g_{jk}$  の変換規則は

$$\bar{g}^{jk} = \frac{\partial y_j}{\partial x_l} \frac{\partial y_k}{\partial x_m} g^{lm} \quad (\text{A.6})$$

となり、 $\bar{g}^{jk}$  は反変テンソルであることが分かる。以下に共変となるものの成分の添字は下付きに、反変となるものの添字は上付きに書く。

## A.2 体積要素

流体では微小領域にある物理量を考える．座標系  $(x_1, x_2, x_3)$  で定義された積分

$$\int_D \sqrt{\det g_{ij}} d^3 \mathbf{x} \quad (\text{A.7})$$

を考える．ここで  $D$  は任意の小さい空間領域である．(A.4) より

$$\begin{aligned} \sqrt{\det g_{ij}} &= \sqrt{\det \left( \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \bar{g}_{kl} \right)} \\ &= \sqrt{\det \bar{g}_{kl}} \left| \det \frac{\partial y_k}{\partial x_l} \right| \\ &= \sqrt{\det \bar{g}_{kl}} \left| \frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \right| \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

となり，一方，

$$\int_D d^3 \mathbf{x} = \int_D \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)} \right| d^3 \mathbf{y} \quad (\text{A.9})$$

となるので，(A.7) は別座標  $(y_1, y_2, y_3)$  では

$$\int_D \sqrt{\det g_{ij}} d^3 \mathbf{x} = \int_D \sqrt{\det \bar{g}_{ij}} d^3 \mathbf{y} \quad (\text{A.10})$$

と書ける．つまり，任意の座標系でも形が変わらない．(A.10) では積分領域は本質的でなく，(A.8) と (A.9) の座標変換だけが重要である．

これを微分形式を用いて議論しよう．ウェッジ積  $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$  を添え字の交代に関して反対称性をもつテンソルとして定義する．例えば，添字の 1 と 2 を交代すると  $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = -dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3$  となる．この反対称性と (A.1) より  $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$  の座標変換は

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)} dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \quad (\text{A.11})$$

となる．これより微分形式が重積分を拡張した概念であることが分かる．次に体積要素  $*1$  を次で定義する．

$$*1 \equiv \sqrt{g} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad (\text{A.12})$$

ここで  $\sqrt{g}$  は  $\sqrt{\det g_{ij}}$  である．ここで座標変換が

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)} > 0$$

を満たすものとする，(A.7) は体積要素  $*1$  を用いて  $\int_D *1$  と書ける．空間領域  $D$  にある全質量は質量密度  $\rho$  に (A.12) を乗じて，それを積分したものになる．

$$\int_D \rho *1 \quad (\text{A.13})$$

### A.3 速度場

座標系  $(x_1, x_2, x_3)$  で速度場が  $v_i \partial / \partial x_i$  で与えられたとする. 速度場の座標系  $(x_1, x_2, x_3)$  から座標系  $(y_1, y_2, y_3)$  への変換は

$$\bar{v}^j \frac{\partial}{\partial y_j} = v^i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = v^i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{A.14})$$

となり, これは反変ベクトルになっている. これに共変の計量テンソル  $g_{ij}$  を作用させると

$$v_i dx_i \equiv g_{ij} v^j dx_i \quad (\text{A.15})$$

を得る. このようにして与えられた速度場は (A.1) より共変ベクトルになる. また, (A.15) の形で与えられるベクトルを微分一形式と呼ぶ. 完全流体の作用は (3.39) で与えられた. 流体の運動エネルギー密度が一般には

$$\frac{1}{2} \rho g_{ij} v^i v^j \sqrt{g} \quad (\text{A.16})$$

となることを考慮すると, 反変ベクトルである速度場  $v_i \partial / \partial x_i$  の成分  $v^i$  に関して変分をとって得られる速度場 (3.41) は微分一形式になることが分かる.

### A.4 渦度

速度場の回転を計算すると, それは渦度と呼ばれる. 微分一形式で与えられた速度場 (A.15) に対する外微分  $d$  を

$$d(v_i dx_i) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i \quad (\text{A.17})$$

で定義する. (A.17) は

$$\left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 \quad (\text{A.18})$$

となり, これは渦度場を表す. (A.18) の形で与えられるベクトルを微分二形式と呼ぶ.

外微分  $d$  は微分  $m$  形式  $\alpha$  から微分  $m+1$  形式  $d\alpha$  を与える演算として一般化することができる. この時, 外微分  $d$  は  $\beta$  と  $\gamma$  を微分  $n$  形式として, 次を満たすものと定める.

$$d(\beta + \gamma) = d\beta + d\gamma \quad (\text{A.19})$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^m \alpha \wedge d\beta \quad (\text{A.20})$$

$$dd\alpha = 0 \quad (\text{A.21})$$

## 付録B 物質時間微分

流体粒子は流跡線に沿って移動するので、流体粒子に付随する物理量の時間変化を見るためには流跡線に沿った時間微分を考える必要がある。これは物質時間微分と呼ばれている。ラグランジュ座標での時間微分  $\partial/\partial\tau$  は物質時間微分になっている。また、オイラー座標での物質時間微分は数学的には、四次元時空での流跡線によって生成される4次元ベクトル場に対するリー微分になっており、以下にそれを示す [41]。

### B.1 スカラー関数の物質時間微分

四次元時空の座標を  $\tilde{\mathbf{x}} \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3)$  で与える。ここで  $x_0$  は時間を表し  $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$  は空間の固定された点を表す。四次元時空での速度場を  $\tilde{\mathbf{v}} \equiv (1, \mathbf{v})$  と与える。以下で  $\tilde{\mathbf{v}} \equiv (1, \mathbf{v})$  は反変ベクトルである。速度場  $\tilde{\mathbf{v}}$  から生成される流跡線は四次元時空上の点  $\tilde{\mathbf{x}} \equiv (x_0, \mathbf{x})$  を微小時間  $\Delta t$  後に別の点  $\tilde{\mathbf{x}}' \equiv \phi_{\Delta t}(\tilde{\mathbf{x}})$  に移す写像  $\phi_{\Delta t} : \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}'$  を与える。

$$\tilde{\mathbf{x}}' \equiv \phi_{\Delta t}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{v}}\Delta t = (x_0 + \Delta t, \mathbf{x} + \mathbf{v}\Delta t) \quad (\text{B.1})$$

微小時間  $\Delta t$  は写像  $\phi_{\Delta t}$  を定める媒介変数とみなせる。

流体では比エントロピー  $s$  がスカラー値の物理量となる。ある流体粒子に注目してその比エントロピーの時間変化について考える。 $\tilde{\mathbf{x}}$  にあった流体粒子は  $\Delta t$  後に  $\phi_{\Delta t}(\tilde{\mathbf{x}})$  にある。 $s(\phi_{\Delta t}(\tilde{\mathbf{x}}))$  は

$$s(\phi_{\Delta t}(\tilde{\mathbf{x}})) = s(\tilde{\mathbf{x}}) + \Delta t \sum_{i=0}^3 v^i \frac{\partial s(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_i} \quad (\text{B.2})$$

と書ける。比較するものは  $s(\tilde{\mathbf{x}})$  と  $s(\phi_{\Delta t}(\tilde{\mathbf{x}}))$  なので、スカラー量である比エントロピーの物質時間微分  $\mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{v}}} s$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{v}}} s(\tilde{\mathbf{x}}) &\equiv \frac{ds(\phi_{\Delta t}(\tilde{\mathbf{x}}))}{dt} \\ &= \sum_{i=0}^3 v^i \frac{\partial s(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial s(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v^i \frac{\partial s(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

## B.2 反変ベクトル場の物質時間微分

次に反変ベクトル場の物質時間微分を考える．四次元時空上の点  $\tilde{\mathbf{x}}$  にある反変ベクトル場を

$$\tilde{\mathbf{w}}(\tilde{\mathbf{x}}) \equiv \sum_{j=0}^3 w^j(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (\text{B.4})$$

と書く．係数  $w_i$  はスカラーなので (B.2) と同様に

$$w^i(\phi_{\Delta t}(\tilde{\mathbf{x}})) = w^i(\tilde{\mathbf{x}}) + \Delta t \sum_{j=0}^3 v^j \frac{\partial w^i(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_j} \quad (\text{B.5})$$

となる．一方，方向ベクトル  $\partial/\partial x'_i$  は (B.1) を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'_i} &= \sum_{j=0}^3 \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_{j=0}^3 \left( \delta_{ij} - \Delta t \frac{\partial v^j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^3 \left( w^i(\tilde{\mathbf{x}}') \frac{\partial}{\partial x'_i} - w^i(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^3 \left\{ \left( w^j(\tilde{\mathbf{x}}) + \Delta t v^i \frac{\partial w^j(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_i} \right) \left( \delta_{jk} - \Delta t \frac{\partial v^k}{\partial x_j} \right) - w^k(\tilde{\mathbf{x}}) \right\} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &\approx \Delta t \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^3 \left( v^j \frac{\partial w^k}{\partial x_j} - w^j \frac{\partial v^k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

となり，ベクトル場の物質時間微分は次で与えられる．

$$L_{\tilde{\mathbf{v}}} \tilde{\mathbf{w}} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \left( v^j \frac{\partial w^i}{\partial x_j} - w^j \frac{\partial v^i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{B.8})$$

ここで  $\tilde{\mathbf{v}} \equiv (1, \mathbf{v})$  であることと， $\tilde{\mathbf{w}} = (0, \mathbf{w})$  であることを仮定すると，(B.8) は

$$L_{\tilde{\mathbf{v}}} \tilde{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial w^i}{\partial t} + \left( v^j \frac{\partial w^i}{\partial x_j} - w^j \frac{\partial v^i}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{B.9})$$

となり，これは反変ベクトル場  $\tilde{\mathbf{w}} = (0, \mathbf{w})$  の流跡線に沿っての時間微分を与える．流体の速度場を反変ベクトル  $v^i \partial/\partial x_i$  で与えたとき， $v^i \partial/\partial x_i$  自身の物質時間微分は (B.9) の  $\tilde{\mathbf{w}} = (0, \mathbf{w})$  を  $(0, \mathbf{v})$  に置き換えたものになる．

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial v^i}{\partial t} + \left( v^j \frac{\partial v^i}{\partial x_j} - v^j \frac{\partial v^i}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{B.10})$$

### B.3 微分形式の物質時間微分

次に微分一形式の物質時間微分を考える．四次元時空上の点  $\tilde{\mathbf{x}} \equiv (x_0, \mathbf{x})$  にある微分一形式を

$$\tilde{\mathbf{w}}(\tilde{\mathbf{x}}) \equiv \sum_{j=0}^3 w_j(\tilde{\mathbf{x}}) dx_j$$

と書く．方向微分は

$$\begin{aligned} dx'_i &= \sum_{j=0}^3 \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j \\ &= \sum_{j=0}^3 \left( \delta_{ij} + \Delta t \frac{\partial v^i}{\partial x_j} \right) dx_j \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

となり，

$$\begin{aligned} w_i(\tilde{\mathbf{x}}') dx'_i &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^3 \left( w_j(\tilde{\mathbf{x}}) + \Delta t v^i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \left( \delta_{jk} + \Delta t \frac{\partial v^j}{\partial x_k} \right) dx_k \\ &\approx \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^3 \left\{ w_k(\tilde{\mathbf{x}}) + \Delta t \left( v^j \frac{\partial w_k}{\partial x_j} + w_j \frac{\partial v^j}{\partial x_k} \right) \right\} dx_k \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

となる．したがって，微分一形式の物質時間微分は

$$L_{\tilde{\mathbf{v}}} \tilde{\mathbf{w}} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \left( v^j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + w_j \frac{\partial v^j}{\partial x_i} \right) dx_i \quad (\text{B.13})$$

となる．ここで  $\tilde{\mathbf{v}} \equiv (1, \mathbf{v})$  であることと  $\tilde{\mathbf{w}} = (0, \mathbf{w})$  であることを仮定すると，(B.13) は

$$L_{\tilde{\mathbf{v}}} \tilde{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial w_i}{\partial t} + \left( v^j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + w_j \frac{\partial v^j}{\partial x_i} \right) \right\} dx_i \quad (\text{B.14})$$

となり，これは微分一形式  $\tilde{\mathbf{w}} = (0, \mathbf{w})$  の物質時間微分となる．(A.15) より，流体では反変ベクトル場で速度場  $v^i \partial / \partial x_i$  が与えられたときに計量テンソル  $g_{ij}$  を用いて，速度場を微分一形式  $v_i dx_i = g_{ij} v^j dx_i$  で書くことができる．これを (B.14) に代入すれば，

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \left( v^j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial v^j}{\partial x_i} \right) \right\} dx_i \quad (\text{B.15})$$

を得る．速度場を反変ベクトル  $v^i \partial / \partial x_i$  で与えたときは物質時間微分は (B.10) となり，微分一形式  $v_i dx_i$  で与えたときは (B.15) となる．しかしながら， $v^i \partial / \partial x_i$  と  $v_i dx_i$  は (A.15) により計量テンソル  $g_{ij}$  によって全単射の関係にあるので，(B.10) と (B.15) は実質的に同じものである．



(B.13) は内部積と外微分を用いて,

$$L_{\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{\boldsymbol{\omega}} = (d\iota_{\tilde{\mathbf{v}}} + \iota_{\tilde{\mathbf{v}}}d)\tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad (\text{B.16})$$

と書くことができる. ここで内部積  $\iota_{\mathbf{v}}$  は以下の計算規則によって定められる. ベクトル場を  $\tilde{\mathbf{v}} \equiv \sum_{i=0}^3 v^i \partial/\partial x_i$  とし, 微分一形式  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \equiv \sum_{i=0}^3 w_i dx_i$  の内部積を次で定義する.

$$\iota_{\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{\boldsymbol{\omega}} \equiv \sum_{i=0}^3 v^i w_i \quad (\text{B.17})$$

より高次の微分形式については内部積を以下のように帰納的に定める. 微分一形式  $\tilde{\boldsymbol{u}}$  と微分  $k$  形式  $\tilde{\boldsymbol{w}}$  から微分  $k+1$  次形式  $\tilde{\boldsymbol{u}} \wedge \tilde{\boldsymbol{w}}$  を生成し, これに対する内部積を次で与える.

$$\iota_{\tilde{\mathbf{v}}}(\tilde{\boldsymbol{u}} \wedge \tilde{\boldsymbol{w}}) = (\iota_{\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{\boldsymbol{u}}) \wedge \tilde{\boldsymbol{w}} - \tilde{\boldsymbol{u}} \wedge (\iota_{\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{\boldsymbol{w}}) \quad (\text{B.18})$$

(B.17) より

$$d(\iota_{\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}) = \frac{\partial(v^i w_i)}{\partial x_j} dx_j \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} (\iota_{\tilde{\mathbf{v}}}d\tilde{\boldsymbol{\omega}}) &= \iota_{\tilde{\mathbf{v}}}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i\right) \\ &= -\frac{\partial w_i}{\partial x_j} v^j dx_i + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v^i dx_j \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

を得る. これより (B.13) が (B.16) となることが分かる. また, 高次の微分形式の物質時間微分も (B.16) と書くことができる. 速度場が  $\tilde{\mathbf{v}} \equiv (1, \mathbf{v})$  であることを考慮すると, 微分一形式  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = (0, \boldsymbol{\omega})$  に対して (B.16) は

$$L_{\tilde{\mathbf{v}}} = \partial_t + L_{\mathbf{v}} \quad (\text{B.21})$$

と書くことができる. (B.21) の右辺第二項の  $L_{\mathbf{v}}$  は三次元空間で定義されたり一微分である. (B.21) はより高次の微分形式を物質時間微分するときにも当てはまる. 流体では, (A.18) より渦度場は微分二形式である. 渦度場の物質時間微分は (B.16) より  $d\boldsymbol{\omega} = d\mathbf{d}\mathbf{v} = 0$  を考慮すると

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + d\iota_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\omega} \quad (\text{B.22})$$

となり, これはベクトル解析では

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (\text{B.23})$$

と書ける. (A.13) より質量密度は微分三形式で与えられる. したがって, 質量密度  $\rho * 1 = \rho \sqrt{g} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$  の物質時間微分は,  $d(\rho * 1) = 0$  であることを考慮すると

$$\frac{\partial(\rho * 1)}{\partial t} + d\iota_{\mathbf{v}}(\rho * 1) \quad (\text{B.24})$$

となる。これは座標系  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  で表すと

$$\frac{\partial(\rho\sqrt{g})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}v^i)}{\partial x_i} \quad (\text{B.25})$$

となる。また、(B.8) と (B.13) よりリー微分はテンソルについても以下のように定義できる [42].

$$\begin{aligned} L_{\tilde{v}} T_{j_1, j_2 \dots j_m}^{i_1, i_2 \dots i_n} &= \frac{\partial}{\partial t} T_{j_1, j_2 \dots j_m}^{i_1, i_2 \dots i_n} + v^k \frac{\partial}{\partial x_k} T_{j_1, j_2 \dots j_m}^{i_1, i_2 \dots i_n} \\ &\quad - T_{j_1, j_2 \dots j_m}^{k, i_2 \dots i_n} \frac{\partial v^{i_1}}{\partial x_k} - T_{j_1, j_2 \dots j_m}^{i_1, k \dots i_n} \frac{\partial v^{i_2}}{\partial x_k} - \dots - T_{j_1, j_2 \dots j_m}^{i_1, i_2 \dots k} \frac{\partial v^{i_n}}{\partial x_k} \\ &\quad + T_{k, j_2 \dots j_m}^{i_1, i_2 \dots i_n} \frac{\partial v^k}{\partial x_{j_1}} + T_{j_1, k \dots j_m}^{i_1, i_2 \dots i_n} \frac{\partial v^k}{\partial x_{j_2}} + \dots + T_{j_1, j_2 \dots k}^{i_1, i_2 \dots i_n} \frac{\partial v^k}{\partial x_{j_m}} \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

なお、(B.25) と (B.26) で繰り返す添字は 1 から 3 までの和を取る。

## B.4 歪みテンソルの物質時間微分

流れがあるとき流体粒子の形は変形する．この変形を歪みと呼ぶ．歪みは変形前後における物質空間の計量テンソルの差で表すことができる．連続体において， $\tilde{\mathbf{x}} \equiv (x_0, \mathbf{x})$ にある物質は速度場  $\mathbf{v}$  によって運ばれ，時刻  $x_0 + \Delta t$  では

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}' &\equiv \phi_{\Delta t}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{x}})\Delta t \\ &= (x_0 + \Delta t, \mathbf{x} + \mathbf{v}(\tilde{\mathbf{x}})\Delta t)\end{aligned}\tag{B.27}$$

にある．ここで (B.27) は (B.1) の再掲である．同様に  $\tilde{\mathbf{x}} + d\mathbf{x} \equiv (x_0, \mathbf{x} + d\mathbf{x})$ にある物質は時刻  $x_0 + \Delta t$  では

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}' + d\tilde{\mathbf{x}}' &\equiv \phi_{\Delta t}(\tilde{\mathbf{x}} + d\mathbf{x}) \\ &= \tilde{\mathbf{x}} + d\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{x}} + d\mathbf{x})\Delta t \\ &= (x_0 + \Delta t, \mathbf{x} + d\mathbf{x} + \mathbf{v}(\tilde{\mathbf{x}} + d\mathbf{x})\Delta t)\end{aligned}\tag{B.28}$$

にある．このとき，

$$v_i(\tilde{\mathbf{x}} + d\mathbf{x}) = v_i(\tilde{\mathbf{x}}) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j\tag{B.29}$$

の関係があるので， $\tilde{\mathbf{x}}' + d\tilde{\mathbf{x}}'$  の空間成分 ( $i = 1, 2, 3$ ) は

$$x_i + dx_i + v_i(\tilde{\mathbf{x}} + d\mathbf{x})\Delta t = x_i + dx_i + \left( v_i(\tilde{\mathbf{x}}) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \right) \Delta t\tag{B.30}$$

となる．したがって， $d\tilde{\mathbf{x}}' = \phi_{\Delta t}(\tilde{\mathbf{x}} + d\mathbf{x}) - \phi_{\Delta t}(\tilde{\mathbf{x}})$  の空間成分 ( $i = 1, 2, 3$ ) は

$$d\tilde{\mathbf{x}}'_i = \left( \delta_j^i + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Delta t \right) dx_j\tag{B.31}$$

となる．反変計量テンソルについても

$$\begin{aligned}g_{ij}(\mathbf{x}') &= g_{ij}(\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{x}})\Delta t) \\ &= g_{ij}(\mathbf{x}) + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} v_k \Delta t\end{aligned}\tag{B.32}$$

となるので，時刻  $x_0 + \Delta t$  での距離は

$$\begin{aligned}ds^2(\mathbf{x}') &\equiv g_{ij}(\mathbf{x}') dx'_i dx'_j \\ &= \left( g_{ij}(\mathbf{x}) + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} v_k \Delta t \right) \left( \delta_l^i + \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \Delta t \right) \left( \delta_m^j + \frac{\partial v_j}{\partial x_m} \Delta t \right) dx_l dx_m \\ &\approx \left( g_{lm} + g_{im} \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \Delta t + g_{lj} \frac{\partial v_j}{\partial x_m} \Delta t + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} v_k \Delta t \right) dx_l dx_m\end{aligned}\tag{B.33}$$

となる．二階の反変テンソル  $E^{ij}$  を

$$E_{ij} \equiv \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} v^k + g_{kj} \frac{\partial v^k}{\partial x_i} + g_{ik} \frac{\partial v^k}{\partial x_j} \quad (\text{B.34})$$

で定義すると，二点間の距離の変化は  $ds^2(\mathbf{x}') - ds^2(\mathbf{x}) \approx E_{ij} dx_i dx_j$  となる．したがって， $E_{ij}$  は歪みを表していることが分かる． $E_{ij}$  を共変歪みテンソルと呼ぶ．ここで， $\Gamma_{km}^n$  を

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = g_{lj} \Gamma_{ik}^l + g_{il} \Gamma_{jk}^l \quad (\text{B.35})$$

を満たすものとし，共変微分  $\nabla_j$  を

$$\begin{aligned} \nabla_k T_{j_1, j_2 \dots j_m}^{i_1, i_2 \dots i_n} &= \frac{\partial}{\partial x_k} T_{j_1, j_2 \dots j_m}^{i_1, i_2 \dots i_n} \\ &+ T_{j_1, j_2 \dots j_m}^{l, i_2 \dots i_n} \Gamma_{lk}^{i_1} + T_{j_1, j_2 \dots j_m}^{i_1, l \dots i_n} \Gamma_{lk}^{i_2} + \dots + T_{j_1, j_2 \dots j_m}^{i_1, i_2 \dots l} \Gamma_{lk}^{i_n} \\ &- T_{l, j_2 \dots j_m}^{i_1, i_2 \dots i_n} \Gamma_{j_1 k}^l - T_{j_1, l \dots j_m}^{i_1, i_2 \dots i_n} \Gamma_{j_2 k}^l - \dots - T_{j_1, j_2 \dots l}^{i_1, i_2 \dots i_n} \Gamma_{j_m k}^l \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

で定義する．(B.35) は共変微分 (B.36) を使って

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \quad (\text{B.37})$$

と書き換えることができる．同様に歪みテンソル (B.34) は

$$\begin{aligned} E_{ij} &= (g_{lj} \Gamma_{ik}^l + g_{il} \Gamma_{jk}^l) v^k + g_{kj} \frac{\partial v^k}{\partial x_i} + g_{ik} \frac{\partial v^k}{\partial x_j} \\ &= (g_{lj} \Gamma_{ik}^l + g_{il} \Gamma_{jk}^l) v^k + g_{lj} \frac{\partial v^l}{\partial x_i} + g_{il} \frac{\partial v^l}{\partial x_j} \\ &= g_{lj} \left( \frac{\partial v^l}{\partial x_i} + v^k \Gamma_{ik}^l \right) + g_{il} \left( \frac{\partial v^l}{\partial x_j} + v^k \Gamma_{jk}^l \right) \\ &= g_{lj} \nabla_i v^l + g_{il} \nabla_j v^l \\ &= \nabla_i v_j + \nabla_j v_i \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

となる．ここで  $v_j \equiv g_{kj} v^k$  は余ベクトルである．計算の上では  $\Gamma_{jk}^i$  は (B.35) を満たしていれば何でもよい．もし， $\Gamma_{km}^n = \Gamma_{mk}^n$  を要請すると，計量  $g$  から一意に定めることができる．

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{li} + \partial_i g_{lj} - \partial_l g_{ij}) \quad (\text{B.39})$$

これをレビ・チビタ接続と呼ぶ．デカルト座標  $g_{ij} = \delta_{ij}$  では歪みテンソル (B.38) は

$$E_{ij} \equiv \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{B.40})$$

となる。また、(B.33)を二次の項まで考慮すると、デカルト座標  $g_{ij} = \delta_{ij}$  では歪みテンソルは

$$\tilde{E}_{ij} \equiv \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \delta_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right) \quad (\text{B.41})$$

となり、これはグリーンの歪みテンソルと呼ばれている。なお、二階の共変テンソルとして与えられた歪みテンソル  $E_{ij}$  は反変の計量テンソル  $g^{ij}$  を用いて、混合テンソル  $E_j^i = g^{ik} E_{kj}$  や二階の反変テンソル  $E^{ij} = g^{ik} E_k^j = g^{ik} g^{jl} E_{kl}$  に書くことができる。(B.26)を用いれば、二階の共変歪みテンソル  $E_{ij}$  に対するリー微分は

$$\begin{aligned} L_{\tilde{v}} E_{ij} &= \sum_{i=0}^3 \left( v^k \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} + E_{kj} \frac{\partial v^k}{\partial x_i} + E_{ik} \frac{\partial v^k}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left( v^k \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} + E_{kj} \frac{\partial v^k}{\partial x_i} + E_{ik} \frac{\partial v^k}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

となる。二行目への計算では  $\tilde{v} \equiv (1, \mathbf{v})$  であることと  $E_{00} = 0$  であることを使った。これは upper convected time derivative と呼ばれている。同様に混合テンソルである  $E_k^i = g^{ij} E_{jk}$  のリー微分は

$$L_{\tilde{v}} E_j^i = \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left( v^k \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} \right) \quad (\text{B.43})$$

となり、反変テンソルである  $E^{il} = g^{kl} E_k^i = g^{ij} g^{kl} E_{jk}$  のリー微分は

$$L_{\tilde{v}} E^{ij} = \frac{\partial E^{ij}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left( v^k \frac{\partial E^{ij}}{\partial x_k} - E^{kj} \frac{\partial v^i}{\partial x_k} - E^{ik} \frac{\partial v^j}{\partial x_k} \right) \quad (\text{B.44})$$

となる。(B.44)は lower convected time derivative と呼ばれる。歪みテンソルは計量テンソルを通じて、共変、混合、反変テンソルになるので、(B.42)–(B.44)は実質的には同じものである。

## B.5 ベクトル解析

(B.3), (B.8), (B.13), (B.14), (B.42)–(B.44) にみるように, オイラー座標での物質時間微分は, 一般にリー微分を用いて (B.21) と書ける. ベクトル解析の記号を使うと, (B.21) はスカラー場に対しては

$$\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (\text{B.45})$$

となる. これより, ラグランジュ微分  $D_t \equiv \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$  はスカラー場に対する物質時間微分であることが分かる. B.3 節より, (B.21) は余接ベクトル場 (微分一形式), 軸性ベクトル場 (微分二形式), 体積要素 (微分三形式) に対して, それぞれ

$$\partial_t + \nabla(\mathbf{v} \cdot ) - \mathbf{v} \times \nabla \times \quad (\text{B.46})$$

$$\partial_t - \nabla \times (\mathbf{v} \times ) + \mathbf{v}(\nabla \cdot ) \quad (\text{B.47})$$

$$\partial_t + \nabla \cdot (\mathbf{v} ) \quad (\text{B.48})$$

となる. テンソルについては (B.42)–(B.44) で与えられる. そして, (B.21) は外微分  $d$  と交換可能である.

$$\begin{aligned} dL_{\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{\boldsymbol{\omega}} &= d(dt_{\tilde{\mathbf{v}}} + \iota_{\tilde{\mathbf{v}}}d)\tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ &= dt_{\tilde{\mathbf{v}}}d\tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ &= (dt_{\tilde{\mathbf{v}}} + \iota_{\tilde{\mathbf{v}}}d)d\tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ &= L_{\tilde{\mathbf{v}}}d\tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

ここで  $dd = 0$  を用いた. (B.49) は物質時間微分 (B.21) が発散  $\nabla \cdot$  や回転  $\nabla \times$  と交換可能であることを意味する. 質量密度  $\rho$  と単位体積あたりのエントロピー  $s$  はスカラー場, つまり微分ゼロ形式であり, 体積要素  $*1$  は微分三形式である [41]. また, (B.46) より, オイラー方程式は, 微分一形式で与えられた速度場に関する物質時間微分によって得られた式だと分かる.

## 付録C 拡散による散逸がある二成分溶液

4.5節では相互拡散による散逸が無視できる場合の高分子溶液の変分原理について議論した。ここでは拡散の効果を考慮した二成分溶液の変分原理について議論する。4.5節と同様に成分  $a$  と成分  $b$  の質量密度をそれぞれ  $\rho_a$  と  $\rho_b$  とする。質量密度の合計を  $\rho \equiv \rho_a + \rho_b$  とし、成分  $a$  の質量分率を  $\psi \equiv \rho_a/\rho$  とする。成分  $a$  と  $b$  の質量保存則は

$$\partial_t \rho_c + \nabla \cdot (\rho_c \mathbf{v} + \mathbf{j}_c) = 0 \quad (\text{C.1})$$

となる。ここで  $c$  は  $a$  または  $b$  であり、 $\mathbf{v}$  は混合流体の速度場であり、 $\mathbf{j}_c$  は拡散流速である。拡散流速は  $\mathbf{j}_a = -\mathbf{j}_b$  を満たすとする。(C.1) は、(3.21) と

$$\rho D_t \psi + \nabla \cdot \mathbf{j}_a = 0 \quad (\text{C.2})$$

に書き換えることができる。ラグランジアン密度を (4.56) と同様に運動エネルギーと内部エネルギーの差で与える。

$$\mathcal{L}_d(\rho, \psi, s, \mathbf{v}) \equiv \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 - \rho \epsilon(\rho, \psi, s) \quad (\text{C.3})$$

$\mu$  を  $a$  成分の化学ポテンシャルから  $b$  成分のそれを引いた量だと定義する。拡散による効果を考慮し、散逸に関する式を次であたえる。

$$\rho T (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) s - \Theta + \nabla \cdot (\mathbf{J}_q + \mu \mathbf{j}_a) = 0 \quad (\text{C.4})$$

ここで  $\nabla \cdot (\mathbf{J}_q + \mu \mathbf{j}_a)$  は熱流  $\mathbf{J}_q$  と拡散流速  $\mathbf{j}_a$  によるエントロピーの流出入を表す [43]。簡単の為、散逸によるエントロピーの生成は拡散流速のみによって引き起こされるとする。したがって、散逸関数は

$$\Theta = \nu D_t \psi \quad (\text{C.5})$$

で与えることができる。これは散逸が流跡線に沿って質量分率  $\psi$  の変化によって引き起こされることと、(4.13) で議論したように散逸が線積分となることから言える。(4.45) を導いた時と同様に、(C.4) から

$$\int_V d^3 \mathbf{x} \left\{ \rho T \delta s - \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \left( \rho T \frac{\partial s}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \delta A_i - \nu \delta \psi \right\} \quad (\text{C.6})$$

を得る。作用積分は 4.2 節と同様に与える。変数は  $\beta$ ,  $K$ ,  $\rho$ ,  $s$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\psi$  となる。

$$\int_{t_{\text{sinit}}}^{t_{\text{fin}}} dt \int_V d^3 \mathbf{x} \left[ \mathcal{L}_d + \beta_i (\partial_t A_i + \mathbf{v} \cdot \nabla A_i) + K (\rho - \rho_{\text{init}} J^{-1}) \right] \quad (\text{C.7})$$

非ホロノミックな拘束条件 (C.6) を課して, (3.38) の下で停留値条件を解くと (3.1), (3.13), (3.49) と次を得る.

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta_i = -\nabla \cdot (\beta_i \mathbf{v}) + \left\{ \rho \frac{\partial K}{\partial x_j} - \left( \rho T \frac{\partial s}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \quad (\text{C.8})$$

$$\rho\mu + \nu = 0 \quad (\text{C.9})$$

4.2 節と同様に計算して, (3.13), (3.49), (C.8) より (3.30) を得る. また, (C.2) と (C.9) から, 散逸関数 (4.23) が

$$\Theta = -\rho\mu D_t \psi = \mu \nabla \cdot \mathbf{j}_a \quad (\text{C.10})$$

となり, (C.11) は非平衡熱力学では良く知られた式 [35] となる.

$$\rho T (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) s + \mathbf{j}_a \cdot \nabla \mu + \nabla \cdot \mathbf{J}_q = 0 \quad (\text{C.11})$$

本節ではオイラー座標での計算を示したが, ラグランジュ座標で行うこともできる.

4.5 節で説明した拡散のない高分子溶液の変部原理では拡散がないとしたので, それぞれの成分の流跡線の終端時間の位置を指定することができた. したがって, 成分  $a$  と成分  $b$  に対して, それぞれの流跡線に関する条件 (4.55) が課することが可能となった. (4.55) を変分原理で用いるには, それぞれの成分について時間両端で流跡線を固定する条件が必要であることに注意する. 一方, 拡散があるときは混合流体の流跡線の時間両端を固定することはできるが, 成分  $a$  と成分  $b$  の流跡線の時間両端をそれぞれ独立に固定することはできない. したがって, 拡散があるときは流跡線に関する条件は混合流体の速度場に関するものだけである. 4.2 節の最後で議論したように, 流体の運動を定めるには散逸関数の形をモデルによって具体的に定める必要がある. 境界面での熱流がないときは, エントロピー増大則より (C.11) の左辺第二項は負となる.

$$\mathbf{j}_a \cdot \nabla \mu \leq 0 \quad (\text{C.12})$$

変分原理と線形現象論を用いれば, 巨視的に決定できない散逸の仕方を決定することができる. これは 4.4 節で粘弾性流体を議論した際に, (4.50) より粘性部分の応力テンソル  $\check{\sigma}_{ij}$  が弾性係数  $\kappa_{ij}$  が等しいことを  $\delta E_{ij}$  の変分から示し, 更に線形性を仮定することでマクスウェルモデルの粘弾性流体の運動方程式を得たことと同様である. 以下に線形現象論を仮定することで, 拡散方程式が導出されることを示す. (C.12) より, 線形性を仮定すれば拡散流速  $\mathbf{j}_a$  は化学ポテンシャルの勾配  $\nabla \mu$  に比例することが分かる.

$$\mathbf{j}_a = -\frac{D}{T} \nabla \mu \quad (\text{C.13})$$

ここで  $D(> 0)$  は定数である. (C.13) を (C.2) に代入すると

$$\rho D_t \psi - \nabla \cdot \left( \frac{D}{T} \nabla \mu \right) = 0 \quad (\text{C.14})$$

を得る.  $\mu$  は  $\rho, s, \psi$  の関数であり, 例えば希薄溶液では  $\mu^0$  を  $\rho$  と  $s$  の関数として

$$\mu(\rho, s, \psi) = \mu^0(\rho, s) + k_B T \ln \psi \quad (\text{C.15})$$



と書ける [43].  $\rho$ ,  $s$  が一様であるときは,

$$\frac{D}{T} \nabla \mu = \frac{Dk_B}{\psi} \nabla \psi \quad (\text{C.16})$$

となる. したがって,  $\mathbf{v} = 0$  の時, (C.14) は拡散方程式になる.

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \frac{Dk_B}{\rho_a} \nabla \rho_a \right) = 0 \quad (\text{C.17})$$

## 付録D 相対論的完全流体

完全流体の変分原理の相対論的拡張を考える．四次元空間内の領域を  $\Omega$  とおく．次に  $\rho$  と  $s$  をそれぞれ物質についての共動慣性系での粒子数密度と比エントロピーとする．四元速度場を  $\mathbf{u}$  とする．計量テンソル  $g(,)$  は他の物質の質量によって与えられたものとする．光速を 1 とする．四元速度場  $\mathbf{u}$  の規格化条件は次となる．

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 1 = 0 \quad (\text{D.1})$$

座標系を  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  で与えると，計量テンソルを  $g_{ij}$  と書くことができ，(D.1) は

$$g_{ij}u^i u^j + 1 = 0 \quad (\text{D.2})$$

となる．体積要素は  $*1 = \sqrt{-g}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$  となる．ここで  $\sqrt{-g}$  は  $\sqrt{-\det g_{ij}}$  である．拘束条件 (3.21), (3.22), (3.37) は次のように書き換えられる．

$$L_{\mathbf{u}}(\rho * 1) = 0, \quad L_{\mathbf{u}}s = 0, \quad L_{\mathbf{u}}A_i = 0 \quad (\text{D.3})$$

(D.3) は座標系  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  では

$$\partial_i(\rho u^i \sqrt{-g}) = 0 \quad (\text{D.4})$$

$$u^i \partial_i s = 0 \quad (\text{D.5})$$

$$u^i \partial_i A_j = 0 \quad (\text{D.6})$$

となる．ここで  $\rho, s, A_i$  はスカラー値の関数である．共動慣性系での単位質量あたりの内部エネルギー  $\epsilon$  は  $\rho$  と  $s$  の関数となり，ラグランジアン密度は次のようになる．

$$\mathcal{L}(\rho, s) = -\rho\epsilon \quad (\text{D.7})$$

共動慣性系での圧力  $P$  と温度  $T$  をそれぞれ (3.5) と (3.6) で定義する．また，非相対論と同様にエンタルピー  $h$  を (3.7) で定義する．非相対論での作用積分 (3.39) は，相対論では次のように修正される．

$$I(\rho, s, \mathbf{A}, \kappa, \lambda, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \gamma) = \int_{\Omega} \left\{ *1\mathcal{L}(\rho, s) + \rho\gamma *1\{g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 1\} \right. \\ \left. - \kappa L_{\mathbf{u}}(\rho * 1) - \rho * 1\lambda L_{\mathbf{u}}s - \sum_{i=1}^2 \rho * 1\tilde{\beta}_i L_{\mathbf{u}}A_i \right\} \quad (\text{D.8})$$

ここで  $\gamma$ ,  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\tilde{\beta}_i$  は未定乗数項である. また, 計算を簡便にするために, クレプシュポテンシャルの未定定数項に粒子数密度  $\rho * 1$  を乗じた. (D.8) の停留値条件を解くことで, ラグランジアン密度 (D.7) の時間空間積分を (D.1) と (D.3) の下で極小値を与える条件を求めることができる. 境界条件として (3.20) と (3.38) を課す. 作用積分の停留値条件より次を得る.

$$-h + L_{\mathbf{u}}\kappa = 0 \quad (\text{D.9})$$

$$-T + L_{\mathbf{u}}\lambda = 0 \quad (\text{D.10})$$

$$L_{\mathbf{u}}\tilde{\beta}_i = 0 \quad (\text{D.11})$$

$$2\gamma g(\mathbf{u}, ) + d\kappa - \lambda ds - \sum_{i=1}^2 \tilde{\beta}_i dA_i = \mathbf{0} \quad (\text{D.12})$$

(D.1), (D.3), (D.9)–(D.12) より  $2\gamma = h$  となり, 四元速度に関して次の式を得る.

$$hg(\mathbf{u}, ) + d\kappa - \lambda ds - \sum_{i=1}^2 \beta_i dA_i = \mathbf{0} \quad (\text{D.13})$$

これのリー微分を計算すると相対論的オイラー方程式を得る.

$$L_{\mathbf{u}} \{hg(\mathbf{u}, )\} + dp/\rho = \mathbf{0} \quad (\text{D.14})$$

次にハミルトン形式を考える.  $\mathbf{v}$  を次のように定義する.

$$\mathbf{v} \equiv \left( \frac{u_1}{u_0}, \frac{u_2}{u_0}, \frac{u_3}{u_0} \right) \quad (\text{D.15})$$

(D.1) より  $u_0 = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$  となる. 座標系  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  での粒子数密度は  $\bar{\rho} \equiv \rho u_0$  となる. ラグランジアン密度 (D.7) は  $\mathcal{L}(\bar{\rho}\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}, s)$  となり, 拘束条件 (D.4)–(D.6) は

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}\sqrt{-g} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\sqrt{-g}\mathbf{v}) = 0 \quad (\text{D.16})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} s + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0 \quad (\text{D.17})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A_i + \mathbf{v} \cdot \nabla A_i = 0 \quad (\text{D.18})$$

となる. (3.21), (3.22), (3.37) に見るように, (D.16)–(D.18) の形は非相対論での完全流体の拘束条件と同じである. したがって, (5.1) 節での議論がそのまま成り立つ. (D.16) と (D.17) は

$$\bar{\rho} - \bar{\rho}_{\text{init}} J^{-1} = 0 \quad (\text{D.19})$$

$$s - s_{\text{init}} = 0 \quad (\text{D.20})$$

と積分形で書ける. 非相対論のときと同様に  $\bar{\rho}_{\text{init}}$  と  $s_{\text{init}}$  は  $\mathbf{A}$  の関数であり,  $J^{-1}$  は (3.45) である.

次にハミルトン形式について議論する。作用積分を

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \int_V d^3\mathbf{x} \{ \mathcal{L}(\bar{\rho}, s, \mathbf{v}) + \beta_i (\partial_t A_i + \mathbf{v} \cdot \nabla A_i) \} \quad (\text{D.21})$$

で与える。ここで  $\beta_i \equiv \tilde{\beta}_i \rho u_0$  である。 $\bar{\rho}$  と  $s$  に (D.19) と (D.20) 代入して、(D.21) の停留値条件を解けば、非相対論の時と同様にオイラー方程式 (D.14) を得ることができる。5.8 に対応して、

$$\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{A}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}, s) \equiv \mathcal{L}(\bar{\rho} \sqrt{1 - \mathbf{v}^2}, s) + \beta_i \mathbf{v} \cdot \nabla A_i \quad (\text{D.22})$$

を得る。(D.21) の  $\mathbf{v}$  に関する変分を解いたものを  $\mathbf{v}^\sharp(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta})$  と定め、これを (D.22) に代入したものをハミルトニアンとする。

$$\mathcal{H}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}, s) \equiv \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{A}, \mathbf{v}^\sharp, \boldsymbol{\beta}, s) \quad (\text{D.23})$$

このとき、正準方程式は次となる。

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \quad (\text{D.24})$$

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{A}} \quad (\text{D.25})$$

散逸系についても同様の拡張は可能と考えられるが、これは今後の課題である。

## 謝辞

本論文を進めるにあたり，お忙しい中時間を割いて御指導くださった慶應義塾大学の藤谷洋平准教授に感謝致します．南開大学陳省身数学研究所の神部勉教授には研究のきっかけとなる流体力学の変分原理についてセミナーをして頂きました．福井県立大学の中村匡教授と京都大学数理解析研究所の小嶋泉教授には相対論的熱力学について，九州大学大学院工学研究院の山口哲生教授には粘弾性流体について，ペンシルベニア州立大学数学科のチュン・リウ教授には散逸系の変分原理について，名古屋大学の谷村省吾教授には非ホロノミックな拘束条件について，東京大学の吉田善章教授にはクレプシュポテンシャルについて，東京工業大学の細谷暁夫教授とランカスター大学の後藤振一郎博士には変分原理について，京都大学の太田隆夫教授と荒木武昭准教授にはそれぞれ高分子溶液の変分原理と散逸関数について，カリフォルニア大学バークレー校の渡辺悠樹氏には対称性について議論して頂きました．鈴木博之先輩には論文執筆の際にいろいろとアドバイスをもらいました．博士論文の審査をして下さった東北大学流体科学研究所の服部裕司教授，慶應義塾大学の朝倉浩一教授，高野宏教授，古池達彦専任講師には博士論文の作成のさいにアドバイスを頂きました．最後に私を暖かく見守ってくれた両親に感謝致します．

## 参考文献

- [1] A. Bennett, *Lagrangian fluid dynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006), p. 32.
- [2] H. Bateman, Proc. Roy. Soc. London. A **125** (1929), 598; Scripta Math. **10** (1944), 51; *Partial differential equations* (Dover, New York, 1944), p. 164.
- [3] C. C. Lin, in *International School of Physics Enrico Fermi (XXI)*, ed. G. Careri (Academic Press, New York, 1963), p. 93.
- [4] R. L. Selinger and G. B. Whitham, Proc. Roy. Soc. London. A **305** (1968), 1.
- [5] B. F. Schutz, Jr, Phys. Rev. D **2** (1970), 2762; Phys. Rev. D **4** (1971), 3559.
- [6] R. Salmon, Ann. Rev. Fluid Mech. **20** (1988), 225.
- [7] T. Kambe, Fluid Dyn. Res. **39** (2007), 98; Fluid Dyn. Res. **40** (2008), 399; Physica D **237** (2008), 2067; *Geometrical theory of dynamical systems and velocity field*, Revised ed., (World Scientific, Singapore, 2010), p. 189.
- [8] Z. Yoshida, *Proc. Int. Symp. Contemporary Physics*, ed. J. Aslam, F. Hussain and Rizuddin (World Scientific, Singapore, 2008), p. 125; J. Math. Phys. **50** (2009), 113101.
- [9] H. Fukagawa and Y. Fujitani, Prog. Theor. Phys. **124** (2010), 517.
- [10] H. Fukagawa and Y. Fujitani, Prog. Theor. Phys. **127** (2012), 921
- [11] A. Clebsch, J. Reine Angew. Math. **56** (1859), 1.
- [12] H. Lamb, *Hydrodynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1932), p. 248.
- [13] H. Goldstein, C. P. Poole and J. L. Safko, *Classical mechanics* (Addison-Wesley, New York, 2001), p. 23.
- [14] J. Serrin. in *Encyclopedia of Physics* , ed. S. Flugge, (Springer-Verlag, Berlin, 1959), p.125.
- [15] C. Nicolis and G. Nicolis, Q. J. R. Meteorol. Soc. **136** (2010), 1161.

- [16] L. M. Martyusheva and V. D. Seleznevb, Phys. Rep. **426** (2006), 1.
- [17] 土井正男, ソフトマター物理学入門, (岩波書店, 東京, 2010), 8 章.
- [18] L. Onsager, Phys, Rev. **37** (1931), 405; Phys, Rev. **38** (1931), 2265.
- [19] S. R. de Groot and P. Mazur, *Non-Equilibrium Thermodynamics* (North-Holland, Amsterdam, 1962), Chap.IV.
- [20] M. Doi, in *Dynamics and Patterns in Complex Fluids*, ed. A. Onuki and K. Kawasaki (Springer, Berlin, 1990), p. 100.
- [21] M. Doi and A. Onuki, J. Phys. II France, **2** (1992), 1631.
- [22] C. Liu and N. J. Walkington, SIAM J. Numer. Anal. **37** (2000), 725.
- [23] M. Doi, J. Phys. Soc. Jpn. **78** (2009), 052001.
- [24] S. Zhang, C. Liu, H. Zhang, Commun. Comput. Phys. **9** (2011), 974.
- [25] R. Takaki, Fluid Dyn. Res. **39** (2007), 590.
- [26] V. I. Arnold and B. A. Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics* (Springer-Verlag, Berlin, 1997), p. 47.
- [27] P. J. Morrison and J. M. Green, Phys. Rev. Lett. **45** (1980), 790; Phys. Rev. E **48** (1982), 569.
- [28] D. D. Holm and B. A. Kupershmidt, Physica D **7** (1983), 330.
- [29] H. Cendra and J. E. Marsden, Physica D **27** (1987), 63.
- [30] D. D. Holm, J. E. Marsden and T. S. Ratiu, Adv. Math. **137** (1998), 1.
- [31] H. Elze, Y. Hama, T. Kodama, M. Makler and J. Rafelski, J. Phys. G, Nucl. Part. Phys. **25** (1999), 1935.
- [32] J. L. Friedman and J. R. Ipser, Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A **340** (1992), 39.
- [33] 谷村省吾, 理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何, (サイエンス社, 東京, 2006), 7 章.
- [34] 山本義隆, 中村孔一, 解析力学 I,II (朝倉書店, 東京, 1998), 2.5 節.
- [35] ランダウ, リフシッツ, 流体力学 1, (東京図書, 東京, 1972), 6 章.

- [36] A. S. Lodge, *Elastic Liquids*, (Academic Press, New York, 1964). Chap.IIIIV.
- [37] T. Kawakatsu, *Statistical Physics of Polymers*, (Springer-Verlag, Berlin, 2004), Chap.V.
- [38] Y. Fujitani, J. Phys. Soc. Jpn. **70** (2001), 1556.
- [39] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mischenko, *The mathematical theory of optimal processes* (Gordon & Breach Science Pub, New York, 1987), p. 66.
- [40] M. Schulz, *Control theory in physics and other fields of science* (Springer-Verlag, Berlin, 2006), p. 17.
- [41] B. F. Schutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980), p. 181.
- [42] M. Deserno, *Note on Differential Geometry with special emphasis on surface in  $\mathbb{R}^3$*  (2004) <http://www.cmu.edu/biolphys/deserno>.
- [43] 北原和夫, 吉川研一, 非平衡系の科学1, (講談社サイエンティフィック, 東京, 1994), 2章.