

A Thesis for the Degree of Ph.D. in Science

Solvability of Initial-Boundary Value Problems  
for the Motion of a Vortex Filament

March 2013

Graduate School of Science and Technology  
Keio University

Masashi Aiki

# 主 論 文 要 旨

報告番号	Ⓐ 乙 第	号	氏 名	相木 雅次
主論文題目： Solvability of Initial-Boundary Value Problems for the Motion of a Vortex Filament (渦糸の運動に対する初期値－境界値問題の可解性)				
(内容の要旨)				
<p>本論文は、3次元半空間における非圧縮非粘性流体中の渦糸の運動を記述する非線形偏微分方程式に対する初期値－境界値問題の可解性について論じたものである。本論文で扱う渦糸の運動のモデル方程式は局所誘導方程式(LIE)と軸方向の流れを考慮したLIEを一般化した方程式(一般化LIE)である。LIEは流体の渦度から速度を計算するBiot-Savartの法則に局所誘導近似を適用して得られる最も単純、かつ基本的な方程式である。一方、一般化LIEは接合漸近展開法を用いて渦糸の軸方向流の影響を取り込んだ方程式である。</p> <p>第1章は序論で、本論文において扱うモデル方程式の導出、初期値問題に対する既存の結果、および本研究の目的を述べる。さらに関連論文の紹介をする。その後、今回新しく扱う初期値－境界値問題を設定し、本論文内で使用する関数空間や記号の説明をする。</p> <p>第2章では、LIEに対する初期値－境界値問題の時間大域解の存在と一意性を証明する。初期値－境界値問題を扱う際には、解が存在するための必要条件として、初期値に両立条件を課す。この条件は構成する解の滑らかさに応じて複雑になり、一般的には両立条件は帰納的に定義される。LIEに対しては方程式の特殊な構造を利用することにより両立条件を明示的に表示することができた。この表示により、初期値－境界値問題を初期値問題へ帰着させ、初期値問題の解を用いて望みの初期値－境界値問題の解を構成することができた。</p> <p>第3章では、一般化LIEに対する初期値－境界値問題に関連する線形問題を考察する。一般化LIEは非線形3階分散型偏微分方程式であり、その研究には線形化方程式の解析が重要である。この線形化方程式には、既存の線形偏微分方程式の理論が適用できず、初期値－境界値問題の解の存在や一意性は知られていなかった。そこで本章では、この線形化問題の解析の準備として、3階分散項を持つ2階放物型方程式系に対する初期値－境界値問題の解の存在と一意性を証明する。解を構成するために新しい放物型正則化を考案した。特に、問題の適切性を保存したままの正則化、すなわち境界条件の数を変えない形での正則化をすることにより、非線形問題へ応用できる形で解を構成することに成功した。</p> <p>第4章では、第3章の結果を応用して、一般化LIEに対する初期値－境界値問題の時間局所解の存在と一意性を証明する。線形問題の解の存在定理と一般化LIEの持つ構造を利用することによって非線形問題の解をソボレフ空間において構成することができた。</p>				

## SUMMARY OF Ph.D. DISSERTATION

School Fundamental Science and Technology	Student Identification Number 81045130	SURNAME, First name AIKI, Masashi
Title  Solvability of Initial-Boundary Value Problems for the Motion of a Vortex Filament		
Abstract  <p>This dissertation is concerned with the mathematical analysis on the motion of a vortex filament immersed in an incompressible and inviscid fluid in the three dimensional half space. A vortex filament is a space curve on which the vorticity of the fluid is concentrated. The existence and uniqueness of solutions to initial-boundary value problems describing the motion of a vortex filament in the three-dimensional half space is proved.</p> <p>In Chapter 1, the background and the aim of the study are presented. Two model equations, the Localized Induction Equation (LIE) and the generalized LIE are introduced, and their related works are explained.</p> <p>In Chapter 2, the initial-boundary value problem for the LIE is studied. The existence and uniqueness of the solution is proved. The proof is carried out first, by carefully analyzing the compatibility conditions for the initial-boundary value problem and second, by extending the initial datum to the whole space, and thus reducing the problem to an initial value problem. The solution to the initial value problem can then be used to construct the solution to the initial-boundary value problem.</p> <p>In Chapter 3, we consider initial-boundary value problems for a second order parabolic system with a third order dispersive term. The system arises when we consider the linearized problem of the generalized LIE, and the existence and uniqueness of the solution for such linear system has not been studied. This motivated the author to consider a general linear parabolic-dispersive system and to prove the existence and uniqueness of the solution for the corresponding initial-boundary value problems. The crucial idea in the proof is to apply a new parabolic regularization, which made it possible to construct the solution in such a way that the existence theorem is applicable to the analysis of the generalized LIE.</p> <p>In Chapter 4, we prove the solvability of initial-boundary value problems for the generalized LIE by utilizing the results of Chapter 3. Based on the existence theorems of the linear problems, we succeeded in constructing the solutions to the nonlinear problems in Sobolev spaces.</p>		